माध्यमिक पाठ्यक्रम

२११ - गणित

पुस्तक - २

अभ्यासक्रम सहनिर्देशक

– नीरज प्रतापसिंग

विद्याधनम् सर्वधनं प्रधानम्

राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान

ए-२४-२५. इंस्टीटयूशनल एरिया, सेक्टर-६२, नोएडा-२०१ ३०९ (उ.प्र.)

Website: www.nios.ac.in, Toll Free No. 18001809393

एनआईओएस वाटरमार्क 80 जीएसएम पेपर पर मुद्रित।

मुद्रण : दिसंबर, 2013 (2,000 प्रतियाँ)

सचिव, राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान, ए–24–25, इंस्टीट्यूशनल एरिया, सेक्टर–62, नोएडा–201309 द्वारा प्रकाशित एवं मैसर्स अरावली प्रिन्टर्स एण्ड पब्लिशर्स, (प्रा.) लि., डब्ल्यू–30, ओखला इंडस्ट्रियल एरिया, फेस–II, नई दिल्ली–110020 द्वारा मुद्रित

राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयीन शिक्षण संस्था : सल्लागार समिती

डॉ. सितांशु स. जेना	**डॉ. कुलदीप अगरवाल**	**श्रीमती गोपा विश्वास**
चेअरमन	निर्देशक (शैक्षणिक)	सह.संचालक (शैक्षणिक)
रा.मु.शा.सं., नवीन दिल्ली	रा.मु.शा.सं., नवीन दिल्ली	रा.मु.शा.सं., नवीन दिल्ली

अभ्यासक्रम समिती

अध्यक्ष

प्रा. मोहनलाल

चिटणीस DAV Collage संचालक मंडळ,

E १८२ न्यू राजेंद्रनगर, नवी दिल्ली ११००६०

श्री. जी. डी. धाल प्रपाठक (निवृत्त) NCERT, K-१७१ LIC कॉलनी, पश्चिम विहारम नवी दिल्ली ११००८७	**श्री. जं. सी. निजवान** उपप्राचार्य (निवृत्त) सर्वोदय विद्यालय सी-ब्लॉक, सरस्वती विहार नवी दिल्ली ११००८७	**प्रा. रामअवतार** (निवृत्त) NCERT ५३३, सेक्टर ७, अर्बन इस्टेट गुरगाव, हरयाना, १२२००१
श्री. पी. के.गर्ग निवृत्त प्राचार्य रामजस स्कूल १६९, पुंडरिक विहार, सरस्वती विहार, नवी दिल्ली ११००३४	**श्री. महेंद्र शंकर** अधिव्याख्याता (निवृत्त) निवड श्रेणी NCERT डी.पी.-२०३ मौर्य एनक्लोव्ह, पिटमगपुरा, नवी दिल्ली ११००८८	**श्री. ईश्वरचंद्र** प्रपाठक (निवृत्त) NCERT घर नं. WZ १४२७०, नांगल राया नवी दिल्ली ११००४६
श्री. सुवंदू शंखर दास उपसंचालक (शैक्षणिक) एन.आय.ओ.एस्. नोएडा २०१३०९	**श्री. नीरज प्रतापसिंग** वरिष्ठ प्रशासकीय अधिकारी (गणित) एन.आय.ओ.एस्.नोईडा २०१३०९	

पाठलेखक

श्री. जी. डी. धाल प्रपाठक (निवृत्त) NCERT, K-१७१ LIC कॉलनी, पश्चिम विहार, नवी दिल्ली ११००८७	**श्री. जं. सी. निजवान** उपप्राचार्य (निवृत्त) सर्वोदय विद्यालय, सी-ब्लॉक, सरस्वती विहार, नवी दिल्ली ११००८७	**श्री. ईश्वरचंद्र** प्रपाठक (निवृत्त) NCERT, घर नं. WZ १४२७०, नांगलराया, नवी दिल्ली ११००४६	**प्रा. एस. के एस. गौतम** प्राध्यापक (निवृत्त) NCERT, मयूर विहार -फेज नवी दिल्ली ११००९१

अभ्यासक्रम संपादक

प्रा. मोहनलाल चिटणीस DAV College संचालक मंडळ, विद्या., ई-१८२ न्यू राजेंद्रनगर, नवी दिल्ली ६०	**श्री. पी. के गर्ग** निवृत्त प्राचार्य, रामजस स्कूल, १६९, पुंडरिक विहार, सरस्वती विहार नवी दिल्ली ११००३४	**डॉ. राजपाल सिंग** व्याख्याता,गणित,राजकीय प्रतिभा विकास विद्या.२१८ मैत्री अपार्ट आय.पी. एक्सटेंशन, पतपारगंज, नवी दिल्ली ९२	**डॉ. आय. के. बंसल** प्राध्यापक, विभागप्रमुख नि. NCERT, प्राथ. शिक्षण खाते सेक्टर-३, रोहिणी, नवी दिल्ली ८५
डॉ. के. के. वशिष्ठ प्राध्यापक (निवृत्त) NCERT, १५/१०-७ HIG डुप्लेक्स वसुंधरा, गाहियाबाद, उत्तर प्रदेश	**डॉ. के. एम्. गुप्ता** प्राध्यापक (निवृत्त) १५/१०७ आशिर्वाद, सी-२९ सुलतानपूर कॉलनी, नवी दिल्ली ११००३०	**श्री. सुवंदू शंखर दास** उपसंचालक (शैक्षणिक) राष्ट्रीय मुक्त विद्यापीठ, नोईडा ०९	**श्री. नीरंज प्रतापसिंग** वरिष्ठ प्रशासकीय अधि.,गणित राष्ट्रीय मुक्त विद्यापीठ, नोईडा ०९

मराठी भाषांतर

श्री. अ. गं. कडेकर समन्वयक, विज्ञान आणि तंत्रज्ञान एस.एस.सी. बोर्ड, पुणे	**श्री. गो. वि. खजुरे** समन्वयक गणित विषय - एस.एस.सी. बोर्ड, पुणे	**श्री. रा. वा. टेके** माजी उपप्राचार्य, ने. मु. बोख, उच्च माध्यमिक विद्यालय, पुणे - ६	**लेसर टाईपसेट** **वेदिका एन्टरप्रायजेस** पुणे - ४३

रेखा कलाकार - श्री. महेश शर्मा, रा.मु.शा.सं. नवीन दिल्ली

Mukta Vidya Vani

Mukta Vidya Vani is a pioneering initiative of the National Institute of Open Schooling (NIOS) for using Streaming Audio for educational purposes. This application of ICT will enhance accessibility as well as quality of programme delivery of NIOS Programmes. This is a rare accomplishment of NIOS as the first Open and Distance Learning Institute to start a two way interaction with its learners, using streaming audio and the internet.

Keeping in mind the fact that the transmission is done through the web, the NIOS website (www.nios.ac.in) has a link that will take any user to the Mukta Vidya Vani. Mukta Vidya Vani thus enables a two way communication with any audience that has access to an internet connection, from the studio at its Headquarters in NOIDA, where NIOS has set up a state-of-art studio, which will be used for this purpose as well as for recording educational audio programmes meant for NIOS learners, though others can also take advantage of this facility.

Mukta Vidya Vani is a modern interactive, participatory and cost effective programme, involving an academic perspective along with the technical responsibilities of production of audio and video programmes, which are one of the most important components of the multi channel package offered by the NIOS. These programmes will attempt to present the topic/ theme in a simple, interesting and engaging manner, so that the learners get a clear understanding and insight into the subject matter.

NIOS has launched a scheme to motivate the learners to participate in the Mukta Vidya Vani by sending their Audio CD's to the respective regional centre on various subjects such as-

1. Poetry / Shloka recitation
2. Story telling
3. Radio Drama
4. Music
5. Talks on various topic related to the NIOS curriculum including Painting, Vocational Subjects etc.
6. Quiz
7. Mathematics puzzles etc.

The selected CD can be webcast on Mukta Vidya Vani and the winner participant be rewarded suitably.

Learners may visit the NIOS website and participate in live programmes from 2pm to 5pm on all week days and from 10.30am to 12.30pm on Saturdays, Sundays and all Public Holidays. The Subject Experts in the Studio will respond to their telephonic queries during this time. A weekly schedule of the programmes for webcast is available on the NIOS website. The Studio telephone number are 0120-4626949 and Toll Free No. 1800-180-2543.

अध्यक्षांचा संदेश

प्रिय विद्यार्थ्यांनो,

आपणास माहित असेलच की समाजाच्या तसेच समाजातील काही विशिष्ठ घटकांच्या गरजा ह्या कालपरत्वे बदलत असतात. आणि ह्या सामाजिक गरजा पूर्ण करण्यासाठी त्यासाठी योजावयाच्या पद्धती व तंत्रे ही काळानुरूप बदलने गरजेचे असते. शिक्षण हे तर बदलाचे प्रमुख साधन. योग्य वेळी शिक्षणात घडवून आणलेला योग्य बदल हा समाजामध्ये सकारात्मकता आणतो. हा दृष्टिकोन येणाऱ्या आव्हानांना तसेच कठीण परिस्थितीला तोंड देण्याचे धाडस देतो. हे सर्व परिणामकारकपणे ठराविक अंतराने अभ्यासक्रम बदलून साध्य केले जाऊ शकते. स्थिर अभ्यासक्रम हा फक्त शिक्षणाचे एक मानवी साधन म्हणूनच कार्य करतो. समजा जर आपण एका भांड्यामध्ये पाणी भरले व ते भांडे पाणी न बदलता तसेच दीर्घ काळ ठेवले तर काही काळाने ते पाणी पिण्यास अयोग्य बनते. एवढेच नव्हे तर त्या पाण्याचा दुर्गंध सगळीकडे पसरायला लागतो आणि म्हणूनच अभ्यासक्रम बदलणे ही या पाण्याप्रमाणे काळानुरूप गरजेचे असते.

पाठयपुस्तकातील घटक तयार करणे हा नवीन अभ्यासक्रमाचा सर्वात प्रमुख व महत्वाचा घटक असतो की ज्या द्वारे त्या विषयाची ध्येये व उद्दिष्टे साध्य केली जावू शकतात. तसेच याद्वारे आपणास जुन्या व पारंपारिक पद्धती (की ज्या आता कालबाह्य झालेल्या आहेत) बदलून नवनवीन तंत्रे शिकता येतात.

आणि हाच हेतु मनात धरून देशभरातील सर्व शिक्षणतज्ञ हे ठराविक कालाने एकत्र येत असतात व अपेक्षित व गरजेचे असणारे बदल सुचवत असतात. याचाच परिपाक म्हणुन राष्ट्रीय अभ्यासक्रम आकृतीबंध (National Curriculam Framework (NCF)) अस्तीत्वात आला. यामध्ये राष्ट्रीय अभ्यासक्रमामध्ये शिक्षणाच्या वेगवेगळया पातळयावर म्हणजेच प्राथमिक, पूर्व प्राथमिक, माध्यमिक, उच्च माध्यमिक स्तरावर अपेक्षित असणारे बदल सुचविलेले आहेत.

हाच आकृतीबंध मनात धरून तसेच देशाच्या व समाजाच्या गरजा लक्षात घेवून आम्ही माध्यमिक शिक्षणाचा अभ्यासक्रम अद्ययावत केला आहे. तो गरजांना व काळाला अनुसरून आहे.

हा अभ्यासक्रम तयार करताना तो अतिशय रंजक व आकर्षक असावा, ही काळजी घेण्यात आली आहे .

डॉ. एस.एस.जेना

अध्यक्ष (एनआयओएस)

संचालकांचा अभिप्राय

प्रिय विद्यार्थ्यानों,

तुमच्या आवश्यकतेनुसार व गरजेप्रमाणे नवीन अभ्यासक्रम तयार करण्याचा प्रयत्न राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयाच्या शिक्षण विभागाने केला आहे. माध्यमिक स्तरावरील सर्व विषयांचा अभ्यासक्रम बदलण्याची जबाबदारी आम्ही नुकतीच घेतली आहे. देशातील इतर मंडळाच्या पाठ्यक्रमाशी समानता आणण्यासाठी आम्ही केंद्रीय माध्यमिक शिक्षण मंडळ (Central Board of Secondary Education) तसेच माध्यमिक शिक्षण मंडळ महाराष्ट्र, उत्तरप्रदेश, मध्यप्रदेश, गोवा, जम्मू आणि काश्मिर, पं. बंगाल इ. मंडळाशी चर्चा विनिमय केला. राष्ट्रीय शिक्षण, संशोधन व प्रशिक्षण व सल्लागार मंडळाने तयार केलेला अभ्यासक्रम प्रमाणयुक्त मानूनच राष्ट्रीय पाठ्यक्रम तयार करण्यात आला. या सर्व गोष्टींचा सर्वकष व तुलनात्मक अभ्यास केल्यानंतर असे जाणवले की आपला अभ्यासक्रम हा अधिक कार्यात्मक जीवनाशी निगडीत असणारा व सोपा होता. हा अभ्यासक्रम जास्तीत जास्त परिणामकारक व उपयोगी कसा बनवता येइल हा गहन प्रश्न होता. त्यासाठी आम्ही देशभरातील शिक्षणतज्ञ आमंत्रित करून त्याच्या मार्गदर्शनाखाली हा अभ्यासक्रम सुधारीत व अद्यायावत करून घेतला.

तुम्हाला दिल्या जाणाऱ्या अध्ययन साहित्याचाही आम्ही विचार केला आहे. जुनी, कालबाह्य माहिती काढून त्याऐवजी नवीन अद्ययावत माहिती देण्याचा प्रयत्न केला आहे. तसेच ही माहिती आकर्षक व आवाहनात्मक देण्याचाही पयत्न केला आहे.

मला अशी आशा वाटते की तुम्हाला हा अभ्यासक्रम रंजक व उत्साहवर्धक वाटेल. पुढील प्रगतीसाठी तुमच्या सर्व योग्य सूचनांचे स्वागत करू.

आपना सर्वांना माझ्याकडून आनंदी व यशस्वी आयुष्यासाठी शुभेच्छा.

(डॉ. कुलदीप अगरवाल)
संचालक (शैक्षणिक)

आपल्याशी हितगुज

विद्यार्थी मित्रांनां,

गणित ‍ भाग १ मध्ये आपण बीजगणित आणि व्यावसायिक गणित यांची माहिती घेतली. या भागात आपण भूमिती, महत्वमापन, त्रिकोणमिती आणि संख्याशास्त्र यांची माहिती घेणार आहोत.

भूमिती या पहिल्या घटकात आपण बिंदू, रेषा, कोन, प्रतल यासारख्या संबोधांची माहिती घेणार आहोत. आपल्या सभोवती असणाऱ्या अनेक वस्तू भूमितीमधील कोणत्या आकृतीशी साधर्म्य दाखवितात, हे आपणास कळेल. समरूप आकृती आणि एकरूप आकृती यामधील फरक आपणास कळेल. काही मूलभूत प्रमेयेसुद्धा आपण पाहणार आहोत. याने आपली तर्कसंगत विचारशक्ती वाढण्यास मदतच होणार आहे.

महत्वमापन या घटकात रोजच्या व्यवहारातील उदाहरणे दिली आहेत. याच्या अभ्यासानंतर बागेभोवती कुंपण घालण्यासाठी किती लांबीची तार लागेल? भिंत बांधण्यासाठी किती विटा लागतील? तुमच्या घरात भिंतीचे क्षेत्रफळ किती आहे? त्या रंगविण्यासाठी किती खर्च येईल? पाण्याच्या टाकीची धारकता किती आहे? या प्रश्नांची उत्तरे आपण सहज काढू शकाल.

आपल्याला नेहमी खांबाची उंची काढणे, टेकडीची उंची काढणे, समोरच्या तीरावरील असणाऱ्या झाडाची उंची काढणे. यासारख्या प्रश्नांची उत्तरे काढण्यासाठी गरज भासते. त्रिकोणमिती या घटकामधील उन्नत कोन, अवनतकोन आणि त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे या संबोधांचा वापर करून आपण हे प्रश्न सहजपणे सोडवू शकाल.

संख्याशास्त्र या घटकाचा अभ्यास केल्यानंतर आपणास खूप मोठ्या प्रमाणावर जमा झालेली सांख्यिकी माहिती स्तंभालेख, वर्तुळालेख यांच्या साह्याने दाखविणे आणि त्यापासून निष्कर्ष काढणे, हे आपणास जमेल. आपणास संभाव्यता या घटकाची प्राथमिक माहिती करून दिली आहे. हा संबोध स्पष्ट करण्यासाठी नाणे उडविणे, फासा टाकणे, नीट पिसलेल्या पत्त्यांमधून एक पत्ता काढणे या व्यवहारातील गोष्टींचा वापर केला आहे. संबोध नीट समजावेत म्हणून भरपूर उदाहरणे व आकृत्या दिलेल्या आहेत.

जर आपल्याला काही अडचण आली तर माझ्याशी संपर्क साधण्यात संकोच करू नका.

आपल्या सूचनांचा निश्चितपणे सकारात्मक विचार केला जाईल.

सर्वांना शुभेच्छा !

आपला,

नीरज प्रताप सिंग

वरिष्ठ प्रशासकीय अधिकारी (गणित)

अध्ययन साहित्याचा उपयोग कसा कराल?

सर्वसामान्य शाळेतील शिक्षणपद्धतीपेक्षा राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयातील शिक्षण पद्धती पूर्णपणे भिन्न आहे. या भिन्न शिक्षण पद्धतीमध्ये आपण प्रवेश घेतला आहे. येथे प्रवेश घेतल्याबद्दल आपले स्वागत करून अभ्यासासंबंधी काही उपयुक्त माहिती खाली दिली आहे.

स्वयं अध्ययन

सर्वसामान्य शाळेमध्ये शिकविण्यासाठी, मार्गदर्शन करण्यासाठी, शंकानिरसन करण्यासाठी व अभ्यासाला प्रेरणा देण्यासाठी शिक्षक उपलब्ध असतात. त्याचप्रमाणे शाळेतील विद्यार्थी परस्परांमध्ये चर्चा करून स्वतःच्या अडचणी दूर करू शकतात. शाळेची ग्रंथालये उपयुक्त माहिती पुरवू शकतात. प्रयोगशाळेत प्रयोग करून आपण ज्ञान मिळवू शकतो. अभ्यासेतर उपक्रमात भाग घेऊनसुद्धा आपण ज्ञानात भर घालू शकतो. आपल्यासाठी वेगवेगळया शैक्षणिक विषयांवर आकाशवाणी आणि दूरदर्शन कार्यक्रम तयार करून सादर केले जातात. कार्यक्रमांद्वारे मौलिक मार्गदर्शन मिळते. अशा तहेने शाळेतील विद्यार्थ्याला ज्ञानार्जनासाठी सर्व बाजूंनी मदत मिळते.

परंतु मुक्त विद्यालयात विद्यार्थ्यांना मार्गदर्शनासाठी शिक्षक उपलब्ध नसतात. विद्यार्थ्याला स्वतःच्या जबाबदारीवरच ज्ञानार्जन करावे लागते. याचा अर्थ विद्यार्थीच स्वतःचा शिक्षक असतो. त्यामुळे शाळेतील विद्यार्थ्यापेक्षा स्वतः ज्ञानार्जन करणारया मुक्त विद्यालयातील विद्यार्थ्यांची स्वतःवरील जबाबदारी शतपटीने वाढते. परंतु त्याबरोबरच ही गोष्ट अतिशय आव्हानात्मक आहे. ही बाब देखील सत्य आहे.

मुक्त विद्यालयातील विद्यार्थी ज्ञानार्जनासाठी फक्त स्वतःवर आणि स्वतःवरच अवलंबून असतो. याचाच अर्थ असा की स्वतःच्या अभ्यासाचे वेळापत्रक स्वतः विद्यार्थ्यालाच ठरवावे लागते, नियमितपणे अभ्यास करावा लागतो. अभ्यास करण्याची, प्रगतीची ऊर्जा कायम ठेवावी लागते आणि उत्तीर्ण होऊन ध्येय साध्य करावे लागते.

अभ्यासाहित्याविषयी

राष्ट्रीय मुक्त विद्यालय शिक्षण संस्था आपल्याला सर्व प्रकारचे अभ्यास साहित्य पुरविण्यासाठी प्रयत्नशील आहे. त्यापैकी काही अभ्यास साहित्य (पाठयपुस्तक) आपल्या हातात आहे. आम्ही या साहित्याला पाठयपुस्तक (text book) असे न म्हणता या साहित्याला अभ्यास साहित्य (learning material) म्हटले आहे. शाळेतील पाठयपुस्तकापेक्षा हे अभ्यास साहित्य अगदी निराळे आहे. या अभ्यास साहित्यामध्ये पाठयपुस्तक आणि ते शिकविणारा अध्यापक यांचा अप्रतिम मिलाफ आहे. वर्गात शिक्षक ज्या पद्धतीने ज्ञानार्जन करतात, विद्यार्थ्यांच्या संकल्पना दृढ करतात आणि ज्ञानाचा पाया पक्का करतात. त्याप्रमाणेच शिक्षक ज्या पद्धतीने समजावून सांगतात अगदी तशाच पद्धतीने या पुस्तकातील मजकूर तयार केला गेला आहे. योग्य त्या ठिकाणी खुलाशाबरोबरच निवडक उदाहरणे आणि अनुरूप आकृत्या, चित्रे, आलेख देण्यात आले आहेत. म्हणूनच हे पुस्तक भारदस्त झाले आहे. परंतु त्यामुळे घाबरून जाऊ नका.

पाठयपुस्तकातील धडयांची विभागणी विभागावार करण्यात आली आहे. ती विभागणी आणि त्याचे कारण आपण समजावून घेऊ या.

प्रस्तावना: प्रस्तावनेमधे जे लिहिलेले असते त्याचा संबंध शीर्षकाशी असतो.

उद्दिष्टे : प्रकरणामधून तुम्ही जे शिकणे अपेक्षित असते ते या विधानांवरून तुम्हाला समजू शकते. प्रकरण वाचल्यानंतर तुम्ही जो अभ्यास करणे अपेक्षित असते तो उद्दिष्टयांच्या मदतीने तपासू शकता. उद्दिष्टे जरूर वाचा

टिपणे : (notes) प्रत्येक पानावर काही रिकामी जागा आहे तिथे तुम्ही महत्त्वाचे मुद्दे लिहू शकता.

पाठ्यांशावरील प्रश्न : प्रत्येक भागानंतर तुम्हाला किती समजले आहे ते तपासण्यासाठी लघुत्तरी प्रश्न दिले आहेत. प्रकरणाच्या शेवटी या प्रश्नांची उत्तरे दिलेली आहेत. ते प्रश्न जरूर सोडवा. प्रश्नांची उत्तरे तुम्हाला माहीत आहेत का नाहीत यावरून पुढचे प्रकरण वाचायचे का परत आधीच्या प्रकरणाचा अभ्यास करायचा हे तुम्ही ठरवू शकाल.

तुम्ही काय शिकलात?

प्रकरणातील मुख्य मुद्दे सारांश रुपाने यात सांगितलेले आहेत. उजळणीसाठी तुम्हाला याची मदत होईल. यात तुम्ही तुमचे स्वत:चे काही मुद्दे पण लिहू शकता.

संकीर्ण प्रश्न : यात लघुत्तरी आणि दीर्घोत्तरी प्रश्न असतात. संपूर्ण प्रकरण समजून घेण्याची संधी उत्तरांचा सराव करून तुम्हाला मिळू शकेल.

उत्तरे : तुमची उत्तरे किती प्रमाणात बरोबर आहेत हे तुम्हाला दिलेल्या उत्तरावरून लक्षात येईल.

व्यक्तिगत संपर्क कार्यक्रम

आपल्या अध्ययन केंद्रात प्रत्येक विषयासाठी संपर्क सत्रे आयोजित करण्यात येतात. नेहमीच्या शाळेत ज्या पद्धतीने विषयाचे अध्ययन होते, त्या पद्धतीने या सत्रात विषय शिकविला जात नाही, हे ध्यानात घ्या. या सत्रामध्ये तुमच्या शंकांचे निरसन केले जाईल. तुमच्या अडचणी सोडविल्या जातल. अभ्यासाबाबत तुम्हाला मार्गदर्शन आणि सल्ला दिला जाईल. म्हणून या संपर्कसत्रांचा जास्तीत जास्त फायदा घेण्यासाठी विषयाची चांगली तयारी करा आणि संपर्क सत्राला उपस्थित रहा.

गणिती कार्यशाळा कार्यक्रम

राष्ट्रीय मुक्त विद्यालय शिक्षण संस्थेने गणित या विषयाची प्रयोगशाळा पुस्तिका तयार केली आहे. या प्रयोगशाळा पुस्तिकेतील कृती प्रत्यक्ष करण्याची संधी आपणास संपर्क केंद्रावरील गणिती कार्यशाळा कार्यक्रमात मिळेल.

दूरचित्रवाणी, आकाशवाणी वरील कार्यक्रम

राष्ट्रीय मुक्त विद्यालय शिक्षण संस्थेने विषयाशी संबंधित आकशवाणीवरून प्रक्षेपित करण्यासाठी काही कार्यक्रम तयार केले आहेत. तसेच दूरदर्शनवरून प्रदर्शित करण्यासाठीसुद्धा काही कार्यक्रम तयार केले आहेत. हे सर्व कार्यक्रम मनोरंजक तर आहेतच परंतु या कार्यक्रमाच्या दर्शन – श्रवणामुळे आपल्या ज्ञानात भर पडेल. अभ्यासास मदत होईल.

या कार्यक्रमाच्या सीडीज (ऑडिओ, व्हीडिओ) आपल्याला संपर्क केंद्रावरसुद्धा उपलब्ध होतील. आपण त्या केंद्रावरून घेऊन जा. ऐका, पाहा आणि परत आणून द्या.

आपल्या अभ्यासाच्या नियोजनासाठी काही उपयुक्त सूचना

आपल्या अभ्यासाचे नियोजन करणे अत्यंत गरजेचे आहे. त्यासाठी काही उपयुक्त सूचनांचा आपण विचार करा.

कोणतीही गोष्ट साध्य करण्यासाठी कठोर परिश्रमाला पर्याय नाही, ही गोष्ट ध्यानात ठेवा. जितके जास्त कठोर परिश्रम, तितके जास्त उज्वल यश आपल्या पदरात पडते. ध्येय गाठण्यसाठी कुठल्याही चोरवाटांचा उपयोग होत नाही. परीक्षेच्या वेळी मदत करण्याचे कोणीही आश्वासन दिले तर त्यावर अजिबात भरवसा ठेऊ नका. कारण परीक्षाकेंद्रावर अतिशय कडेकोट बंदोबस्त आणि अत्यंत दक्ष अशी पर्यवेक्षण व्यवस्था असते. यातूनसुद्धा तुमचा प्रयत्न यशस्वी झाला, तरीसुद्धा तुम्हाला ज्ञान मिळणार नाही. हा तुमचा सर्वात मोठा तोटा होईल. यासाठी अतिशय प्रामाणिकपणे अभ्यास करून परीक्षेत उत्तम यश मिळवा. आयुष्यात यशस्वी व्हा.

राष्ट्रीय मुक्त विद्यालय शिक्षण संस्था आपल्याला सर्वच बाबतीत स्वातंत्र्य आणि लवचिकता देणे . उदा. सर्वच विषय एकाचवेळी घेऊन परीक्षेला बसण्याची सक्ती आपल्यावर नाही. परीक्षार्थींनी आपल्याला आपले काम / व्यवसाय सांभाळून अभ्यासासाठी किती वेळ देता येईल याचा स्वतःशी विचार करावा. एकाच वेळी सर्व विषयांचा अभ्यास करता येईल का याचा आढावा घ्यावा. तसे नसल्यास काही विषय या वेळी तर काही पुढच्यावेळी देण्यासंबंधी विचार करावा व त्याप्रमाणे अभ्यासाचे नियोजन करावे. एकाचवेळी सर्व विषयांचा अभ्यास करण्याचा प्रयत्न केल्यास कोणत्याच विषयावर लक्ष केंद्रीत होणार नाही आणि अपयशाचे धनी व्हावे लागेल.

म्हणून आपल्या सोयीनुसार सकाळ, दुपार, संध्याकाळ केव्हाही अभ्यासासाठी वेळ निश्चित करा. कालावधी निश्चित करा. प्रत्येक विषयाला कितीही वेळ द्यावयाचा याचे वेळापत्रक ठरवा. हे वेळापत्रक पाळण्याचा कसोशीने प्रयत्न करा.

अभ्यास करताना घटकातील ज्या संकल्पना महत्त्वाच्या वाटतात त्या पेन्सिलीने अधोरेखित करा. महत्त्वाचे मुद्दे अधोरेखित करा. आपल्या अभ्यास संस्थेने दिलेल्या अभ्यास साहित्यावरच अवलंबून आहे. तरीसुद्धा आवश्यकता वाटल्यास आणि वेळ असल्यास इतर पुस्तकातूनही व ज्ञानसाधनांमार्फत ज्ञान मिळवा. पण आमची अशी खात्री आहे की आम्ही दिलेले अभ्यससाहित्य आपल्यादृष्टिने पुरेसे आहे. आपल्या विषयांचे अभ्याससाहित्य (पुस्तके) जवळ बाळगा.

आपल्याला ज्या संकल्पना आणि मुद्दे समजले नाहीत, ते लिहून ठेवा. याबाबत आपल्या पालकांबरोबर, मित्रांबरोबर चर्चा करा. अध्ययन केंद्रातील मार्ग दर्शकाकडून आपल्या शंकांचे निरसन करा.

पाठामध्ये विचारलेल्या सर्व प्रश्नांची उत्तरे तयार करा. विभागाच्या शेवटी विचारलेल्या सर्व प्रश्नांची उत्तरे तयार करा. याने तुमचा अभ्यास तर होईलच. तसेच यामुळे परीक्षेची तयारीसुद्धा होईल. याबरोबरच नमुना प्रश्नपत्रिका आणि गतवर्षीच्या प्रश्नपत्रिका सोडविण्याचा प्रयत्न करा. या प्रश्नांची उत्तरे मित्रांना, पालकांना दाखवा. त्यांच्याबरोबर चर्चा करा.

आपल्या मदतीसाठी काही मुद्दे सुचविले आहेत. अभ्यासासाठी आपणसुद्धा यापेक्षा चांगले मार्ग सुचवा. अभ्यासाचे चांगले तंत्र शोधा आणि अंमलात आणा.

यामुळे आपल्याला निश्चितपणे उज्वल यश प्राप्त होईल.

धन्यवाद!

अभ्यासघटक

१

२

अनुक्रमाणिका

Awards Won by NIOS

Several projects have been implemented by the NIOS to tap the potential of Information and Communication Technology (ICT) for promoting of Open and Distance Learning (ODL) system. The Ni-On project of NIOS won the National Award for e-governance and Department of Information and Technology, Govt. of India. In further recognition of its On-line initiatives and best ICT practices, the NIOS received the following awards:

NIOS WINS National Award for e-Governance 2008-09

Silver icon for Excellence in Government Process Re-engineering, Instituted by Government of India Department of Administrative Reforms and Public Grievances & Department of Information Technology.

NIOS receives NCPEDP MPHASIS Universal Design Awards 2012

National Institute of Open Schooling (NIOS) has been awarded THE NCPEDP - MPHASIS UNIVERSAL DESIGN AWARDS 2012 instituted by National Centre for Promotion of Employment for Disabled People. The award was given by **Sh. Mukul Wasnik, Hon'ble Minister for Social Justice and Empowerment, Govt. of India** on 14th August, 2012. NIOS has been selected for its remarkable work done for the learners with disabilities through ICT by making its web portal www.nios.ac.in completely accessible for such learners.

The Manthan Award South Asia & Asia Pacific 2012

The Manthan Award South Asia & Asia Pacific 2012 to recognize the best ICT practices in e-Content and Creativity instituted by Digital Empowerment Foundation in partnership with World Summit Award, Department of Information Technology, Govt. of India, and various other stakeholders like civil society members, media and other similar organisations engaged in promoting digital content inclusiveness in the whole of South Asian & Asia Pacific nation states for development. The award was conferred during **9th Manthan Award Gala South Asia & Asia Pacific 2012 at India Habitat Centre on 1st Dec. 2012.**

घटक ः ३

भूमिती

भूमिती ही गणिताची एक शाखा असून त्यामध्ये विविध आकाराच्या आकृत्या व त्यांचे गुणधर्म यांचा अभ्यास केला जातो. पृथ्वीचे (जमिनीचे) मापन करणे म्हणजेच भूमिती होय. पूर्वीच्या काळी, जेव्हा मानव स्वत:चे घर बांधण्यासाठी जमिनीचे मोजमाप आणि घराच्या मर्यादा ठरविण्यासाठी जमिनीच्या मर्यादा ठरवू लागला तेव्हाच भूमितीची निर्मिती झाली असे म्हणण्यास हरकत नाही. इजिप्त आणि बार्वेलियन लोकांनी वेगवेगळ्या एकप्रतलीय (एकरेषीय) आकृत्यांचे क्षेत्रफळे काढण्यासाठी अनेक सुत्रे शोधून काढली व त्यांचा उपयोग त्यांनी व्यवहारात सुरू केला.

भारतीय गणितज्ञांनी सुद्धा भूमितीच्या ज्ञानाच्या वाढीत बहुमोल कामगिरी केली आहे. याचा पुरावा किंवा दाखला आपल्याला हडप्पा आणि मोहोंजदडो या संस्कृतीमध्ये आढळतो. वैदिक काळात सुद्धा सुलभ सुत्रांचा वापर केला जात होता. आत्ताचे परिचित असलेले पायथागोरसचे प्रमेय सुद्धा पूर्वीच्या बुद्धवादी गणितज्ञांनी शोधून सिद्ध करून दाखविले होते. म्हणजेच पूर्वीच्या वैभवशाली भारतातील त्या गणितज्ञांनी भूमितीमधील केलेला सहभाग हा सुद्धा लक्षात ठेवण्यासारखा आहे हे निश्चितच मानले पाहिजे.

युक्लिड या ग्रीक गणितज्ञाने, त्याच्या काळी (330 ख्रिस्त पूर्व (B.C.)) उपलब्ध असलेले भूमितीमधील सर्व ज्ञान (गोष्टी) एकत्रित केले. तर्कशुद्ध पद्धतीने, त्याने त्या एकत्रित केलेल्या भूमितीय माहितीची पद्धतशीर मांडणी केली व त्यास योग्य कारणेसुद्धा दिली. तेव्हापासून अशा मांडणीस योग्य तर्कशुद्ध आकार देण्याचा प्रयत्न सुरू झाले.

भूमितीचा सर्व अभ्यास अशा रितीने पूर्णपणे तत्त्वज्ञानावर आधारीत करणे ही सोपी गोष्टी नाही, म्हणून आपण अप्रत्यक्ष पद्धतीने भूमितीचा अभ्यास करतो. त्यामध्ये योग्य उदाहरणासहित काही व्याख्या, तसेच काही आकृत्यांचे गुणधर्म त्यांची पडताळणी करतो. तर फारच थोड्या गुणधर्मांची तत्वज्ञानाच्या आधारे आपण सिद्धता देतो. या सिद्ध झालेल्या गुणधर्मांनाच आपण प्रमेय असे म्हणतो.

भूमितीच्या या घटकामध्ये आपण रेषा, कोन, त्रिकोण, चौकोन आणि वर्तुळ यांच्या प्रकारांच्या व त्यांच्या गुणधर्मांचा अभ्यास करणार आहोत.

Awards Won by NIOS


web ratna awards 2012

Platinum Icon

Outstanding Content

is hereby conferred upon

'National Institute of Open Schooling'

Project Team:
Dr. S.S. Jena
U.N. Khaware, C. Dharuman, Dr. Kuldeep Agarwal
Dr. Sanyam Bhardwaj, Dr. K.P. Wasnik, S.K. Prasad, Pramod Tripathi

on 10 th of December 2012 at New Delhi

Dr. Y.K. SHARMA
Director General
National Informatics Centre

J. SATYANARAYANA
Secretary
Dept. of Electronics & Information Technology

india.gov.in INITIATIVE

Web Ratna Awards 2012 Platinum Icon under Outstanding Web Content for Acknowledging exemplary initiatives/practices in the realm of e-Governance for dissemination of information & services instituted by Department of Information Technology, Ministry of Communications & IT (MC&IT) and National Informatic Centre (NIC), Government of India. The award has been conferred by Hon'ble Minister of Communications and Information Technology Shri Kapil Sibal on 10th December 2012 at Dr. D.S Kothari Auditorium, DRDO Bhawan, Dalhousie Road, New Delhi.

TOI Social Impact Award 2012

NIOS has been selected as winner of the Social Impact Award 2012 instituted by Times of India in partnership with J P Morgan The Award is given in the recognition of magnificent work done by an individual or groups or institutions making an impact in the society in various segment including Education. NIOS feels honoured to accept the award.

The award was conferred on 28th January 2013 at a function in presence of President of India and high level dignitaries.

National Awards for the Empowerment of Persons with Disabilities, 2012

The NIOS received the National Award for the Empowerment of persons with disabilities, 2012 Instituted by Ministry Social Justice and Empowerment, Govt. of India. The NIOS got this award under the category of best accessible Website for making its website www.nios.ac.in completely accessible for person with disabilities. The website is bilingual in Hindi and English. It also has provisions of Screen Reader, increasing text size, colour contrast scheme etc. for disabled learners. This award was conferred by the Hon'ble President of India at Vigyan Bhawan, New Delhi on 6th February, 2013. Dr. S.S. Jena Chairman, NIOS received the award.

10
रेषा आणि कोन

प्रास्ताविक ः

तुमच्या समोरील बाक किंवा टेबल याचा पृष्ठभाग पहा. त्या टेबलाच्या पृष्ठभागावर तुमचा हात फिरवा. यावरून तुम्हाला प्रतलाची कल्पना येईल. त्याच्या कडांवरून तुम्हाला रेषेची कल्पना येईल. त्या टेबलाचे कोपरे आणि ज्या कोप-यात त्या कडा मिळतात त्यावरून तुम्हाला कोनाची कल्पना येईल.

उद्दिष्टे ः

या प्रकरणाचा अभ्यास केल्यावर, तुम्ही खालील गोष्टी करू शकाल.

- बिंदू, रेषा, प्रतल, कोन, समांतर रेषा आणि छेदणा-या रेषा यांची मूलभूत संकल्पना जाणता येईल.
- दोन किंवा अधिक रेषांना छेदिकेने छेदले असता होणा-या कोनांच्या जोडया ओळखू शकाल.
- एका रेषेवरील एका उभ्या किरणामुळे तयार झालेल्या संलग्न कोनांची बेरीज 180^0 असते हे ओळखू शकाल.
- जर दोन रेषा एकमेकींना छेदत असतील तर परस्परविरूध्द कोन समान असतात हे ओळखता येईल.
- दोन समांतर रेषांना छेदिकेने छेदले असता संगत कोनांची प्रत्येक जोडी समान असते.
- दोन समांतर रेषांना छेदिकेने छेदले असता,

(a)व्युत्क्रम कोनांची प्रत्येक जोडी समान असते.

(b)छेदिकेच्या एकाच अंगास असणारे आंतरकोन पूरक आहेत.

वरील या निष्कर्षणांचा पडताळा घेऊ शकेल.

- त्रिकोणाच्या तिन्ही कोनांच्या मापांची बेरीज 180^0 असते हे सिध्द करू शकाल.
- त्रिकोणाचा वाहयकोन हा दोन विरूध्द आंतरकोनांच्या बेरजेएवढा असतो हे ओळखू शकाल.
- बिंदूपथ या संकल्पनचे स्पष्टीकरण देऊ शकेल आणि विशिष्ट अटीसाठी दैनंदिन जीवनातील उदाहरणाने बिंदूपथ काढू शकेल.
- (a) दोन बिंदूपासून समदूर असणा-या बिंदूच बिंदूपथ आणि

(b) एका बिंदूत छेदणा-या दोन रेषांपासून समान अंतरावर असणा-या बिंदूचा बिंदूपथ काढू शकाल.

- अभ्यासक्रमावर आधारीत तारांकित (थोडे कठीण) प्रश्नांची उत्तरे देऊ शकाल. तसेच संख्यात्मक (किंमती काढा)

सामान्य प्रश्नांची उत्तरे झटकन देऊ शकेल.

अपेक्षित पूर्वज्ञान ः

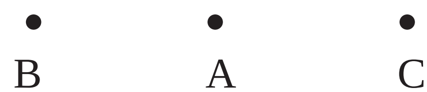
विद्यार्थ्याला खालील भूमितीचे काही संबोध व आकृत्या परिचित आहेत असे गृहित धरणार आहोत.

- बिंदू , रेषा, प्रतल, छेदणाऱ्या रेषा, किरण आणि कोन
- समांतर रेषा

10.1 बिंदू, रेषा आणि कोन

मागील इयत्तेत तुम्ही बिंदू, रेषा, प्रतल आणि कोन यांचा अभ्यास केला आहे. ते सर्व संबोध झटकन आठवा.

बिंदू : आपण पेन किंवा पेन्सिलचे टोक एखाद्या कागदाच्या तुकडयावर दाबतो त्यावेळी आपल्याला एक ठिपका दिसतो त्यालाच बिंदू म्हणतात.



(आकृती 10.1)

बिंदू हा A,B,C .... अशा इंग्रजी कॅपिटल अक्षरांनी दर्शवितात.

10.1.1 : रेषा

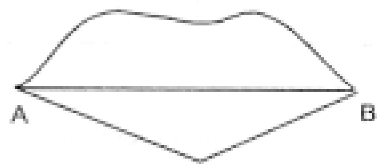
आता तुम्ही A आणि B असे दोन बिंदू काढा. पट्टीने ते जोडा आणि दोन्हीकडे वाढवा. ही सरळरेषा असते. यालाच रेषा असे म्हणतात.

(आकृती 10.2)

भूमितीय रेषेची अमर्यादता दाखविण्यासाठी तिच्या दोन्ही टोकांना बाण काढतात. रेषेवरील कोणत्याही दोन बिंदूच्या सहाय्याने वाचतात. उदा. रेषा AB किंवा एकाच लहान अक्षराने वाचतात. रेषा ℓ, रेषा m इ. (आकृती 10.3 पहा)

(आकृती 10.3)

रेषाखंड म्हणजे बिंदू A आणि B या दोन बिंदूमधील कमीत कमी अतंर असते. (आकृती 10.4 पहा)



(आकृती 10.4)

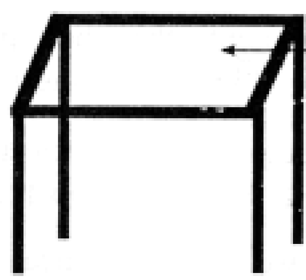
10.1.2 किरण ः जर X हा बिंदू काढला आणि त्या बिंदूपासून एकाच दिशेने अमर्याद अशी रेषा काढली तर आपणास किरण XY मिळतो.

(आकृती 10.5)

बिंदू X हा किरण XY चा आरंभबिंदू असे म्हणतात.

10.1.3 प्रतल

जर आपण आपला हात (तळवा) टेबलाच्या पृष्ठभागावरून फिरवला तर आपल्याला प्रतलाची कल्पना येते.



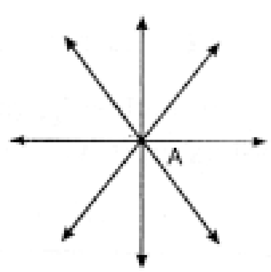
आकृती (10.6)

तसेच खोलीच्या जमिनीवरूनही प्रतलाची कल्पना येते. प्रतल सुध्दा लांबी तसेच रुंदीच्या बाजूंनी अमर्याद असते.

एका कागदावर A बिंदू काढा.

या बिंदूतून जाणाऱ्या किती रेषा तुम्हाला काढता येतील ?

जितक्या पाहिजेत तेवढया ः



(आ. 10.7)

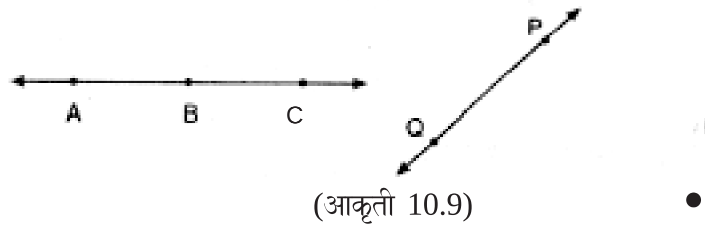
खरे तर, आपण एका बिंदूतून जाणाऱ्या अनंत रेषा आपणास काढता येतात.

A बिंदूपासून काही अंतरावर B बिंदू घ्या. आपणास B बिंदूतून जाणाऱ्या अनंत रेषा काढता येतात.

(आकृती 10.8)

या रेषेपैकी किती रेषा A आणि B या दोन्ही बिंदूतून जातात. A बिंदूतून जाणाऱ्या असंख्य रेषांपैकी फक्त एकच रेषा B बिंदूतून जाते म्हणजेच A आणि B बिंदूतून जाते म्हणून A आणि B बिंदूतून जाते. म्हणून A आणि B बिंदूतून जाणारी फक्त एकच रेषा असते. याचाच अर्थ दोन भिन्न बिंदूतून जाणारी एक आणि एकच रेषा आपल्याला काढता येते.

आता आपण प्रतलात तीन बिंदू घ्या.

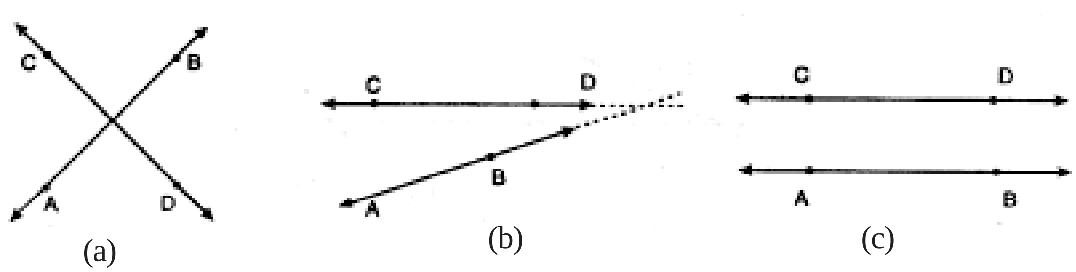


(आकृती 10.9)

यावरून असे लक्षात येते की, एखादी रेषा तिन्ही बिंदूना समाविष्ट करेल किंवा करणार नाही. जर तीन किंवा तीनपेक्षा जास्त बिंदूना समाविष्ट करणारी एखादी रेषा असेल तर ते बिंदू एकरेषीय असतात. उदा. आ. 10.9 मध्ये बिंदू A,B,C हे बिंदू एकरेषीय आहेत. जर तीन किंवा तीनपेक्षा जास्त बिंदूतून जाणारी एक रेषा नसेल तर त्या बिंदूना नैकरेषीय बिंदू असे म्हणतात. आ. 10.9 मध्ये बिंदू P,Q आणि R हे नैकरेषीय आहेत.

दोन बिंदूतून एक रेषा नेहमीच जाते परंतु जेव्हा आपण एकरेषीय बिंदूंचा विचार करतो तेव्हा तीन किंवा तीनपेक्षा जास्त बिंदू असतात.

एका प्रतलातील रेषा AB आणि रेषा CD अशा दोन रेषा घ्या.

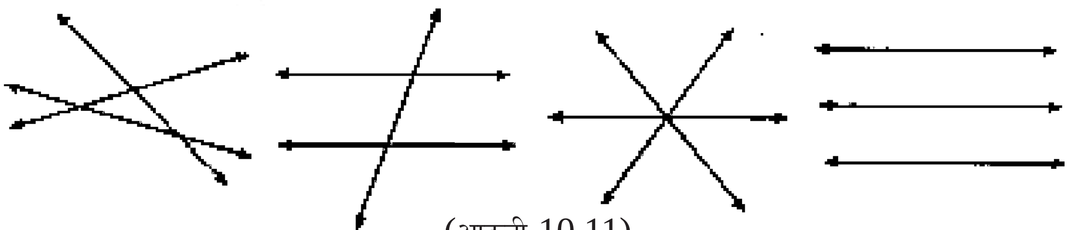


(आकृती 10.10)

या रेषांना किती सामाईक विंदू आहेत ?

आपल्या लक्षात येते की, आ. 10.10 (a) आणि (b) मध्ये या रेषांचा सामाईक बिंदू एक आहे. (अशा रेषांना छेदणा–या रेषा असे म्हणतात) किंवा आ. 10.10 (c) मध्ये एकही बिंदू सामाईक नाही. अशा वेळी या रेषांना समांतर रेषा असे म्हणतात .

आता एका प्रतलातील तीन किंवा अधिक भिन्न रेषा पहा.



(आकृती 10.11)

काय शक्य आहे ?

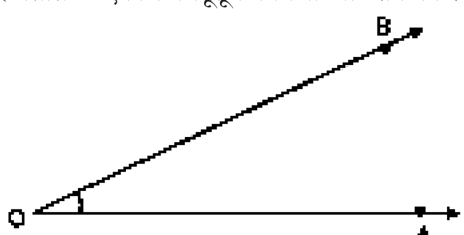
(i) आ. 10.11 (a) आणि (b) मध्ये हया रेषा एकापेक्षा जास्त बिंदूत आहेत.

(ii) आ. 10.11 (c) मध्ये या रेषा एकाच बिंदूत छेदत आहेत. अशा रेषांना एकसंपाती रेषा असे म्हणतात.

(iii) आ. 10.11 (d) मध्ये या रेषा एकमेकींना छेदत नाहीत तर परस्परांना समांतर आहेत.

10.1.4 कोन :-

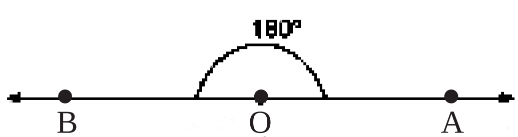
'O' हा एक बिंदू काढा. O हा आरंभबिंदू असलेले किरण OA आणि किरण OB हे दोन किरण काढा. या आकृतीला कोन म्हणतात. एकाच बिंदूतून निघणा–या दोन किरणांच्या आकृतीला कोन असे म्हणतात.



(आकृती 10.11A)

या कोनाचे वाचन 'कोन AOB' किंवा 'कोन BOA' किंवा 'कोन O' असे करतात आणि तेच <AOB , < BOA किंवा <O असे लिहितात.

कोन हा अंशामध्ये मोजतात. जर आपण कोणताही एक 'O' बिंदू घेतला, आणि 'O' आरंभबिंदू घेऊन विरूध्द दिशांना दोन किरण काढले तर त्या कोनाचे माप 180 अंश आहे असे म्हणतात. ते 180^0 असे लिहितात. या मापाचे 180 समान भाग केले जातात त्या प्रत्येक भागास एक अंश (1^0) म्हणतात.

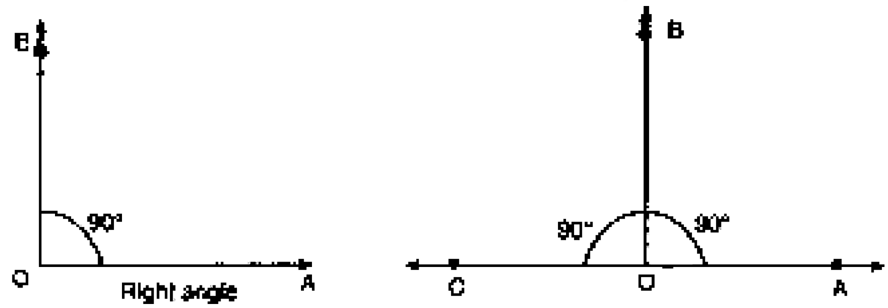


(आकृती 10.12)

टिपा

दोन विरूध्द किरणांमुळे तयार होणा-या कोनास ‘सरळकोन’ असे म्हणतात.

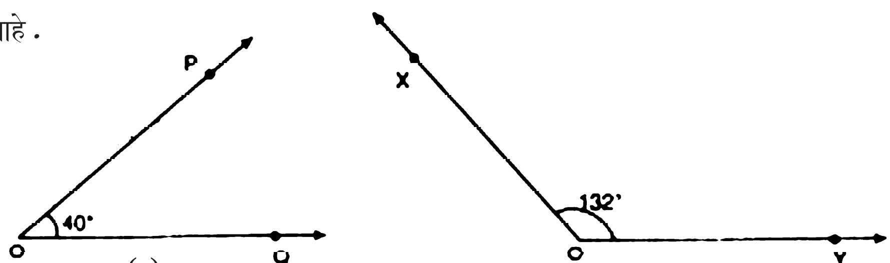
90^0 माप असलेल्या कोनाला **काटकोन** म्हणतात. उदा.$<$ BOA किंवा $<$ BOC आ.10.13 पहा.



काटकोन

(आ. 10.13)

ज्या दोन रेषा किंवा किरण परस्परांशी काटकोन करतात. त्यांना लंबरेषा असे म्हणतात.आ.10.13 मध्ये OA हा OB ला लंब आहे किंवा OB हा OA ला लंब आहे असे म्हणतात. जो कोन 90^0 पेक्षा लहान असतो त्याला लघुकोन असे म्हणतात. उदा. आ. 10.14 (a) मध्ये $<$ POQ हा लघुकोन आहे.



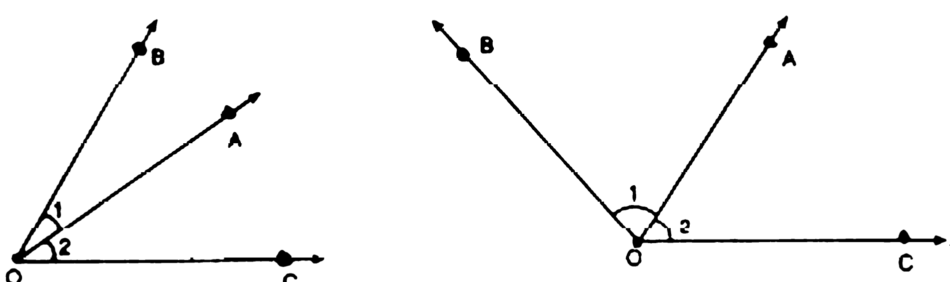
(a) (b)

दोन रेषा किंवा दोन किरण परस्परांना काटकोन करीत असतील तर त्यांना लंब रेषा असे म्हणतात. आ. 10.13 मध्ये OA हा OB ला लंब आहे किंवा OB हा OA ला लंब आहे असे म्हणतात.

90^0 पेक्षा लहान असलेल्या कोनास लघुकोन असे म्हणतात. उदा. 10.14 (a) मध्ये $<$ POQ हा लघुकोन आहे.

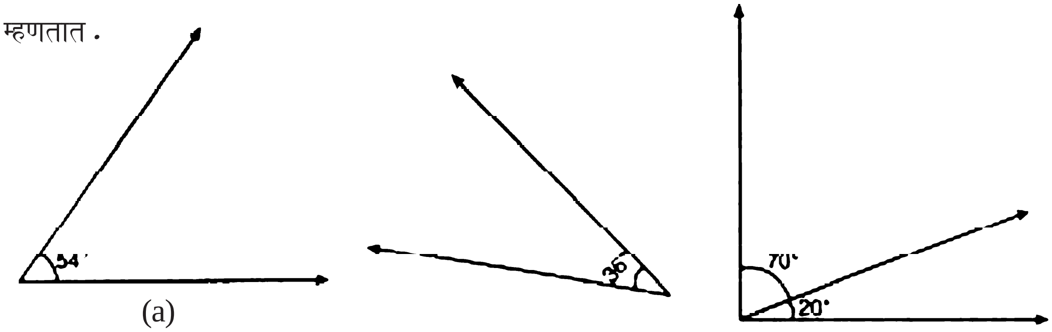
90^0 पेक्षा जास्त आणि 180^0 पेक्षा लहान असलेल्या कोनास विशालकोन असे म्हणतात. आ. 10.14 (b) मध्ये $<$ XOY हा विशालकोन आहे.

10.2 कोनांच्या जोडया



आ. 10.15

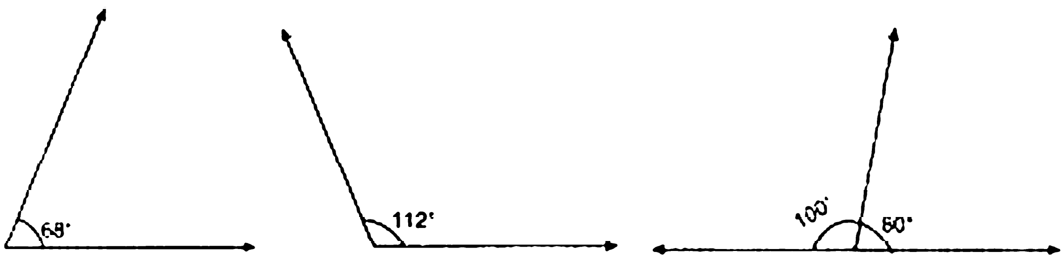
आ. 10.15 मधील < 1 आणि < 2 चे निरीक्षण करा. प्रत्येक जोडीचा O हा सामाईक शिरोबिंदू आहे आणि बाजू OA ही सामाईक बाजू आहे. अशा कोनांच्या जोडीला **<u>संगत कोनांची</u>** जोडी असे म्हणतात.



(a) (b)

आ. 10.16

आ. 10.16 (a) आणि (b) मधील कोनांच्या जोडयांचे निरीक्षण करा. कोनांच्या मापाची बेरीज 90^0 आहे.ज्या कोनांच्या मापांची बेरीज 90^0 असते. त्या कोनांच्या जोडीला कोटिकोनांची जोडी असे म्हणतात तेव्हा प्'त्येक कोन दुस–या कोनाचा कोटिकोन असतो, असे म्हणतात.



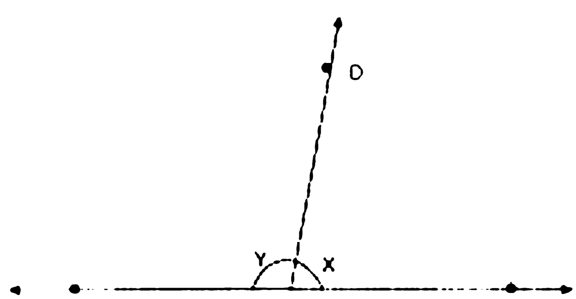
(a) आ. 10.17 (b)

आता आ.10.17 (a) आणि (b) मधील कोनांच्या जोडयांचे निरीक्षण करा.

प्रत्येक जोडीतील कोनांच्या मापांची बेरीज 180^0 असते

ज्या दोन कोनांच्या मापांची बेरीज 180^0 असते त्या कोनांच्या जोडीला **<u>पूरक कोनांची</u>** जोडी असे म्हणतात.

तेव्हा एक दोन दुस–या कोनाचा **<u>पूरक कोन</u>** आहे असे म्हणतात.रेषा AB काढा. त्या रेषेवर C बिंदू घेऊन C बिंदूतून किरण CD काढा. यामुळे < X व < Y असे दोन कोन तयार होतील.



आ. 10.18

आता < x व < Y यांची मापे मोजा व त्यांची बेरीज करा. आपल्याला त्यांची बेरीज नेहमी 180^0 आढळेल. यावरून आपणास खालीलप्रमाणे निष्कर्ष काढता येईल.

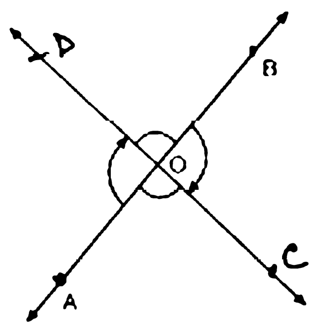
आता < x व < Y यांची मापे मोजा व त्यांची बेरीज करा. आपल्याला त्यांची बेरीज नेहमी 180^0 आढळेल. यावरून आपणास खालीलप्रमाणे निष्कर्ष काढता येईल.

‘एका रेषेवरील एका उभ्या किरणामुळे तयार झालेला संलग्न कोनांच्या मापांची बेरीज 180^0 असते.’

आ. 10.18 मध्ये तयार झालेल्या कोनांच्या जोडीला रेषीय जोडीतील कोन असे म्हणतात.

लक्षात ठेवा की हे कोन परस्परांचे पूरक असतात.

रेषा AB व रेषा CD या परस्परांना छेदणाऱ्या रेषा काढा. या रेषांच्या छेदनबिंदूस ‘O’ नाव द्या.



आ. 10.19

< AOC व < BOD हे परस्परांचे विरूध्द कोन आहेत. हे कोन विरूध्द कोनांची जोडी तयार करतात. यांची मापे मोजा. तुम्हाला असे आढळेल की,

< AOC = < BOD ,

< AOD आणि < BOC ही परस्परांच्या विरूध्द कोनांची दुसरी जोडी आहे. ते मोजल्यावर तुम्हाला असे आढळेल की

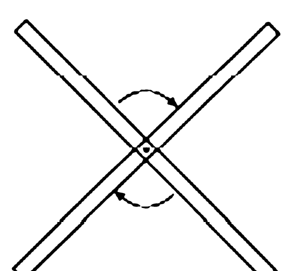
< AOD = < BOC,

यावरून असे लक्षात घ्या की,

‘ जर दोन रेषा एकमेकींना छेदत असतील तर परस्परविरूध्द कोन समान मापांचे असतात.’

असा तुम्ही खालील कृती करा.

आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे खिळा किंवा टाचणी यांच्या सहाय्याने दोन पट्ट्या जोडा.

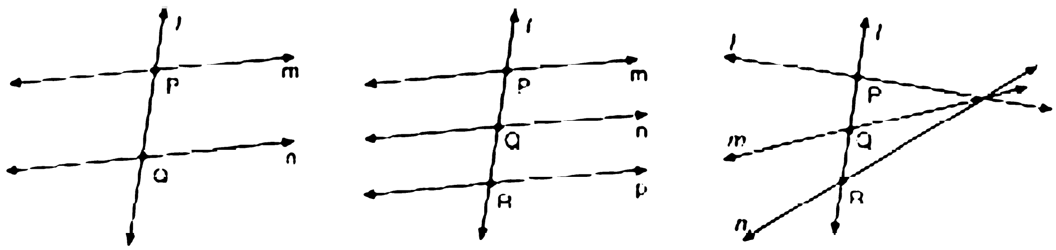


आ. 10.20

एक पट्टी तशीच स्थिर ठेवून

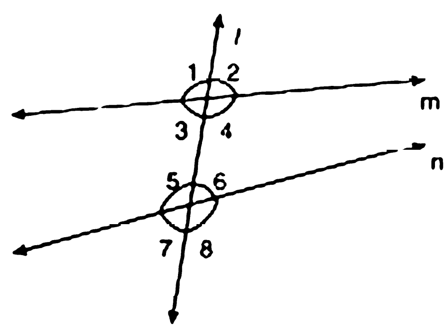
दुसरी पट्टी फिरवा आणि पहा की तयार झालेले परस्परविरूध्द कोन समान आहेत.

जी रेषा, दोन किंवा अधिक रेषांना भिन्न बिंदूत छेदते, तेव्हा त्या रेषेला छेदिका असे म्हणतात. उदा. आ. 10.21 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे रेषा ℓ ही छेदिका आहे.



आ. 10.21

जेव्हा दोन रेषांना छेदिका छेदते तेव्हा आठ कोन तयार होतात.



आ. 10.22

समांतर रेषांचे गुणधर्म अभ्यासण्यासाठी या कोनांच्या जोडया खूप महत्वाच्या आहेत. त्याखालीलप्रमाणे.

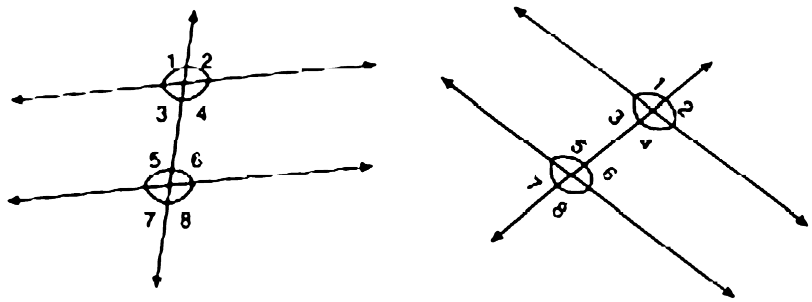
(a) < 1 आणि < 5 ही संगत कोनांची जोडी आहे. त्याचप्रमाणे < 2 आणि < 6, < 3 आणि < 7, < 4 आणि < 8 या सुध्दा संगतकोनांच्या इतर जोडया आहेत.

(b) < 3 आणि < 6 ही व्युत्क्रम कोनांची जोडी आहे. < 4 आणि < 5 ही व्युत्क्रमकोनांची दुसरी जोडी आहे.

(c) < 3 आणि < 5 ही आंतरकोनांची जोडी आहे. हे कोन छेदिकेच्या एकाच अंगास आहेत. < 4 आणि < 6 ही आंतरकोनांची दुसरी जोडी आहे.

वरील आ. 10.22 मध्ये रेषा m आणि रेषा n या समांतर रेषा नाहीत. त्यामुळे वरीलपैकी कोणत्याही जोडीमध्ये कोणता तरी संबंध असेलच असे नाही परंतु जेव्हा या रेषा समांतर असतात तेव्हा मात्र त्यांच्यामध्ये अत्यंत उपयोगी संबंध असतात ते कसे ते आपण खाली पाहणार आहोत.

जेव्हा दोन समांतर रेषांना एक छेदिका छेदते तेव्हा आठकोन तयार होतात. (त्या समांतर रेषांची व छेदिकेची स्थिती कशीही असली तरीही,)



आ. 10.23

जर हे कोन मोजले तर आपल्याला निदर्शनास येईल की , $< 1 = < 5$, $< 2 = < 6$, $< 3 = < 7$ आणि $< 4 = < 8$. म्हणजेच संगत कोन समान मापांचे आहेत. तसेच $< 3 = < 6$ आणि $< 4 = < 5$ म्हणजेच व्युत्क्रम कोन समान मापांचे आहेत.

त्याचप्रमाणे $< 3 + < 5 = 180^0$ आणि $< 4 + < 6 = 180^0$ म्हणजेच आंतरकोनांच्या मापांची बेरीज 180^0 असते यावरून असा निष्कर्ष काढता येतो की,

जर दोन समांतर रेषांना एका छेदिकेने छेदले तर,

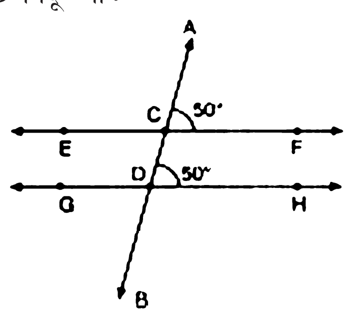
(i) संगत कोनांची प्रत्येक जोडी समान असते.

(ii) व्युत्क्रम कोनांची प्रत्येक जोडी समान असते.

(iii) छेदिकेच्या एकाच अंगास असणारे आंतरकोन पूरक आहेत.

दोन समांतर रेषा काढून (पट्टीच्या दोन्ही कडा वापरून) छेदिका काढून आणि या जोडीतील प्रत्येक कोन मोजून वरील निष्कर्षांचा तुम्हाला पडताळा घेता येईल.

प्रत्येक निष्कर्षाचा व्यत्यास ही सत्य आहे. पहिल्या व्यत्यासाचा पडताळा घेण्यासाठी एक रेषा AB काढा, त्यावर C आणि D विंदू घ्या.



आ. 10.24

आकृतीत दाखविल्याप'माणे C आणि D विंदूपाशी 50^0 मापाचे $< ACF$ आणि $< CDH$ समान मापांचे कोन काढले. रेषा EF आणि रेषा GH या दोन्ही बाजूंना वाढवल्या तरी त्या परस्परांना छेदत नाहीत म्हणजेच त्या समांतर रेषा आहेत. याचप'माणे इतर दोन व्यत्यासांची सत्यता आपल्याला पडताळता येते.

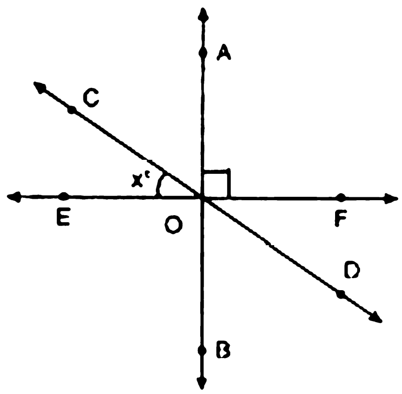
यावरून आपण असा निष्कर्ष काढतो की एका छेदिकेने दोन रेषांना असे छेदले असेल की,

(i) संगतकोनांच्या जोडया समान मापाच्या असतील, किंवा

(ii) व्युत्क्रम कोनांच्या जोडया समान मापाच्या असतील किंवा

(iii) छेदिकेच्या एकाच अंगास असणारे आंतरकोन पूरक असतील, तर त्या दोन रेषा परस्परांना समांतर असतात.

उदा. 10.1: खाली दिलेल्या बहुपर्यायी प'श्नांमध्ये दिलेल्या पर्यायातून बरोबर उत्तराचा योग्य पर्याय निवडा.



आ. 10.25

(i) आ. 10.25 मध्ये < FOD व < BOD हे ....

(A) पूरककोन (B) कोटीकोन (C) परस्पर विरूध्द कोन (D) रेषीय जोडीतील कोन

उत्तर ः (B)

(ii) आ. 10.25 मध्ये < COE व < BOE हे ....

(A) कोटिकोन (B) पूरककोन (C) रेषीय जोडीतील कोन (D) संलग्न कोन

उत्तर ः (D)

(iii) आ. 10.25 मध्ये < BOD हा .... वरोबर आहे.

(A) x^0 (B) $(90 + x)^0$ (C) $(90-x)^0$ (D) $(180 – x)^0$

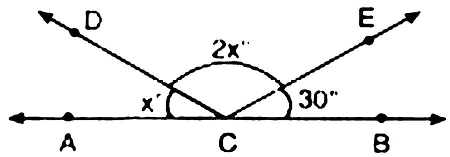
उत्तर ः (C)

(iv) एक कोन त्याच्या पूरक कोनाच्या चौपट आहे तर तो कोन .... आहे.

(A) 36^0 (B) 72^0 (C) $(108)^0$ (D) $(144)^0$

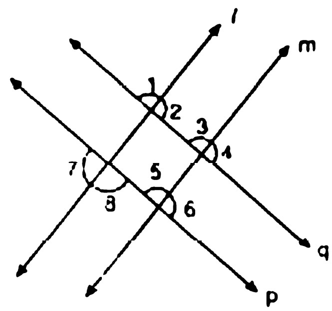
उत्तर ः (D)

(V) आ. 10.26 मध्ये x चा कोणत्या किंमतीसाठी ACB हा सरळकोन होईल ?



आ. 10.26

(A) 30^0 (B) 40^0 (C) 50^0 (D) 60^0 उत्तर : (C)



आ. 10.27

वरील आकृतीत (आ. 10.27) ℓ समांतर m आणि p समांतर q आहे.

(vi) < 3 आणि < 5 हे .... जोडी करतात.

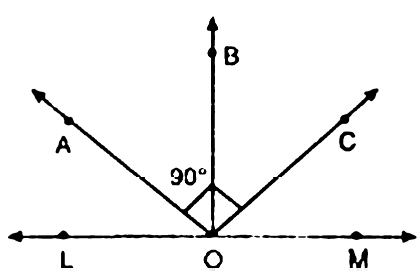
(A) व्युत्क्रमकोनांची (B) आंतरकोनांची (C) परस्परविरूध्द कोनांची (D) संगत कोनांची

उत्तर : (D)

(vii) वरील आ. 10.27 मध्ये जर $< 1 = 80^0$ तर $< 6 = ?$

(A) 80^0 (B) 90^0 (C) 100^0 (D) 110^0

उत्तर : (C)



आ. 10.28

(viii) आ. 10.28 मध्ये OA हा < LOB चा दुभाजक आहे, OC हा < MOB चा दुभाजक आहे आणि $< AOC = 90^0$ तर बिंदू L,O, M हे एकरेषीय आहेत दाखवा.

उत्तर : $< BOL = 2 \text{ X} < BOA$ ……………….. (i)

आणि $< BOM = 2 \text{ X} < BOC$ ………………… (ii)

(i) व (ii) यांची बेरीज करून

$< BOL + < BOM = 2 < BOA + 2 < BOC$

$\therefore < LOM = 2 (< BOA + < BOC)$

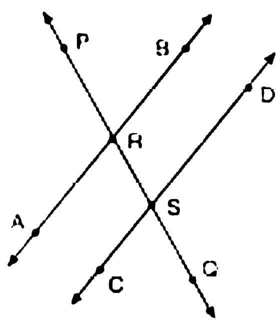
$\therefore < LOM = 2 \text{ X } 90^0$

$\therefore < LOM = 180^0$ = सरळकोन

$\therefore$ L,O, M हे बिंदू एकरेषीय आहेत हे सिध्द.

तुमची प्रगती अजमावून पहा 10.1

1. खालील बहुपर्यायी प्रश्नांमध्ये दिलेल्या पर्यायांमधून बरोबर उत्तर शोधा.



आ. 10.29

आ. 10.29 मध्ये AB || CD आणि PQ ही त्यांना अनुक्रमे बिंदू R आणि S मध्ये छेदत असेल तर,

(i) $< ARS$ आणि $< BRS$ ही ……………. जोडी तयार करतात.

(A) व्युत्क्रम कोनांची (B) रेषीय जोडी (C) संगत कोनांची (D) विरूध्द कोनांची

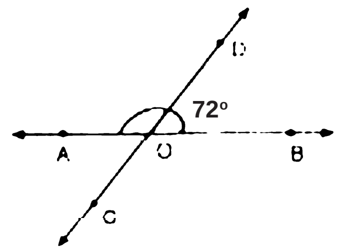
(ii) $< ARS$ आणि $< RSD$ ही ……………. जोडी तयार करतात.

(A) व्युत्क्रम कोनांची (B) रेषीय जोडी (C) संगत कोनांची (D) विरूध्द कोनांची

(iii) जर $< PRB = 60^0$, तर $< QSC$ = …………..

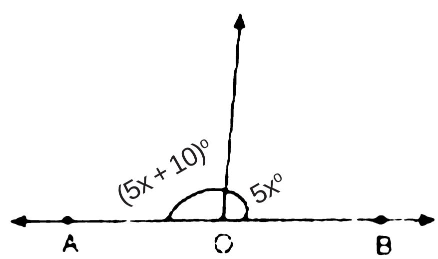
(A) 120^0 (B) 60^0 (C) 30^0 (D) 90^0

टिपा



आ. 10.30

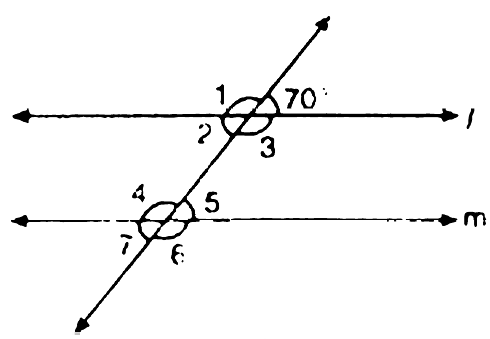
(iv) आ.10.30 मध्ये रेषा AB आणि रेषा CD या परस्परांना O बिंदूत छेदतात तर < COB =...................



आ. 10.31

(2) आ. 10.31 मध्ये AB सरळरेषा आहे तर x ची किंमत मिळवा.

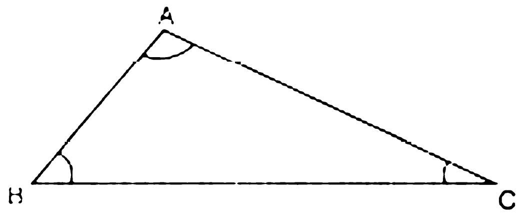
(3) खालील आ. 10.32 मध्ये $\ell \parallel m$, तर < 1 ते < 7 ची मापे काढा.



आ. 10.32

10.3 त्रिकोण, त्रिकोणाचे प्रकार आणि गुणधर्म

त्रिकोण ही एका प्रतलातील तीन रेषाखंडानी तयार झालेली बंदिस्त आकृती आहे.



आ. 10.33

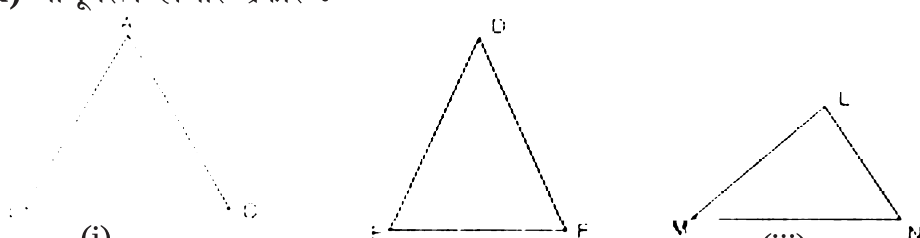
तीन रेषाखंडानी तयार झालेल्या या बंदिस्त आकृतीचे एकूण सहा घटक असतात. तीन कोन (i) < ABC किंवा < CBA, (ii) < ACB किंवा < BCA, (iii) < CAB किंवा < BAC आणि तीन बाजू (iv) AB (v) BC (vi) CA

यालाच ΔABC किंवा BAC किंवा CBA आणि याचे वाचन त्रिकोण ABC किंवा त्रिकोण BAC किंवा त्रिकोण CBA असे करतात.

10.3.1 त्रिकोणाचे प्रकार

त्रिकोणाच्या प्रकाराचे वर्गीकरण दोन प्रकारे केले जाते

(a) बाजूवरून होणारे प्रकार ः



(i) (ii) (iii)

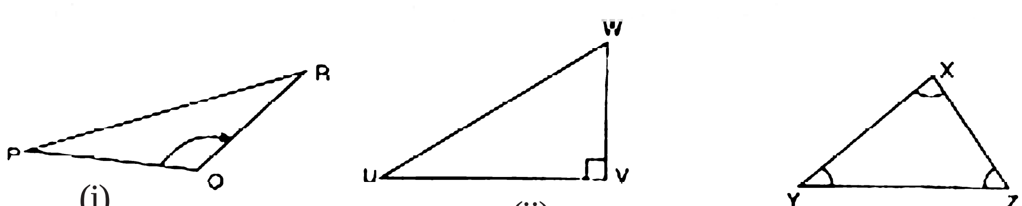
आ. 10.34

(i) <u>**समभुज त्रिकोण ः**</u> ज्या त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजू समान असतात त्या त्रिकोणाला समभुज त्रिकोण म्हणतात. आ. 10.34 (i) मधील ΔABC हा समभूज आहे.

(ii) <u>**समव्दिभूज त्रिकोण ः**</u> ज्या त्रिकोणाच्या दोन बाजू समान असतात त्या त्रिकोणाला समव्दिभूज त्रिकोण म्हणतात. आ. 10.34 (ii) मधील DEF हा समव्दिभूज त्रिकोण आहे.

(iii) <u>**विषमभूज त्रिकोण ः**</u> ज्या त्रिकोणाच्या सर्व भूजा भिन्न असतात त्या त्रिकोणाला विषमभूज त्रिकोण म्हणतात. आ. 10. 34 (iii) मधील LMN हा विषमभूज त्रिकोण आहे.

(b) कोनावरून होणारे प्रकार ः



(i) (ii) (iii)

आ. 10.35

(i) <u>**विशालकोन त्रिकोण** ः</u> ज्या त्रिकोणाचा एक कोन विशालकोन असतो, त्या त्रिकोणाला विशालकोन त्रिकोण असे म्हणतात. आ. 10.35 (i) मधील ΔPQR

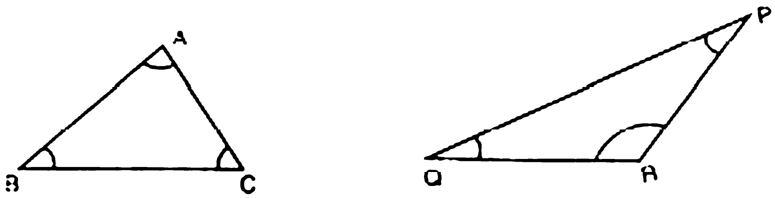
(ii) <u>**काटकोन त्रिकोण** ः</u> ज्या त्रिकोणाचा एक कोन काटकोन असतो, त्या त्रिकोणाला काटकोन त्रिकोण असे म्हणतात. आ. 10.35 (ii) मधील UVW

(iii) <u>**लघुकोन त्रिकोण** ः</u> ज्या त्रिकोणाचे सर्व कोन लघुकोन असतात, त्या त्रिकोणाला लघुकोन त्रिकोण म्हणतात. आ. 10. 35 मधील XYZ

आता आपण त्रिकोणाच्या कोनाचे काही महत्वाचे गुणधर्म अभ्यासणार आहोत.

<u>10.3.2 त्रिकोणाच्या कोनांच्या बेरजेचा गुणधर्म ः</u>

खाली दोन त्रिकोण काढले आहेत त्यांचे कोन मोजा.



आ. 10.36

आकृती 10.36 (a) मध्ये $< A = 80^0, < B = 40^0, < C = 60^0$

$\therefore < A + < B + < C = 80^0 + 40^0 + 60^0 = 180^0$

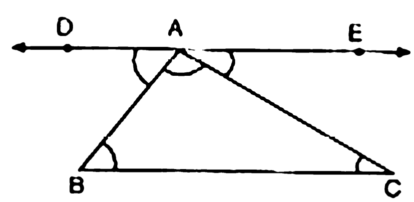
आ. 10.36 (b) मध्ये $< P = 30^0$, $< Q = 40^0$ आणि $< R = 110^0$

$\therefore < P + < Q + < R = 30^0 + 40^0 + 110^0 = 180^0$

प्रत्येक त्रिकोणाच्या कोनांची बेरीज 180^0 आहे.

आपण हा निष्कर्ष एक प्रमेय म्हणून तार्कीक पध्दतीने सिध्द करणार आहोत.

<u>प्रमेय ः **त्रिकोणाच्या तिन्ही कोनांच्या मापांची बेरीज 180^0 असते.**</u>



आ. 10.37

<u>पक्ष ः</u> ΔABC हा एक त्रिकोण आहे.

<u>साध्य ः</u> $< A + < B + < C = 180^0$

<u>रचना ः</u> A बिंदूतून रेख BC ला समांतर रेषा DE काढा.

<u>सिध्दता ः</u> DE ही BC ला समांतर असून AB ही छेदिका आहे.

$\therefore$ < B = < BAD .... (व्युत्क्रम कोन)

तसेच < C = < EAC .... (व्युत्क्रम कोन)

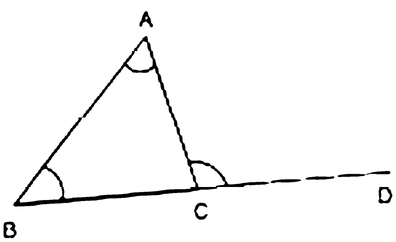
$\therefore$ < B + < C = < BAD + < EAC .... (1)

निष्कर्ष (i) च्या दोन्ही बाजूत < A मिळवू

$\therefore$ < A + < B + < C = < A + < BAD + < EAC = 180^0

($\therefore$ सरळकोन करणारे कोन)

<u>10.3.3</u> <u>त्रिकोणाचा बाहयकोन ः</u>

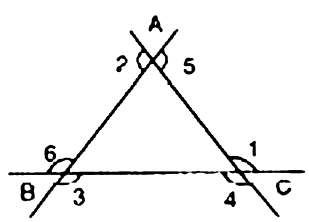


आ. 10.38

ΔABC ची बाजू BC ही D पर्यंत वाढवा.

आ. 10.39 मध्ये पहा. ABC चे सहा बाहयकोन दर्शविले आहेत.

ते कोन < 1, < 2, < 3, < 4, < 5. आणि < 6



आ. 10.39

आ. 10.38 मध्ये < ACD हा ABC चा बाहयकोन आहे.

त्रिकोणाची वाढवलेली एक बाजू आणि त्रिकोणाची दुसरी बाजू यांनी तयार केलेल्या कोनाला त्या त्रिकोणाचा बाहयकोन म्हणतात.

त्रिकोणाच्या प्रत्येक बाहयकोनाशी दोन विरूध्द आंतरकोन निगडीत असतात.

दिलेल्या बाहयकोनाशी रेषीय जोडी तयार न करणारे कोन म्हणजे विरूध्द आंतरकोन होय.

उदा. आ. 10.38 मध्ये <A आणि < B हे ΔABC च्या < ACD या बाहयकोनाशी संवंधी विरूध्द आंतरकोन आहेत. आपण हे कोन मोजले असता ,

< A = 60^0, < B = 50^0 आणि < ACD = 110^0

लक्षात घ्या $< ACD = < A + < B$

सर्वसाधारणपणे असेच दिसून येते.

यावरून आपणास असा निष्कर्ष काढता येतो की,

त्रिकोणाचा बाहयकोन हा दोन विरूध्द आंतरकोनांच्या बेरजेएवढा असतो.

उदा. **10.3 :** खाली दिलेल्या बहुपर्यायी प्र्शनांमध्ये दिलेल्या पर्यायापैकी योग्य तो पर्याय निवडा.

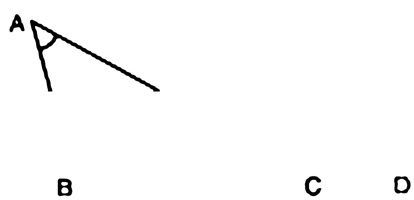
(i) खालीलपैकी कोणते कोन त्रिकोणाचे कोन आहेत ?

(A) $65^0, 45^0$ आणि 80^0 (B) $90^0, 30^0$ आणि 61^0

(C) $60^0, 60^0$ आणि 59^0 (D) $65^0, 45^0$ आणि 80^0

उत्तर : (D)

(ii)



आ. 10.40

आ. 10.40 मध्ये $< A =$ .... आहे.

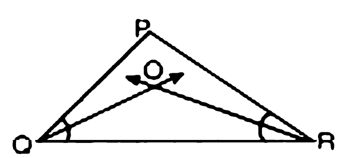
(A) 30^0 (B) 35^0 (C) 45^0 (D) 120^0

उत्तर : (B)

(iii) त्रिकोणाचा एक कोन दुस-या कोनाच्या दुप्पट आहे आणि तिसरा कोन 60^0 आहे तर सर्वात मोठा कोन .... असेल.

उत्तर : (B)

उदा. 10.4:



आ. 10.41

आ. 10.41 मध्ये $< PQR$ आणि $< PRQ$ यांचे कोनदुभाजक एकमेकांना O बिंदूत छेदतात. तर सिध्द करा.

$< QOR = 90^0 + \frac{1}{2} < P$

उत्तर ः $< QOR = 180^0 - \left[\frac{1}{2} < PQR + \frac{1}{2} < PRQ\right]$

$= 180^0 -$

$= 180^0 -$

$= 180^0 - 90^0 + < P$

$\therefore < PQR = 90^0 + < P$ हे सिध्द

आपली प्रगती अजमावून पहा.

1. खाली दिलेल्या बहुपर्यायी प्रश्नांच्या दिलेल्या पर्यायातून योग्य उत्तर निवडा.

(i) त्रिकोणाला .... असू शकतात.

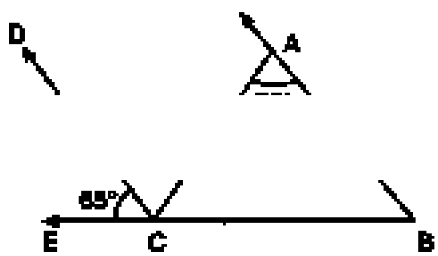
(A) दोन काटकोन (B) दोन विशालकोन

(C) जास्तीत जास्त दोन लघुकोन (D) तिन्ही लघुकोन

(ii) एका काटकोन त्रिकोणाचा एक बाहयकोन 120^0 आहे तर त्या त्रिकोणाचा सर्वात लहान कोन .... आहे.

(A) 20^0 (B) 30^0 (C) 40^0 (D) 60^0

(iii)



आ. 10.42

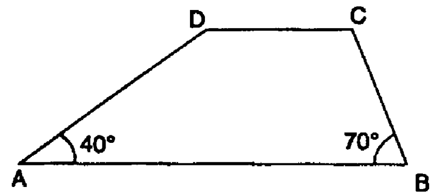
आ. 10. 42 मध्ये CD ही BA ला समांतर आहे. $< ACB =$ ....

(A) 55^0 (B) 60^0 (C) 65^0 (D) 70^0

2. एका त्रिकोणाच्या कोनांचे गुणोत्तर 2:3:5 आहे. तर त्या तीन कोनांची मापे काढा.

3. चौकोनाच्या चार कोनांची बेरीज 360^0 हे सिध्द करा.

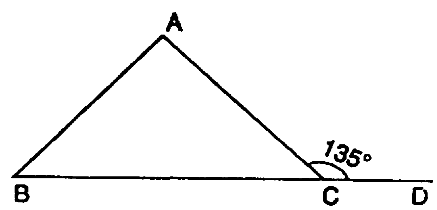
4. आ. 10.43 मध्ये ABCD या समलंब चौकोनात $AB \parallel DC$, $< D$ आणि $< C$ काढा आणि चौकोनाच्या चार कोनांच्या मापांची बेरीज 360^0 असते याचा पडताळा घ्या.



आ. 10.43

5. एका त्रिकोणाच्या दोन कोनांची बेरीज उरलेल्या कोनाबरोबर असेल तर तो काटकोन त्रिकोण असतो हे सिध्द करा.

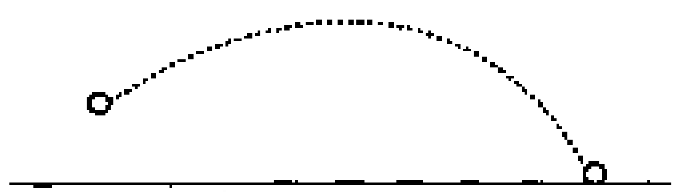
6. आ. 10.44 मध्ये ΔABC असा त्रिकोण आहे की $< ABC = < ACB$ तर त्रिकोणाचे कोन काढा.



आ. 10.44

10.4 बिंदूपथ

क्रिकेटच्या खेळामध्ये जेव्हा एखादा खेळाडू चेंडू मारतो तेव्हा त्याचा झेल घेण्यापूर्वी किंवा तो जमिनीला टेकण्यापूर्वी तो एक मार्ग आक्रमतो.

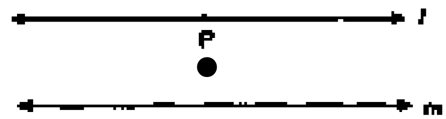


आ. 10.44A

हा आक्रमलेला मार्ग म्हणजे विंदूपथ होय.

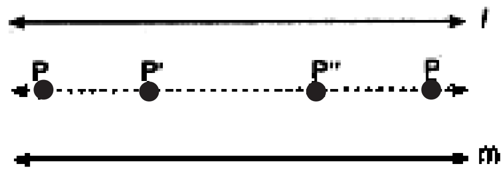
एखाद्या बिंदूने विशिष्ट अटी पाळल्यावर एका जागेवरून दुस-या जागेवर जाण्यासाठी आक्रमलेला मार्ग म्हणजे भूमितीतील आकृती होय.

उदा. (1) रेषा ℓ आणि रेषा m या रेषा परस्परांना समांतर आहेत. P हा त्यांच्या दरम्यान असा बिंदू आहे की या दोन्ही रेषांपासून तो समदूर आहे.



आ. 10.45

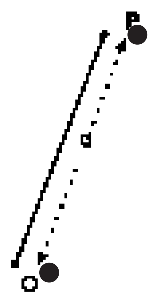
जर दिलेल्या दोन्ही रेषापासून समान अंतर राहील अशा प्रकारे P बिंदू हलला तर P बिंदूचा मार्ग कोणता असेल ?



आ. 10.46

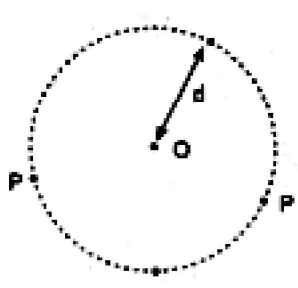
P बिंदूचा मार्ग म्हणजे दिलेल्या दोन समांतर रेषांना समांतर असलेली रेषा आहे आणि ती रेषा दिलेल्या रेषांच्या मध्ये आहे. आ. 10.46 पहा.

(2) O हा एक स्थिर बिंदू आहे आणि या स्थिरबिंदपासन d स्थिर अंतरावर P हा एक बिंदू आहे.



आ. 10.47

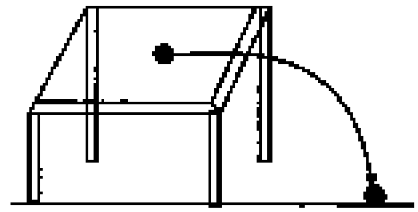
जर O या स्थिर बिंदूपासून d या स्थिर अंतरावर P बिंदू त्याच प्रतलात फिरला तर त्याचा मार्ग कोणता असेल ?



आ. 10.48

P या बिंदूने आक्रमलेला मार्ग म्हणजे वर्तुळ आहे. आ. 10.48 पहा.

3) एखादा खडूचा तुकडा किंवा एखादी गोटी टेबलाच्या पृष्ठभागावर ठेवा. एखाद्या पेन्सिलने किंवा काठीने तो जोरात ढकला. टेबलावरून खाली पडताना त्याने कोणता मार्ग आक्रमला आहे. त्याचे निरीक्षण करा.



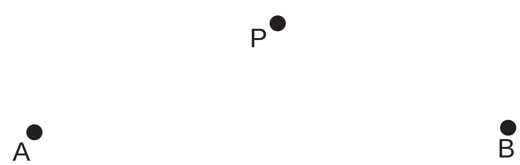
आ. 10.49

या गोटीने आक्रमलेला मार्ग ही एक वक्र रेषा आहे. (ही वक्ररेषा म्हणजे पॅराबोल या वक्ररेषेचा भाग आहे.) आ. 10.49 पहा.

अशारीतीने बिंदूपथ म्हणजे एखाद्या बिंदूने विशिष्ट अटी पाळून आक्रमलेला मार्ग किंवा भूमितीय आकृती होय, की ज्या आकृतीवरील प्रत्येक बिंदू दिलेल्या अटीचे पालन करतो.

10.4.1 दोन बिंदूपासून समदूर असलेल्या बिंदूचा बिंदूपथ

समजा A आणि B हे दोन दिलेले बिंदू आहेत.

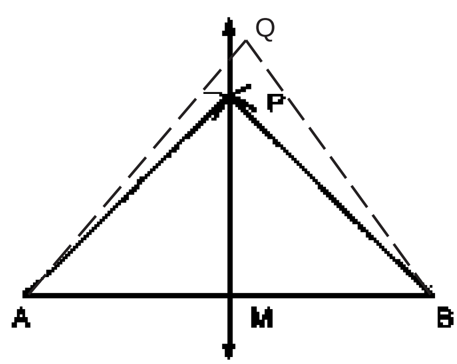


आ. 10.50

आपणास PA = PB अशी अट पाळणाऱ्या P बिंदूचा बिंदूपथ शोधायचा आहे.

AB जोडा. M हा AB चा मध्यबिंदू घ्या. कंपासच्या सहाय्याने PA व PB असा दुसरा P बिंदू काढा. PM जोडा व दोन्ही बाजूस वाढवा. कर्कटक किंवा पट्टीच्या सहाय्याने तुम्हाला पडताळा घेता येईल की PM वरलि प्'त्येक बिंदू A आणि B पासून समान अंतरावर आहे.

तसेच $< AMP = < BMP = 90^0$ म्हणजेच PM हा AB चा लंबदुभाजक आहे. तसेच जर आपण Q हा आणखी एक बिंदू असा घेतला की जो PM रेषेवर राहणार नाही, तेव्हा $QA \neq QB$ होईल म्हणूनच PM हा AB चा लंबदुभाजक आहे.



आ. 10.51

यावरून असा निष्कर्ष काढता येतो की,

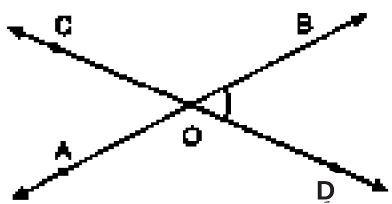
दिलेल्या दोन बिंदूपासून समदूर असलेल्या बिंदूचा बिंदूपक्ष हा त्या दोन बिंदूना जोडणा–या रेषाखंडाचा लंबदुभाजक असतो.

तुमच्यासाठी कृती : (खालील कृती करा)

एका कागदावर A आणि B असे दोन बिंदू काढा ते जोडा. AB च्या मध्यबिंदूवर कागद असा दुमडा की A आणि B एकमेकांवर पडतील (जुळतील) एक सरळरेषा मिळेल हाच A आणि B या दिलेल्या दोन बिंदूपासून समान अंतरावर असलेल्या बिंदूचा बिंदूपथ होय. या रेषेवरील प्रत्येक बिंदू हा दिलेल्या बिंदू A आणि B पासून समदूर आहे याचा पडताळा घेता येईल.

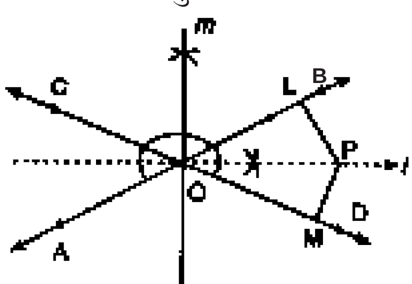
<u>10.4.2 O बिंदूत छेदणा–या दोन रेषापासून समान अंतरावर असणा–या बिंदूचा बिंदूपथ :</u>

समजा AB आणि CD या दोन रेषा परस्परांना O बिंदत छेदतात.



आ. 10.52

आपणास अशा P बिंदूचा बिंदूपथ शोधायचा आहे की जो बिंदू AB आणि CD पासून समान अंतरावर असेल. आता < BOD व < BOC चे कोनदुभाजक काढा.



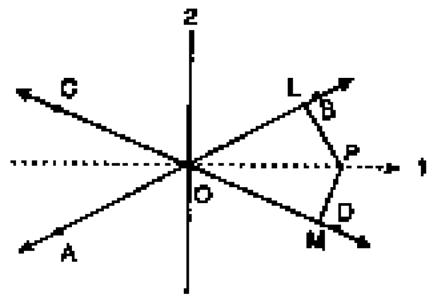
आ. 10.53

जर आपण ℓ किंवा m या कोनदुभाजक रेषांवर P हा कोणताही एक बिंदू घेतला, आणि PL ⊥ AB व PM CD काढल्यास असे आढळून येते की P बिंदू AB व CD पासून समान अंतरावर आहे म्हणजेच PL = PM. त्याचप्रमाणे समजा आणखी एक Q हा बिंदू असा घेतला की जो कोनदुभाजक किंवा m रेषेवर नाही. तेव्हा आपणास असे आढळते की QL QM, यावरून असा निष्कर्ष निघतो की,

परस्परांना छेदणा–या दोन रेषांपासून समान अंतरावर असणा–या बिंदूचा बिंदूपथ हा त्या रेषांनी तयार केलेल्या कोनांच्या दुभाजकांची जोडी असतो.

<u>तुमच्यासाठी कृती / खालील कृती करा.</u>

एका कागदारवर परस्परांना छेदणा–या रेषा AB व रेषा CD काढा. छेदनबिंदूस O नाव द्या. O बिंदूपाशी कागद असा दुमडा की AO हा CO वर पडेल आणि OD हा OB वर पडेल. त्या दुमडीवर घडी घाला. त्या घडीवर P बिंदू घ्या की तो < BOD च्या दुभाजकावर असेल आणि गुण्याच्या सहाय्याने पडताळा घ्या. PL = PM मिळते का? ते पहा.



आ. 10.54

त्याचप्रमाणे पुन्हा दुमडल्यास रेषा 2 मिळेल. या दुस–या रेषेवरही कोणताही बिंदू त्या दोन्ही रेषांपासून समदूर असेल.

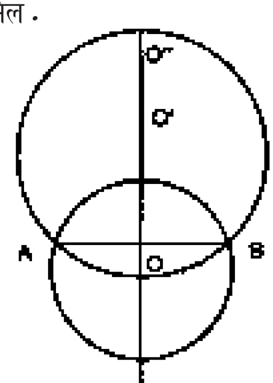
उदा. 10.5 : दिलेल्या कोन बिंदूतून जाणा–या वर्तुळाच्या केंद्राचा बिंदूपथ कोणता असेल.

उकल ः समजा A आणि B हे दोन विंदू आहेत. आपल्याला A आणि B मधून जाणा–या वर्तुळाच्या केंद' O ची स्थिती शोधायची आहे.

O

A B

बिंदू O हा A व B पासून समदूर असायला हवा. आताच आपण असे पाहिले आहे की या O बिंदूचा बिंदूपथ हा AB चा लंबदुभाजक असेल.



आ. 10.56

10.3 आपली प्रगती आजमावून पहा.

1. A,B आणि C या तीन नैकरेषीय विंदूतून जाणा-या वर्तुळाच्या केंद्राचा विंदूपथ काढा.
2. एका विशिष्ट अंतरावर दोन गावे आहेत. या गावांच्या मध्ये अशी विहीर खणावयाची आहे की त्या विहीरीचे प्रत्येक गावापासूनचे अंतर त्या दोन गावांतील अंतरापेक्षा जास्त असता कामा नये. A आणि B बिंदूनी ती गावे दाखवा आणि P बिंदूने विहीर दाखवा. P बिंदूच्या बिंदूपथाची आकृती काढा.
3. AB आणि CD हे दोन रस्ते परस्परांना O बिंदूत छेदत आहेत. O बिंदूपासून एक किलोमीटर अंतरावर तसेच AB आणि CD या रस्त्यापासून समान अंतरावर एक पोस्ट ऑफिस बांधायचे आहे. तर त्या पोस्ट ऑफिसच्या शक्य असलेल्या जागा दर्शविणारी आकृती काढा.
4. रेषा AB पासून 5 सेमी अंतरावर असणा-या बिंदूचा बिंदूपथ काढा.

सारांश ः

- रेषा ही दोन्ही बाजूंनी अमर्याद असते आणि रेषाखंड हा त्या रेषेवरील दोन बिंदूतील काही भाग असतो.
- एका प्रतलातील दोन रेषा एकमेकींना छेदतात किंवा समांतर असतात.
- जर तीन किंवा तीनपेक्षा जास्त रेषा एका बिंदूत छेदत असतील तर त्यांना एकसंपाती रेषा असे म्हणतात.
- एकाच बिंदूतून निघणा-या दोन किरणांमध्ये कोन तयार होतो.
- ज्या दोन कोनांची बेरीज 90^0 असते, त्यांना एकमेकांचे कोटीकोन असे म्हणतात.
- ज्या दोन कोनांची बेरीज 180^0 असते, त्यांना एकमेकांचे पूरककोन असे म्हणतात.
- एका रेषेवर एक किरण उभा केला तर तयार होणा-या संगत कोनांची बेरीज 180^0 असते.
- जर दोन रेषा परस्परांना छेदत असतील तर परस्पर विरूध्द कोन समान असतात.
- जर दोन समांतर रेषांना छेदिकेने छेदले तर,

(i) जोडीतील संगत कोन समान असतात.

(ii) व्युत्क्रम कोन समान असतात.

(iii) छेदिकेच्या एकाच अंगास असणारे आंतरकोन पूरक असतात.

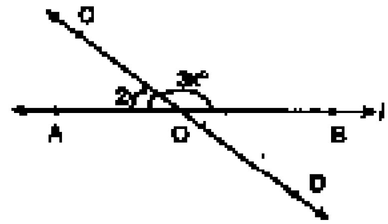
- त्रिकोणाच्या तिन्ही कोनांची बेरीज 180^0 असते.
- त्रिकोणाच्या बाहयकोन हा दोन विरूध्द आंतरकोनांच्या बेरजेएवढा असतो.
- दिलेल्या दोन बिंदूपासून समदूर असलेल्या बिंदूचा बिंदूपथ हा त्या दोन बिंदूना जोडणा-या रेषाखंडाचा लंबदुभाजक असतो.

टिपा

- परस्परांना छेदणा–या दोन रेषापासून समान अंतरावर असलेल्या बिंदूचा बिंदूपथ हा त्या रेषांनी तयार झालेल्या कोनांच्या दुभाजकांची जोडी असतो.

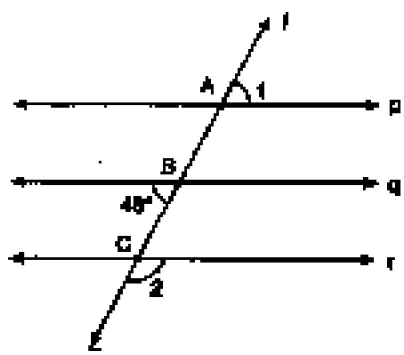
संकीर्ण प्रश्नसंग्रह ः

1. आ. 10.57 मध्ये, जर $x = 42^0$ तर (a) y आणि (b) < AOD यांच्या किंमती काढा.



आ. 10.57

2.

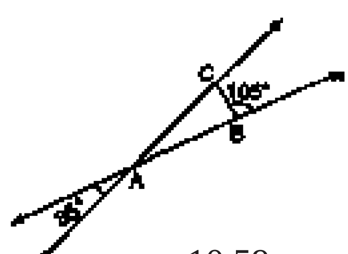


आ. 10.58

आ.10.58 मध्ये रेषा p,q,r या परस्परांना समांतर असून रेषा ℓ ही छेदिका अनुक्रमे A,B,C या बिंदूत छेदते. तर < 1 आणि < 2 मिळवा.

3. त्रिकोणाच्या दोन कोनांची बेरीज तिस–या कोनाबरोबर आहे तर तिसरा कोन काढा. हा कोणत्या प्रकारचा त्रिकोण होईल ?

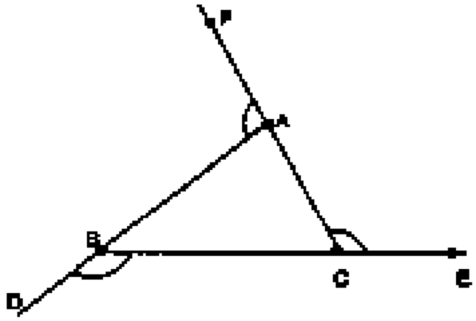
4.



आ. 10.59

आ. 10.59 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे ΔABC च्या बाजू वाढवलेल्या आहेत. तर त्रिकोणाचे कोन काढा.

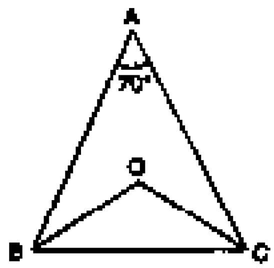
5.



आ. 10.60

आ. 10.60 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे ΔABC च्या बाजू वाढवल्या आहेत. वरीलप्रमाणे तयार झालेल्या वाहयकोनांची बेरीज 360^0 असते हे दाखवा.

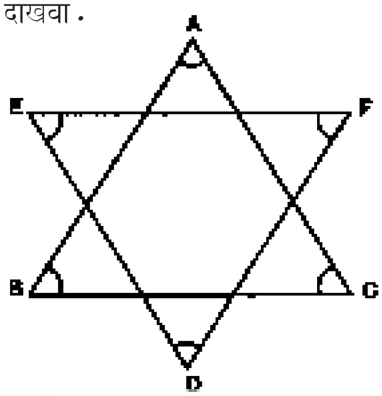
6.



आ. 10.61

आ. 10.61 मध्ये ΔABC च्या < B व < C चे दुभाजक O बिंदूत छेदतात.
तर <BOC = 125^0 आहे हे दाखवा.

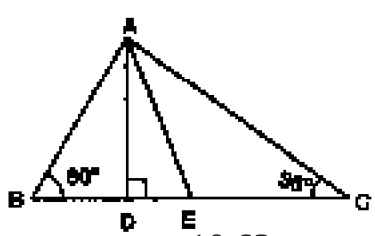
7.



आ. 10.62

आ. 10.62 मध्ये < A, < F, < C, < D, < B, आणि < E कोनांची बेरीज काढा.

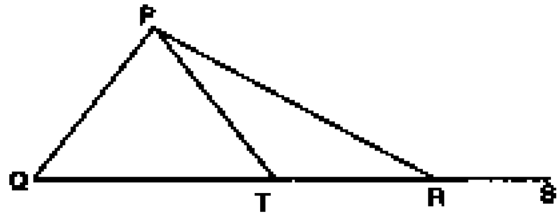
8.



आ. 10.63

आ. 10.63 मध्ये ΔABC दिला आहे. AD हा BC वरील लंब आहे. AE हा < BAC चा दुभाजक आहे. तर < DAE काढा.

9.



आ. 10.64

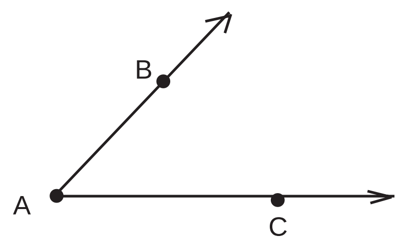
आ. 10.64 मध्ये ΔPQR च्या < P चा PT हा दुभाजक आहे. QR हा S पर्यंत वाढवला तर दाखवा की,

< PQR + < PRS = 2 X < PTR

10.पंचकोनाच्या आंतरकोनांची बेरीज 540^0 आहे हे सिध्द करा.

11. रेषा ℓ समांतर रेषा m असून यांच्यामध्ये 5 सेमी अंतरावर असणा-या विंदूच विंदूपथ काढा.

12.आ. 10.65 मध्ये किरण AB आणि किरण AC पासून समदूर असून विंदू A आणि B विंदूपासून समान अंतरावर आहे अशा विंदूचा विंदूपथ काढा.



.आ. 10.65

उत्तरे : आपली प्रगती अजमावून पहा.

10.1

1. (i) (B) (ii) (A) (iii) (B) (iv) (C)

2. $x = 17^0$

3. $< 1 = < 3 = < 4 = < 6 = 110^0$ आणि $< 2 = < 5 = < 7 = 70^0$

10.2

1. (i) (D) (ii) (B) (iii) (B)

2. 36^0, 54^0 आणि 90^0

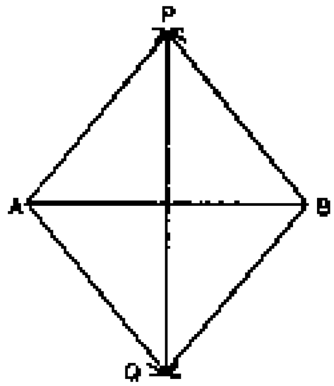
4. $< D = 140^0$ आणि $< C = 110^0$

6. $< ABC = 45^0$, $< ACB = 45^0$ आणि $< A = 90^0$

10.3

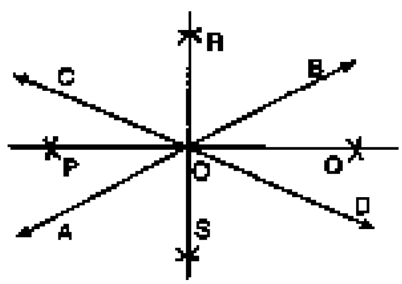
1.फक्त एकच बिंदू जोडा. AB आणि BC च्या लंबदुभाजकांचा छेदनबिंदू असेल.

2.A आणि B ही दोन गाळे आहेत. AB च्या लंबदुभाजकावरील रेख PQ हा बिंदूपथ असा असेल की, AP = BP = QA = QB = AB



आ. 10.65

3.बिंदूच्या स्थितीच्या चार शक्यता आहेत. < AOC च्या दुभाजकावरील बिंदू P आणि Q < BOC च्या दुभाजकावरील बिंदू R आणि S



आ. 10.66

4. AB रेषेच्या एकाच बाजूला असणारी AB पासून 5 सेमी अंतरावरील AB ला समांतर असणारी रेषा.

उत्तरे : संकीर्ण प्रश्नसंग्रह

1. (a) $y = 27^0$ (b) 126^0 2. $< 1 = 48^0$, $< 2 = 132^0$
3. तिसरा कोन = 90^0, काटकोन त्रिकोण 4. $< A = 35^0$, $< B = 75^0$, $< C = 70^0$
7. 360^0 8. 12^0
11. बिंदू बिंदूपथ हा समांतर रेषा असून ℓ || रेषा m च्या मध्ये 5cm अंतरावर आहे.
12. कोन BAC चा दुभाजक व बाजू AB चा लंबदुभाजक यांचा छेदनबिंदू होय.

11

त्रिकोणांची एकरूपता

प्रास्ताविक ः

तुम्ही असे पाहिले असेल की विविध झाडांची पाने विविध आकाराची असतात. परंतु एका झाडाची पाने जवळजवळ सारख्याच आकाराची असतात. कदाचित त्यांचा आकार लहान मोठा असेल. ज्या भौमितीक आकृत्या समान मापाच्या समान आकाराच्या असतात त्यांना एकरूप आकृत्या म्हणतात आणि या गुणधर्माला एकरूपता असे म्हणतात.

या प्रकरणात तुम्ही दोन त्रिकोणांची एकरूपता अभ्यासणार आहात. तसेच त्यांच्या वाजू आणि कोन यांच्यातील संबंधाबद्दल सखोल माहिती मिळवणार आहात.

उद्दिष्टे ः

या प्रकरणाचा अभ्यास केल्यानंतर विद्यार्थी खालील गोष्टी करू शकतील.

- दिलेल्या दोन आकृत्या एकरूप आहेत किंवा नाहीत हे स्पष्ट करणे आणि पडताळा घेणे.
- दोन त्रिकोणांच्या एकरूपतेच्या कसोटया सांगणे आणि उदाहरणे सोडवताना त्यांचा उपयोग करता येणे.
- त्रिकोणाच्या समान बाजूसमोरील कोन समान असतात हे सिध्द करणे.
- त्रिकोणाच्या समान कोनासमोरील बाजू समान असतात हे सिध्द करणे.
- जर त्रिकोणाच्या दोन बाजू समान नसतील तर मोठया बाजूसमोरील कोन मोठा असतो. हे सिध्द करणे.
- त्रिकोणाची असमानता सांगणे आणि पडताळणे.

वरील गुणधर्मावर आधारित उदाहरणे सोडविणे.

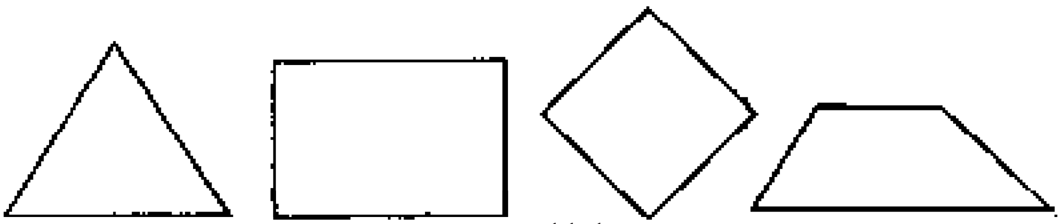
अपेक्षित पूर्वज्ञान ः

- प्रतलीय भौमितीक आकृत्यांची ओळख.
- रेषाखंडाची आणि कोनाची असमानता
- कोनांचे प्रकार
- त्रिकोणाच्या कोनांच्या बेरजेचा गुणधर्म
- कागद कापणे आणि घडी घालणे.

11.1 एकरूपतेची संकल्पना ः

आपल्या रोजच्या व्यवहारात आपण विविध आकृत्या आणि वस्तू पाहतो. या आकृत्या आणि वस्तूंचे आपल्याला त्यांचे आकार आणि मोजमापावरून खालीलप्रमाणे वर्गीकरण करता येते.

(i) आकृती 11.1 मध्ये दाखवलेल्या आकृत्यांचे आकारही वेगळे आहेत. व त्यांचे मापही भिन्न आहे.



आ. 11.1

(ii) आकृती 11.2 मध्ये आकार सारखे आहेत परंतु माप वेगवेगळे आहे.

आ. 11.2

(iii) एक रूपयाची दोन नाणी

आ. 11.3

(iv) दोन पोस्टाची तिकीटे किंवा पोस्टकार्डे

आ. 11.4

(i) एकच निगेटिव्हमधून काढलेले दोन सारखे फोटो.

आ. 11.5

आता आपण सारख्याच मापाच्या व सारख्याच आकाराच्या काही आकृत्या पाहिल्या. (आ. 11.3 ¸ 11.4 आणि 11.5)

दोन आकृत्या ज्यांचे आकार सारखे आणि मापेही समान असतील तर अशा आकृत्यांना एकरूप आकृत्या असे म्हणतात.

11.1.1 <u>तुमच्यासाठी कृती (खालील कृती करा)</u> ः

कागदाचा एक तुकडा घ्या, मध्यभागी त्याला घडी घाला. दोन घडयांमध्ये कार्बन कागद ठेवा. आता कागदाच्या वरच्या बाजूला तुम्हाला आवडेल त्या वस्तूचे,पानाचे किंवा फुलाचे चित्र काढा. खालच्या कागदाच्या तुकडयावर तुम्हाला त्याची प्रतिमा, ते चित्र उमटलेले दिसेल
तुम्ही काढलेली आकृती आणि त्याची कार्बन कॉपी यांचा आकारआणि त्यांचे प्रमाण सारखेच आहे. म्हणजेच या एकरूप आकृत्या आहेत. ज्यांचे पंख मिटले आहेत. असे एक फुलपाखरू पहा. एकच पख आहे असे वाटते.

11.1.2 <u>**काही आकृत्यांच्या एकरूपतेचे निकषः**</u>

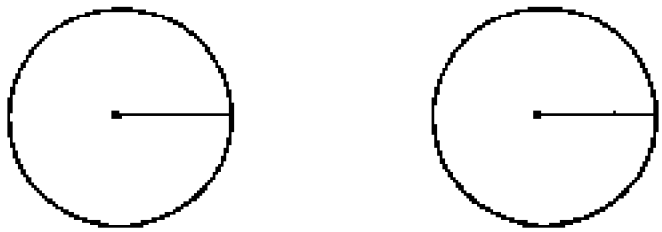
दोन एकरूप आकृत्या एकमेकींवर ठेवल्यास त्या तंतोतंत जुळतात. दुर्सया भाषेत सांगायचे झाले तर एका आकृतीचा भाग दुर्सया आकृतीच्या संगत भागाबरोबर असेल तर त्या आकृत्या एकरूप असतात.
उदा. १) जेव्हा दोन रेषाखंड समान लांबीचे असतात तेव्हा ते रेषाखंड एकरूप असतात.

आ. 11.6

२) जेव्हा चौरसांच्या बाजू समान असतात तेव्हा ते चौरस एकरूप असतात.

आ. 11.7

३) समान त्रिज्या असणारी वर्तुळे एकरूप असतात. एकरूप वर्तुळांचे परीघ सुध्दा समान असतात.



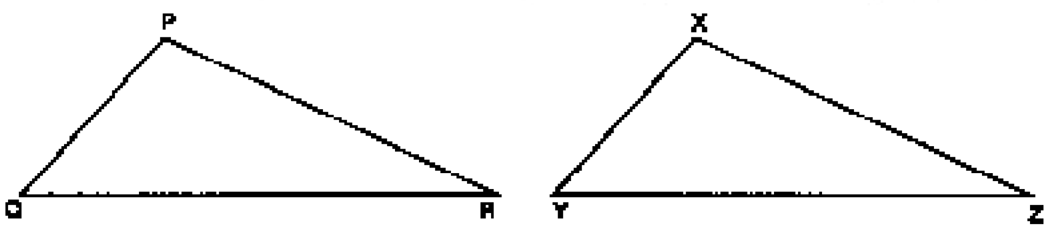
आ. 11.8

11.2 त्रिकोणांची एकरूपता :

त्रिकोण ही कमीत कमी बाजू असलेली पायाभूत (मूलभूत)अशी एकप्रतलीय आकृती आहे.त्रिकोणाची एकरूपता, अनेक महत्वाचे गुणधर्म सिध्द करण्यासाठी महत्वाची भूमिका बजावत असल्यामुळे त्याचा खालील अभ्यास करणे जरूरीचे आहे.

जर एका त्रिकोणाच्या सर्व बाजू व सर्व कोन हे दुर्सया त्रिकोणाच्या संगत बाजू व संगत कोनाबरोबर असतील तर ते त्रिकोण एकरूप असतात.

उदा. आकृती 11.9 मध्ये **ΔPQR** व **ΔXYZ** मध्ये.



आ. 11.9

PQ=XY , PR=XZ, QR=YZ

आणि $< P =< Q =< Y, < R =< Z,$

यावरून

ΔPQR हा **ΔXYZ** शी एकरूप आहे आणि हे हे **ΔPQR** $\cong$ **ΔXYZ** असे लिहितात.

दोन त्रिकोणातील एकरूपता संबंध हा

नेहमी संगत भागांच्या किंवा जोडीच्या भागांच्या विशेष क्रमाने लिहितात.इथे **ΔPQR** $\cong$ **ΔXYZ** याचा अर्थ असा की P ची संगती X शी आहे.

Q ची संगती Y शी आहे. आणि R ची संगती Z शी आहे.

ही एकरूपता **ΔPQR** $\cong$ **ΔXYZ** अशीही लिहिता येते.म्हणजेच

Q ची संगती **Y** शी आहे. आणि **R** ची संगती **Z** शी आहे तर **P** ची संगती **X** शी आहे. याचे संगत घटकसुध्दा समान आहेत. जसे,

QR=YZ , RP=ZX, QP=YZ

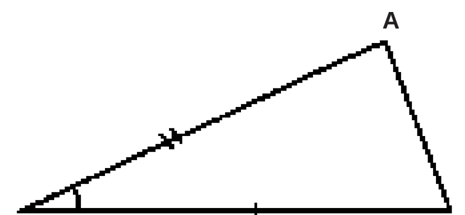
$\angle Q = \angle Y$, $\angle R = \angle Z$, $\angle P = \angle X$ आणि ही संगती $\Delta RPQ \cong \Delta ZXY$ अशीही लिहिता येते.

परंतु $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$ अशी नाही आणि $\Delta PQR \cong \Delta ZXY$ अशी सुध्दा नाही.

11.3 त्रिकोणाच्या एकरूपतेच्या कसोटयाः

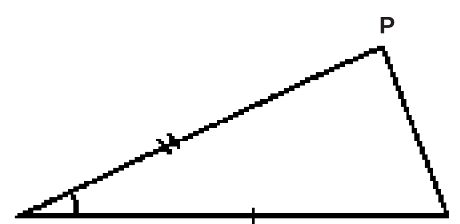
दोन त्रिकोण एकरूप आहेत किंवा नाहीत हे सिध्द करण्याऐवजी आपल्याला एका त्रिकोणाचे सहा घटक हे दुर्सया त्रिकोणाच्या संगत सहा घटकांबरोबर आहेत का हे पहावे लागते. आता आपण हे शिकणार आहोत की दोन त्रिकोणांच्या तीन संगत घटकांची समानता दाखवू शकलो तरी ते दोन्ही त्रिकोण एकरूप दाखवणे शक्य आहे.

आकृती 11.10 विचारात घ्या.



आ. 11.10

ΔPQR असा काढा की, QR=BC, $\angle Q = \angle B$ आणि PQ=AB (आकृती 11.11 पहा)



आ 11.11

जर आपण **ΔABC** गिरवून किंवा कापून तो **ΔPQR** वर ठेवला तर आपणांस असे आढळते की, एक त्रिकोण दुर्सया त्रिकोणाशी तंतोतंत जुळतो. यावरून ते त्रिकोण एकरूप आहेत असे म्हणता येते.

याउलट आपण उरलेले भाग मोजून निरिक्षण केले तर असे दिसते की AC=PR, $<A = <P$, $<C = <R$ याचाच अर्थ **ΔPQR ≅ ΔABC**

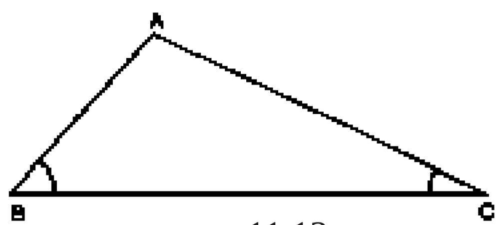
हे लक्षात घ्या की, **ΔABC** शी एकरूप काढताना फक्त दोन बाजूंच्या जोडया PQ= AB , QR=BC आणि त्यांच्यात समाविष्ट कोन यांचा उपयोग केला आहे.

म्हणजेच या तीन संगत घटकांच्या समानतेमुळे दोन्ही त्रिकोण एकरूप झाले. यावरून असे लक्षात येते की,

कसोटी ६
एका त्रिकोणाच्या दोन बाजू आणि त्यामधील समाविष्ट कोन हा दुर्सया त्रिकोणाच्या दोन संगता बाजू आणि त्यामधील समाविष्ट कोनाच्या बरोबर असेल तर ते त्रिकोण एकरूप असतात.

या कसोटीला बाकोबा कसोटी असे म्हणतात. (बाजू कोन बाजू)

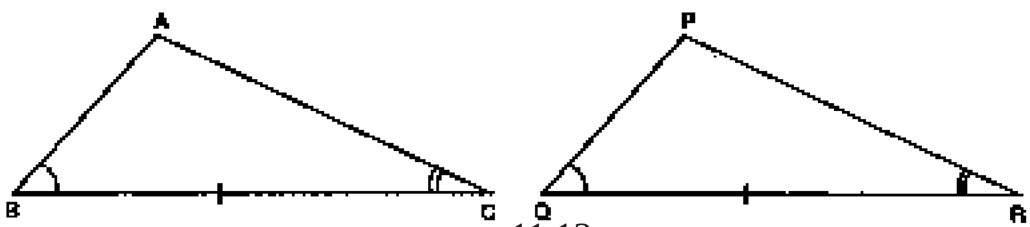
आता आ. 11.12 मध्ये **ΔABC** पहा.



आ. 11.12

ΔPQR असा काढा की, QR=BC, $<Q = <B$ आणि $<R = <C$

(आकृती 11.13 पहा)



आ 11.13

एक त्रिकोण दुर्सया त्रिकोणावर ठेवून आणि उरलेले भाग मोजून आपल्या लक्षात येते की $<P = <A$, PQ=AB आणि PR=AC यावरून **ΔPQR ≅ ΔABC** अर्थ दोन त्रिकोणांचे तीन संगत घटक (दोन कोन आणि समाविष्ट बाजू)सारखे असतील तर ते त्रिकोण एकरूप होतात.

आपल्याला हे माहित आहे की त्रिकोणाच्या तीन कोनांची बेरीज 180^0 असते. यावरून एका त्रिकोणाचे कोणतेही दोन कोन हे दुर्सया त्रिकोणाच्या संगत कोनांबरोबर असतील तर तिसरा कोन ही समान असतो. म्हणजेच बाजू ऐवजी बाजूंची एक जोडी समान असेल तरी चालते. यावरून असे लक्षात येते की,

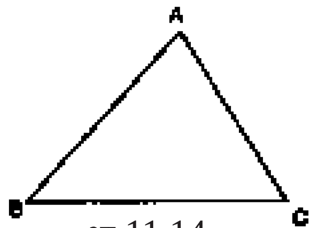
<u>कसोटी 2ः</u>

एका त्रिकोणाचे दोन कोन आणि एक बाजू हे दुर्सया त्रिकोणाच्या संगत दोन कोन व संगत बाजूवरोबर असेल तरी त्रिकोण एकरूप असतात.

या कसोटीला कोबाको किंवा कोकोबा (कोन΄ बाजू΄ कोन किंवा कोन कोन बाजू) असे म्हणतात.

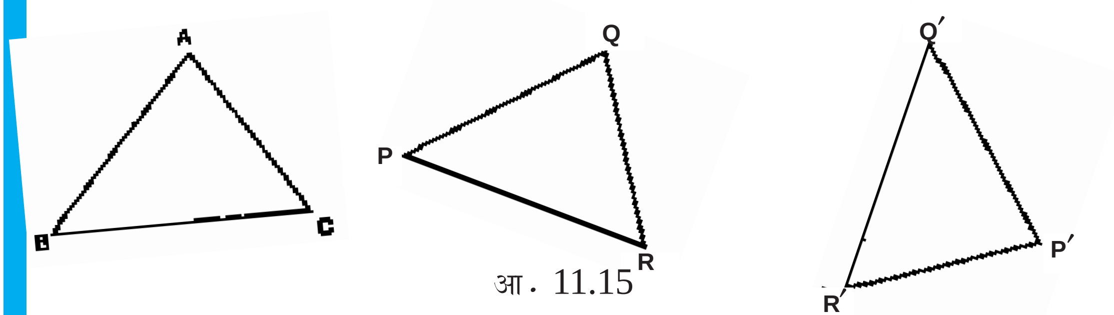
<u>13.3.1</u> <u>तुमच्यासाठी कृती / खालील कृती करा.</u>

पुढच्या कसोटीकडे जाण्यापूर्वी पुन्हा एक **ΔABC** घ्या. (आकृती 11.14 पहा).



आ 11.14

आता **ΔABC** च्या बाजू **AB, BC** आणि **BC** एवढया तीन काडया घ्या. त्या अशा ठेवा की **ΔPQR, ΔP′Q′R** हे त्रिकोण तयार होतील. (आकृती 11.15)



आ. 11.15

संगत कोन मोजल्यावर असे दिसेल की

$< P =< P' =< A, < Q =< Q' =< B$ आणि $< R =< R' =< C$

यामुळे असे आढळेल की,

$\backslash\ \Delta PQR \cong \Delta P'Q'R \cong \Delta ABC$

याचा अर्थ दोन त्रिकोणांच्या संगत तीन भुजा समान असतील तर ते त्रिकोण एकरूप होतात.एका त्रिकोणाच्या तीन बांजू अनुकमे दुर्सया त्रिकोणाच्या संगत तीन बाजू बरोबर असतील तर ते दोन त्रिकोण एकारूप असतात.

यालाच बाबावा कासोटी म्हणतात. बाजू बाजू बाजू.त्याचप्रमाणे आपण आणखी एक कासोटी पाहू. की जी केवळ काटकोन त्रिकोणासाठीच वापरली जाते ती कसोटी पुढीलप्रमाणे.

<u>कसोटी **4** ः</u>

एका त्रिकोणाचा कर्ण आणि एक बाजू ही दुर्सया त्रिकोणाच्या कर्ण आणि संगत बाजू यांच्यावरोबर असेल तर ते दोन काटकोन त्रिकोण एकरूप असतात.

यालाच कर्णभुजा कसोटी असे म्हणतात. या कसोटयांचा उपयोग करून त्रिकोणाचे तीन संगत घटक माहित असतील तर ते त्रिकोण एकरूप आहेत का ते सांगता येते. आणि उरलेल्या संगत घटकांची समानता दाखवता येते.

उदा. 11.1 :

खालीलपैकी कोणत्या कसोटीनुसार दिलेले दोन त्रिकोण एकरूप होत नाहीत.

(a) सर्व संगत बाजू समान आहेत.

(b) सर्व संगत कोन समान आहेत.

(c) सर्व संगत बाजू आणि त्यांनी समाविष्ट केलेले कोन समान आहेत.

(d) सर्व संगत कोन आणि संगत बाजूंची एक जोडी समान आहे.

उदा. 11.2 :

दोन रेषीय आकृत्या एकरूप असतात जेव्हा त्यांच्या ....

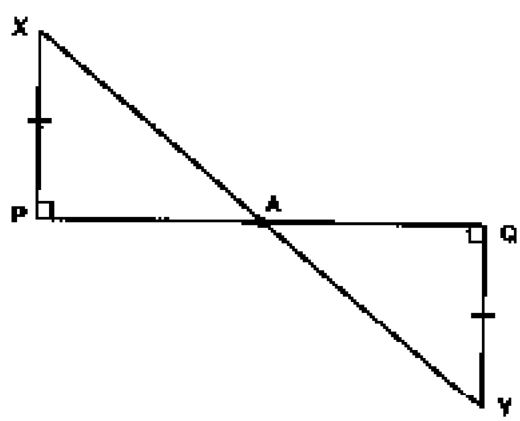
(a) सर्व संगत बाजू समान असतील.

(b) सर्व संगत कोन समान असतील.

(c) त्यांचे क्षेत्रफळ समान असेल.

(d) सर्व संगत बाजू आणि संगत कोन समान असतील.

उदा. 11.3 : आ. 11.16 मध्ये PX आणि QY हे अनुक्रमे PQ ला P आणि Q मध्ये लंब आहेत. तसेच PX=QY तर दाखवा की AX=AY .



आ. 11.16

उत्तर : ΔPAX व ΔQAY मध्ये,

$< XPA =< YQA$ — — — (प्रत्येकी 90°)

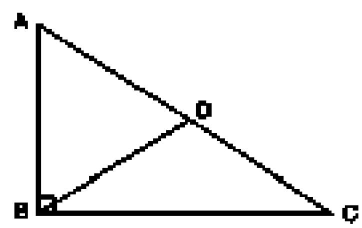
$< PAX =< QAY$ — — — (परस्पर विरूध्द कोन)

आणि $PA = QY$ – – (पक्ष)

$\therefore \Delta PAX \cong \Delta QAY$ – – – – (कोकोबा एकरूपता कसोटी)

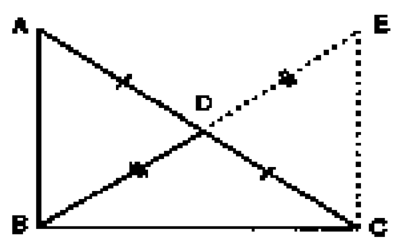
(एकरूपΔ च्या संगत बाजू)

उदा. 11.4 : आ. 11.17 मध्ये, ΔABC हा काटकोन Δ आहे. यामध्ये $< B = 90^o$ आणि D हा AC चा मध्य आहे. तर सिध्द करा. $BD = \frac{1}{2}$



आ. 11.17

उत्तर : BD ही E पर्यंत अशी वाढवा की $BD = DE$. CE जोडा.



आ. 11.18

ΔADB आणि ΔCDE मध्ये,

$AD = CD$ – – – – – – – (D हा AC चा मध्य पक्ष)

$DB = DE$ – – – – – – – (रचना)

आणि $< ADB =< CDE$ – – – – – (परस्परविरूध्द कोन)

$\therefore < ADB \cong < CDE$ – – – – (i)

तसेच $< DAB =< DCE$.

परंतु हे व्युत्क्रम कोन आहेत.

$\therefore$ AB ही EC ला समांतर होईल.

$\therefore < ABC + < ECB = 180^o$ (आंतरकोन)

$\therefore 90^o + < ECB = 180^o$

$\therefore < ECB = 180^\circ - 90^\circ$

$\therefore < ECB = 90^\circ$

आता ΔABC आणि ΔECB मध्ये

$\therefore AB = EC$ – – – – (विधान (i) वरून)

$\therefore BC = BC$ – – – – – (सामाईक भुजा)

आणि $< ABC = < ECB$ – – – –(प्रत्येकी 90°)

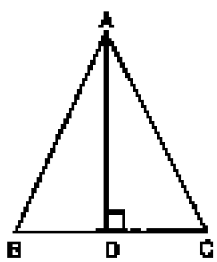
AC=EB

परंतु $BD = \frac{1}{2} EB$

$\therefore$ $BD = \frac{1}{2} AC$ हे सिध्द.

तुमची प्रगती अजमावून पहा. 11.1:

1. आ. 11.19 मध्ये, ΔABC मध्ये $< B = < C$ आणि $AD \perp BC$ तर कोणत्या कसोटीने $\Delta ABC \cong \Delta ECB \cong \Delta ACD$ होईल?

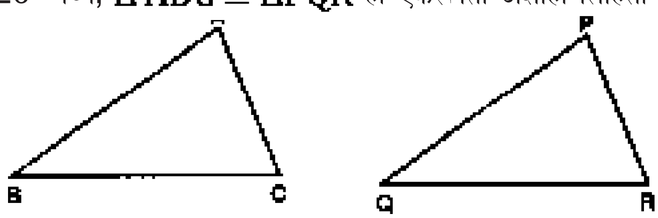


आ. 11.19

a) कर्णभुजा b) कोवाको

c) बाकोबा d) बाबाबा

2. आ. 11.20 मध्ये, $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ ही एकरूपता अशीही लिहिता येते.



आ. 11.20

a) $\Delta BAC \cong \Delta RPQ$ **b)** $\Delta BAC \cong \Delta QPR$

c) $\Delta BAC \cong \Delta RQP$ d) $\Delta BAC \cong \Delta PRQ$

3. दोन त्रिकोणांची एकरूपता देताना दोन संगत कोनांची समानता देण्याबरोबर खालीलपैकी कोणती समानता द्यायला हवी.

a) संगत बाजूंची नको **b)** फक्त एक संगत बाजू

c) कमीत कमी दोन संगत बाजू d) सर्व संगत बाजू.

4. दोन त्रिकोण एकरूप आहेत, जर ....

a) तिन्ही संगत कोन समान असतील.

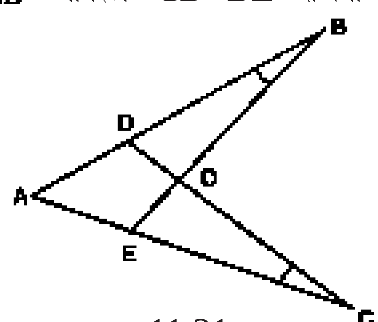
b) एकाचे दोन कोन आणि एक बाजू हे दुर्सयाच्या दोन कोन आणि एका बाजू बरोबर असतील.

c) एकाचे दोन कोन आणि एक बाजू हे दुर्सयाच्या दोन कोन आणि संगत बाजू बरोबर असतील.

d) एकाचे एक कोन आणि दोन बाजू हे दुर्सयाचे एक कोन आणि दोन बाजू बरोबर असतील,

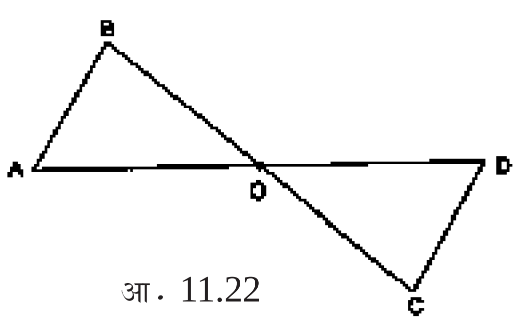
5. आ.11.21 मध्ये, $< B = < C$ आणि AB=AC तर सिध्द करा की,

$\Delta ABE \cong \Delta ACD$. यावरून CD=BE दाखवा.



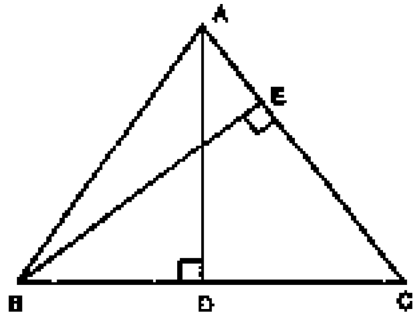
आ. 11.21

6. आ. 11.22 मध्ये AB ही CD ला समांतर आहे. जर O हा BC चा मध्यबिंदू असेल तर तो AD चा सुध्दा मध्यबिंदू आहे हे दाखवा.



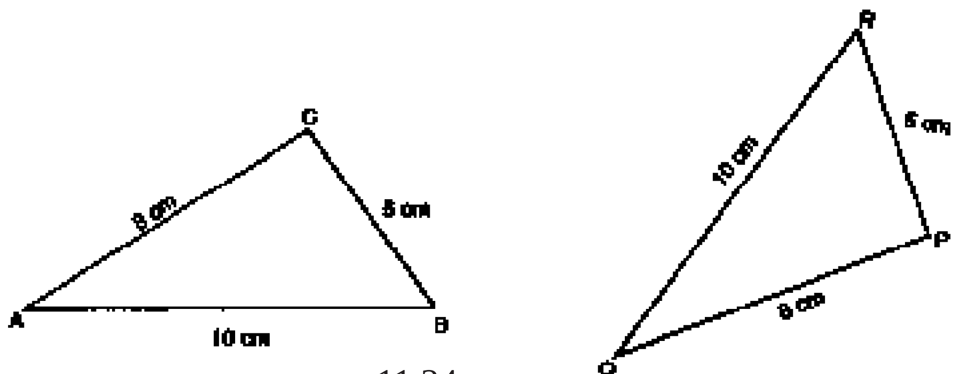
आ. 11.22

7. ΔABC मध्ये (आ. 11.23) $AD \perp BC, BE \perp AC$ आणि $AD = BE$ तर सिध्द करा $AE = BD$



आ. 11.23

8. आ. 11.24 मध्ये Δ एकरूप दाखवा आणि एकरूप कोनांच्या जोडया लिहा.



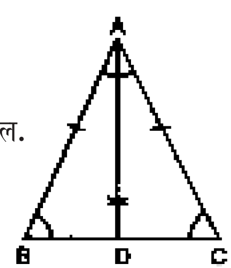
आ. 11.24

11.4 त्रिकोणाच्या समान बाजूसमोरील कोन समान असतात आणि त्याचा व्यत्यास.

त्रिकोणाच्या एकरूपतेच्या कसोटया वापरून आपण काही महत्ताची प्रमेये सिध्द करणार आहोत.

प्रमेय : एका त्रिकोणाच्या दोन बाजू समान असतील तर त्या समान बाजूसमोरील कोन समान असतात.

प्रमेय : एका त्रिकोणाच्या दोन बाजू समान असतील तर त्या समान बाजूसमोरील कोन समान असतात.



आ. 11.25

पक्ष : ΔABC मध्ये $AB = AC$

साध्य : $< B =< C$

रचना : $=< BAC$ चा दुभाजक काढा तो BC ला D मध्ये मिळेल.

सिध्दता : ΔABD व ΔACD मध्ये,

$AB = AC$ – – – – (पक्ष)

$< BAD ==< CAD$ – – – – – (रचना)

$AD = AD$ – – – – – – – – (सामाईक)

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$ (बाकोबा)

$< B = < C$ (एकरूप Δ चे संगत घटक)

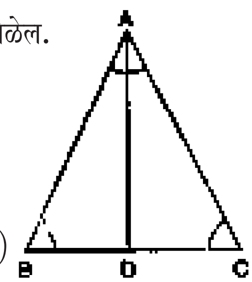
या प्रमेयाचा व्यत्यासही सत्य आहे तो आपण प्रमेय म्हणून सिध्द करू.

11.4.1 : त्रिकोणाच्या दोन समान कोनासमोरील बाजू समान असतात.

पक्ष : ΔABC मध्ये $< B = < C$

साध्य : $AB = AC$

रचना : $=< BAC$ चा दुभाजक काढा तो BC ला D मध्ये मिळेल.



सिध्दता : ΔABD व ΔACD मध्ये,

$< B = < C$ – – – – – – (पक्ष)

$< BAD == < CAD$ – – – – – (रचना)

$AD = AD$ – – – – – – – – – (सामाईक)

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$ (बाकोबा)

आ. 11.26

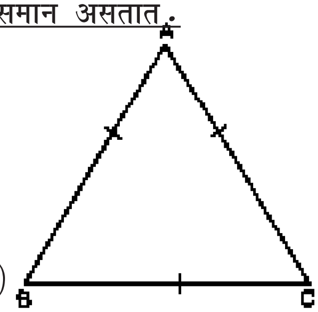
$\therefore AB = AC$ – – – – (एकरूप Δ चे संगत घटक)

म्हणजेच हे प्रमेय सिध्द.

उदा. 11.5 : सिध्द करा. समभुज त्रिकोणाचे तिन्ही कोन समान असतात.

उत्तर : पक्ष : ΔABC हा समभुज त्रिकोण आहे.

साध्य : $< A = < B = < C$



सिध्दता : $AB = AC$ – – – – (पक्ष)

$< C = < B$ – – – – – (समान बाजू समोरील कोन)

तसेच, $AC = BC$ – – – – (पक्ष)

आ. 11.27

$\therefore < B = < A$ – – – – – (वरीलप्रमाणेच) – – – – (ii)

निष्कर्ष (i) व (ii) वरून

$\therefore$ $< B = < A = < C$ हे सिध्द

उदा. 11.6 : ΔABC हा समद्विभुज त्रिकोण असून त्यामध्ये $AB = AC$. जर $BD \perp AC$ आणि $CE \perp AB$ तर सिध्द करा $BD = CE$

(आ. ११.२८ पहा)

उत्तर : ΔBDC व ΔCEB मध्ये,

$< BDC = < CEB$ (प्रत्येकी 90^o)

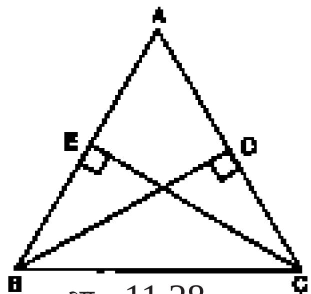
$< DCB = < EBC$ (समान कोनासमोरील कोन)

आणि BC = CB (सामाईक)

$\therefore \Delta BDC \cong \Delta CEB$ – – – – – – (कोकोवा)

(एकरूप Δ चे संगत घटक)

हा निष्कर्ष खालीलप्रमाणे मांडता येतो.



आ. 11.28

समद्विभुज त्रिकोणाच्या समान बाजूंसमोरील शिरोबिंदूतून टाकलेले लंब समान लांबीचे असतात.

हाच निष्कर्ष आपल्याला समभुज त्रिकोणाच्या संदर्भात असा सांगता येतो की, समभुज त्रिकोणातील सर्व शिरोलंब समान असतात.

उदा. 11.7 : (आ. 11.29) **Δ ABC मध्ये D आणि E हे अनुक्रमे AC आणि AB चे मध्यबिंदू आहेत.**

जर AB = AC, तर सिध्द करा की BD = CE.

उत्तर : $BE = \frac{1}{2}AB$

आणि $CD = \frac{1}{2}AC$

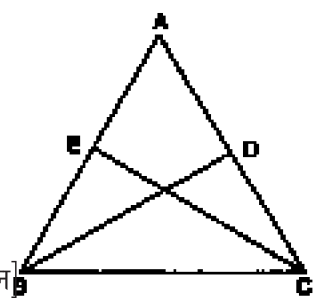
$\therefore$ BD = CE – – – – (i)

आता Δ BEC आणि Δ CDB मध्ये,

BE = CD – – – – }निष्कर्ष (i) वरून

BC = CB – – – – – – – – – (सामाईक)

आणि $< DCB =< EBC$ – – – – – – – ( )



आ. 11.29

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$ (बाकोबा)

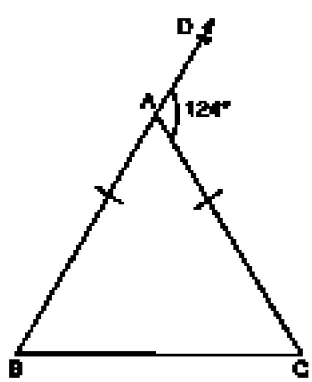
$\therefore$ CE = BD – – – – – (एकरूप चे संगत घटक)

दा. 11.8: (आ. 11.30 पहा) **ΔABC मध्ये AB = AC आणि $< DAC = 124^o$**

तर ΔABC चे कोन मिळवा.

आ. 11.30

उकल : आ. 11.30



उकल : $< BAC = 180^o - 124^o$

$\therefore < BAC = 56^o$

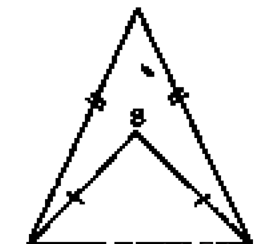
$< B + < C = 124^o$

$\therefore < B =< C = \frac{1}{2} \times 124^o = 62^o$

$\therefore < A = 56^o, < B = 62^o$ आणि $< C = 62^o$

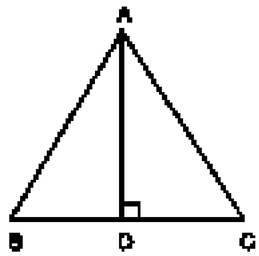
11.2 : तुमची प्रगती अजमावून पहा ः

1. आ. 11.31 मध्ये PQ = PR आणि SQ = SR तर $< BAC =< PRS$ सिध्द करा.



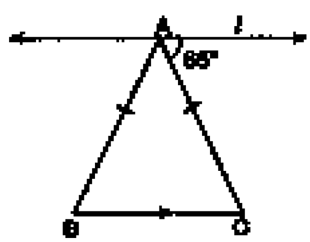
आ. 11.31

2. आ. 11.32 मध्ये जर AD हा BC चा लंबदुभाजक असेल तर ΔABC हा समद्विभुज त्रिकोण आहे हे सिध्द करा.



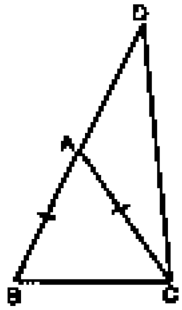
आ. 11.32

3. आ. 11.33 मध्ये रेषा L ही BC ला समांतर असून ΔABC हा समद्विभुज त्रिकोण आहे तर या त्रिकोणाचे कोन मिळवा.



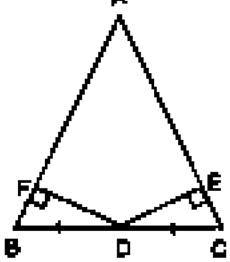
आ. 11.33

4. ΔABC हा समद्विभुज त्रिकोण असून AB = AC बाजू BA ही D पर्यंत अशी वाढवली की AB = AD तर $< BCD$ हा काटकोन आहे हे सिध्द करा.



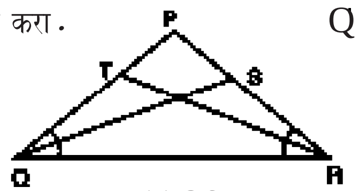
आ. 11.34

5. आ. 11.35 मध्ये **BC** चा **D** हा मध्य आहे. **DF** आणि **DE** हे अनुक्रमे **AB** व **AC** वर लंब काढले असून ते समान लांबीचे आहेत. **ΔABC** हा समद्विभुज त्रिकोण आहे. हे सिध्द करा.



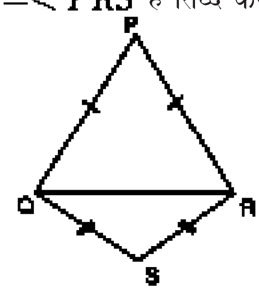
आ. 11.35

6. आ. 11.36 मध्ये **PQ = PR**. $< Q$ व $< R$ चे अनुक्रमे **QS** आणि **RT** हे कोन दुभाजक आहेत तर सिध्द करा. QS=RT



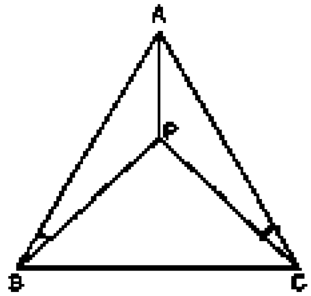
आ. 11.36

7. आ. 11.37 मध्ये **ΔPQR** आणि **ΔSQR** हे समद्विभुज त्रिकोण असून ते **QR** या सामाईक पायावर आहेत. तर $< BCD =< PRS$ हे सिध्द करा.



आ. 11.37

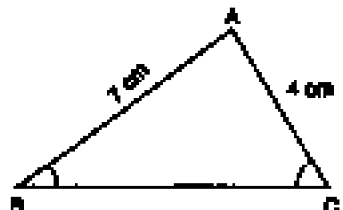
8. **ΔABC** मध्ये **AB = AC** (आ. 11.38 पहा) **P** हा **ΔABC** च्या अंतर्भागातील असा एक बिंदू आहे की, $< ABP =< ACP$. तर सिध्द करा की, **AP** हा $< BAC$ ला दुभागतो.



आ. 11.38

11.5 : त्रिकोणातील असामनता ः

त्रिकोणाच्या बाजू आणि कोन सारखे असताना त्यांच्यातील संबंधाचा आपण अभ्यास केला . आता आपण बाजू आणि कोन असमान असतील तर त्यांच्यातील संबंधाचा अभ्यास करणार आहोत.



आ. 11.39

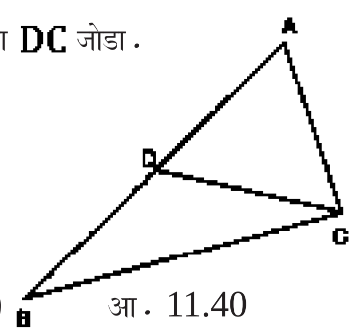
आकृती 11.39 मध्ये ΔABC ची AB ही बाजू AC पेक्षा मोठी आहे. $\angle B$ आणि $\angle C$ मोजा. तुम्हाला असे आढळेल की हे कोन समान नाहीत. $\angle C$ हा $\angle B$ पेक्षा मोठा आहे. जर हा प्रयोग परत केलात तर तुम्हाला हे निरीक्षण सत्य आहे हे सांगता येईल. हे सहजपणे सिध्द करता येते.

11.5.1 ः प्रमेय ः जर एका त्रिकोणाच्या दोन बाजू असमान असतील तर मोठया बाजूसमोरील कोन मोठा असतो.

पक्ष ः ΔABC मध्ये $AB > AC$.

साध्य ः $\angle ACB > \angle ABC$

रचना ः ः बाजू AB वर D बिंदू असा घ्या की AD = AC आणि DC जोडा.



आ. 11.40

सिध्दता ः ΔADC मध्ये,

$AD = AC$

$\angle ACD = \angle ADC$ (समान बाजूंसमोरील कोन)

परंतु $\angle ADC > \angle ABC$ (त्रिकोणांच्या बाहयकोन विरूध्द आंतरकोनापेक्षा मोठा असतो.)

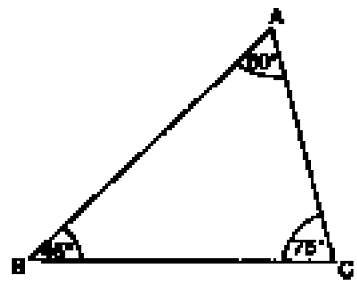
$\therefore \angle ACB > \angle ACD$ ($\because$ D हा $\angle ACB$ च्या अंतर्भात आहे)

आता याचा व्यत्यास काय असू शकेल ते आपण पाहू या.

ΔABC मध्ये, (आ. 11.41) $< C$ आणि $< B$ ची तुलना करा.

$< C$ हा $< B$ पेक्षा निश्चितच मोठा आहे. आता या कोनाच्या विरूध्द बाजू AB आणि AC पेक्षा मोठी आहे. आता $< C$ आणि $< A$ ची तुलना करा. या कोनांच्या विरूध्द बाजू AB आणि AC मोजा. आपल्या असे लक्षात येईल की, $< C >< A$ आणि $BC > AC$ म्हणजेच मोठया कोनासमोरील बाजू मोठी असते.

हा ची तुलना करा. तोच निष्कर्ष आपल्याला मिळतो. आणि म्हणजेच मोठया कोनासमोरील बाजू मोठी असते. काटकोन त्रिकोण, विशालकोन त्रिकोण किंवा कोणत्याही प्रकारचा त्रिकोण काढून या गुणधर्मांचा पडताळा घेता येतो. त्रिकोणातील कोणतेही दोन कोन मोजा. त्यांची तुलना करा. आणि त्या कोनांच्या समोरील बाजूंच्या लांबीची तुलना करा. वरील भागात काढलेला निष्कर्ष सत्य आहे हे लक्षात येईल. तोच आपण गुणधर्म म्हणून पुढीलप्रमाणे मांडतो.



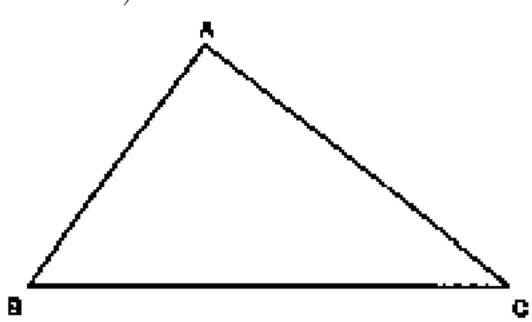
आ. ११.४१

कोणत्याही त्रिकोणात मोठया कोनासमोरील बाजू मोठी असते.

पुढील मुद्दा लक्षात घ्या. ई जर त्रिकोणात एक कोन काटकोन किंवा विशालकोन असेल तर त्याच्या समोरील बाजू सर्वात मोठी असते. (त्याच त्रिकोणातील इतर दोन बाजूंपेक्षा मोठी असते.)

आतापर्यंत तुम्ही त्रिकोणाच्या तीन कोनासंबंधी परस्पर संबंधाचा अभ्यास केला आहे. त्रिकोणाच्या तिन्ही कोनांची बेरीज 180^0 असते. आता आपण त्रिकोणाच्या तीन बाजूमध्ये कोणत्या प्रकारचा संबंध असतो याचा अभ्यास करणार आहोतः

ΔABC काढा. (पहा आ. 11.42)



आ. 11.42

त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजू **AB, BC, CA** यांची लांबी मोजा. त्रिकोणाच्या दोन ॑ दोन बाजूंच्या लांबीची बेरीज करा. जसे **AB + BC, BC + CA, CA + AB** या बेरजांची तुलना उरलेल्या तिर्सया बाजूच्या लांबीवरोबर करा. आपल्या असे लक्षात येईल की,

i) $AB + BC > AC$

ii) $BC + CA > AB$ आणि

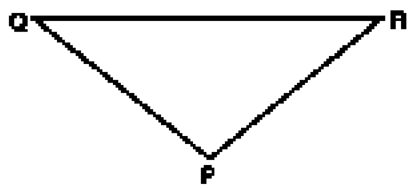
iii) $CA + AB > BC$

यावरून असा निष्कर्ष काढता येतो की,

त्रिकोणाच्या दोन बाजूंची बेरीज तिर्सया बाजूपेक्षा मोठी असते.

<u>खालील कृती करा ः</u>

एका लाकडी फळीवर किंवा सपाट पृष्ठभागावर **P, Q, R** असे तीन खिळे बसवा.



आ. 11.43

QR एवढया लांबीचा एक दोरा घ्या. तसेच **QP + PR** एवढया लांबीचा दुसरा एक दोरीचा तुकडा घ्या. दोन्ही तुकडयांची तुलना करा. तुम्हाला असे आढळेल की, **PQ + PR** याची लांबी त्याच्याशी संगत अशा या लांबीपेक्षा मोठी आहे. म्हणजे आधीचा निष्कर्ष सत्य ठरतो.

<u>उदा. 11.9:</u> **खाली दिलेल्या चार पर्यायांपैकी दिलेल्या मापांवरून त्रिकोण रचना शक्य आहे का?**

a) 5cm, 8cm, 3cm

b) 14cm, 6cm, 7cm

c) 3.5cm, 2.5cm आणि 5.2 cm

d) 20cm, 25cm, 48cm

<u>उत्तर</u> ः (a) मध्ये 5+38

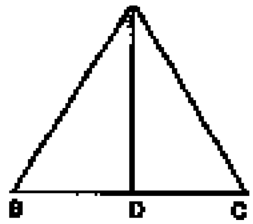
(b) मध्ये 6+714

(c) मध्ये 3.5+2.5>5.2, 3.5+5.2> 2.5 आणि 2.5+5.2>3.5

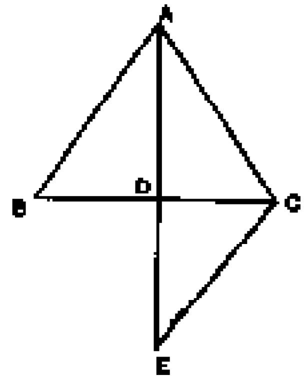
(d) मध्ये 20+2548

उत्तर ः (c) होईल.

<u>उदा. **11.10 :**</u> आ. **11.44** मध्ये ΔABC ची AD ही मध्यगा आहे. तर $AB + AC > 2AD$ हे सिध्द करा.



आ. 11.44



आ. 11.45

उकल ः AD ही E पर्यंत अशी वाढवा की, $AD = DE, CE$ जोडा. ΔABD व ΔEDC विचारात घ्या. येथे $BD = CD.$ — — — — — — — — (पक्ष)

$< ADB = < EDC$ — — — — — — (परस्परविरूध्द कोन)

आणि $AD = ED$ — — — — (रचना)

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ECD$ — — — — — — — (वाकोवा)

$\therefore AB = EC$ — — — — — — (एकरूप Δ चे संगत घटक)

आता ΔACE मध्ये,

$EC + AC > AE$

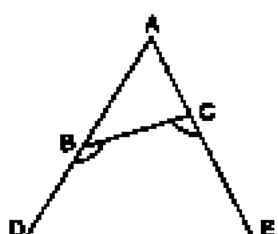
किंवा $AB + AC > 2AD$ (AD= ED = AE= 2 AD) हे सिध्द.

<u>11. 3ःतुमची प्रगती अजमावून पहा ः</u>

1. चौकोन PQRS चे कर्ण PR आणि QS हे परस्परांना O बिंदूत छेदतात. तर सिध्द करा की, PQ+QR+RS+SP>PR+QS

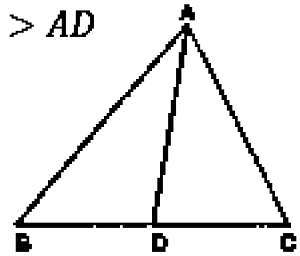
2. ΔABC मध्ये $AB = 5.7$ सेमी, $BC = 6.2$ सेमी, $CA = 4.8$ सेमी.सर्वात मोठा व सर्वात लहान कोन कोणता ते सांगा.

3. आकृती 11.46 मध्ये जर $< CBD > < BCE$, तर सिध्द करा की, $AB > AC$.



आ. 11.46

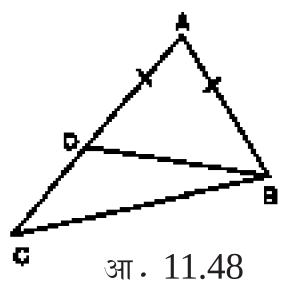
4. आकृती 11.47 मध्ये ΔABC च्या पाया BC वर D हा कोणताही एक बिंदू आहे. जर $AB > AC$ तर सिध्द करा की, $AB > AD$



आ. 11.47

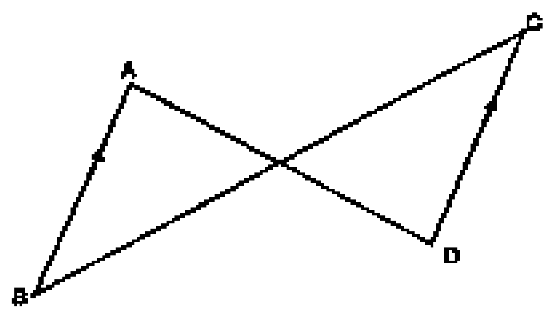
5. सिध्द करा की त्रिकोणाच्या तीन बाजूंची बेरीज ही त्याच्या तीन मध्यगांच्या बेरजेपेक्षा मोठी असते. (उदा. 11.10 च्या उपयोग करा)

6. आकृती 11.48 मध्ये जर $AB = AD$ तर सिध्द करा की $BC > CD$
(टीप ः $< ADB =< ABD$)



आ. 11.48

7. आ. 11.49 मध्ये, AB ही CD ला समांतर आहे. जर $< A >< B$ तर सिध्द करा की $BC > AD$.



आ. 11.49

सारांश ः

- सारखा आकार आणि सारखी मापे असलेल्या आकृत्यांना एकरूप आकृत्या म्हणतात.
- एकरूप आकृत्या एकावर एक ठेवल्यास त्या परस्परांना पूर्णपणे झाकतात. एका आकृतीचे सर्व घटक दुर्सया आकृतीच्या संगत घटकांबरोबर असतात.

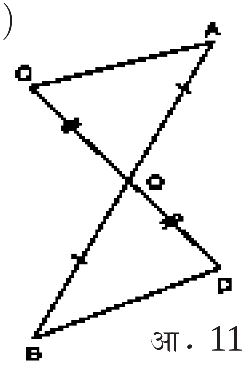
● दोन त्रिकोण एकरूप दाखवण्यासाठी आपल्याला फक्त तीन संगत घटक समान दाखवण्याची आवश्यकता असते. या संगत घटकांनी खालील चार निकषांपैकी एक निकष सत्य करणे आवश्यक आहे.

(i) बाकोबा (ii) कोबाको किंवा कोकोबा (iii) बाबाबा (iv) कर्णभुजा (निकष म्हणजेच कसोटी)

- त्रिकोणात समान बाजूसमोरील कोन समान असतात.
- त्रिकोणात मोठ्या कोनासमोरील बाजू मोठी असते.
- जर त्रिकोणात दोन बाजू असमान असतील तर मोठ्या बाजूसमोरील कोन मोठा असतो.
- त्रिकोणाच्या दोन बाजूंची बेरीज तिर्सया बाजूपेक्षा मोठी असते.

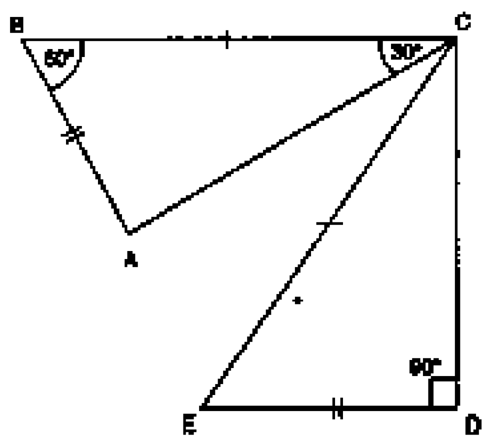
संकीर्ण प्रश्नसंग्रह ः

1. दोन रेषाखंड **AB** आणि **CD** परस्परांना **'O'** बिंदूत दुभागत असतील तर सिध्द करा. **CA = BD.** (आ. 11.50)



आ. 11.50

2. **ΔABC** मध्ये **AD** ही मध्यगा **BC** ला लंब असेल तर तो समद्विभुज त्रिकोण असतो, हे सिध्द करा.

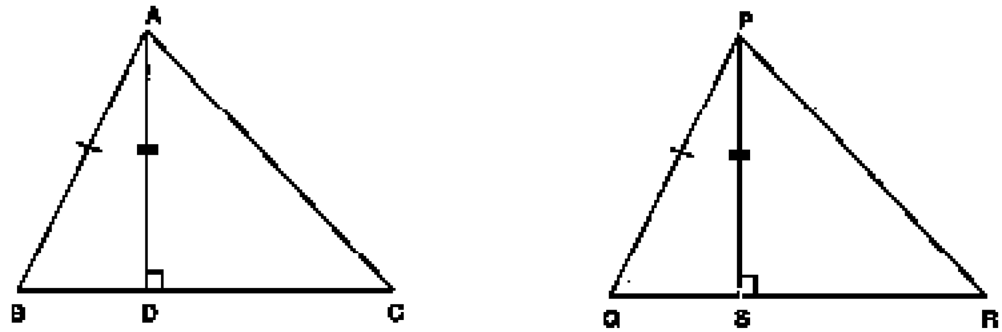


आ. 11.51

3. आकृती 11.51 मध्ये **ΔABC** आणि **ΔCDE** असे आहेत. की **BC = CE, AB = DE,** जर $< B = 60^\circ, < ACE = 30^\circ$ आणि $< D = 90^\circ$ तर सिध्द करा की दोन्ही त्रिकोण एकरूप आहेत.

4. आकृती 11.52 मध्ये ΔABC च्या बाजू AB, BC आणि शिरोलंब AD हे अनुक्रमे ΔPQR च्या बाजू $PQ < QR$ आणि शिरोलंब PS यांच्याबरोबर आहेत. तर सिध्द करा.

$\Delta ABC \cong \Delta PQR$

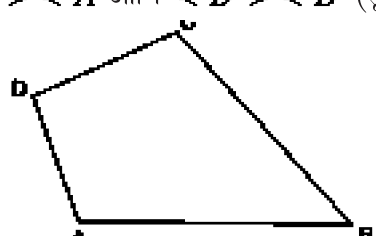


आ. 11.52

5. एका काटकोन Δ त एक लघुकोन 30^0 मापाचा आहे. सिध्द करा की त्याचा कर्ण हा कोनासमोरील बाजूच्या दुप्पट असतो.

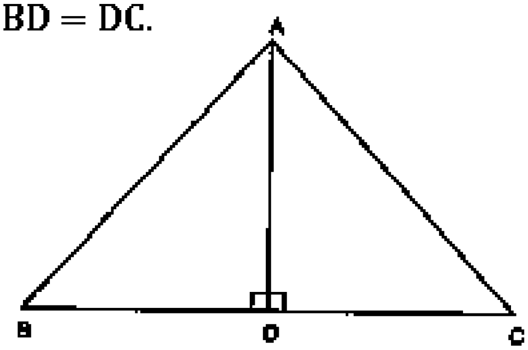
6. रेषाखंड AB आणि CD अशाप'कारे O बिंदूत छेदतात की AB चा मध्य होतो. जर AC हा DB ला समांतर असेल तर O हा CD चा सुध्दा मध्यबिंदू असतो हे सिध्द करा.

7. आकृती ११.५३ मध्ये AB ही सर्वात मोठी आणि DC ही सर्वात लहान अशा $ABCD$ च्या बाजू आहेत. तर सिध्द करा की, $< C >< A$ आणि $< D >< B$ (सूचना ः AC आणि BD जोडा.)



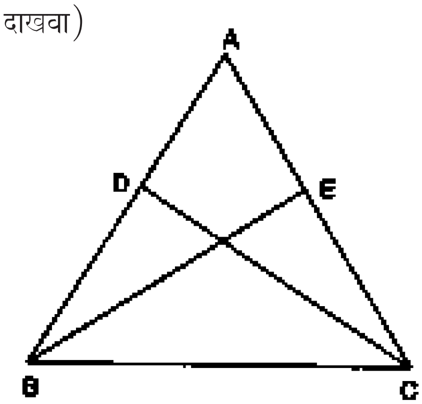
आ. 11.53

8. ΔABC या समद्विभुज त्रिकोणात $AB = BC$ आणि A बिंदूतून BC या पायवर लंब काढलातर सिध्द करा की $BD = DC$.



आ. 11.54

9. समद्विभुज Δ च्या समान बाजू दुभागर्णाया मध्यगा समान लांबीच्या असतात हे सिध्द करा. (सूचना ः $\Delta DBC \cong \Delta ECB$ दाखवा)



आ. 11.55

उत्तरे ः

11.1

1. **(*a*)** **2.(*b*)** **3.(*b*)** 4.(c)

8. <P=<C, <Q=<A आणि <R=<B

11.2

3. < B = < C = 65°, <A=50

11.3

2. A हा सर्वात मोठा कोन आणि B हा सर्वात लहान कोन

12

एकसंपाती रेषा

प्रास्ताविक :

रेषा आणि कोन या प्रकरणात तुम्हाला एकसंपाती रेषा म्हणजे काय हे माहित झाले आहे. तुम्ही त्रिकोण आणि काही विशिष्ट रेषा यांचाही अभ्यास केला आहे. त्रिकोणात काढता येर्णाया बाजूंचे लंबदुभाजक ,कोनदुभाजक, शिरोलंब इ. प्रकरणात अत्यंत उपयोगी अशा या रेषांच्या एकसंपाती असण्याचे गुणधर्म अभ्यासणार आहोत.

उद्दिष्टे :

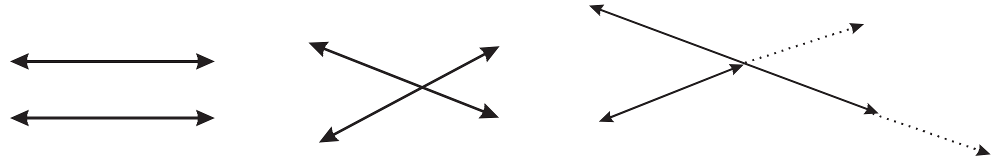
या प्रकरणाचा अभ्यास केल्यावर विद्यार्थी खालील गोष्टी करू शकतील.

- एकसंपाती रेषा,मध्यगा,शिरोलंब, कोनदुभाजक आणि बाजूंचे लंबदुभाजक यांच्या व्याख्या त्रिकोणाच्या संबंधी करता येणे.
- त्रिकोणाच्या संदर्भात मध्यगांचे , शिरोलंबाचे ,बाजूंच्या लंबदुभाजकाचे, कोनदुभाजकांचे छेदनबिंदू एकसंपाती असतात हयांचा पडताळा घेणे.

अपेक्षित पूर्वज्ञान :

छेदर्णाया रेषांचे गुणधर्म जसे ,

- एका प्रतलातील दोन रेषा समांतर }पहा. आ. 12.1 (a)] असतील किंवा छेदर्णाया }पहा आ. 12.1 (b) आणि (c)]



आ. 12.1

- एकच प्रतलातील तीन रेषा खालीलप्रमाणे असू शकतील

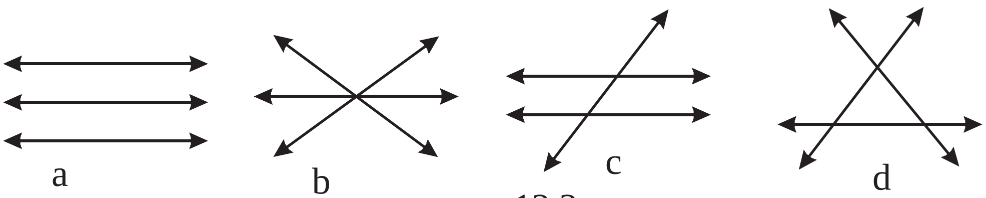
(i) परस्परांना समांतर असतील म्हणजे एकाही बिंदूत छेदणार नाहीत. }आकृती १२.२ (a) पहा]

किंवा

(ii) फक्त एकाच बिंदूत छेदतील }आकृती 12.2 (b) पहा]

(iii) परस्परांना दोन बिंदूत छेदतील }आकृती 12.2 (c) पहा].

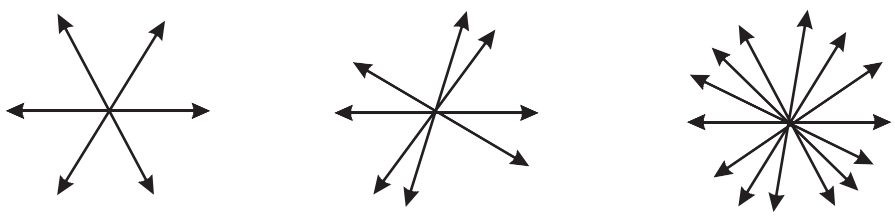
(i) जास्तीत जास्त तीन बिंदूत छेदतील. }आकृती 12.2 (d) पहा]



आ. 12.2

12.1: एकसंपाती रेषा :

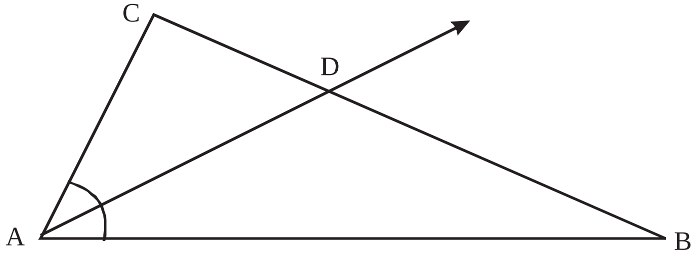
एका प्रतलातील दोन किंवा अधिक रेषा एकाच बिंदूत छेदतात किंवा एका बिंदूतून एका बिंदूतून जातात. त्यांना एकसंपाती रेषा असे म्हणतात आणि त्यांच्या सामाईक बिंदूला संपातबिंदू असे म्हणतात.



आ. 12.3

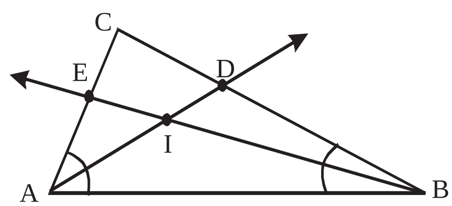
12.1.1 : त्रिकोणाचे कोनदुभाजक :

ΔABC मध्ये रेषा AD ही $\angle A$ चा दुभाजक आहे. (आ. 12.4 पहा)

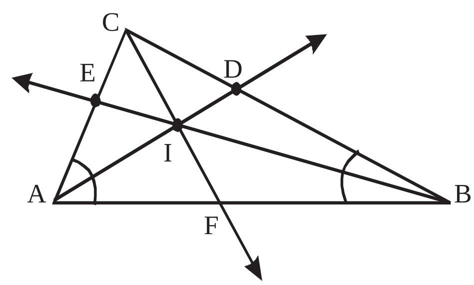


आ. 12.4

जी रेषा त्रिकोणाचा एक कोन दुभागते त्या रेषेला त्या त्रिकोणाच्या कोनाचा दुभाजक असे म्हणतात. प'त्येक त्रिकोणाला किती कोनदुभाजक असतील? त्रिकोणाला तीन कोन असतात म्हणून त्यातून तीन कोनदुभाजक काढता येतील. ΔABC च्या $< A$ चा AD हा कोनदुभाजक आहे. $< B$ चा दुभाजक BE काढू.



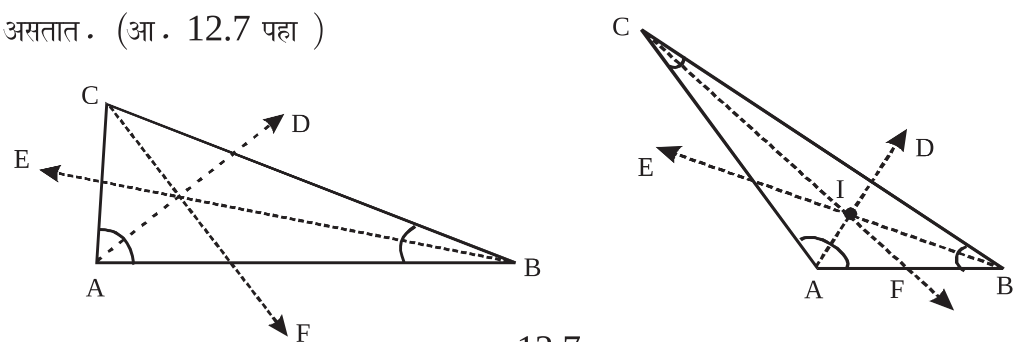
आ. 12.6



आ. 12.5

ΔABC चे कोन दुभाजक I या एका बिंदूत छेदतात. आता तिसरा म्हणजे $< C$ चा कोन दुभाजक CF काढू. (आ.12.6) आपणांस असे दिसून येते की, त्रिकोणाच्या तीन कोनांचे दुभाजक I या एकाच बिंदूतून जातात. दुर्सया शब्दांत असे सांगता येईल की हे सर्व कोन दुभाजक एकसंपाती आहेत. आणि I हा त्यांचा संपातबिंदू आहे.

आपण कोणत्याही प्रकारचा त्रिकोण घेतला. उदा. काटकोन त्रिकोण, लघुकोन त्रिकोण किंवा विशालकोन त्रिकोण त्यांचे कोनदुभाजक काढले तर आपणांस असे निदर्शनास येते की त्रिकोणाचे कोनदुभाजक एकसंपाती असतात. (आ. 12.7 पहा)



आ. 12.7

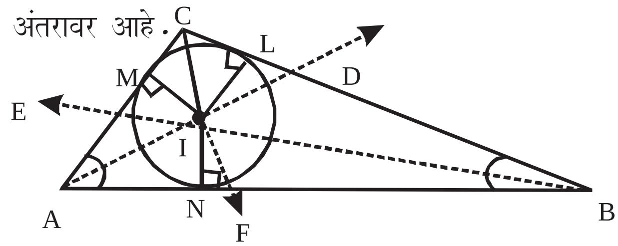
यावरून आपणांस खालीलप्रमाणे निष्कर्ष काढता येतो.

त्रिकोणाचे कोन दुभाजक एकाच बिंदूतून जातात म्हणजेच ते एकसंपाती असतात. I या संपातबिंदूला त्या त्रिकोणाच्या अंतवर्तुळाचा केंद्र असे म्हणतात.

या बिंदूचे नाव अंतवर्तुळकेंद्र का दिले असे कारण सांगता येईल का?

दोन छेदर्णाया रेषांपासून समान अंतरावर असर्णाया बिंदूचा बिंदूपथ हा त्या रेषांनी केलेल्या कोनाचा दुभाजक असतो हे लक्षात घ्या. $< BAC$ च्या दुभाजकावर I हा बिंदू असल्यामुळे BA आणि AC या रेषाखंडापासून समदूर आहे. तसेच I बिंदू $\angle ABC$ च्या दुभाजकावर आहे. (आ. 11.8 पहा)

म्हणजे तो विंदू AB आणि AC या रेषाखंडापासूनही समदूर आहे. याचाच अर्थ विंदू त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजूपासून समान अंतरावर आहे.



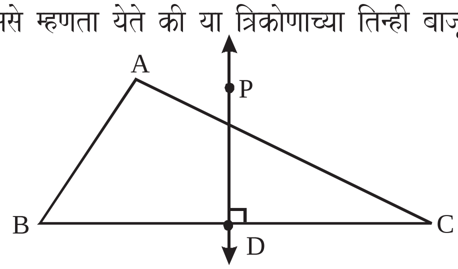
आ. 12.8

आकृती 12.8 मध्ये आपणांस $IL = IM = IN$ हे सांगता येते. I हे केंद्र IL ही त्रिज्या घेऊन त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजूंना करणारे वर्तुळ काढता येते. त्याला त्रिकोणाचे अंतवर्तुळ असे म्हणतात. I हा अंतर्वुर्तळाचा केंद्र असल्यामुळे त्याला अंतवर्तळकेंद्र असे म्हणतात. ही अंतर्वर्तळाची त्रिज्या असल्यामुळे तिला वर्तुळाची आंतरत्रिज्या असे म्हणतात.

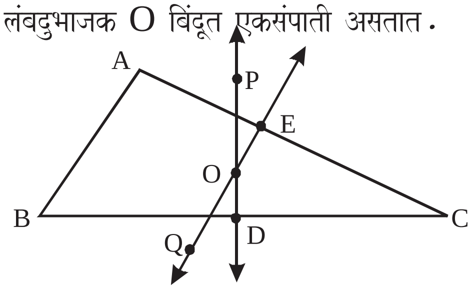
<u>लक्षात ठेवा की अंतवर्तुळकेंद्र हे त्रिकोणाच्या आतच असते.</u>

12.1.2 : <u>त्रिकोणाच्या बाजूंचे लंबदुभाजक :</u>

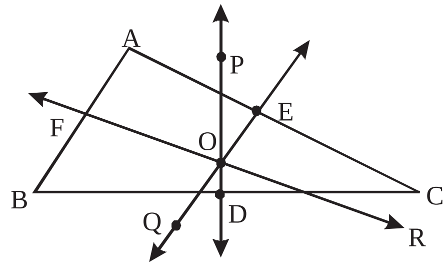
आ. 12.9 मध्ये ΔABC हा एक त्रिकोण आहे. रेषा DP ही BC या बाजूचा लंबदुभाजक आहे. जी रेषा त्रिकोणाच्या बाजूला काटकोनात दुभागते. तिला त्या बाजूचा लंबदुभाजक असे म्हणतात. त्रिकोणाला तीन बाजू असतात. म्हणून आपल्याला त्रिकोणाला तीन लंबदुभाजक काढता येतात. ΔABC च्या तीन लंबदुभाजकपैकी DP हा एक लंबदुभाजक आहे. (आ. 12.9) आपण हा दुसरा लंबदुभाजक काढू. जो DP ला O मध्ये मिळेल. (आ. 12.10) आता जर तिसरा लंबदुभाजक काढला, तर आपल्या असे लक्षात येते की तो सुध्दा विंदूतूनच जातो. (आ. 12.11) दुर्सया शब्दात असे म्हणता येते की या त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजूंचे लंबदुभाजक O विंदूत एकसंपाती असतात.



आ. 12.9

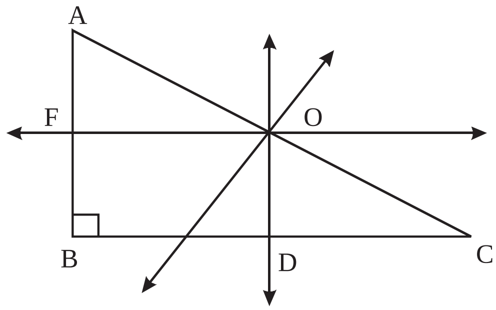


आ. 12.10

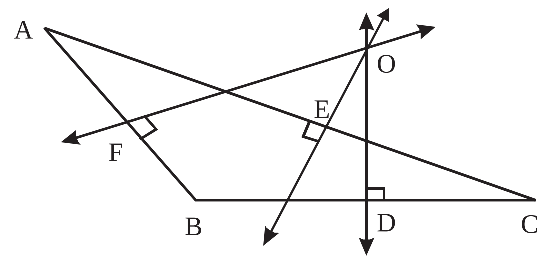


आ. 12.11

हाच प्रयोग तुम्ही कोणत्याही प्रकारच्या त्रिकोणासाठी करू शकता. परंतु आपणास हेच निदर्शनास येईल की, त्रिकोणाच्या बाजूंचे लंबदुभाजक एकाच बिंदूतून जातात.



आ. 12.12 (a)



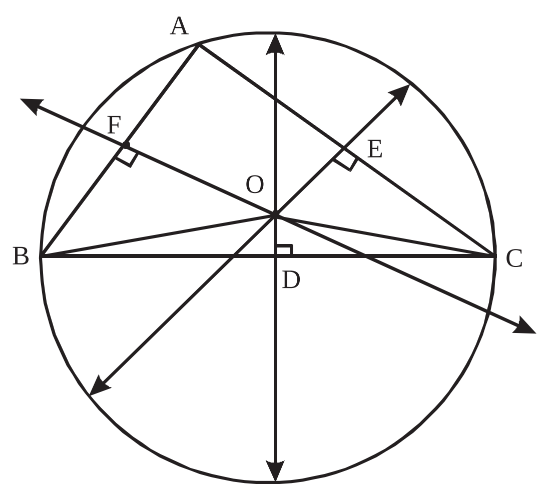
आ. 12.12 (b)

यावरून असा निष्कर्ष काढता येतो तो पुढीलप्रमाणे :

> त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजूंचे लंबदुभाजक एकाच बिंदूतून जातात. म्हणजेच ते एकसंपाती असतात. 'O' या संपातबिंदूला त्रिकोणाचा 'परिवर्तुळकेंद्र' असे म्हणतात.

या बिंदूला परिवर्तुळकेंद्र असे का म्हटले असेल?

दोन बिंदूपासून समान अंतरावर असणार्या बिंदूचा बिंदूपथ हा ते दोन बिंदू जोडणार्या रेषाखंडाचा लंबदुभाजक असतो हे आठवा. जर 'O' हा बिंदू BC च्या लंबदुभाजकावर असेल तर तो **B** आणि **C** या बिंदूपासून समान अंतरावर असलाच पाहिजे. म्हणून $BO = CO$ (आ. 12.13)



आ. 12.13

'O' हा बिंदू **AC** च्या लंबदुभाजकावर आहे म्हणजे तो **A** आणि C पासून समान अंतरावर असला पाहिजे म्हणजे $AO = BO = CO$.

जर **O** हा केंद्र आणि **AO** ही त्रिज्या घेतली तर आपण त्रिकोणाच्या **A, B, C** या तिनही शिरोबिंदूतून जाणारे वर्तुळ काढू शकतो. यालाच त्रिकोणाचे परिवर्तुळ असे म्हणतात. **'O'** हा या वर्तुळाचा केंद्र असल्यामुळे त्याला परिवर्तुळकेंद्र आणि **AO** ही परिवर्तुळाची त्रिज्या असल्यामुळे तिला परित्रिज्या असे म्हणतात.

लक्षात घ्या की परिवर्तुळकेंद्र हे ....

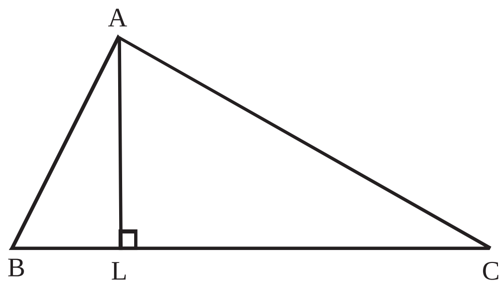
(i) लघुकोन त्रिकोणात त्रिकोणाच्या अंतर्भागाता असेल. (आ. 12.11)

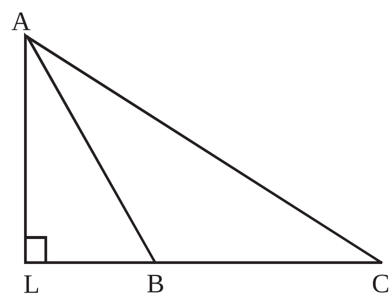
(ii) काटकोन त्रिकोणात त्रिकोणाच्या कर्णावर असेल. (आ. 12.12 (a)

(iii) विशालकोन त्रिकोणात त्रिकोणाच्या बाहयभागात असेल. (आ. 12.12(b))

12.1.3 : त्रिकोणाचे शिरोलंब ः

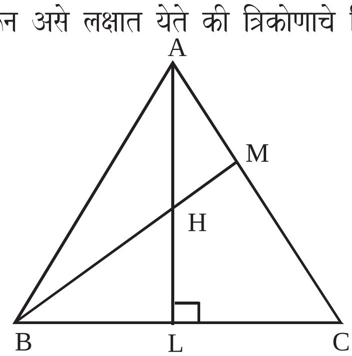
ΔABC मध्ये रेषा **AL** ही **A** या शिरोबिंदूपासून त्याच्या समोरील बाजूवर काढलेली लंबरेषा आहे.



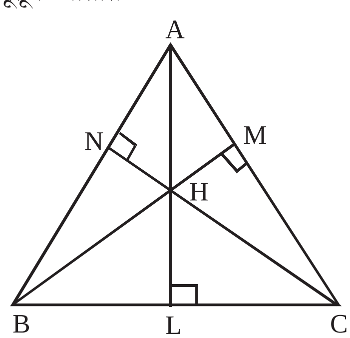


आ. 12.14

त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूतून त्याच्या समोरील बाजूवर टाकलेला लंब म्हणजे शिरोलंब होय . एका त्रिकोणात किती शिरोलंब काढता येतील? त्रिकोणाला तीन शिरोबिंदू असतात. म्हणून तीन शिरोलंब काढता येतील. **AL** हा त्यापैकी एक शिरोलंब आहे. आपण दुसरा शिरोलंब काढू जो पहिल्या शिरोलंबाला **H** बिंदूत छेदेल. (आ. 12.15) तसेच तिसरा शिरोलंब **CN** हा बिंदूमधूनच जाईल. (आ. 12.16) यावरून असे लक्षात येते की त्रिकोणाचे शिरोलंब एकाच बिंदूतून जातात.

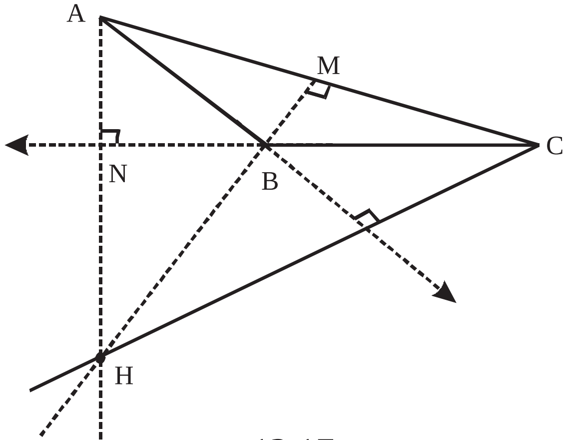


आ. 12.15

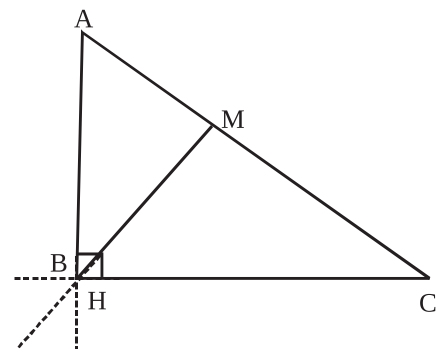


आ. 12.16

आपण कोणत्याही प्रकारचा त्रिकोण काढला आणि त्याचे तीन शिरोलंब काढले तर आपणास हे तिन्ही शिरोलंब एकसंपाती असतात असे आढळेल.



आ. 12.17



आ. 12.18

यावरून आपणास असा निष्कर्ष काढता येतो ः

एखादया त्रिकोणाचे तिन्ही शिरोलंब एकाच बिंदूतून जातात. म्हणजेच ते एकसंपाती असतात. या एकसंपातीबिंदूला त्रिकोणाचा शिरोलंब संपात बिंदू असे म्हणतात.

लक्षात घ्या की शिरोलंबसंपात बिंदू हा ः

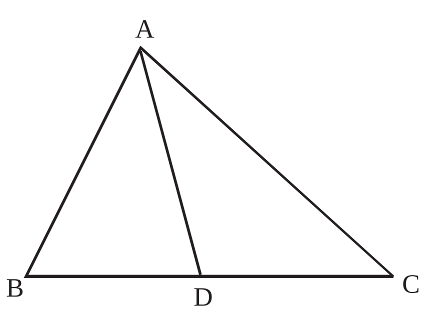
(1) जर लघुकोन त्रिकोण असेल तर त्रिकोणाच्या अंतार्भागात असेल. (आ. 12.16)

(2) जर विशालकोन त्रिकोण असेल तर त्रिकोणाच्या बाहयभागात असेल. (आ. 12.17)

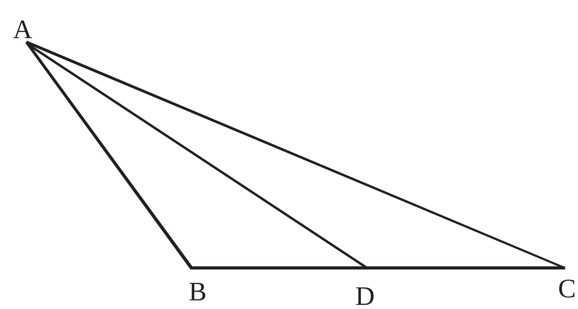
(3) जर काटकोन त्रिकोण असेल तर काटकोन करणाया शिरोबिंदूवर असेल. (आ. 12.18)

<u>12.1.4 : त्रिकोणाच्या मध्यगा ः</u>

Δ ABC मध्ये **A** हा शिरोबिंदू आणि **D** हा **BC** चा मध्यबिंदू जोडा. (आ. 12.19)



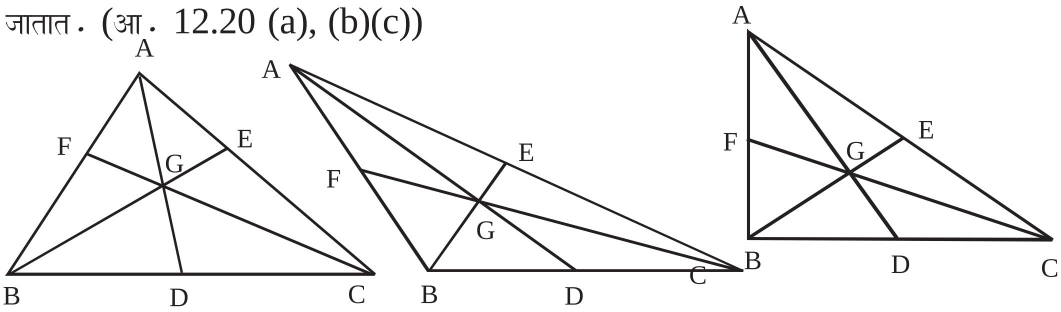
आ. 12.19 **(a)**



आ. 12.19 **(b)**

त्रिकोणाचा शिरोबिंदू आणि त्याच्या समोरील बाजूचा मध्यबिंदू जोडणारी रेषा म्हणजे मध्यगा होय.

एका त्रिकोणाला तीन मध्यगा काढता येतात. AD ही त्यापैकी एक मध्यगा आहे. जर आपण कोणत्याही त्रिकोणाच्या तिन्ही मध्यगा काढल्या तर आपणांस असे आढळते की त्या तिन्ही मध्यगा एकाच बिंदूतून जातात. (आ. 12.20 (a), (b)(c))



आ. (a) आ. (b) आ. (c)

आ. 12.20

येथे प्रत्येक त्रिकोणा मध्ये (आ. 12.20) मध्यगा AD ,BE आणि मध्यगा CF या एकसंपाती आहेत. त्यांचा संपातबिंदू G आहे. प्रत्येक त्रिकोणात G बिंदूमुळे मध्यगेचे जे दोन भाग झाले आहेत ते मोजा. असे निदर्शनास येईल की –

AG=2GD, BG=2GE आणि CG =2GF

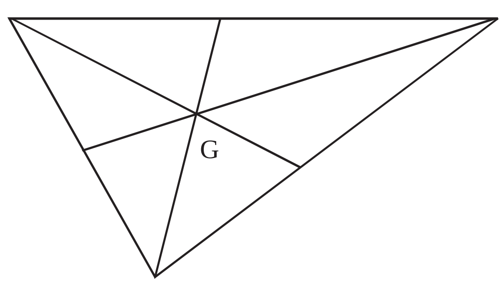
म्हणजेच G या संपातबिंदूमुळे प्रत्येक मध्यगेचे 2 : 1 या प्रमाणात विभाजन होते.

यावरून पुढीलप्रमाणे निष्कर्ष काढता येतो.–

त्रिकोणाच्या मध्यगा एकाच बिंदूतुन जातात. या बिंदूमुळे प्रत्येक मध्यगा 2 : 1 प्रमाणात विभागली जाते. G या संपातबिंदूला त्रिकोणाचा गुरूत्वमध्य असे म्हणतात.

<u>तुमच्यासाठी कृती/खालील कृती करा.</u>

एका कार्डबोर्डच्या तुकडयाचा त्रिकोण कापा. त्याच्या तिन्ही मध्यगा काढा आणि G हा गुरूत्वमध्य काढा. एका काठीचे टोक किंवा कंपासचे टोक G वर ठेवून तो त्रिकोणी तुकडा तोलून पहा. जर G हा बिंदू विनचूक काढला असेल तर त्रिकोणाचे वजन G बिंदूवर निश्चितपणे तोलले जाईल. (आ. 12.21)



आ. 12.21

आता तुमच्या लक्षात येईल की त्रिकोणाच्या मध्यगा संपातबिंदूला गुरूत्वमध्य का म्हटले आहे? जेथे त्रिकोणाचे वजन एकवटले आहे किंवा तो एक असा बिंदू आहे की जेथे त्रिकोणाचे सर्व वजन केंद्रित झाले आहे. या संकल्पनांचा उपयोग करून उदाहरणे कशी सोडवायची ते पाहू

<u>उदा. 12.1 :</u> समद्विभुज त्रिकोणात समान बाजू करणा-या कोनाचा दुभाजक हा लंबदुभाजक, शिरोलंब आणि त्या त्रिकोणाची मध्यगाही असतो हे दाखवा.

उत्तरः ΔABC व ΔACD मध्ये,

$AB = AC$ — — — — (पक्ष)

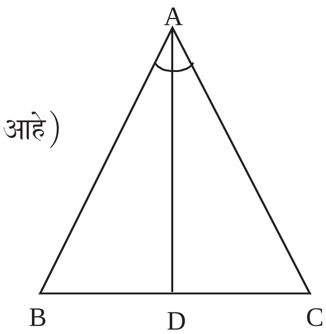
$< BAD =< CAD$ ($\therefore AD$ हा $< A$ चा दुभाजक आहे)

आणि $AD = AD$ (सामाईक)

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$

$\therefore BD = CD$

$\therefore$ AD ही मध्यगा सुध्दा आहे.



AD हा बाजू BC चा लंबदुभाजक आहे.

आ. 12.22

($\therefore < ADB = 90^o =$ AD हा शिरोलंबही आहे.)

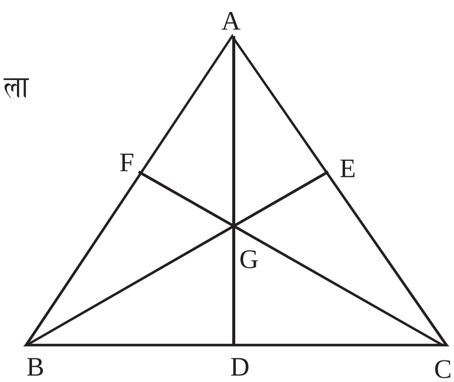
<u>उदा. 12.2:</u> समभुज Δ चे तिन्ही कोनदुभाजक हे तीन बाजूंचे लंबदुभाजक,तीन शिरोलंब आणि त्रिकोणाच्या तीन मध्यगा असतात हे दाखवा.

उत्तर : $\therefore AB = AC$

$\therefore$ AD हा $< AD$ चा कोनदुभाजक बाजू BC ला लंबदुभाजकही आहे. तसेच त्रिकोण ABC चा शिरोलंब आणि मध्यगा सुध्दा आहे. (उदा. 12.1 पहा)

त्याचप्रमाणे $\therefore AB = BC$ आणि $BC = AC$

$\therefore$ BE आणि CF हे $< B$ आणि $< C$ चे अनुक्रमे कोनदुभाजक आहेत ते लंबदुभाजकही आहेत. आणि ΔABC चे शिरोलंब व मध्यगाही आहेत.

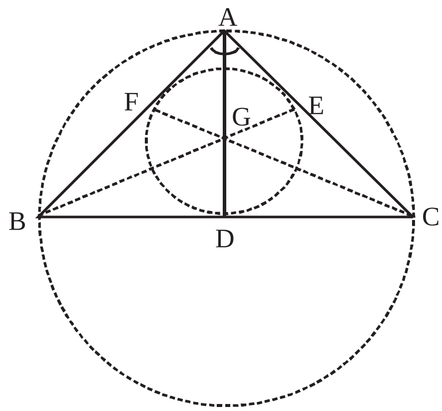


आ. 12.23

<u>उदा.12.3 :</u> समभुज Δ ची बाजू 'a' आहे. तर त्या त्रिकोणाच्या परिवर्तुळाची त्रिज्या तसेच अंतर्वर्तुळाची त्रिज्या काढा.

उत्तर : आपण प्रथम A बिंदूतून बाजू BC वर AD हा लंब काढू.

AD हा $< A$ चा दुभाजक तसेच BC चा लंबदुभाजक आणि शिरोमध्यगा सुध्दा आहे.



आ. 12.24

$BC = a$ $\therefore AD = \frac{\sqrt{3}}{2}\ a$

$\Rightarrow AD =$ या उदाहरणातील परित्रिज्या $= \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

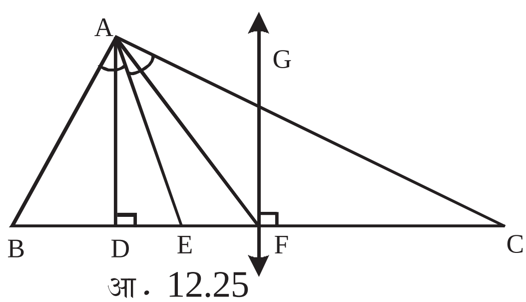
परित्रिज्या आणि

$GD =$ या उदाहरणातील अंतर्वर्तुळ त्रिज्या

$= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\ a = \frac{\sqrt{3}}{6}$

12.1 तुमची प्रगती अजमावून पहा :

1. दिलेल्या आकृतीत (आ. 12.25) जर $= BF = FC, < BAF =< CAE$ आणि $< ADE =< GFC = 90^0$ तर त्रिकोणाची मध्यगा कोनदुभाजक,शिरोलंब, लंबदुभाजक ओळखा व नावे लिहा.

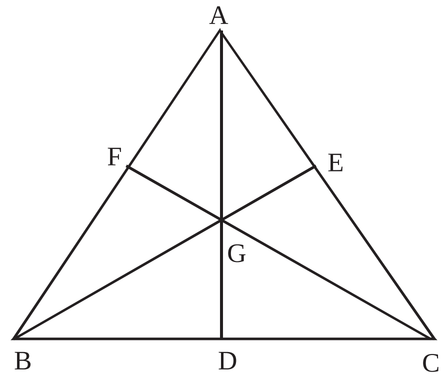


आ. 12.25

2. समभुज त्रिकोणात अंतवर्तुळकेंद्र ,परिवर्तुळकेंद्र ,शिरोलंब संपात बिंदू आणि गुरूत्वमध्य हे एकच बिंदू असतात.

3. आ. 12.26 मध्ये ΔABC हा समभुज त्रिकोण असून G हा ΔABC चा गुरूत्वमध्य आहे. जर $AG = 4.8$ सेमी तर AD आणि BE मिळवा.

4. जर H हा ΔABC चा शिरोलंबसंपात बिंदू असेल तर A हा ΔHBC चा शिरोलंबसंपातबिंदू असतो



हे सिध्द करा.

5. खालील प्रश्नांमध्ये प्रश्नाखाली दिलेल्या पर्यायातून योग्य तो पर्याय निवडा.

(i) एका प्रतलात जो बिंदू त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूपासुन समदूर असतो त्याला .... म्हणतात.

(a) गुरूत्वमध्य (b) अंतवर्तुळकेंद्र

(c) परिवर्तुळकेंद्र (d) शिरोलंबसंपातबिंदू

(ii) एका प्रतलात जो बिंदू त्रिकोणाच्या बाजंपासून समान अंतरावर असतो त्याला .... म्हणतात.

(a) गुरूत्वमध्य (b) अंतवर्तुळकेंद्र

(c) परिवर्तुळकेंद्र (d) शिरोलंबसंपातबिंदू

सारांश :-

- एका प्रतलातील तीन किंवा अधिक रेषा जर एका बिंदूत छेदत असतील तर त्यांना एकसंपाती रेषा म्हणतात.
- जी रेषा त्रिकोणाचा कोन दुभागते त्यास त्रिकोणाचा कोनदुभाजक असे म्हणतात.
- जी रेषा त्रिकोणाच्या बाजूला काटकोनात दुभागते तिला त्या त्रिकोणचा लंबदुभाजक असे म्हणतात.
- त्रिकोणाच्या एका शिरोबिंदुतून त्याच्या समोरील बाजूंवर टाकलेला लंब म्हणजे त्या त्रिकोणाचा शिरोलंब होय.
- त्रिकोणाचा शिरोबिंदू व त्याच्या समोरील बाजूचा मध्य जोडणा-या रेषेला मध्यगा असे म्हणतात.
- त्रिकोणात -

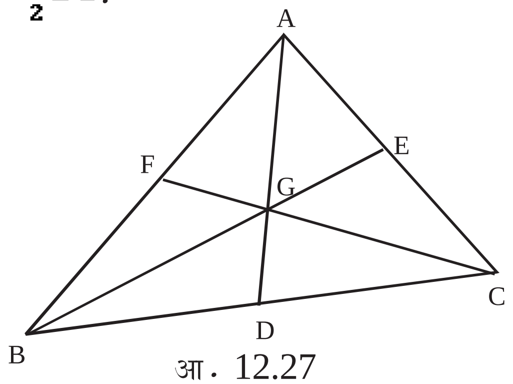
(i) कोनदुभाजक एकसंपाती असतात आणि त्यांच्या संपातबिंदुला अंतवर्तुळकेंद्र असे म्हणतात.

(ii) बाजूंचे लंबदुभाजक एकसंपाती असतात आणि त्यांच्या संपातबिंदूला परिवर्तुळकेंद्र असे म्हणतात.

(iii) शिरोलंब एकसंपाती असतात आणि त्यांच्या संपातबिंदूला गुरूत्वमध्य म्हणतात. ज्यामुळे मध्यगेचे 2 : 1 या प्रमाणात विभाजन होते.

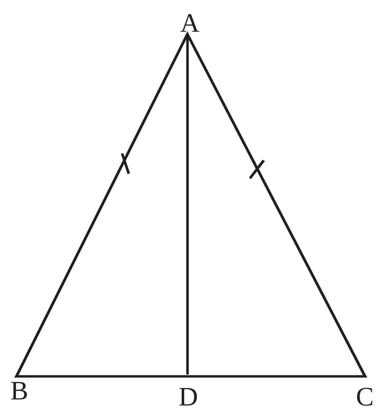
संकीर्ण प्रश्नसंग्रह

(1) आ. 12.27 मध्ये ΔDEF च्या बाजूंचे अनुक्रमे D, E आणि F हे बाजूंचे मध्यबिंदू असतील तर दाखवा की, $BE + CF > \frac{3}{2}BC$.



आ. 12.27

(1) ΔABC हा समद्विभुज त्रिकोण असून $AB = AC$. जर D हा BC चा मध्यबिंदू असेल तर असे दाखवा की गुरूत्वमध्य , अंतवर्तुळकेंद्र, परिवर्तळकेंद्र , शिरोलंबसंपातबिंदू AD वर पडतात.



आ. 12.28

(3) ΔABC हा समद्विभुज त्रिकोण असा आहे की, $AB = AC = 17$ सेमी, पाया $BC = 16$ सेमी, जर G हा चा गुरूत्वमध्य असेल तर AG काढा.

(4) समद्विभुज त्रिकोण ABC ची बाजू 12 सेमी आहे. जर G हा गुरूत्वमध्य असेल AG तर मिळवा.

तुमच्यासाठी कृती ः

1. एक त्रिकोण ABC काढा. त्याचे परितवर्तुळकेंद्र मिळवा आणि परिवर्तुळ काढा.

2. एक समभुज त्रिकोण काढा. त्याचे अंतरवर्तुळकेंद्र ,तसेच परिवर्तुळकेंद्र मिळवा. या त्रिकोणाचे अंतरवर्तुळ आणि परिवर्तुळ काढा.

3. 5 सेमी बाजू असलेला समभुज त्रिकोण काढा. या त्रिकोणाचे अंतवर्तुळ आणि परिवर्तुळ काढा.

उत्तरे ः

12.1 (1) मध्यगा - **AF** आणि कोनदुभाजक - **AE,** शिरोलंब **AD,**लंबदुभाजक **GF** आहे.

(3) $AD = 7.2$ सेमी, $BE = 7.2$ सेमी.

(5) **(i) (C)** **(ii) (B)**

उत्तरे ः संकीर्ण प्रश्नसंग्रह

3. $AG = 10$ सेमी.

4. $AG = 4\sqrt{3}$ सेमी.

13

चौकोन

प्रास्ताविक ः

जर तुम्ही आजुबाजुला पाहिले तर तुम्हांला चार बाजूंनी बंदिस्त अशा अनेक वस्तू दिसतील. एखादया पुस्तकाच पृष्ठभाग,खिडकीचे दार,खिडक्यांच्या ग्रील्सचे भाग, ब्रेडची स्लाइस, तुमच्या खोलीची जमीन या सर्व वस्तू म्हणजे चार रेषाखंडांनी बंदिस्त अशा आकृत्या आहेत. त्या आकृत्यांना चौकोन म्हणतात. इंग्रजीत याला क्वाड्रीलॅटरल असे म्हणतात. त्याच्या दोन मूळ शब्दांपैकी क्वाड्रीक म्हणजे चार आणि लॅटरल म्हणजे बाजू.चौकोन म्हणजे अशी भौमितीक आकृती की जिला चार बाजू आहेत आणि ती आकृती एका प्रतलाचा काही भाग वंदिस्त करते.

या प्रकरणात आपण चौकोनाशी संबंधित असलेल्या गुणधर्माविषयीच्या काही बाबी आणि संबोध याचा अभ्यास करणार आहोत.

उद्दिष्टे ः

या प्रकरणाच्या अभ्यासानंतर विद्यार्थ्याला खालील बाबी येऊ शकतील.

- चौकोनाच्या विविध प्रकारांचे वर्णन करणे जसे समलंब चौकोन ,समांतरभुज चौकोन, आयत, समभुज चौकोन आणि चौरस.
- विविध प्रकारच्या चौकोनांच्या गुणधर्मांचा पडताळा घेता येणे.
- त्रिकोणामध्ये दोन बाजूंचे मध्यबिंदू जोडणारा रेषाखंड तिर्सया बाजूला समांतर असतो आणि तिच्या निम्मा असतो या गुणधर्माचा पडताळा घेता येणे.
- त्रिकोणाच्या एका बाजूच्या मध्यबिंदूतून जाणारी दुर्सया बाजूला समांतर असणारी रेषा तिर्सया बाजूला दुभागते या गुणधर्माचा पडताळा घेणे.
- जर तीन किंवा तीनपेक्षा जास्त समांतर रेषांनी एका छेदिकेवर कापलेले संगत आंतरछेदही समान असतात. या गुणधर्माचा पडताळा घेणे.
- समांतरभुज चौकोनाच्या कर्णामुळे होर्णाया दोन त्रिकोणांची क्षेत्रफळे समान असतात या गुणधर्माचा पडताळा घेता येणे.

- दोन समांतर रेषांमधील एकाच किंवा समान पायांवर असलेल्या त्रिकोणांची क्षेत्रफळे समान असतात आणि त्यांचा व्यत्यास यांचा पडताळा घेणे.

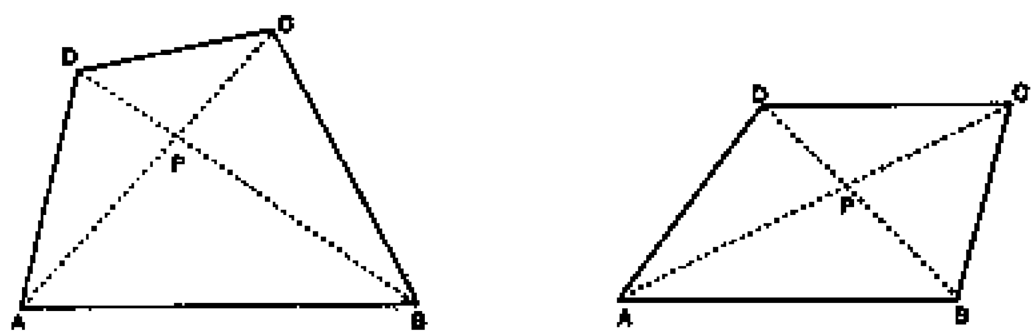
अपेक्षित पूर्वज्ञान ः

- रेषाखंड काढणे आणि दिलेल्या मापाचे कोन काढणे.
- दिलेल्या त्रिज्यांची वर्तुळे किंवा कंस काढणे.
- समांतर रेषा व लंब रेषा काढता येणे.
- संख्यावरील चार मूलभूत क्रिया.

13.1 : चौकोन

जर एका प्रतलात A,B,C,D हे चार बिंदू असे आहेत की, त्यांच्यापैकी कोणतेही तीन बिंदू एकरेषीय नाहीत. रेख AB,BC,CD आणि DA हे अंत्यबिंदूशिवाय एकमेकींना छेदत नाहीत. अशा चार रेषाखंडानी मर्यादित असलेल्या आकृतीला चौकोन म्हणतात. A,B,C,D हे शिरोबिंदू असलेला चौकोन हा □ ABCD असा लिहितात. आ. 13.1 (i) आणि (ii) मध्ये दोन्ही चौकोन ABCD असेच लिहितात.

या ABCD चौकोनार्त



आ. 13.1

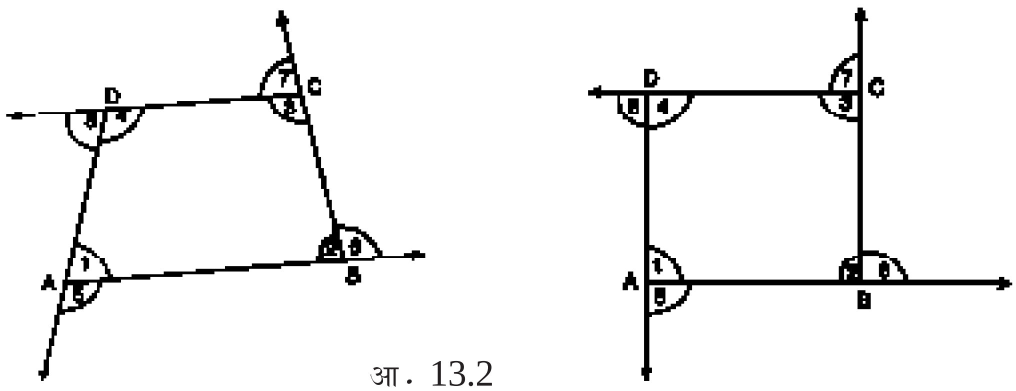
(i) AB आणि DC, BC आणि AD या समोरासमोरील बाजूंच्या दोन जोडया आहेत.

(ii) <A आणि < C, < B आणि < D या समोरासमोरील कोनांच्या दोन जोडया आहेत.

(iii) AB आणि BC, BC आणि CD या दोन क्रमागत बाजू किंवा संलग्न बाजू यांच्या दोन जोडया आहेत. उरलेल्या दोन क्रमागत बाजूंच्या जोडयांची नावे सांगू शकाल का?

(iv) <A आणि < B, < B आणि < C हे क्रमागत कोनांच्या किंवा संलग्न कोनांच्या दोन जोडया आहेत. क्रमागत कोनांच्या उरलेल्या जोडया तुम्हांला सांगता येतील का?

(v) AC आणि BD हे दोन कर्ण आहेत. आ. 13.2 मध्ये 1,2,3,4 यांनी दाखविलेले कोन हे □ABCD चे आंतरकोन किंवा कोन आहेत. 5,6,7 आणि 8 दाखविलेले कोन हे □ABCD चे बाहयकोन आहेत. <1,<2,<3,<4 मोजा.



आ. 13.2

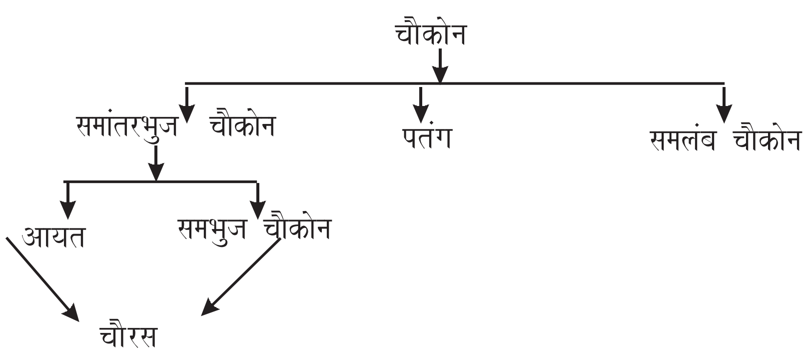
या कोनांची बेरीज किती ?

तुमच्या लक्षात येईल की, <1 + <2 +<3+ <4 =360° असते. तसेच □ABCD च्या बाहयकोनांची बेरीज किती असेल?

तुमच्या असे लक्षात येईल की, <5+<6+<7+<8 =360 म्हणजेच चौकोनाच्या बाहयकोनांची बेरीज ही 360 असते.

13.2: चौकोनाचे प्रकार :

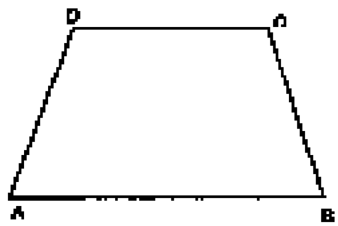
तुम्हाला चौकोन आणि चौकोनाचे विविध प्रकार यांचा परिचय आहे. तुम्हाला त्यांची नावेही माहिती आहेत. आता आपण या वेगवेगळया प्रकारांचा व्यवस्थितपणे अभ्यास करणार आहोत. आ. 13.3 मध्ये चौकोनाच्या विविध शाखा दाखविल्या आहेत.



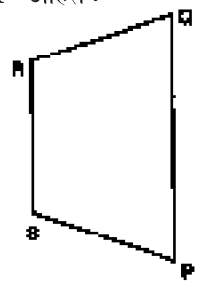
आता आपण एक एक चौकोनाची माहिती घेऊ.

1. समलंब चौकोन :

ज्या चौकोनात समोरासमोरील बाजूंच्या दोन जोडयापैकी एकच जोडी समांतर असते. त्या चौकोनास समलंब चौकोन असे म्हणतात. आ. 13.4 (i) व (ii) मध्ये □ ABCD आणि □ PQRS हे समलंब चौकोन असून अनुक्रमे AB ∥ DC आणि PQ ∥ SR आहेत.



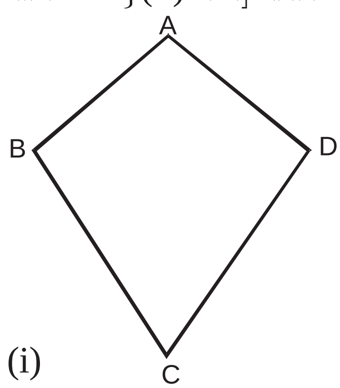
आ. 13.4



2. <u>पतंग ः</u>

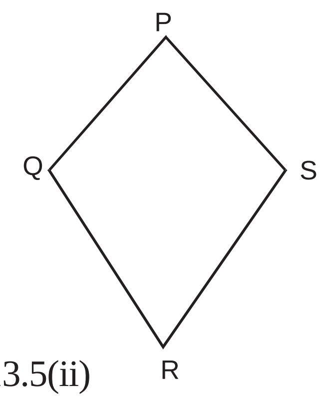
ज्या चौकोनाच्या लगतच्या बाजूंच्या दोन जोडया समान असतात, त्यास पतंग असे म्हणतात. आ. 13.5 (i) व (ii) मध्ये □ ABCD आणि □PQRS हे पतंग असून त्यामध्ये संलग्न बाजंच्या जोडया बाजू AB आणि AD,BC आणि CD }(i) मध्ये] आणि बाजू PQ आणि PS,QR आणि RS }(ii) मध्ये] समान आहेत.

(i)



आ. 13.5 (i)

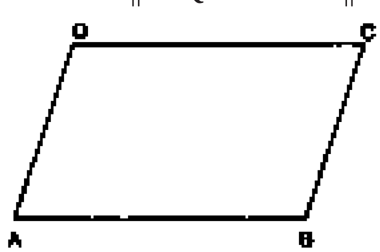
(ii)



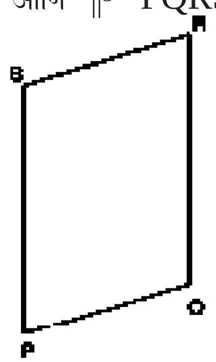
आ. 13.5(ii)

3. <u>समांतरभुज चौकोन ः</u>

ज्या चौकोनाच्या समोरासमोरील बाजूंच्या दोन्ही जोडया परस्परांना समांतर असतात, त्या चौकोनास समांतरभुज चौकोन म्हणतात. आ. 13.6 (i) आणि (ii) मध्ये □ ABCD आणि □ PQRS हे समांतरभुज चौकोन आहेत. ज्यामध्ये अनुक्रमे AB ∥ DC आणि AD ∥ BC तसेच PQ ∥ SR आणि SP ∥ RQ आहेत. हे ∥gm ABCD आणि ∥gm PQRS असे दर्शवितात.

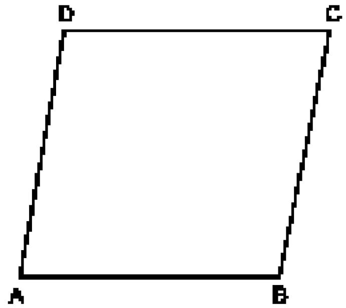


आ. 13.6 (i)



आ. 13.6 (ii)

4. <u>समभुज चौकोन ः</u>



आ. 13.7

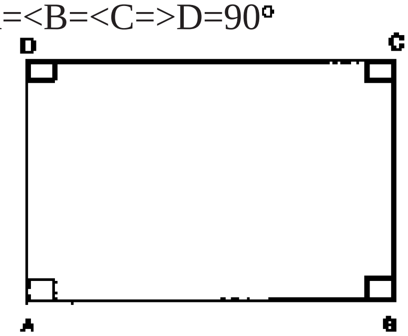
ज्या समांतरभुज चौकोनाच्या संलग्न भुजा समान असतात त्या चौकोनास समभुज चौकोन असे म्हणतात. आ. 13.7 मध्ये □ABCD हा समभुज चौकोन आहे.

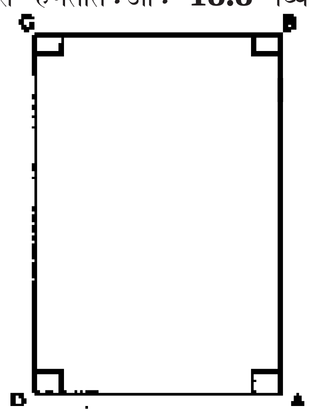
येथे तुम्ही लक्षात घ्या की, □ABCD या समांतरभुज चौकोनात AB=BC=CD=DA म्हणजेच संलग्न बाजूच्या जोडया समान, दुर्सया शव्दांत सांगायचे झाल्यास सर्वच बाजू समान आहेत. (पण सर्व कोन समान नाहीत. फक्त समोरासमोरील कोन समान आहेत)

5. <u>आयत ः</u>

ज्या समांतरभुज चौकोनाच्या एका काटकोन असतो, त्यास आयत असे म्हणतात. आ. **18.8** मध्ये ABCD या आयतामध्ये AB || DC , AD || BC आणि

<A=<B=<C=>D=90°

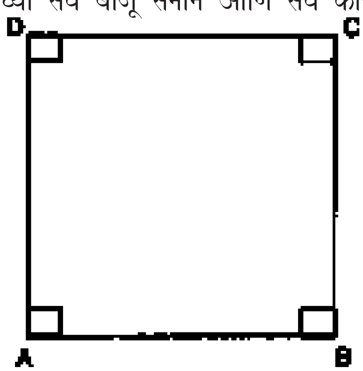




आ. 13.8

6. <u>चौरस ः</u>

चौरस हा असा आयत असतो की ज्याच्या संलग्न बाजू समान असतात. दुर्सया शव्दांत सांगायचे झाल्यास, ज्या समांतरभुज चौकोनाच्या सर्व बाजू समान आणि सर्व कोन काटकोन असतात त्याला चौरस म्हणतात.



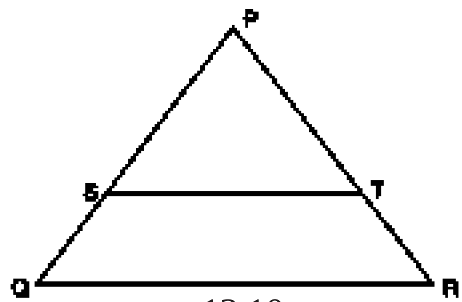
आ. 13.9

आ. 13.9 मध्ये ABCD हा चौरस आहे. ज्यामध्ये हा AB || DC , AD || BC आणि AB=BC=CD=DA तसेच <A=<B=<C=<D=90° आता आपण काही उदाहरणे पाहू.

<u>उदा. **13.1 :**</u> आ. 13.10 मध्ये, PQR हा एक त्रिकोण आहे. S आणि T बिंदू अनुक्रमे बाजू PQ आणि PR वर असे आहेत, की ST || QR. तर तयार झालेल्या STRQ कोणत्या प्रकारचा चौकोन असेल?

<u>उत्तर ः</u> STRQ हा समलंब चौकोन आहे.

कारण ST || QR.



आ. 13.10

<u>उदा. **13.2 :**</u> एका चौकोनाच्या तीन कोनांची मापे 100°, 50°, 70° अशी आहेत तर चौथ्या कोनाचे माप किती?

<u>उत्तर ः</u> आपल्याला माहित आहे की चौकोनाच्या चार कोनांची बेरीज 360 असते.

चौथा कोन x^o मानू.

$\therefore\ 100^\circ + 50^\circ + 70^\circ + x^\circ = 360^\circ$

$\therefore\ 220 + x^o = 360$

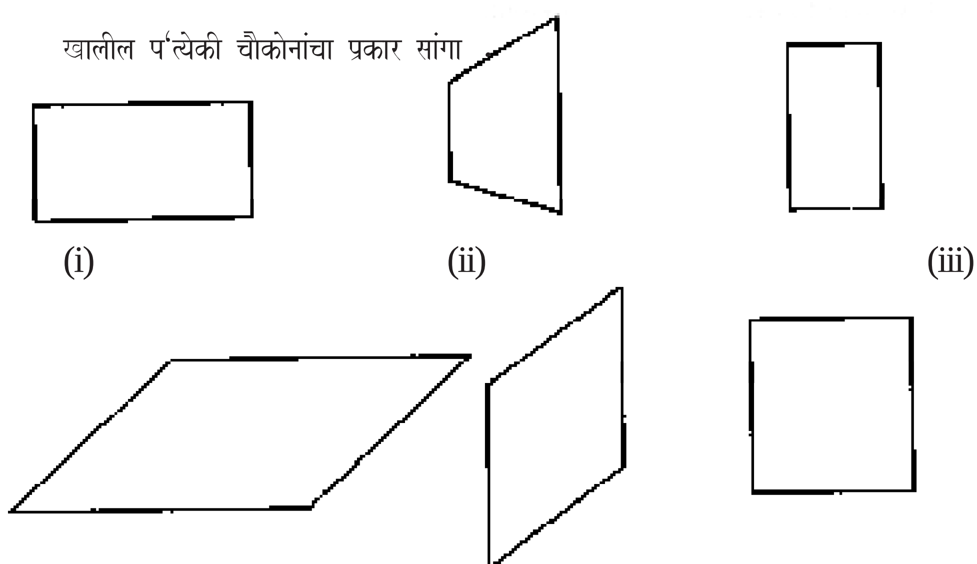
$\therefore\ x^\circ = 360^\circ - 220$

$= 140^\circ$

चौथ्या कोनाचे माप $= 140^\circ$ आहे.

<u>13.1 : तुमची प्रगती अजमावा ः</u>

1. खालील प्रत्येकी चौकोनांचा प्रकार सांगा



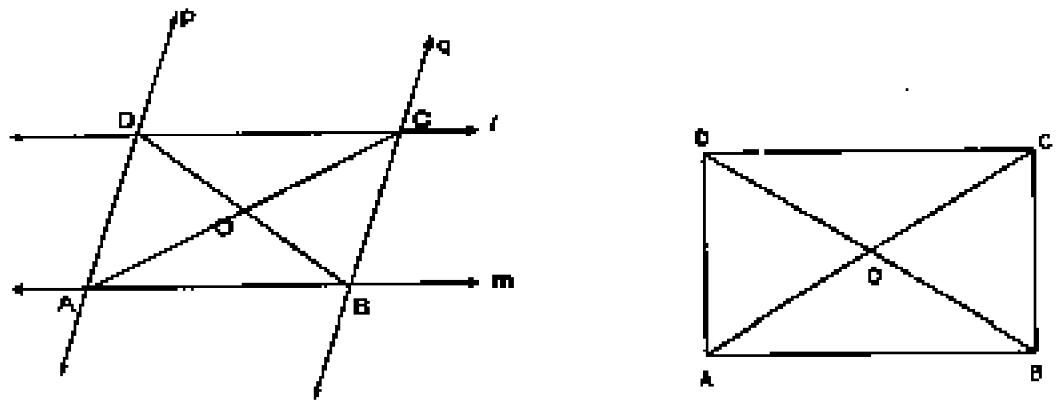
आ. 13.11

2. खालील पैकी कोणते विधान सत्य आहे?
   - (i) चौकोनाच्या आंतरकोनांची बेरीज 360° असते.
   - (ii) सर्व आयत चौरस असतात.
   - (iii) आयत हा समांतरभुज चौकोन असतो.
   - (iv) चौरस हा समभुज चौकोन असतो.
   - (v) समभुज चौकोन हा समांतरभुज चौकोन असतो.
   - (vi) चौरस हा समांतरभुज चौकोन असतो.
   - (vii) समांतरभुज चौकोन हा समभुज चौकोन असतो.
   - (viii) समलंब चौकोन हा समांतरभुज चौकोन असतो.
   - (ix) समलंब चौकोन हा आयत असतो.
   - (x) समांतरभुज चौकोन हा समलंब चौकोन असतो.
3. एका चौकोनाचे सर्व कोन समान आहेत तर प्रत्येक कोनाचे माप काढा.
4. चौकोनाच्या कोनांचे गुणोत्तर **5:7:7:11** आहे. तर प्रत्येक कोनाचे माप काढा.
5. एका चौकोनाची समोरासमोरील कोनांची जोडी पूरक कोन करीत असेल तर दुर्सया समोरासमोरील कोनांच्या जोडीबद्दल काय सांगता येईल?

13.3 विविध प्रकारच्या चौकोनांचे गुणधर्म ः

1. **समांतरभुज चौकोनाचे गुणधर्म ः**

आकृती 13.12 मध्ये दाखवल्याप'माणे रेषा **l** समांतर रेषा **m** काढा. तसेच आणखी दोन समांतर रेषा **P** आणि **q** अशा काढा की **l** आणि **m** यांना छेदतील. तुमच्या असे लक्षात येई ल की **ABCD** हा तयार झालेला चौकोन,समांतरभुज चौकोन आहे. **AC** आणि **BD** जोडया. ते परस्परांना **O** बिंदूत छेदतात.



आ. 13.12

आता बाजू **AB, BC, CD** आणि **DA** मोजा. तुम्हांला काय आढळते? तुम्हांला असे आढळेल की, **AB = DC** आणि

BC = AD, $< ABC, < BCD, < CDA, < DAB$ मोजा.

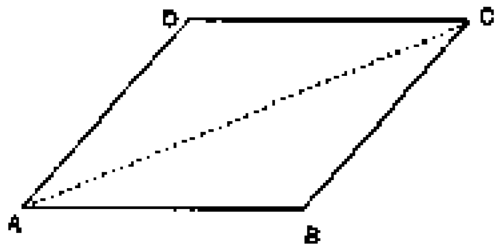
तुम्हांला असे आढळून येईल की $< DAB = < DCB$ आणि $< ABC = < CDA$,

पुन्हा **OA, OC, OB** आणि **OD** मोजा.

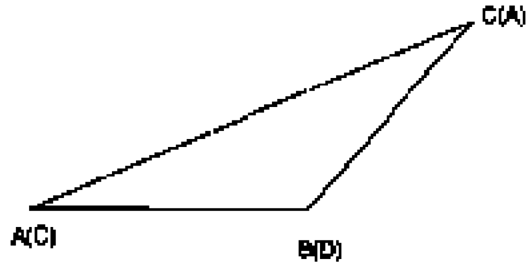
तुम्हांला असे आढळेल की, **OA = OC** आणि **OB = OD** आणखी एक समांतरभुज चौकोन काढा. आणि वरील कृती पुन्हा करा. तुम्हांला असे आढळेल की

समांतरभुज चौकोनाच्या समोरासमोरील भुजा सारख्या असतात. समांतरभुज चौकोनाचे संमुख कोन समान असतात. समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांना दुभागतात.

समांतरभुज चौकोनाचे हे गुणधर्म कार्डबोर्डच्या प्रतिकृतीच्या साहाय्याने पडताळता येतील. कसे ते पहा– एक कार्डबोर्ड घ्या. त्यावर **ABCD** हा समांतरभुज चौकोन काढा. आ. 13.13 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे कर्ण **AC** काढा. $\square$ **ABCD** हा समांतरभुज चौकोन कापून घ्या. आता कर्ण AC पाशी कार्डबोर्ड कापा. परिणामी त्या समांतरभुज चौकोनाचे दोन भाग झालेले दिसतील. प्रत्येक भाग हा त्रिकोण आहे.



आ. 13.13 (i)



आ. 13.13 (ii)

तुम्हांला दोन त्रिकोण मिळतात. ΔABC, ΔADC आता ΔADC हा ΔABC वर असा ठेवा की शिरोबिंदू D हा शिरोबिंदू B वर पडेल आणि CD बाजू ही AB वर पडेल.

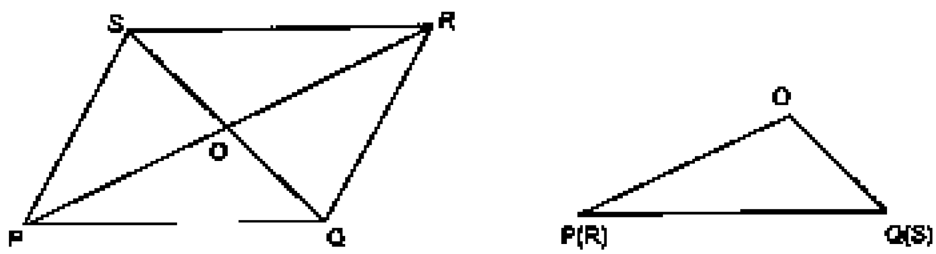
C हा बिंदू कोठे पडेल?

A हा बिंदू कोठे पडेल?

तुमच्या असे लक्षात येईल की ΔADC आणि ΔABC हे तंतोतंत जुळतील. दुर्सया शब्दांत सांगायचे झाल्यास तर $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ आणि $AB = CD, BC = AD$ आणि $< B =< D$ मिळते.

ही कृती तुम्ही दुर्सया समांतरभुज चौकोनावर करून पहा. अगोदर पडताळलेले निष्कर्ष तुम्हांला मिळतील. आता तुम्ही तिर्सया गुणधर्माचा पडताळा घेऊ शकता. म्हणजे समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांना दुभागतात.

पुन्हा एक पातळ कार्डबोर्ड घ्या. PQRS हा कोणताही एक समांतरभुज चौकोन काढा. त्याचे कर्ण काढा. PR आणि QS हे परस्परांना O बिंदूत छेदतात. हे आकृती 13.14 मध्ये पहा. आता समांतरभुज चौकोन PQRS हा कर्णावर कापा.



आ. 13.14

ΔPOQ व ΔROS कापा. आता ΔROS आणि ΔPOQ एकमेकांवर असे ठेवा की R हा शिरोबिंदू P या शिरोबिंदूवर पडेल आणि RO बाजू PO वर पडेल.

बिंदू S कोठे पडेल?

बाजू OS ही कुठे पडेल?

$\Delta ROS \cong \Delta POQ$ आहेत का? हे एकरूप आढळतात. आता तुम्हास काय आढळेल?

आपल्याला असे दिसून येते की, $RO = PO$ आणि $OS = OQ$. तुम्हाला या गुणधर्माचा पडताळा त्रिकोणाची दुसरी जोडी घेऊन घेता येईल?

टिपा

घेता येईल?

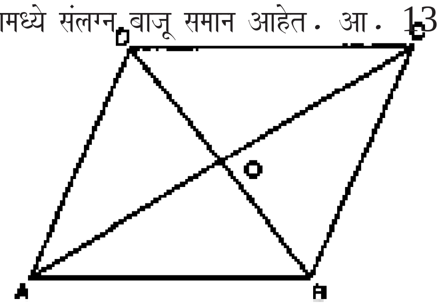
म्हणजे ΔPOS आणि ΔROQ.

तुम्हास पुन्हा तेच गुणधर्म आढळतील. तुम्ही याचाही पडताळा घेऊ शकाल की जे गुणधर्म अगोदर सिध्द केलेल्या गुणधर्मांचे व्यत्यास आहेत.

जर चौकोनाच्या समोरासमोरील बाजू समान असतील तर तो समांतरभुज चौकोन असतो. जर चौकोनाचे समोरासमोरील कोन एकरूप असतील तर तो समांतरभुज चौकोन असतो आणि जर तो चौकोनाचे कर्ण परस्परांना दुभागत असतील तर तो समांतरभुज चौकोन असतो.

2. समभुज चौकोनाचे गुणधर्म :

मागील भागात आपण समभुज चौकोनाची व्याख्या केली आहे. समभुज चौकोन असा समांतरभुज चौकोन आहे की, ज्यामध्ये संलग्न बाजू समान आहेत. आ. 13.15 मध्ये, ABCD हा समभुज चौकोन आहे.



आ. 13.15

अशारीतीने $\square$ ABCD समांतरभुज असा की ज्यामध्ये $AB = BC$. प्रत्येक समभुज चौकोन हा समांतरभुज चौकोन असतो. म्हणून समांतरभुज चौकोनाचे गुणधर्म समभुज चौकोनाला लागू होतात. जसे :

(i) समोरासमोरील बाजू समान ,

$\therefore AB = DC$ आणि $AD = BC$

(ii) समोरासमोरील कोन समान ,

$\therefore \angle A = \angle C$ आणि $\angle B = \angle D$

(iii) कर्ण परस्परांना दुभागतात ,

$\therefore AO = OC$ आणि $DO = OB$

(iv) समभुज चौकोनाच्या संलग्न बाजू समान असतात आणि समांतरभुज चौकोनाच्या गुणधर्मावरून $AB = BC = CD = DA$ म्हणजेच समभुज चौकोनाच्या सर्व बाजू समान असतात. $\angle AOD$ आणि $\angle BOC$ मोजा.

या कोनांची मापे किती आहेत?

तुम्हांला असे आढळेल की प्र्त्येक कोनाचे माप 90^o आहे.

तसेच $< AOB =< COD$ (परस्परविरूध्द कोन)

आणि $< BOC =< DOA$

$\therefore < AOB =< COD =< BOC =< DOA = 90^o$

म्हणून समभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांना काटकोनात दुभागतात.

वेगवेगळे समभुज चौकोन काढून तुम्ही हा प्रयोग पुन्हा पुन्हा करा. प्रत्येक वेळी असे आढळेल की समभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांना काटकोनात दुभागतात. यावरून आपल्याला समभुज चौकोनाचे गुणधर्म पुढीलप्रमाणे मिळतात.

समभुज चौकोनाच्या सर्व बाजू समान असतात.
समभुज चौकोनाचे समोरासमोरील कोन समान असतात.
समभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांना काटकोनात दुभागतात.

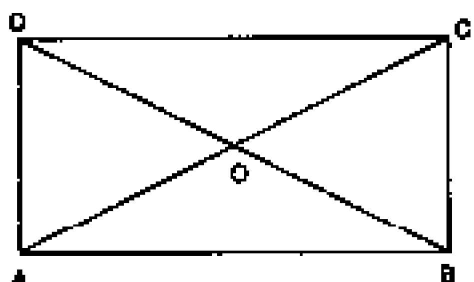
3.आयताचे गुणधर्म ई

आपणास माहित आहे की आयत हा असा समांतरभुज चौकोन असतो की ज्याचा प्रत्येक कोन काटकोन आहे. तुम्हाला असे सांगता येईल की समांतरभुज चौकोनाचे सर्व गुणधर्म आयताला लागू होतात.

हो असे निश्चितपणे सांगता येते.आता आयताचे आणखी काही गुणधर्म अभ्यासणार आहोत.

ABCD हा आयत काढा. ज्याचा $< B = 90^o$

आ. 13.16 मध्ये दाखविल्याप्र्माणे **AC** व **BD** जोडा.



आ. 13.16

$< BAD, < BCD, < ADC$ मोजा. तुम्हास काय आढळेल?

या कोनांची मापे किती आहेत?

त्या प्र्त्येक कोनाचे माप 90^o आहे. यावरून असा निष्कर्ष काढता येतो की,

$< A =< B =< C =< D = 90^o$ म्हणजेच आयताचा कोन 90^o (काटकोन) आहे.

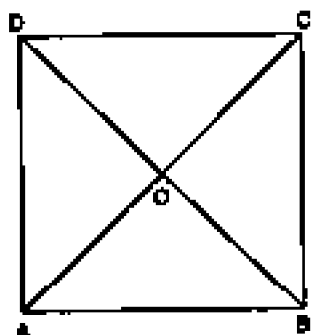
आता कर्ण **AC** आणि कर्ण **BD** मोजा. तसेच **AO, OC, BO** आणि **DO** मोजा. तुम्हांला असे

आढळते का? $AC = BD$. तर याचे उत्तर हो असेच मिळेल. तसेच तुमच्या लक्षात येईल की $AO = OC$ आणि $BO = DO$. वेगवेगळया बाजू घेऊन अनेक आयत काढा. त्यांना ABCD नाव द्या. प्रत्येक आयतात AC आणि BD जोडा. त्यांचा छेदनबिंदू O मानू. प्रत्येक आयतात AO आणि OBDO मोजा. प्रत्येक आकृतीत तुम्हाला हेच आढळेल की आयताचे कर्ण समान आहेत. आणि ते परस्परांना दुभागतात.यावरून आयताचे गुणधर्म खालीलप'माणे मिळतात.ſ

आयताच्या समोरासमोरील बाजू समान असतात. आयताचा प्रत्येक कोन काटकोन असतो. आयताचे कर्ण समान असतात आणि आयताचे कर्ण परस्परांना दुभागतात.

4. चौरसाचे गुणधर्म

तुम्हाला हे माहित आहे की चौरस हा आयत असतो.की ज्याच्या संलग्न बाजू समान असतात. आता चौरसाच्या व्याख्येवरून असे लक्षात येते की चौरस हा आयत असतो व आयताचे सर्व गुणधर्म चौरसास लागू पडतात का? तर याचे हो असेच उत्तर मिळेल. आता आपण चौरसाचे आणखी काही गुणधर्म पाहू. ſ आ. 13.17 मध्ये दाखवल्याप'माणे चौरस ABCD काढा.



आ. 13.17

ABCD हा आयत आहे,म्हणून आपणांस ....

(i) $AB = DC, AD = BC$

(ii) $< A =< B =< C =< D = 90^o$

(iii) $AC = BD$ आणि $AO = OC, BO = OD,$

परंतु चौरसामध्ये $AB = AD$

$\therefore$ गुणधर्म (i) नुसार $AB = AD = CD = BC$

चौरसाच्या सर्व बाजू समान असतात.

चौरसाचा प'त्येक कोन 90^o मापाचा असतो.

चौरसाचे कर्ण परपस्परांना काटकोनात दुभागतात.

चौरस हा समभुज चौकोन सुध्दा आहे. म्हणून आपणास चौरसाचे कर्ण **AC** आणि **BD** हे परस्परांना काटकोनात दुभागतात हा गुणधर्म मिळतो. अशा रीतीने चौरसाचे खालीलप्रमाणे गुणधर्म मिळतात.

> चौरसाच्या सर्व बाजू समान असतात.
> चौरसाचा प्रत्येक कोन 90^o मापाचा असतो.
> चौरसाचे कर्ण परपस्परांना काटकोनात दुभागतात.

आता आपण वरील गुणधर्मावर आधारित काही उदाहरणे पाहू.

उदा. 13.3 : आकृती 13.17 मध्ये **ABCD** हा समांतरभुज चौकोन आहे.

जर $< A = 80^o$ तर उरलेल्या कोनांची मापे काढा.

उत्तर : जर **ABCD** हा समांतरभुज चौकोन आहे. $\therefore < A =< C$ आणि $< B =< D$, पैकी

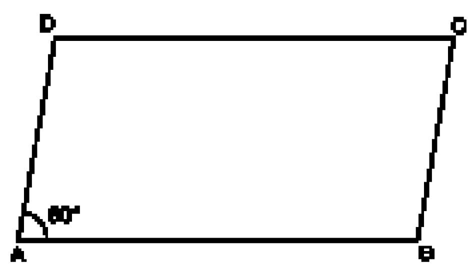
$< A = 80^o,\ AB \parallel DC \quad \therefore < A + < D = 180^o$

$\therefore < D = 180 - 80 = 100^o$

आणि $< D =< B = 100^o$ मिळते.

$\therefore < C = 80^o, < B = 100^o$ आणि

$, < D = 100^o$



आ. 13.18

<u>**उदा. 13.4 :**</u> एका समभुज चौकोनाच्या लगतच्या कोनांचे गुणोत्तर 4:5 , तर त्यांच्या प्रत्येक कोनाचे माप काढा.

उत्तर : आपल्याला माहित आहे की समभुज चौकोनाच्या दोन संलग्न कोनांच्या मापांची बेरीज 180^o असते. समजा ते दोन $4x^o$ व $5x^o$ मानू.

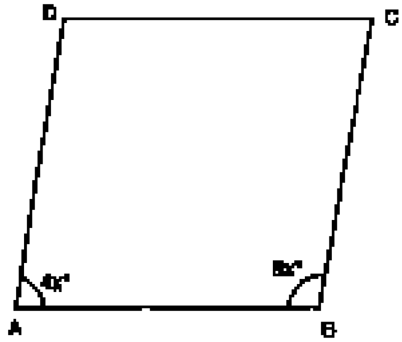
$\therefore\ 4x + 5x = 180^o$

$\therefore\ 9x = 180^o$

$\therefore\ x = 20^o$

$\therefore$ दोन कोनांची मापे 80^o व 100^o

$\therefore < A = 80^o, < B = 100^o$

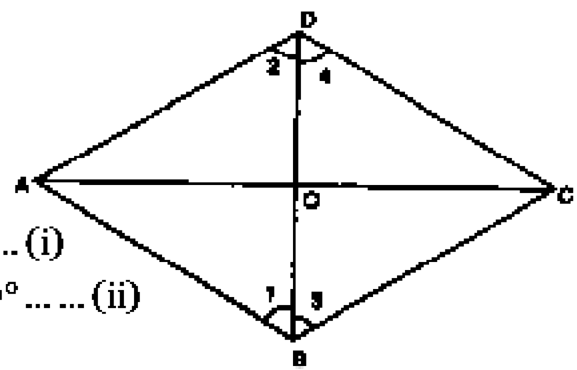


आ. 13.19

$< A = < C \quad \therefore < C = 80^o$ तसेच

$\therefore$ त्या समभुज $\square$ चे कोन $80^o, 100^o, 80^o, 100^o$

उदा. 13.5 : समभुज चौकोनाचा एक कर्ण त्याच्या वाजू एवढा असेल तर समभुज चौकोनाचे कोन काढा.



उत्तर : समभुज चौकोन ABCD मध्ये

AB = AD = BD

$\therefore$ ΔABD हा समभुज त्रिकोण आहे.

$\therefore < DAB = < 2 = < 1 = 60^o \ldots\ldots (i)$

तसेच $< BCD = < 3 = < 4 = 60^o \ldots\ldots (ii)$

विधान (i) व (ii) वरून

$< ABC = < B = < 1 + < 3 = 60^o + 60^o = 120^o$

$< ADC = < D = < 2 + < 4 = 60^o + 60^o = 120^o$

$\therefore < A = 60^o, < B = 120^o, < C = 60^o, < D = 120^o$

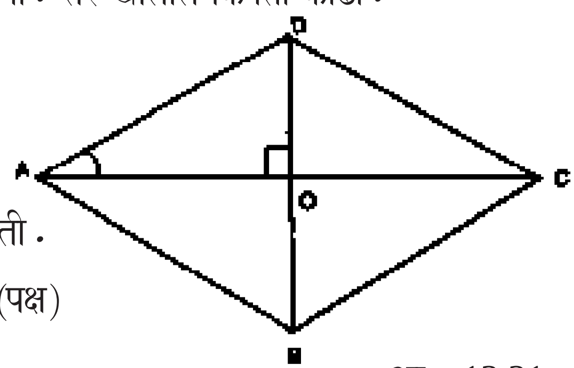
उदा. 13.6 : समभुज चौकोन ABCD चे कर्ण परस्परांना O बिंदूत छेदतात. जर

$< ADC = 120^o$ आणि OD = 6 सेमी. तर खालील किंमती काढा.

(a) $< OAD$

(b) बाजू AB

(c) समभुज चौकोन ABCD ची परिमिती.



आ. 13.21

उत्तर : (a) $< ADC = 120^o \ldots\ldots$ (पक्ष)

म्हणजे $< ADO + < ODC = 120^o$

परंतु $< ADO = < ODC \quad (\therefore \Delta AOD \cong \Delta COD)$

$\therefore 2 < ADO = 120^o$

$\therefore < ADO = 60^o \ldots\ldots (i)$

समभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांना काटकोनात दुभागतात.

$\therefore < DOA = 90^o$ .... (ii)

आता ΔDOA मध्ये,

$< AOD + < DOA + < OAD = 180^o$

विधान (i) आणि (ii) वरून

$60^o + 90^o + < OAD = 180^o$

$\therefore < OAD = 180^o - 150^o = 30^o$

(b) आता $< DAB = 60^o$ $(\therefore < OAD = 30^o$ तसेच

हा समभुज त्रिकोण होईल.

$OD = 6$ सेमी (दिले आहे)

$\therefore OD + OB = BD$

$\therefore BD = 6 + 6 = 12$ सेमी.

$\therefore AB = BD = AD = 12$ सेमी.

$\therefore AB = 12$ सेमी.

(c) आता समभुज चौकोनाची परिमिती $= 4 \times$ बाजू.

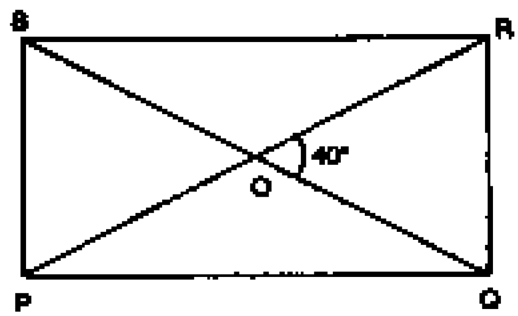
परिमिती $= 4 \times 12 = 48$ सेमी.

म्हणजेच समभुज चौकोनाची परिमिती $= 48$ सेमी.

13.2 : आपली प्रगती आजमावून पहा :

1. समांतरभुज चौकोन ABCD मध्ये, $< A = 62^o$ तर इतर कोनांची मापे काढा.
2. समांतरभुज चौकोनाच्या समोरासमोरील कोनांची बेरीज 150^o आहे. तर समांतरभुज चौकोनाचे सर्व कोन काढा.
3. ससमांतरभुज चौकोन ABCD मध्ये, $< A = (2x + 10)^o$ आणि $< C = (3x - 20)^o$ तर x ची किंमत काढा.
4. ABCD या समांतरभुज चौकोनात $< DAB = 78^o$ आणि $< CBD = 55^o$. तर $< CDB$ आणि $< ADB$ मिळवा.
5. समभुज चौकोन ABCD मध्ये , $< ABC = 58^o$ तर $< ACD$ चे माप किती?

6. आ. 13.22 मध्ये PQRS या आयताचे कर्ण परस्परांना O मध्ये छेदतात. जर $< ROQ = 40^o$, तर $< OPS$ चे माप किती?



आ. 13.22

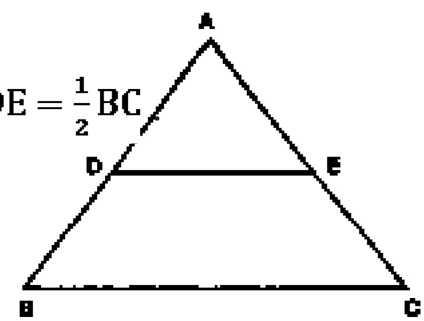
7. AC हा चौरस ABCD चा एक कर्ण आहे. तर $< CAB$ चे माप काढा.

13.4 : मध्यबिंदूचे प्रमेय ः

कोणताही एक ΔABC काढा. AB आणि AC या बाजूंचे मध्यबिंदू काढा. त्यांना अनुक्रमे D आणि E नावे द्या. (आ. 13.23 पहा) BC आणि DE मोजा. BC आणि DE मध्ये कोणता संबंध दिसतो? खरोखरच $DE = \frac{1}{2}BC$

आता $< ADE$ आणि $< ABC$ मोजा. हे कोन समान आहेत का?

याचे उत्तर हो असेच आहे. तुम्हाला माहित आहे की ही संगत कोनांची जोडी आहे. जेव्हा संगत कोन समान असतात. तेव्हा त्या रेषा समांतर असतात.



आ. 13.23

∴ DE ||

वेगवेगळे दोन ´ तीन त्रिकोण काढा. प्रत्येक त्रिकोणास ABC नाव द्या. बाजू AB व बाजू AC यांच्या मध्यबिंदूना D आणि E अशी नावे द्या. प्रत्येक वेळी तुम्हाला असे आढळेल की, $DE = \frac{1}{2}BC$. आणि DE || BC. यावरून असा निष्कर्ष निघतो की,

> त्रिकोणाच्या दोन बाजूंच्या मध्यबिंदूना साधणारा रेषाखंड तिर्सया बाजूला समांतर असतो आणि त्याच्या निम्मा असतो.

वरील निष्कर्षाचा व्यत्यास पडताळता येईल.

ΔPQR काढा. बाजू **RQ** चा मध्य काढा. त्याला **L** नाव द्या. **L** बिंदूतून **LX** ही **PQ** ला समांतर रेषा काढा. जी बाजू **PR** ला **M** बिंदूत छेदेल.

PM आणि **MR** मोजा. ते समान आहेत का?

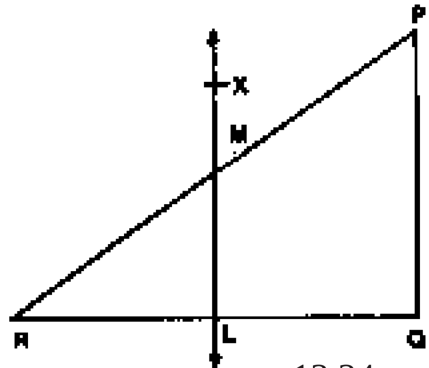
याचे उत्तर हो. असेच आहे. ते समान आहेत.

वेगवेगळया त्रिकोणांवर हे पडताळून पाहता येईल.

त्या त्रिकोणांना **PQR** हे नाव द्या. बाजू **PQ** चा **L** मध्यबिंदू घ्या. **LM** ‖ काढा.

प्रत्येक वेळी तुम्हाला असे आढळेल की

यावरून असा निष्कर्ष निघतो की,



आ. 13.24

त्रिकोणाच्या एका बाजूच्या मध्यबिंदूतून दुर्सया बाजूला समांतर असणारी रेषा तिसरीला दुभागते.

आता काही उदाहरणे पाहू.

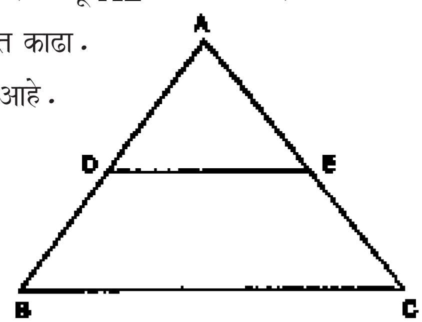
उदा. **13.7 :** आकृती 13.25 मध्ये ΔABC असून **D** हा बाजू **AB** चा मध्य आहे. आणि **DE** ‖ **BC.** जर **AC** = **8** सेमी. तर **AE** ची किंमत काढा.

ΔABC मध्ये, **DE** ‖ **BC** आणि **D** हा ‖ चा मध्यबिंदू आहे.

हा चा मध्यबिंदू आहे. म्हणजे

$\therefore AE = \frac{1}{2} \times 8 = 4$ $\quad (\therefore AE = 8$ सेमी$)$

$\therefore AE = 4$ सेमी.



आ. 13.25

उदा. **13.8 :** आकृती 13.26 मध्ये **ABCD** हा समलंब चौकोन असा आहे की ज्याच्या **AD** आणि **BC** या त्याच्या असमांतर बाजू आहे.

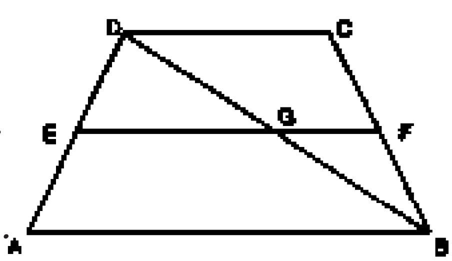
E हा **AD** चा मध्यबिंदू आहे. **EF** ‖ **AB**.

उत्तर ः **EG** ‖ **AB** आणि **E** हा **AD** चा मध्यबिंदू आहे.

G हा **DB** चा मध्यबिंदू आहे.

ΔABC मध्ये, **GF** ‖ **DC** आणि हा चा मध्यबिंदू आहे.

हा चा मध्यबिंदू आहे हे सिध्द .



आ. 13.26

टिपा

उदा. 13.9 : ΔABC मध्ये, P, Q, R हे अनुक्रमे AB, BC आणि AC चे मध्यबिंदू आहेत. जर $AB = 8$ सेमी, $BC = 7$ सेमी आणि $CA = 6$ सेमी तर ΔPQR च्या बाजू काढा.

उत्तरः P हा AB चा मध्यबिंदू आहे आणि R हा AC चा मध्य आहे.

$\therefore PR \parallel BC$ आणि $PR = \frac{1}{2}\ BC$

$\therefore PR = \frac{1}{2} \times 7$

$\therefore PR = 3.5$ सेमी.

तसेच $PQ = \frac{1}{2} AC$

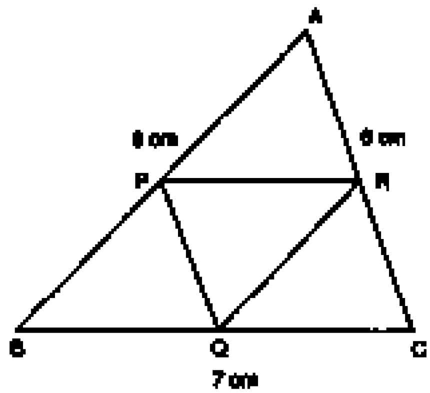
$= \frac{1}{2} \times 6$

$\therefore PQ = 3$ सेमी.

आणि $QR = \frac{1}{2} AB$

$\therefore QR = \frac{1}{2} \times 8$

$\therefore QR = 4$ सेमी.

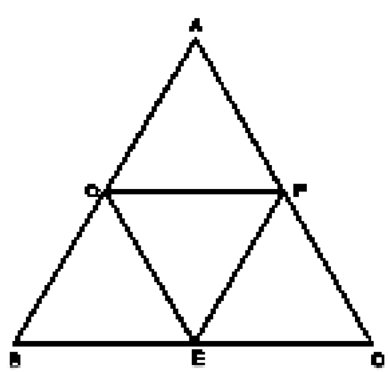


आ. 13.27

अशा रीतीने ΔPQR च्या बाजू $PQ = 3$ सेमी, $QR = 4$ सेमी, आणि $PR = 3.5$ सेमी

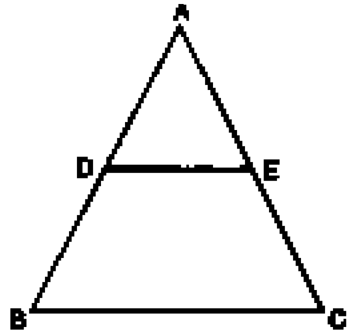
13.3 तुमची प्रगती अजमवा :

1. आकृती 13.28 मध्ये ABC हा समभुज त्रिकोण आहे. बिंदू D, E आणि F, हे अनुक्रमे बाजू AB, BC आणि AC चे मध्यबिंदू आहेत. तर ΔDEF हा सुध्दा समभुज त्रिकोण आहे हे सिध्द करा.



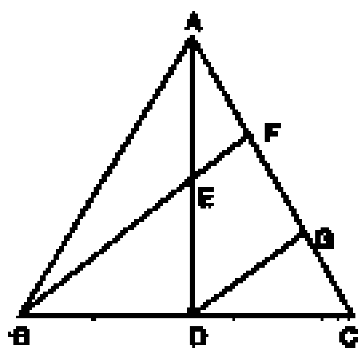
आ. 13.28

2. आ. 13.29 मध्ये D आणि E हे अनुक्रमे AB आणि AC बाजूंचे मध्य आहेत. जर ΔABC मध्ये $BC = 10$ सेमी तर DE काढा



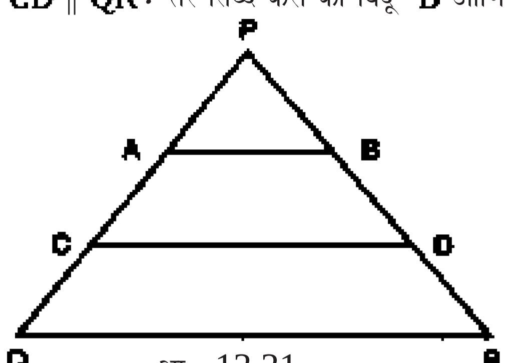
आ. 13.29

3. आ. 13.30 मध्ये ΔABC ची AD ही मध्यगा आहे. E हा चा मध्य आहे. वाढविली असता ला मध्ये छेदते. ‖ ही ला मध्ये छेदते.जर सेमी तर काढा.



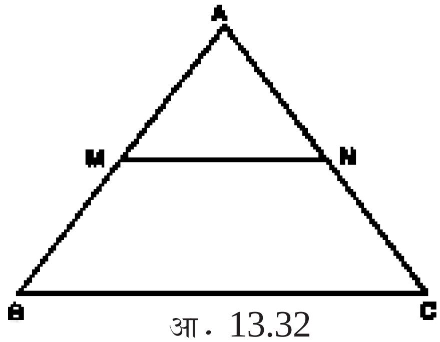
आ. 13.30

4. आ. 13.31 मध्ये ΔPQR च्या बाजू PQ वरील A आणि C विंदूमुळे तीन समान भागात विभागते. $AB \parallel CD \parallel QR$. तर सिध्द करा की विंदू B आणि D मुळे सुध्दा PR चे तीन समान भाग होतात.



आ. 13.31

5. आ. 13.32 मध्ये समद्विभुज त्रिकोण **ABC** मध्ये **AB = AC. M** हा **AB** चा मध्य असून **MN** $\|$ **BC** आहे. तर **ΔAMN** हा सुध्दा समद्विभुज त्रिकोण आहे हे दाखवा.

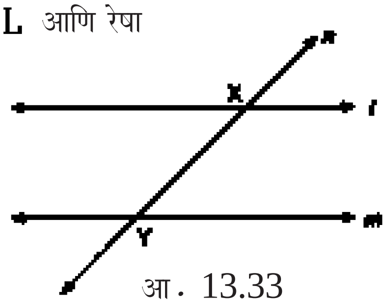


आ. 13.32

१३.५ ः समान आंतरछेदाचे प्रमेय ः

जी रेषा दोन किंवा जास्त रेषांना भिन्न बिंदूत छेदते, तिला छेदिका म्हणतात. दोन रेषांनी छेदिकेवर कापलेल्या रेषाखंडास आंतरछेद म्हणतात.

आ. 13.33 मध्ये **XY** हा रेषा **L** आणि रेषा

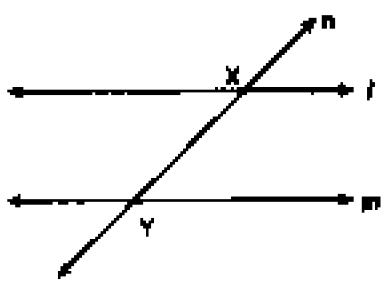


आ. 13.33

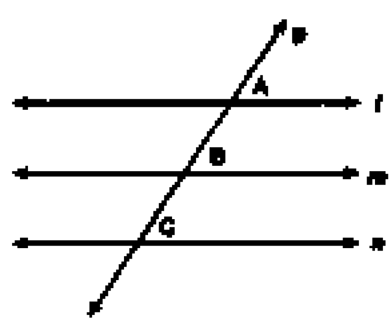
M यांना रेषा **n** ने छेदल्यामुळे तयार होणारा रेषाखंड **xy** आंतरछेद आहे.

समांतर रेषांनी छेदिकेवर कापलेल्या छेदिकेचे काही विशिष्ट गुणधर्म आपण अभ्यासणार आहोत.

मध्ये रेषा L व रेषा m या समांतर असून रेषा n या छेदिकेचा xy आंतरछेद कापलेला आहे. समजा तीन समांतर रेषा असतील आणि एका छेदिकेने त्यांना छेदले आहे. आ. 13.34 मध्ये दर्शवल्याप्रमाणे AB आणि BC हे दोन आंतरछेद आहेत.



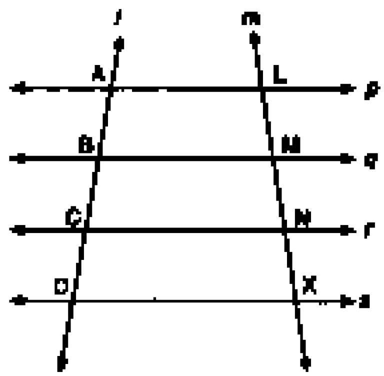
आ. 13.34 **(i)**



आ. 13.34(ii)

समांतर रेषांनी छेदिकेने छेदल्यावर तयार होर्णाया आंतरछेदांचे महत्वाचे गुणधर्म आपण अभ्यासणार आहोत.

तुमच्या वहिच्या पानावर आ. 13.35 मध्ये दाखवल्याप्रमणे p, q, r, s या समांतर रेषांना छेदर्णाया l आणि m या दोन छेदिका काढा. या छेदिका वेगवेगळे आंतरछेद कापतात. AB, BC आणि CD मोजा. हे समान आहेत का? याचे उत्तर हो असेच मिळते.



आ. 13.35

जर दोन किंवा अधिक समांतर रेषांना एका छेदिकेने छेदल्यावर होणारे आंतरछेद समान असतील तर दुर्सया एखाद्या छेदिकेवर कापलेले आंतरछेद समानच असतात.

आता काही सोडविलेली उदाहरणे पाहू ....

उदा. 13.10: आकृती 13.36 मध्ये रेषा $p \parallel q \parallel r$ छेदिका l, m आणि n या त्यांना अनुक्रमे L, M, N, B, C आणि x, y, z विंदूत छेदतात.

जर $xy = yz$, तर समान आंतरछेदांच्या इतर जोडया सांगा.

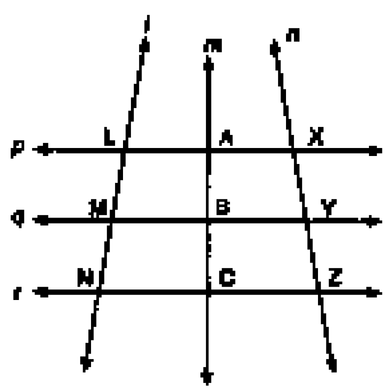
उत्तर ः $xy = yz$ (पक्ष)

$\therefore AB = BC$ (आंतरछेदाचे प्रमेय)

आणि $LM = MN$

यावरून समान आंतरछेदाच्या उरलेल्या जोडया ......

$AB = BC, LM = MN$ आहेत.



आ. 13.36

उदा. 13.11 : आकृती 13.37 मध्ये $l \parallel m \parallel n$ आणि $PQ = QR$. जर $xz = 20$ सेमी. तर $yz = ?$

टिपा

उत्तर : $PQ = QR$ .... (दिले आहे)

आंतरछेदाच्या प्रमेयानुसार

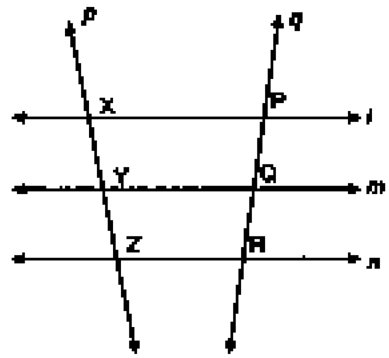
$xy = yz,$

$xz = xy + yz$

$xz = yz + yz$

$\therefore 20 = 2yz$

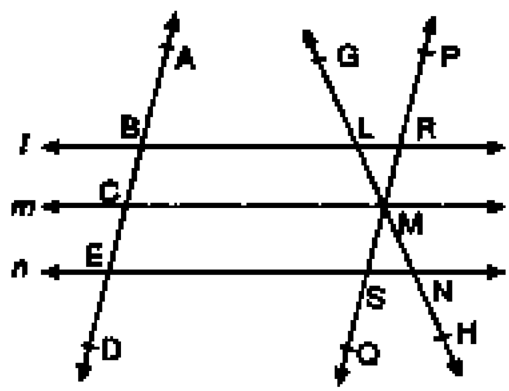
$\therefore yz = 10$ सेमी.



आ. 13.37

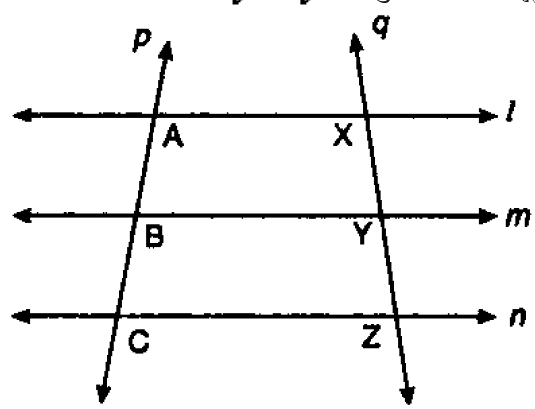
13.4 तुमची प्रगती अजमवा :

1. आ. 13.38 मध्ये रेषा l, m आणि n या समान अंतरावरील समांतर रेषा आहेत. AD, PQ आणि GH या तीन छेदिका आहेत. जर BC = 2 सेमी, LM = 2.5 सेमी. AD|| PQ तर MS आणि MN काढा.



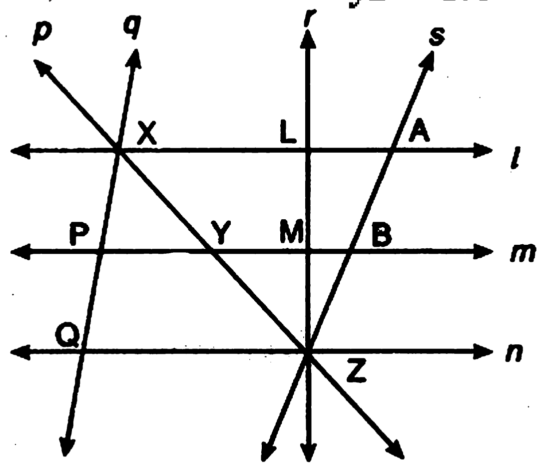
आ. 13.38

2. आ. 13.39 मध्ये AB = BC आणि xy = yz हे तुम्ही केव्हा सांगू शकाल?



आ. 13.39

3. आ. 13.40 मध्ये $LM = MZ = 3$ सेमी. तर xy, xp आणि BZ काढा. $l \parallel m \parallel n$ दिले आहे. आणि $PQ = 3.2$ सेमी, $AB = 3.5$ सेमी आणि $yz = 3.4$ सेमी.

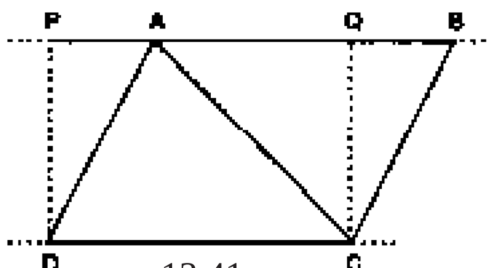


आ. 13.40

13.6 : समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण आणि क्षेत्रफळाचे विभाजन ः

समांतरभुज चौकोन $ABCD$ काढा. AC हा कर्ण काढा. $DP \perp DC$ आणि $QC \perp DC$ काढा.

$ABCD$ या समांतरभुज चौकोनाच्या कर्ण AC मुळे विभागलेले ΔADC आणि ΔACB विचारात घ्या. $AB \parallel DC, PD = QC$.



आ. 13.41

आता ΔADC चे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2} AB \times QC$

$\therefore A(\Delta ADC) = A(\Delta ACB)$

यावरून असा निष्कर्ष निघतो की,

समांतरभुज चौकोनाच्या कर्णामुळे समान क्षेत्रफळ असलेल्या दोन त्रिकोणात विभाजन होते

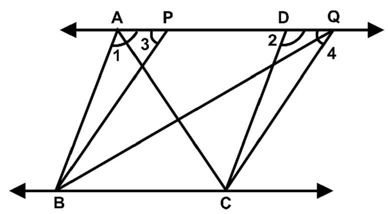
13.7 : समांतरभुज चौकोन आणि त्या समांतर रेषांमधील दोन त्रिकोण ः

ज्यांचा पाया समान आहे आणि त्यांचे उरलेले शिरोबिंदू पायाला समांतर असलेल्या रेषेवर आहेत असे तीन समांतरभुज चौकोन किंवा त्रिकोण यांना समान पाया असलेले आणि सारख्याच समांतर रेषांमधील समांतरभुज चौकोन किंवा त्रिकोण असे म्हणतात.

आपण समांतरभुज चौकोन आणि त्यांचे क्षेत्रफळ यावरील महत्वाचे प'मेय सिध्द करणार आहोत.

प'मेय ः समान पाया +एकच पाया▪ आणि त्याच समांतर रेषांमधील समांतरभुज चौकोन यांची क्षेत्रफळे समान असतात.

यांची आपण तार्किक सिध्दता पाहू.



आ. 13.42

पक्ष ः समांतरभुज चौकोन **ABCD** आणि **PBCQ**

हे **BC** या सामाईक पायावर आणि ···· मध्ये बध्द आहेत.

साध्य ः **ABCD** चे क्षेत्र = **BCQP** चे क्षेत्र.

सिध्दता ः **ΔABP** व **ΔDCQ** मध्ये

AB = DC ... ...+समांतरभुज च्या समोरासमोरील बाजू▪

आणि **BP = CQ** ... . +समांतरभुज च्या समोरासमोरील बाजू▪

< 1 =< 2 ... ...+संगत कोन▪

∴ ABP ≅ ΔACB ... ...

∴ A(ΔABP) = A(ΔDCQ) ... ... **(i)**

आता A(II^{gm} ABCD)=A(**ΔABP) + A(** BCDP)………..(ii)

तसेच A(II^{gm} BCQP)=A(**ΔCQD) + A(** BCDP)………..(iii)

विधान (i),(ii),(iii) वरून

A(II^{gm} ABCD) = A(II^{gm} BCQP) म्हणजेच

एकच पाया +समान पाया-आणि त्याच समांतर रेषांमध्ये बध्द असलेले समांतरभुज चौकोनांची क्षेत्रफळे समान असतात.

टीप ः 'II^{gm}' ही संज्ञा समांतरभुज चौकोनासाठी वापरली जाते. याचप'माणे आपण खालीलप'माणे निष्कर्ष काढू शकतो.

एकच पाया +किंवा समान पाया▪ आणि त्याच समांतर रेषांमध्ये बध्द असलेल्या त्रिकोणांची क्षेत्रफळे समान असतात.

आकृती 13.42 मध्ये समांतरभुज चौकोन BCQP आणि ABCD यांचे कर्ण अनु,मे BQ आणि AC काढा.

आपल्याला माहित आहे की समांतरभुज चौकोनाच्या कर्णामुळे दोन समान क्षेत्रफळे असलेले त्रिकोण मिळतात.

$\therefore$ A(ΔBCQ) = APBQ) (प्र्त्येकी $\frac{1}{2}$ II BCQP)

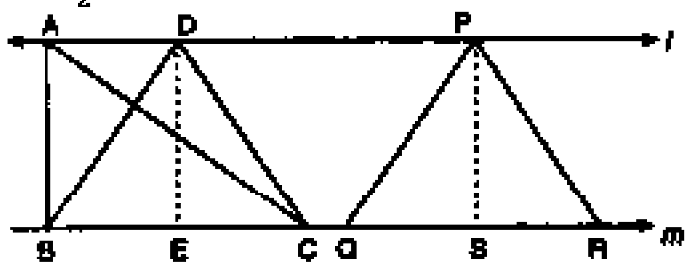
A(ΔABC)= A(ΔCAD) (प्र्त्येकी II ABCD)

II ABCD)= A(II BCQP)

अशा रीतीने आपण वरील निष्कर्ष पडताळू शकतो.

13.8 : समान (किंवा एकच) पाया असलेले आणि समान क्षेत्रफळे असलेल्या त्रिकोणांची संगत उंची (शिरोलंब) समान असतात.

त्रिकोणाचे क्षेत्रफळे $= \frac{1}{2}$ पाया $\times$ उंची हे आपल्याला माहित आहे.



आ. 13.43

येथे BC = QR

आणि A(ΔABC)= A(ΔDBC)= A(ΔPQR) ... . पक्ष (i)

DE आणि PS हे अनुक्रमे D आणि P मधून E आणि S मध्ये छेदतात असे लंब काढा.

आता A(ΔABC) $= \frac{1}{2}$ BC$\times$ DE

A(ΔDBC) =BC

A=QR

तसेच (पक्ष)

विधान (i),(ii) आणि (iii) वरून

$\frac{1}{2}$ BC$\times$ DE $= \frac{1}{2}$ QR$\times$ PS

$\therefore \frac{1}{2}$ BC$\times$ DE $= \frac{1}{2}$ BC$\times$ PS

DE=PS

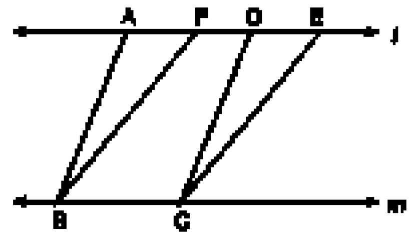
म्हणजेच ΔABC, ΔDBC आणि ΔPQR यांचे शिरोलंब समान लांबीचे आहेत.

यावरून असा निष्कर्ष निघतो की,

समान (किंवा तोच) पाया असलेल्या आणि समान क्षेत्रफळे असलेल्या त्रिकोणांचे संगत शिरोलंब समान असतात.

आता काही उदाहरणे पाहू.

<u>उदा. **13.12 :**</u> आ. 13.44 मध्ये समांतरभुज चौकोन **ABCD** चे क्षेत्रफळ 40 चौ. सेमी आहे. जर **BC = 8** सेमी. तर **BCEF** या समांतरभुज चौकोनाची उंची काढा.



आ. 13.44

उत्तर : A(II BCEF)=EF× उंची

किंवा 40=BX BCEF ची उंची

किंवा 40=9X BCEF ची उंची

II BCEF ची उंची सेमी.

∴ समांतरभुज BCEF ची उंची $= \frac{40}{8} = 5$ सेंमी

<u>उदा. **13.13 :**</u> आ. 13.45 मध्ये **ΔABC** चे क्षेत्रफळ 18 चौ. सेमी आहे. जर त्याची उंची **DL** ही 4.5 सेमी. असेल तर **ΔBCD** चा पाया किती?

उत्तर : A(**ΔBCD**)= A(**ΔABC**)= 18 चौ. सेमी.

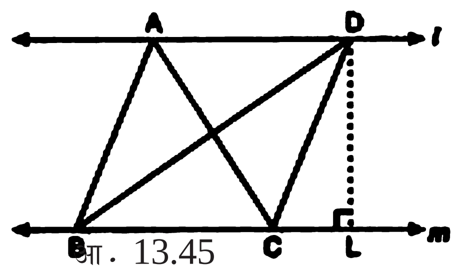
ΔBCD चा पाया **x** मानू.

$\therefore A(\Delta BCD) = \frac{1}{2} x \times DL$

$\therefore 18 = \frac{1}{2} x \times 4.5$

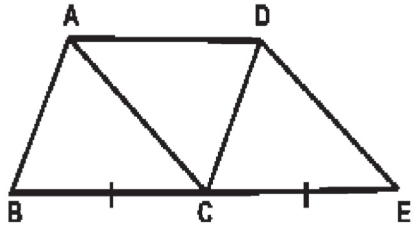
$\therefore x = 18 \times \frac{4}{9} =$ 8 सेमी.

∴ **ΔBCD** चा पाया = 8 सेमी.



आ. 13.45

उदा. 13.14 : आ. 13.46 मध्ये ABCD आणि ACED हे दोन समांतरभुज चौकोन आहेत. जर ΔABC चे क्षेत्रफळ हे 12 चौ. सेमी. असून CE आणि BC ची लांबी समान असेल तर समलंब चौकोन ABED चे क्षेत्रफळ काढा.



आ. 13.46

उत्तर ः $A(II^{gm} ABCD) = A(II^{gm} ACED)$ कर्ण AC मुळे समांतरभुज चौकोन ABCD चे दोन समान क्षेत्रफळ असलेल्या त्रिकोणात विभाजन झाले.

$$\therefore A(\Delta BCD) = \frac{1}{2} A(II^{gm} ABCD)$$

$$A(II^{gm} ABCD) = A(II^{gm} ACED)$$

$$= 2 \times 12 = 24 \text{ चौ. सेमी.}$$

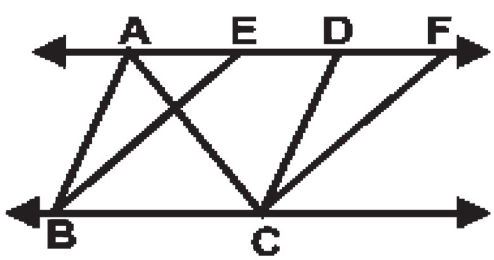
आता A(समलंब ▭ ABCD) = A(ΔABC) + (ACED)

$$= 12 \times 24 = 36 \text{ चौ. सेमी.}$$

∴ समलंब ABCD चे क्षेत्र = 36 चौ. सेमी.

13.5 : तुमची प्रगती अजमवा.

1. दोन समान पाया (किंवा तोच पाया) असलेल्या समांतरभुज चौकोनाची क्षेत्रफळे समान कधी असतील ?
2. समांतरभुज □ABCD चा कर्ण AC काढल्यामुळे तयार झालेल्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ 16 सेमी^{2} असेल तर समांतरभुज चौकोन चे क्षेत्रफळ किती असेल?
3. आ. 13.47 मध्ये चे क्षेत्रफळ 8 चौ. सेमी आहे.जर सेमी. तर समांतरभुज चौकोन ची उंची किती?



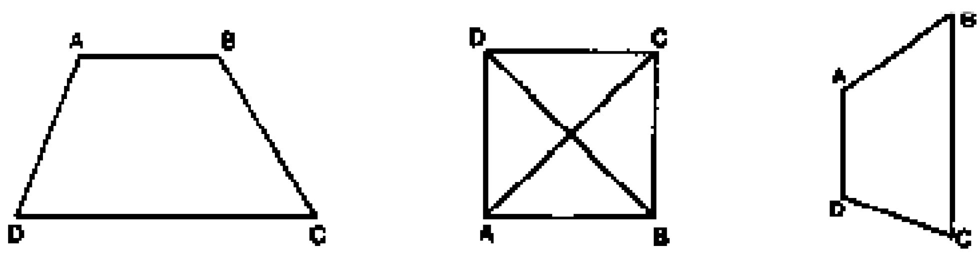
आ. 13.47

सारांश ः

- प्रतलातील काही क्षेत्र व्यापलेली चार बाजूंनी बंदिस्त असलेली आकृती म्हणजे चौकोन होय.
- चौकोनाच्या आंतरकोनांची किंवा बाहयकोनांची बेरीज 360^0 असते.
- ज्या चौकानांची समोरासमोरील बाजूंची एक जोडी समांतर असते त्या चौकोनास समलंब चौकोन म्हणतात.
- ज्या चौकोनातील समोरासमोरील बाजूंच्या दोन्ही जोडया समांतर असतात तर त्याला समांतरभुज चौकोन म्हणतात.
- समांतरभुज चौकोनात ....
  (i) समोरासमोरील बाजू आणि कोन समान असतात.
  (ii) कर्ण परस्परांना दुभागतात.
- ज्या समांतरभुज चौकोनात लगतच्या बाजू समान असतात तेव्हा त्याला समभुज चौकोन म्हणतात.
- समभुज चौकोनाचे कर्ण एकमेकांना काटकोनात दुभागतात.
- जर समांतरभुज चौकोनात एक कोन 90 असेल तर चौकोन आयत असतो.
- आयताचे कर्ण समान असतात.
- जर आयताच्या लगतच्या बाजू समान असतील तर तो चौरस असतो.
- चौरसाचे कर्ण परस्परांना काटकोनात दुभागतात.
- समांतरभुज चौकोनाचा कर्ण त्याचे दोन समान क्षेत्रफळ असलेल्या त्रिकोणात विभाजन करतात.
- एकाच (किंवा समान)पायावरील आणि त्याच समांतर रेषांमधील बध्द असणारे दोन त्रिकोणांचे क्षेत्रफळे समान असते.
- समान पाया आणि समान क्षेत्रफळ असलेल्या त्रिकोणांची उंची समान असते.

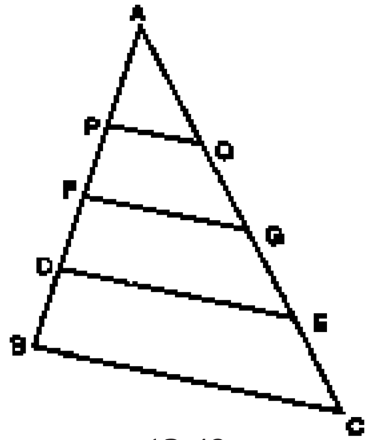
संकीर्ण प्रश्नसंग्रह

1. खालीलपैकी कोणते चौकोन समलंब चौकोन आहेत.



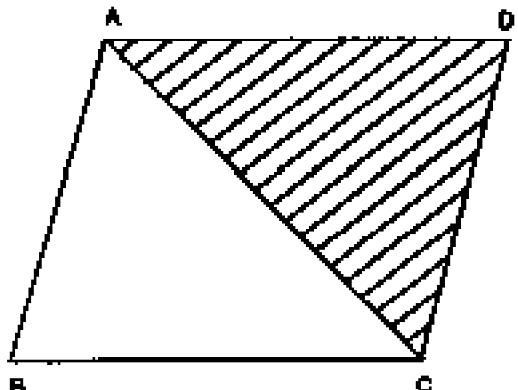
आ. 13.48

2. आ. 13.49 मध्ये $PQ \parallel FG \parallel DE \parallel BC$ आहे. तर सर्व समलंब चौकोनांची नावे सांगा.



आ. 13.49

3.आ. 13.50 मध्ये **ABCD** हा समांतरभुज चौकोन असून त्याचे क्षेत्रफळ 48 चौ.सेमी. आहे तर ....(i) रेखांकित भागाचे क्षेत्रफळ आणि (ii) रेखांकित न केलेल्या भागाचे क्षेत्रफळ काढा.



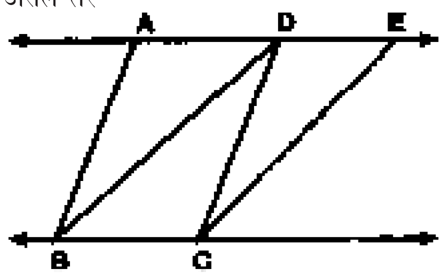
आ. 13.50

4. खालील प्रत्येक विधान सत्य होण्यासाठी रिकाम्या जागा भरा.
   (i) एखादा चौकोन हा समलंब चौकोन असतो,जर ....
   (ii) एखादा चौकोन हा समांतरभुज चौकोन असतो, जर ....
   (iii) आयत हा चौरस असतो, जर ....
   (iv) ज्या चौकोनाचे कर्ण काटकोनात दुभागतात आणि चौकोनाचा कोणताही कोन काटकोन नसेल तर तो .... असते.
   (v) चौकोनाच्या बाहयकोनांची बेरीज = __________

5. ज्या चौकोनाचे कोन $(x-20)^o, (x+20)^o, (x-15)^o$ आणि $(x+15)^o$ असतील तर x ची किंमत काढा. आणि चौकोनाचा प्रत्येक कोन काढा.

6. ज्या समांतरभुज चौकोनाच्या समोरासमोरील कोनांची बेरीज 180^c असते तर तो कोणत्या विशिष्ट प्रकारचा समांतरभुज चौकोन होईल?

7.आ.13.51 मध्ये $A(\Delta ABD)$ चे क्षेत्रफळ 24 चौ. सेमी आहे. जर DE = 6 सेमी आणि $AB \parallel CD, BD \parallel CE, AE \parallel BC$ असेल तर

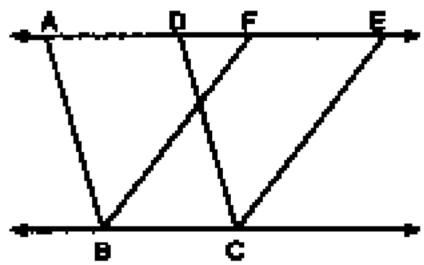


आ. 13.51

(i) समांतरभुज चौकोन BCED ची उंची,

(ii) समांतरभुज चौकोन चे क्षेत्रफळ काढा.

8. आ.13.52 मध्ये समांतरभुज ABCD चे क्षेत्रफळ 40 चौसेमी आहे जर EF = 8 सेमी तर Δ DCE ची उंची काढा



आ. 13.52

उत्तरे : (तुमची प्रगती अजमवा)

13.1

1. **(i)** आयत **(ii)** समलंब चौकोन **(iii)** आयत
   (iv) समांतरभुज चोकोन **(v)** समभुज चौकोन (vi) चौरस.
2. **(i)** सत्य (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) सत्य
   (v) सत्य (vi) सत्य (vii) असत्य
   (viii) असत्य (ix) असत्य (x) असत्य
3. 90^0
4. 60^0, 84^0, 84^0 आणि 132^0
5. समोरासमोरील कोनांची दुसरी जोडीही पूरक कोनांची जोडी असेल.

13.2

1. $< B = 118^0, < C = 62^0$ आणि $< D = 118^0$
2. $< A = 105^0, < B = 75^0, < C = 105^0$ आणि $< D = 75^0$
3. 30

4. $< DCB = 55^0$ आणि $< ADB = 55^0$
5. $< ACD = 61^0$
6. $< OPS = 70^0$
7. $< CAB = 45^0$

13.3

2. 5cm
3. 3cm

13.4

1. MS = 2 सेमी आणि MN = 2.5 सेमी
2. l, m आणि n या समान अंतरावरील समांतर रेषा आहेत.
3. XY = 3.4 सेमी, XP = 3.2 सेमी आणि BZ = 3.5 सेमी

13.5

1. ते जेव्हा एकाच समांतर रेषांच्या जोडीमध्ये पडतील तेव्हा
2. 32 चौ. सेमी
3. 4 सेमी

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह उत्तरे

1. (i) आणि (iii)
2. PFGQ, FDEG, DBCE, PDEQ, FBCG आणि PBCQ
3. (i) 24 चौ सेमी (ii) 24 चौ .सेमी
4. (i) समोरासमोरील बाजूंची कोणतीही एक जोडी
   (ii) समोरासमोरील बाजूंच्या दोन्ही जोडया समांतर
   (iii) लगतच्या बाजूंच्या जोडया समान
   (iv) समभुज चौकोन
   (v) 360^0
6. हा आयत आहे.
7. (i) 8 सेमी (ii) 48 सेमी
8. 5 सेमी

14

त्रिकोणांची समरूपता

प्रास्ताविक ः

आपल्या सभोवती अनेक वस्तु दिसतात. ज्यांचे आकार सारखे असतात. परंतु ते समान किंवा भिन्न मापाचे असतात. उदा. झाडांच्या पानांचा आकार तोच असतो परंतु त्याची मापे समान किंवा भिन्न असतात. फोटोच्या निगेटिव्हवरून एकाच आकाराचे परंतु भिन्न मापाचे फोटो वेगवेगळया साईजमध्ये डेव्हलप केले जातात. एखादी इमारत आणि त्याची लहान प्रतिकृती यांचा आकार तोच असतो पण मापे भिन्न असतात. अशा सर्व वस्तु की ज्यांचे आकार सारखे असतात. पण मापे भिन्न असतात. अशा वस्तूंना समरूप वस्तू म्हणतात.

आपण एकप्रतलीय आकृत्यांच्या समरूपतेचा अभ्यास करू.

(i) समान लांबीचे दोन रेषाखंड एकरूप असतात. परंतु भिन्न लांबीचे रेषाखंड समरूप असतात

आ. 14.1 (i)

(i) समान त्रिज्या असलेली दोन वर्तुळे एकरूप असतात परंतु भिन्न त्रिज्यांची वर्तुळे समरूप असतात.

आ. **14.1 (ii)**

(ii) भिन्न बाजू असलेले दोन समभुज त्रिकोण समरूप असतात.

आ. **14.1 (iii)**

(iii) भिन्न बाजू असलेले दोन चौरस समरूप असतात.

आ. **14.1 (iv)**

या प्रकरणात आपण समरूपता या संकल्पनेचा अभ्यास करणार आहोत. विशेषतः त्रिकोणाची समरूपता आणि त्यांच्या अटी यांचा त्यावरून निघणाया वेगवेगळया निष्कर्षांचा आपण अभ्यास करणार आहोत.

उद्दिष्टे :

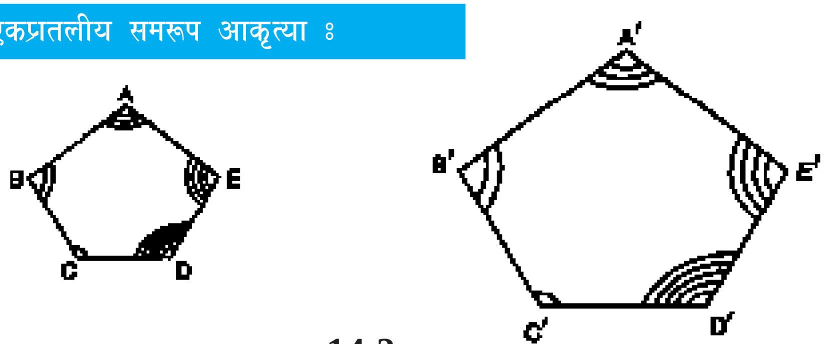
या प्रकरणाचा अभ्यास केल्यावर विद्यार्थ्याला खालील गोष्टी करता येतील.

- समरूप आकृत्या ओळखणे.
- एकप्रतलीय एकरूप आणि समरूप आकृत्या यांच्यातील फरक जाणता येणे.
- त्रिकोणामध्ये एका बाजूला समांतर काढलेली रेषा इतर दोन बाजूंना दोन भिन्न बिंदूत छेदताना त्या बाजूंचे होणारे भाग प्रमाणात असतात हे सिध्द करता येणे.
- समरूपतेच्या कसोटया सांगता येणे. उदा. कोकोबा, बाबाबा आणि बाकोबा.
- समरूपतेच्या प्रयोगांवर आधारित अभ्यासक्रमातील काही निष्कर्षांचा पडताळा घेता येणे आणि उपयोग करणे.
- बौध्दायन/पायथागोरसचे प्रमेय सिध्द करणे.
- समरूप त्रिकोणांवर आधारित उदाहरणे प्रायोगिकरित्या पडताळणे. (किंवा तार्किक सिध्दता लिहिता येणे.)

अपेक्षित पूर्वज्ञान :

- त्रिकोण,चौकोन, वर्तुळ,आयत,चौरस यासारख्या प्रतलीय आकृत्याविषयी माहिती.
- त्रिकोणाच्या एकरूपतेच्या कसोटया.
- संख्यांचे वर्ग आणि वर्गमूळ काढता येणे.
- गुणोत्तर आणि प्रमाण.
- त्रिकोणाचे आंतरकोन आणि बाहयकोन.

14.1 : एकप्रतलीय समरूप आकृत्या :



आ. **14.2**

आकृती 14.2 मध्ये समान आकाराचे दोन पंचकोन आहेत. आपणास असे निदर्शनास येते की,

जर $< A =< A', < B =< B', < C', < D =< D'$ आणि $< E =< E'$ त्याचप्रमाणे $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}$ असेल तर दोन्ही पंचकोन समरूप आकृत्या आहेत. यावरून आपणास पुढीलप्रमाणे निष्कर्ष मिळतो.

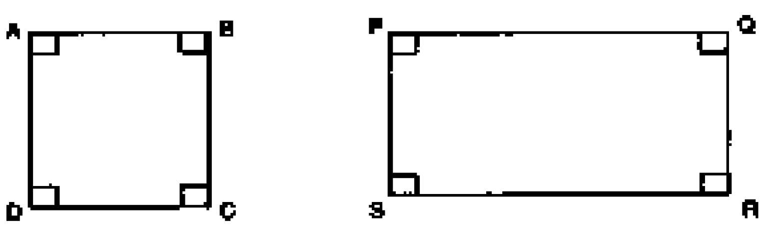
कोणत्याही दोन बहुभुजाकृतींचे संगतकोन एकरूप आणि संगतबाजू प्रमाणाता असतील तर त्या बहुभुजाकृती समरूप असतात.

म्हणून दोन बहुभुजाकृती समरूप असतात जर खालील दोन अटी पाळल्या तर ....

(i) संगत कोन समान असणे.

(ii) संगत बाजू प्रमाणात असणे.

यापैकी एकही अट पाळली गेली नाही तर त्या बहुभुजाकृती समरूप होणार नाहीत. आ. 14.3 मध्ये दिलेली आयत व चौरस आकृती पहा. यांच्यात संगतकोन समान आहेत पण संगत बाजू प'माणात नाहीत.



आ. 14.3

14.2 : प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय :

प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेय खालीलप्रमाणे आहे

त्रिकोणाच्या एका बाजूला समांतर असणारी रेषा इतर दोन बाजूंना प्रमाणात विभागते.

आकृती 14.4 मध्ये, ΔABC मध्ये $DE \parallel BC$

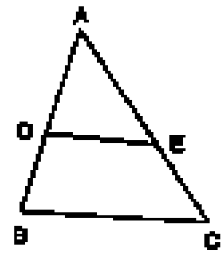
आ. 14. 4 वरील प्रमेयानुसार $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

AD, DB, AE आणि EC मोजून याचा

पडताळा आपण घेऊ शकतो.

तुम्हाला असे आढळेल की,

वरील प्रमेयाचा व्यत्यास आपणास पुढीलप्रमाणे सांगता येणे



आकृती 14.4

जर एखादी रेषा त्रिकोणाच्या दोन बाजूंना समान गुणोत्तरात विभागत असेल तर ती रेषा त्रिकोणाच्या तिर्सया बाजूला समांतर असते.

आ.14.4 मध्ये, जर DE ही ΔABC च्या बाजू AB आणि AC यांना अशी विभागत असेल की,
$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ तर $DE \parallel BC$ आहे असे म्हणता येते.

आपण याचा पडताळा $\angle ADE$ आणि $\angle ABC$ मोजून घेऊ शकतो. आपणांस असे आढळेल की, $\angle ADE = \angle ABC$ आणि हे संगत कोन आहेत. वेगवेगळे त्रिकोण घेऊन वरील निष्कर्षाचा आपण पडताळा घेऊ शकतो.

आता यावर आधारित काही उदाहरणे पाहू.

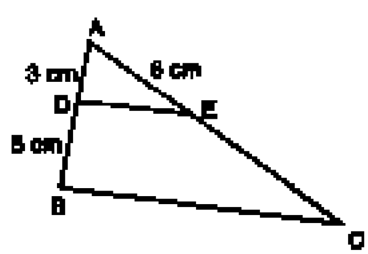
उदाहरण 14.1 : आ. 14.5 मध्ये, $DE \parallel BC$ आहे. जर AD = 3 सेमी, DB = 5 सेमी आणि AE = 6 सेमी तर AC ची लांबी मिळवा.

उत्तर : $AD \parallel BC$ दिलेले आहे.

समजा EC = x मानू.

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (प्रमाणाचे मूलभूत प्रमेयानुसार)

$\therefore \frac{3}{5} = \frac{6}{x}$



3x=30

x=10

$\therefore$ EC=10 सेमी.

आता AC = AE + EC

AC=6+10, =16 सेमी.

उदा. 14.2 : आ. 14.6 मध्ये AD = 4 सेमी, DB = 5 सेमी, AE = 4.5 सेमी आणि $EC = 5\frac{5}{8}$ सेमी, तर $DE \parallel BC$ आहे का? तुमच्या उत्तराचे कारण द्या.

टिपा

उत्तर ः आपणांस असे दिलेले आहे.

AD = 4 सेमी, आणि DB = 5 सेमी

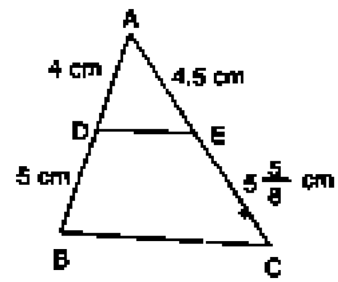
$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{4}{5}$ तसेच .... (i)

$\frac{AE}{EC} = \frac{9}{2} \times \frac{8}{45} = \frac{4}{5}$.........(ii)

विधान (i) आणि (ii) वरून

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ मिळते.

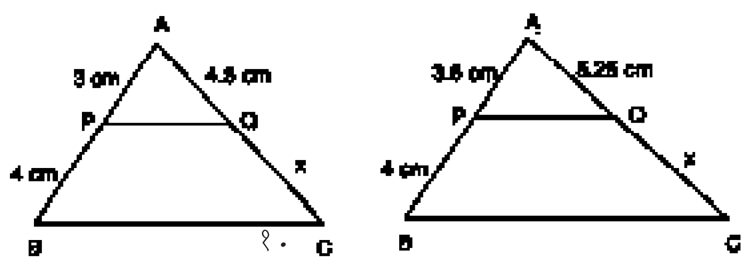
∴ प्रमाणाच्या मूलभूत प्रमेयाच्या व्यत्यानुसार



आ. 14.6

तुमची प्रगती अजमवा 14.1

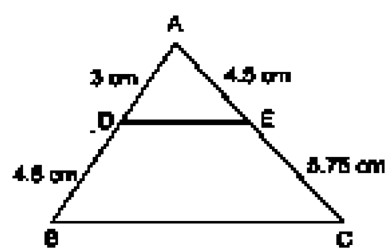
आकृती 14.7 (i) आणि (ii) मध्ये PQ ‖ BC तर प्रत्येक आकृतीत x ची किंमत किती ते मिळवा.



१.

आ. 14.7

२. आकृती 14.8 DE ‖ BC हे सत्य होईल काय? तुमच्या उत्तराचे कारण सांगा.

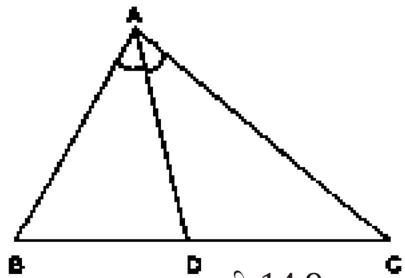


आ. 14.8

14.3 त्रिकोणाच्या कोनाचा दुभाजक

आता आपण एक महत्वाचा गुणधर्म मांडला तो पुढीलप्रमाणे

त्रिकोणातील एखाद्या कोनाचा दुभाजक त्याच्या समोरील बाजूला त्या कोनाला समाविष्ट करर्णाया बाजूंच्या प्रमाणात दुभागतो .



वरील गुणधर्मानुसार जर ΔABC च्या $< A$ चा AD हा दुभाजक असेल तर $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$

आपण याचा पडताळा BD, DC, AB आणि AC मोजून घेऊ शकतो .

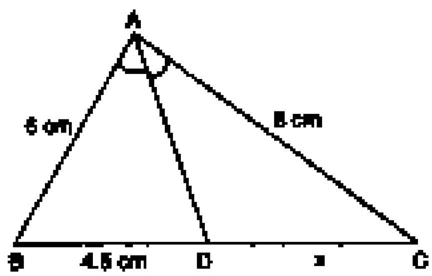
गुणोत्तर काढल्यावर आपणास असे आढळते की, $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$

आकृती 14.9

आणखी त्रिकोण काढून हीच कृती करून वरील गुणधर्माचा पडताळा घेता येईल .

आता आपण यावरील काही उदाहरणे पाहू .

उदा . 14.3 ः आ . 14.10 मध्ये ΔABC च्या बाजू AB व बाजू AC ची लांबी अनुक्रमे 6 सेमी व 8 सेमी आहे . $< A$ चा दुभाजक BC या समोरील बाजूला D मध्ये छेदतो . जर $AD = 4.5$ सेमी असेल तर CD ची लांबी काढा .



आ . 14.10

उत्तर ः वरील गुणधर्मानुसार आपल्याला माहित आहे .

$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$

($\therefore$ AD हा $< A$ चा दुभाजक)

$\therefore \frac{4.5}{DC} = \frac{6}{8}$ ($\therefore DC = x$ मानू .)

$\therefore \frac{4.5}{x} = \frac{3}{4}$

$\therefore 3x = 4.5 \times 4$ $\therefore x = 6$

म्हणजेच $DC = 6$ सेमी .

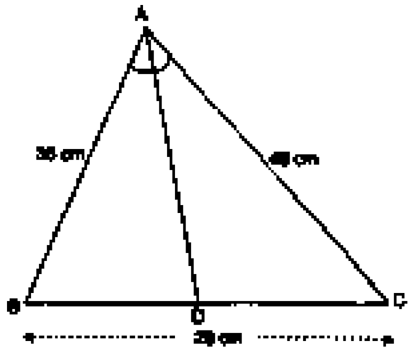
उदा . 14.4 ः एका त्रिकोणाच्या बाजू 28 सेमी, 36 सेमी आणि 48 सेमी आहेत . सर्वात लहान बाजूसमोरील कोनाच्या दुभाजकाने विभागलेल्या त्या रेषाखंडाची लांबी काढा .

उत्तर ः त्रिकोणाची सर्वात लहान बाजू 28 सेमी आहे . याच्या समोरील कोनाला समाविष्ट करर्णाया बाजू 36 सेमी व 48 सेमी आहेत.आ . 14.11मध्ये दाखवल्याप्रमाणे चा दुभाजक BC ला D मध्ये छेदतो असे मानू .

$$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{36}{48} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{3}{4} \qquad \therefore 4BD = 3DC \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\therefore BD = \frac{3}{4}\ DC \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$



आता $BC = 28$ सेमी दिले आहे.

आणि $BC = BD + DC$ यात किंमती घालू.

$$28 = \frac{3}{4}\ DC + DC \quad \} \text{विधान (i) वरून]}$$

आ. 14.11

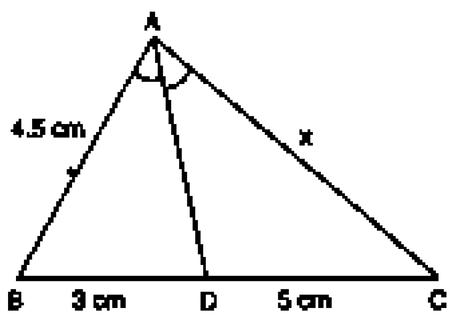
$$\therefore 28 = \frac{3DC+4DC}{4} = \frac{7DC}{4}$$

$$\therefore \frac{28}{1} \times \frac{4}{7} = DC \qquad \therefore DC = 16 \text{ सेमी.}$$

आणि $BD = \frac{3}{4} \times 16 = 12$ सेमी.

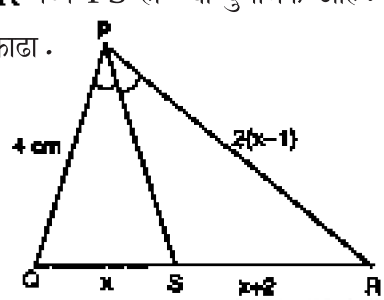
तुमची प्रगती अजमावून पहा : 14.2

१.आ. 14.12 मध्ये $\angle A$ चा दुभाजक बाजू BC ला D मध्ये छेदतो. जर AB=6 सेमी, BD=3 सेमी, DC=5 सेमी तर x ची किंमत काढा.



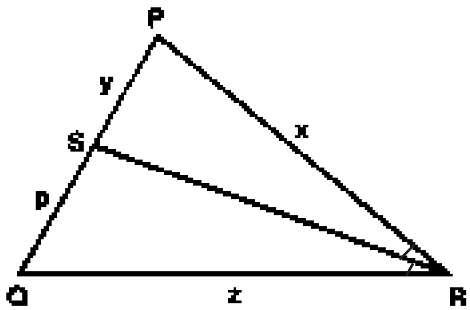
आ. 14.12

२.आ. 14.13 मध्ये ΔPQR मध्ये PS हा चा दुभाजक आहे. आकृतीत काही बाजूंची मापे दिली आहेत, तर x ची किंमत काढा.



आ. 14.13

३. आ. 14.14 मध्ये च्या चा दुभाजक RS आहे. आकृतीत बाजूंच्या किंमती दिल्या आहेत, तर QS ची किंमत x,y,z या किंमतीच्या स्वरूपात मिळवा.



आ. 14.14.

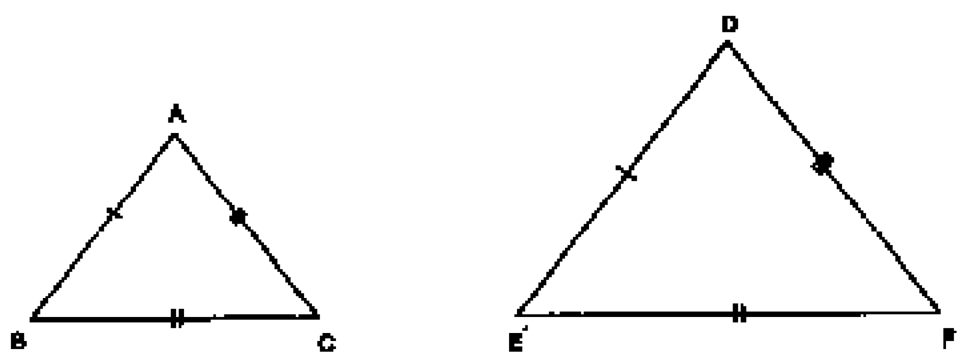
14.4 : त्रिकोणांची समरूपता :

त्रिकोण हे विशिष्ट प्रकारच्या बहुभुजाकृतीच असतात. म्हणून बहुभुजाकृतीच्या अटी त्रिकोणासाठी लागू होतात.

म्हणजे दोन त्रिकोण समरूप असतात,जर

(i) त्यांचे संगत कोन समान असतील आणि

(ii) संगत बाजू प्रमाणात असतील तर.



आ. 14.15

आपण असे म्हणतो की, ΔPQR हा ΔDEF शी समरूप आहे आणि हेच $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ असे दर्शवितात. ('$\sim$'हे चिन्ह समरूपतेसाठी वापरतात)

जर ΔABC तर व्याख्येनुसार

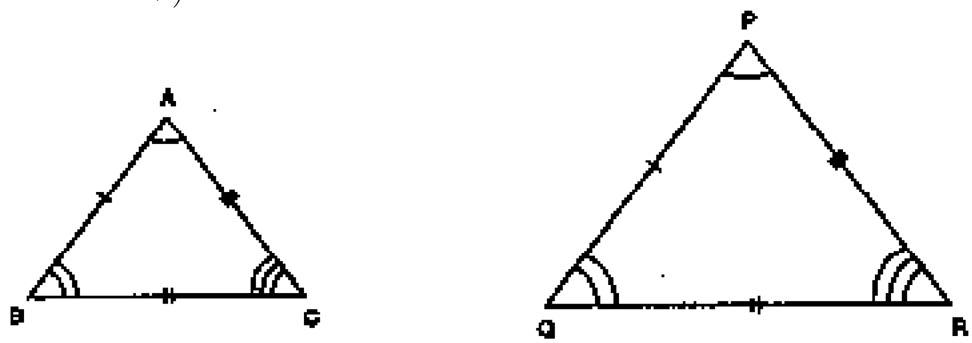
$< A =< D, < B =< E, < C =< F$ आणि $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$

14.4.1 समरूपतेची कोकोको कसोटी ः

आपण असे दाखवू शकतो की, वरीलपैकी कोणत्याही दोन अटी सत्य असतील तर तिसरी अट आपोआप लागू पडते.

आता खालील प्रयोग करून पाहू.

ΔABC व ΔPQR असे त्रिकोण की $< P =< A, < Q =< B,$ आणि $< R =< C$ (आ. 14.16 पहा)



आ. 14.16

ΔABC च्या बाजू AB, BC आणि AC मोजा. तसेच ΔPQR च्या बाजू PQ, QR आणि RQ मोजा.

आता त्यांची गुणोत्तरे काढा. $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$

तुम्हाला असे आढळेल की, ही गुणोत्तरे समान आहेत. त्यामुळे त्रिकोण समरूप आहेत.

संगतकोन समान असलेले विविध त्रिकोण घ्या. तुम्हाला हाच निष्कर्ष आढळेल.

यावरून असे सांगता येते की,

जर दोन त्रिकोणांमध्ये संगतकोन एकरूप असतील तर ते त्रिकोण समरूप असतात.

यालाच समरूपतेची कोकोको कसोटी म्हणतात.

14.4.2 : समरूपतेची बाबाबा कसोटी ः

आता खालील प्रयोग करून पहा.

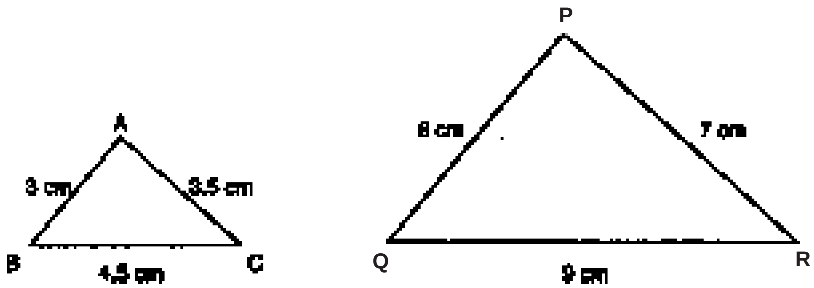
ΔABC असा काढा की, AB=3 सेमी, BC=4.5 सेमी, आणि CA=3. 5 सेमी.

आ. 14.18 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे ΔPOR हा दुसरा त्रिकोण काढा.

आपल्या असे दिसून येते की $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$

म्हणजेच दोन त्रिकोणांच्या बाजू प्रमाणात असतात. आता ΔABC चे $< A, < B, < CB$

आपल्याला असे आढळते की $< A =< P, < B =< Q, < C =< R$



आ. 14.17

संगतभुजा प्रमाणात असलेल्या कोणत्याही दोन त्रिकोणांवर हा प्रयोग करा. तुम्हाला त्यांचे संगतकोन समान आहेत असे आढळेल. आणि ते त्रिकोण समरूप आहेत असे लक्षात येईल.

यावरून असे लक्षात येते की,

दोन त्रिकोणांच्या संगत वाजू प्रमाणात असतील तर ते त्रिकोण समरूप असतात.

14.4.3. समरूपतेची बाकोबा कसोटी.

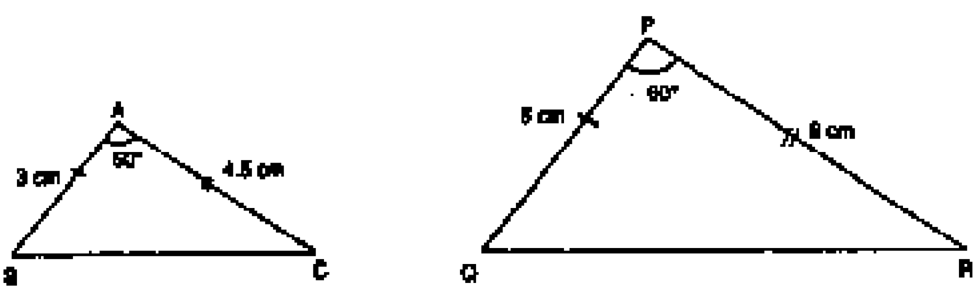
खालील प्रयोग करून पहा.

AB=3 सेमी असलेला रेषाखंड काढा.

A विंदूपाशी 60° चा कोन करा.

AC=4.5 सेमी एवढा रेषाखंड काढा. BC जोडा.

आता PQ=6 सेमी घ्या. P विंदूपाशी 60° चा कोन करा.



आ. 14.18

$PR=9$ सेमी घ्या.

$< B, < C, < Q, < R$ मोजा.

तुम्हाला असे आढळेल की ,$< B =< Q$ आणि $< C =< R$ यावरून

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$

यावरून असा निष्कर्ष निघतो की,

जर एका त्रिकोणाचा कोन हा दुर्सया त्रिकोणाच्या एका कोनासमोर असेल आणि या कोनाला समाविष्ट करर्णाया वाजू प्रमाणात असतील तर ते त्रिकोण समरूप असतात.

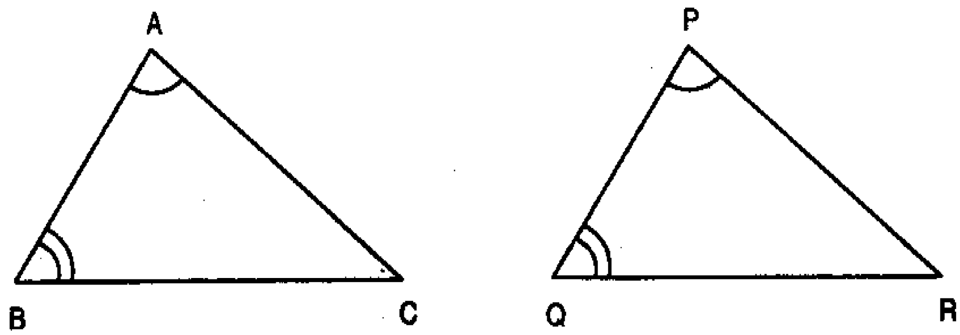
आपल्याला समरूपतेच्या महत्वाच्या तीन कसोटया मिळतात. त्या पुढीलप्रमाणे

(i) जर दोन त्रिकोणांमध्ये संगतकोन एकरूप असतील तर ते त्रिकोण समरूप असतात.

(ii) जर दोन त्रिकोणांच्या संगत बाजू प्रमाणात असतील तर ते त्रिकोण समरूप असतात.

(iii) जर एका त्रिकोणाचा एक कोन दुर्सया त्रिकोणाच्या एका कोनाबरोबर असेल आणि त्या कोनांना समाविष्ट करर्णाया बाजू प्रमाणात असतील तर ते त्रिकोण समरूप असतात.

उदा. **14.5 :** आ. 14.19 मध्ये , ΔABC व ΔPQR मध्ये $< A =< P, < B =< Q,$ आहे. तर $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ हे सत्य आहे काय ?



आ. 14.19

उत्तर : आपणांस असे दिले आहे की,

$< A =< P$ आणि $< B =< Q$

आपणास हे माहित आहे की,

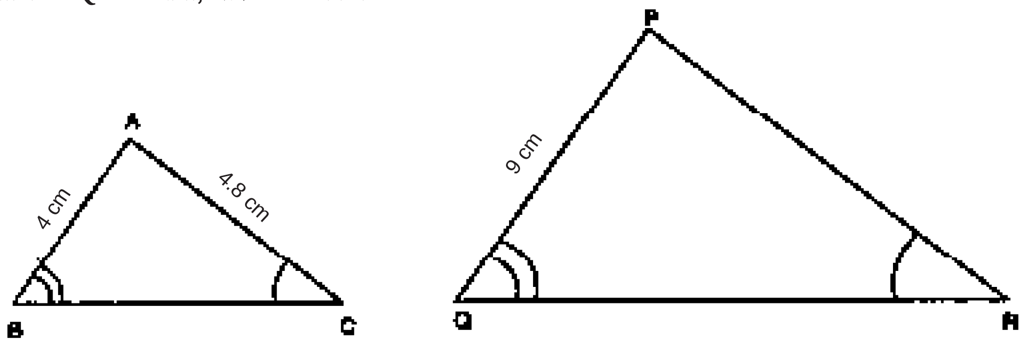
$< A + < B + < C =< P + < Q + < R = 180^{o}$

$\therefore < C =< R$

समरूपतेच्या पहिल्या कसोटीनुसार (कोकोको कसोटी)

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$

उदा. 14.6 : आ. 14.20 मध्ये $\Delta ABC \sim \Delta PQR$. जर AC=4.8 सेमी, AB=4 सेमी, आणि PQ=9 सेमी, तर PR काढा.



आ. 14.20

उत्तर ः आपणास असे दिले आहे,

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$

$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$ समजा PR=x सेमी

$\therefore \frac{4}{9} = \frac{4.8}{x}$

$\therefore 4x = 4.8 \times 9$

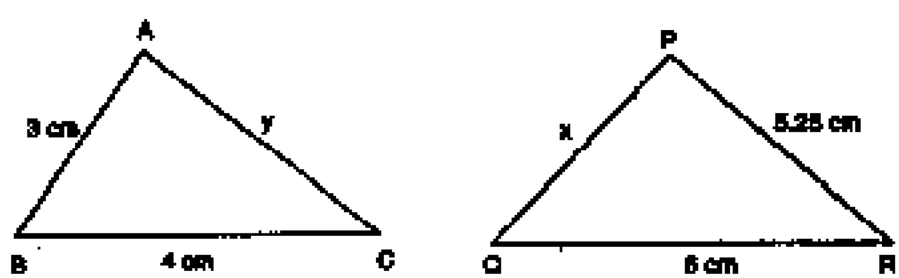
$\therefore x = 10.8$

म्हणजेच PR=10.8 सेमी

तुमची प्रगती अजमावून पहा ः 14.3

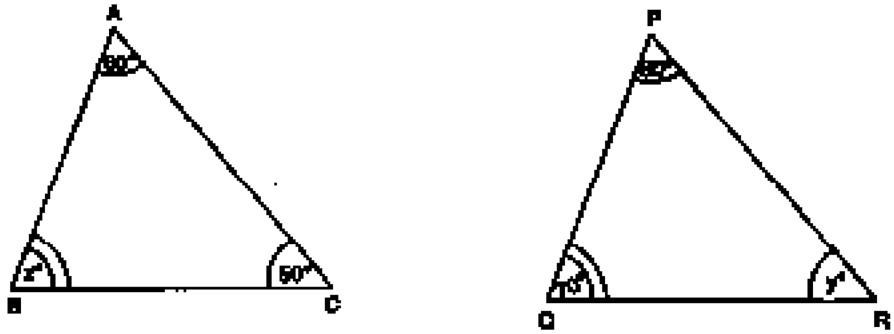
जर $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ तर **x, y** च्या किंमती काढा.

(i)



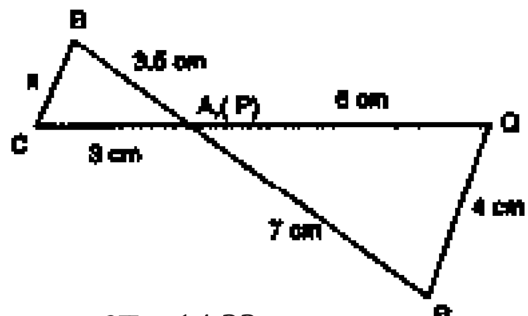
आ. 14.21

(ii)



आ. 14.22

iii)



आ. 14.23

14.5 : आणखी काही महत्त्वाचे गुणधर्म ः

काटकोन त्रिकोण आणि काटकोन करणाया शिरोबिंदूतून त्याच्या समोरील बाजूवर टाकलेल्या लंबाच्या संदर्भात समरूपतेवर आधारित काही महत्त्वाचे गुणधर्म आपण अभ्यासणार आहोत. या गुणधर्मा चे विधान खालीलप्रमाणे मांडता येईल आणि तो गुणधर्म पडताळता येईल.

> काटकोन त्रिकोणाच्या काटकोन करणाया शिरोबिंदूतून कर्णावर टाकलेल्या लंबामुळे त्याच्या दोन्ही बाजूला तयार झालेले त्रिकोण हे परस्परांशी आणि त्या त्रिकोणाशी समरूप असतात.

कृतीच्या सहाय्याने याचा पडताळा घेण्याचा प्रयत्न करू.

ΔABC मध्ये, $< A$ हा काटकोन आहे.

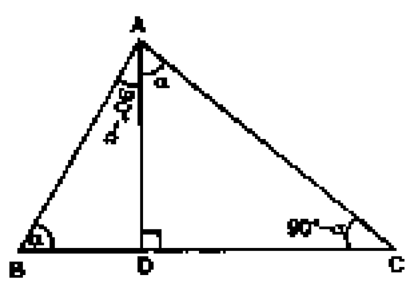
AD $\perp$ कर्ण BC काढा. हा BC ला D मध्ये मिळतो.

समजा $< DAB = \alpha, < ADB = 90^\circ$

$\therefore < BAD = 90 - \alpha$

तसेच $< BAC = 90^\circ$

आणि $< BAD = 90 - \alpha,$



आ. 14.24

$\therefore \angle DAC = \alpha$ आणि $\angle CDA = 90 - \alpha$

$\therefore$ ΔADB व ΔCDA हे समरूप आहेत ,कारण त्यांचे संगतकोन समान आहेत.

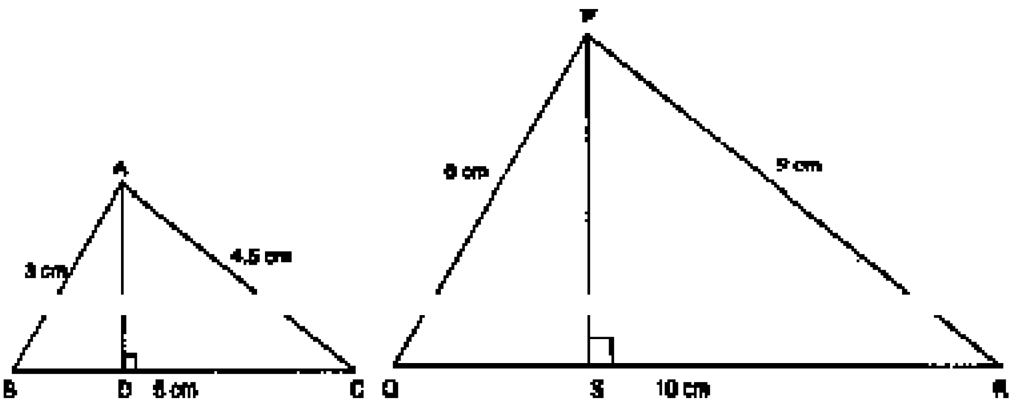
ΔBAC चे कोन α, 90° आणि $90^{\circ} - \alpha$ आहेत.

दुसरा महत्त्वाचा गुणधर्म म्हणजे समरूप त्रिकोणांच्या वाजू आणि त्यांचे क्षेत्रफळ यासंबंधी आहे. ते खालीलप्रमाणे

समरूप त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर हे त्यांच्या संगत बाजूंच्या वर्गांच्या गुणोत्तराएवढे असते.

खालील कृती करून हा गुणधर्म पडताळून पाहू या.

ΔABC आणि ΔPQR हे समरूप त्रिकोण काढा. म्हणजे त्यांच्या बाजू प्रमाणात आहेत.



आ. 14.25

$AD \perp BC$ आणि $PS \perp QR$ काढा.

AD आणि PS ची लांबी मोजा.

$AD \times BC$ आणि $PS \times QR$ काढा.

तुमच्या असे लक्षात येईल की, $AD \times BC = BC^2$

आणि $PS \times QR = QR^2$

आता $AD \times BC = 2 \times A(\Delta ABC)$ आणि

$PS \times QR = 2 \times A(\Delta PQR)$

$$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{AD \times BC}{PS \times QR} = \frac{BC^2}{QR^2}$$

तसेच $\frac{BC}{QR} = \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$

$$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{AC^2}{PR^2}$$

समरूप Δ च्या वेगवेगळया जोडया घेऊन ही कृती पुन्हा पुन्हा करता येईल.

आता उदाहरणांच्या साहाय्याने हा गुणधर्म स्पष्ट करू या.

उदा. <u>14.7</u> : जर समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजूंची एक जोडी 2.5 सेमी आणि 5.0 सेमी असेल तर त्यांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर काढा.

उत्तर : समजा ΔABC व ΔPQR हे दोन समरूप त्रिकोण आहेत. BC=2.5 सेमी, QR=5 सेमी,

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{(2.5)^2}{(5)^2} = \frac{1}{4}$$

<u>उदा.14.8 :</u> ΔABC मध्ये PQ $\parallel$ BC असून ती AB आणि AC ला अनुक्रमे P आणि Q मध्ये छेदते.जर $\frac{AP}{PB} = \frac{2}{3}$ तर ΔAPQ आणि च्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर काढा.

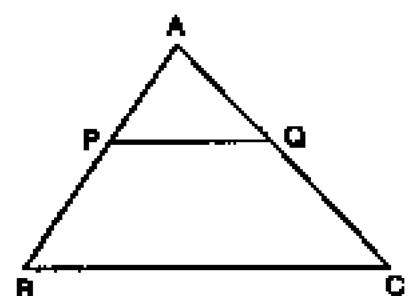
उत्तर : आ. 14.26 मध्ये

PQ $\parallel$ BC

$$\therefore \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{BP}{AP} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore 1 + \frac{BP}{AP} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$



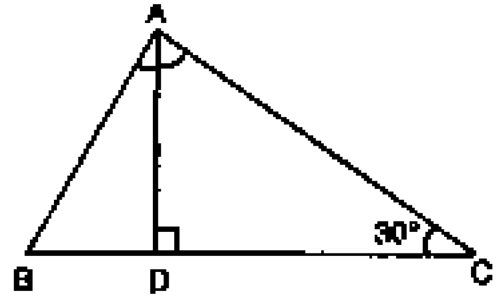
आ. 14.26

<u>14.4 :</u> तुमची प्रगती अजमावून पहा .

1.आ. 14. 27 मध्ये ΔABC हा काटकोन त्रिकोण असून $\angle A = 90^0$ आणि $\angle C = 30^0$, तर $\Delta DCA \sim \Delta ACB$ सिध्द करा.

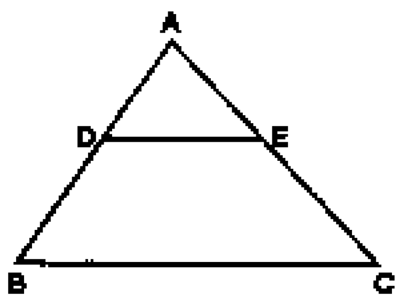
2. दोन समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजूंची लांबी अनुक्रमे 3 सेमी व 5 सेमी आहे. तर त्यांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर काढा.

3. आ. 14.28 मध्ये मध्ये DE, जर AB=6, AD=2 तर ΔADE आणि समलंब चौकोन $\square$ BCE यांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर काढा.



आ. 14.27

4. च्या बाजू **AB, BC, CA** यांचे अनुक्रमे **P, Q,** आणि **R** हे मध्यबिंदू आहेत. तर असे दाखवा की **ΔPQR** चे क्षेत्रफळ **ΔABC** च्या क्षेत्रफळाच्या $\frac{1}{4}$ पट आहे.



आ. 14.28

5. **ΔABC** व **ΔPQR** हे समरूप असून त्यांची संगत उंची AD आणि PS यांचे गुणोत्तर 4:9 आहे. तर आणि यांच्या गुणोत्तराची किंमत काढा. (सूचना : $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PS} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{PR}$ चा वापर करा)

6. दोन समरूप त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर 16:25 आहे. तर त्यांच्या संगतवाजूंचे गुणोत्तर किती?

14.6 : बौध्दायन /पायथागोरसचे प्रमेय :

आपण बौध्दायन /पायथागोरसचे प्रमेय हे महत्वाचे प्रमेय समरूपतेच्या संबोधाचा उपयोग करून सिध्द करणार आहोत.

प्रमेय : कोणत्याही काटकोन त्रिकोणात कर्णाचा वर्ग इतर दोन बाजूंच्या वर्गाच्या वेरजेवरोवर असतो.

पक्ष : **ΔABC** या काटकोन त्रिकोणात $< B = 90^{\circ}$

विभाग ३

भूमिती

टिपा

साध्य ः $AC^2=AB^2+BC^2$

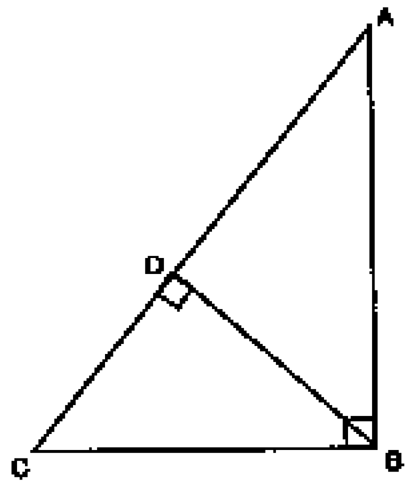
रचना ः (आ. 14.29 पहा)

'B' बिंदूतून BD हा AC वर लंब काढा.

सिध्दता ः $BD \perp AC$

$\therefore \Delta ADB \sim \Delta ABC$ आणि ....(i)

$\Delta BDC \sim \Delta ABC$ ....(ii)



आ. 14.29

विधान (i) वरून $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}$

$\therefore AB^2 = AD \times AC$ ....(A)

विधान (ii) वरून $\frac{BC}{AC} = \frac{DC}{BC}$

$\therefore BC^2 = DC \times AC$ ....(B)

आता निष्कर्ष (A) व (B) यांची बेरीज करू.

$AB^2 + BC^2 = AD \times AC \times DC \times AC$

$= AC(AD+DC)$

$\therefore AB^2 + BC^2 = AD \times AC$

$(\therefore AD + DC = AC)$

म्हणजेच $+BC^2=AC^2$ हे सिध्द.

हे प्रमेय प्रसिध्द ग्रीक गणिती पायथागोरस याच्या नावाने प्रसिध्द आहे. हे प्रमेय पायथागोरसच्या पूर्वी 200 वर्षे वौध्दायन नावाच्या भारतीय गणितज्ञाने सुरूवातीला मांडले होते.

14.6.1: पायथागोरस प्रमेयाचा व्यत्यास ः

वरील प्रमेयाच्या व्यत्यासाचे विधान खालीलप्रमाणे ः

> त्रिकोणात जर एका बाजूचा वर्ग इतर दोन बाजूंच्या वर्गाबेरीज बरोबर असेल तर पहिल्या बाजूसमोरील कोन काटकोन असतो.

वरील गुणधर्माचा पडताळा खालील कृती करून घेता येतो.

3 सेमी, 4 सेमी, 5 सेमी बाजू असलेला एक त्रिकोण काढा.

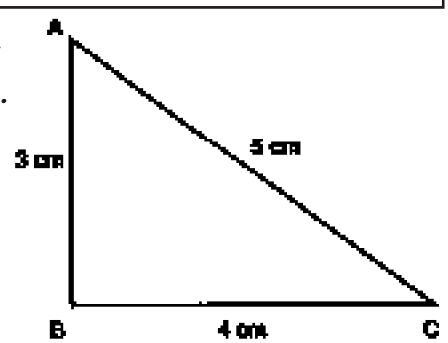
$AB = 3$ सेमी, $BC = 4$ सेमी

आणि $AC = 5$ सेमी. तुम्हाला असे आढळेल की,

$AB^2 + BC^2 = 3^2 + 4^2$

$\therefore AB^2 + BC^2 = 9 + 16 = 25$

तसेच, $\therefore AC^2 = (5)^2 = 25$



आ. 14.30

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

आ. 14.30 मधील त्रिकोण वरील गुणधर्म सत्य करतो.

<ABC मोजा, तुम्हाला <ABC=90^0 आढळेल.

5 सेमी, 12 सेमी आणि 13 सेमी बाजू असलेला एक त्रिकोण काढा. त्याचप्रमाणे 7 सेमी, 24 सेमी आणि 25 सेमी बाजू असणारा त्रिकोण काढा. तुम्हाला पुन्हा असे आढळेल की 13 सेमी आणि 25 सेमी यांच्या समोरील कोन 90^o मापाचा आहे.

वरील गुणधर्म वापरून काही उदाहरणे सोडवू.

<u>उदा. **14.9** ः</u> काटकोन त्रिकोणात काटकोन करर्णाया बाजूंची लांबी 5 सेमी व 12 सेमी आहे. तर कर्णाची लांबी काढा.

उत्तर ः समजा ΔABC या काटकोन त्रिकोणाचा $< B$ हा काटकोन आहे. तर

AB=5 सेमी व BC=12 सेमी.

$\therefore\ AC^2 = AB^2 + BC^2$

$AC^2 = 5^2 + 12^2$

$AC^2 = 25 + 144$

$AC^2 = 169$

AC^2 =13 सेमी.

कर्णाची लांबी 13 सेमी असेल.

<u>उदा. **14.10** ः</u> ज्या आयताच्या बाजू 3 सेमी आणि 4 सेमी आहेत अशा आयताच्या कर्णाची लांबी काढा.

उत्तर ः आ.14.31 मध्ये ABCD हा आयत असून AB=3 सेमी आणि BC=4 सेमी.

कर्ण BD जोडा.

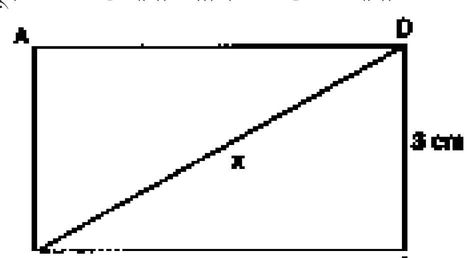
आता DCB या काटकोन त्रिकोणात

$\therefore\ BD^2 = BC^2 + CD^2$

$^2 = ^2 + 3^2$

$^2 = 16 + 9 = 25$

$= 5$



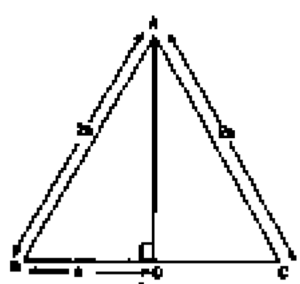
आ. 14.31

आयत ABCD च्या कर्णाची लांबी 3 सेमी आहे.

<u>उदा. **14.11:**</u> समभुज त्रिकोणात एका बाजूच्या वर्गाची तिप्पट ही त्याच्या उंचीच्या वर्गाच्या 4 पट असते हे सिध्द करा.

उत्तर ः $BD \perp AC$

आणि $BD = CD$



आ. 14.32

विभाग ३

भूमिती

टिपा

समजा AB=BC=CA=2 a मानू.

आणि BD=CD=a होईल.

तसेच AD=x मानू.

$\therefore\ x^2=(2a)^2 - (a)^2$

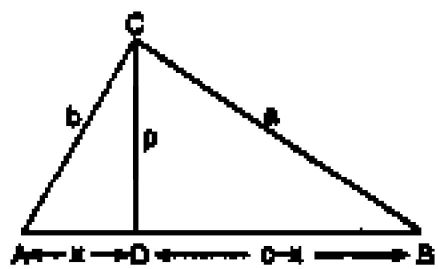
$x^2= 4a^2 - a^2 = 3a^2$

आता 3 (बाजू)$^2=3(2a)^2 = 12a^2$ .... (i)

आणि 4 (शिरोलंब)$^2 = 4^2) = 12a^2$ ....(ii)

निष्कर्ष (i) व (ii) वरून सिध्द.

<u>उदा. **14.12 :**</u> **ΔABC** च्या काटकोन त्रिकोणात **C** हा काटकोन आहे. जर C मधून AB वर टाकलेल्या लंबाची लांबी **P** असून BD=a, AB=c, AC=b , तर दाखवा (i) pc=ab आणि (ii) $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2}$



आ. 14.33

उत्तर ः (i) CD ⊥ AB

$\therefore\ \Delta ABC \sim \Delta ACD$

$\therefore\ \frac{c}{b} = \frac{a}{p}$

$\therefore\ pc = ab$ ....(i)

(ii) $AB^2 = AC^2 + BC^2$

किंवा $C^2 = b^2 + a^2$

$\therefore\ \left(\frac{ab}{p}\right)^2 = b^2 + a^2$ [$\therefore c = \frac{ab}{p}$ वरील (i)]

$$\frac{1}{p^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}$$

$$\frac{1}{p^2} = \frac{a^2}{a^2 b^2} \quad \frac{b^2}{a^2 b^2}$$

.

<u>तुमची प्रगती अजमावून पहा ः **14.5**</u>

1.काही त्रिकोणांच्या बाजू खाली दिल्या आहेत. यावरून कोणते त्रिकोण काटकोन त्रिकोण आहेत ते सांगा.[AB=c, BC=a , CA=b]

(i) a=4 सेमी, b=5 सेमी, c=3 सेमी,

(ii) a=1.6 सेमी, b=3.8 सेमी, c=4 सेमी,

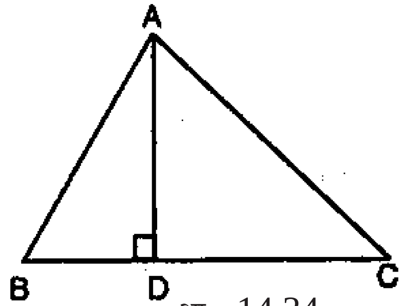
(iii) a=9 सेमी, b=16 सेमी, c=18 सेमी,

(iv) a=7 सेमी, b=24 सेमी, c=25 सेमी,

2. एका सपाट मैदानावर 6 मी. आणि 11 मी. उंचीचे दोन खांब उभे आहेत. त्या दोन्ही खांबातील अंतर

12 मी.आहे. तर त्यांच्या वरच्या टोकांतील अंतर काढा.

3. 10 सेमी बाजू असलेल्या चौरसाच्या कर्णाची लांबी काढा.



आ. 14.34

4.आ. 14.34 मध्ये $< C$ हा लघुकोन आहे. $AD \perp BC$ तर दाखवा की, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.DC$.

5. ΔABC च्या बाजू AB आणि AC चे अनुक्रमे L आणि M हे मध्यबिंदू आहेत. $< B = 90^o$ तर , $4LC^2 = AB^2 + 4BC^2$ हे सिध्द करा.

6. मध्ये बाजू CA आणि CB चे अनुक्रमे P आणि Q हे मध्यबिंदू आहेत. तर , $AQ+BP^2 = AB^2 + PQ^2$ हे सिध्द करा.

7. ΔPQR हा समद्विभुज त्रिकोण असून $< Q = 90^o$ तर , सिध्द करा.$PR^2 = 2PQ^2$

8.एका भिंतीला टेकवून एक शिडी अशी उभी केली आहे की तिचे वरचे टोक भिंतीवर 4 मी. अंतरावर आहे त्या शिडीचे खालचे टोक भिंतीपासून 3 मी अंतरावर आहे. तर त्या शिडीची लांबी किती?

सारांश ः

- समान आकाराच्या आणि भिन्न किंवा त्याच मापाच्या वस्तूंना समरूप वस्तू म्हणतात.
- कोणत्याही दोन बहुभुजाकृती ज्यांचे संगतकोन एकरूप असतात आणि संगतबाजू प्रमाणात असतात त्या समरूप असतात.
- जर एखादी रेषा त्रिकोणातील एका बाजूला समांतर असेल तर ती इतर दोन बाजूंना प्रमाणात विभागते आणि याचा व्यत्यास.
- त्रिकोणाच्या कोनाचा दुभाजक हा त्या कोनाला समाविष्ट करर्णाया बाजूंच्या प्रमाणात, त्या कोनाच्या समोरील बाजूला विभागतो.
- दोन त्रिकोण समरूप आहेत असे म्हणतात.जर
  (a) त्यांचे संगतकोन समान असतील आणि
  (b) त्यांच्या संगतबाजू प्रमाणात असतील.
- समरूपतेच्या कसोटयाः
  कोकोको कसोटी

बाबाबा कसोटी

बाकोबा कसोटी

- काटकोन त्रिकोणाच्या कर्णावर,काटकोन करर्णाया शिरोबिंदूतून लंब टाकला तर जे दोन त्रिकोण तयार होतात ते त्रिकोण परस्परांना व दिलेल्या त्रिकोणाशी समरूप होतात.
- दोन समरूप त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर हे त्यांच्या संगत बाजूंच्या वर्गाच्या गुणोत्तराएवढे असते.
- काटकोन त्रिकोणात कर्णाचा वर्ग हा इतर दोन बाजूंच्या वर्गाच्या बेरजेएवढा असतो. बौध्दायन/पायथागोरसचे प्रमेय.
- त्रिकोणात जर एका बाजूचा वर्ग हा इतर दोन बाजूंच्या वर्गाबरोबर असेल तर पहिल्या बाजूसमोरील कोन काटकोन असतो. (बौध्दायन) पायथागोरसचे प्रमेयाचा व्यत्यास.

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह

1. दोन बहुभुजाकृती समरूप होण्यासाठी लागर्णाया कसोटया लिहा.
2. दोन त्रिकोण समरूप होण्यासाठी लागर्णाया कसोटया लिहा.
3. खालीलपैकी कोणत्या उदाहरणात **ΔABC** आणि **ΔPQR** समरूप होतील.

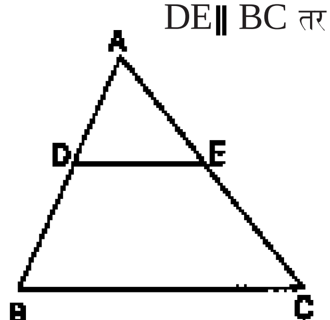
   (i) $<A=40^\circ, <B = 60^\circ, <C = 80^\circ, <P = 40^\circ, <Q = 60^\circ$ आणि $<P = 40^\circ$

   (ii) $<A=50^\circ, <B = 70^\circ, <C = 60^\circ, <P = 50^\circ, <Q = 60^\circ$ आणि $<R = 70^\circ$

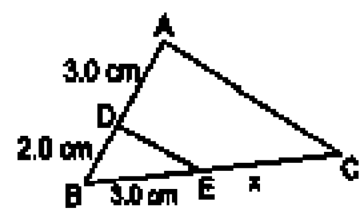
   (iii) AB=2.5 सेमी, BC=4.5 सेमी, CA=3.5 सेमी
   PQ=5 सेमी, QR=9.0 सेमी, RP=7 सेमी

   (iv) AB=3 सेमी, BC=7.5 सेमी, CA=5 सेमी
   PQ=4.5 सेमी, QR=7.5 सेमी, RP=6 सेमी

4. आ. 14.35 मध्ये, AD=3 सेमी, AE=4.5 सेमी, DB=4.0 सेमी . जर DE‖ BC तर CE काढा.



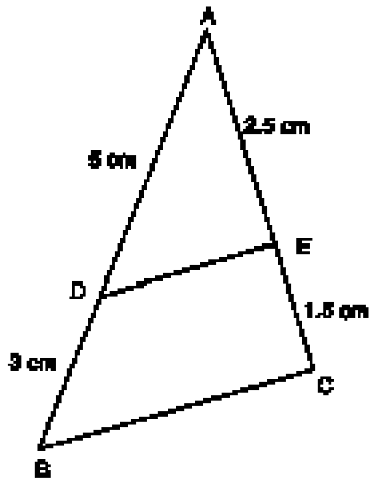
आ. 14.36

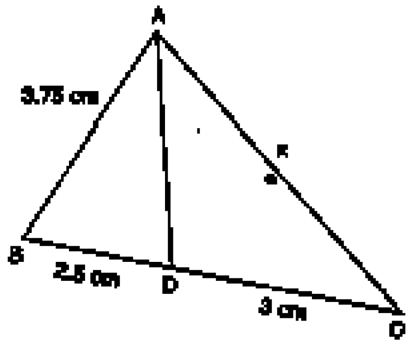


आ. 14.37

5.आ. 14.36 मध्ये DEAC आहे. आकृतीत दिलेल्या मापावरून x ची किंमत काढा.

6. आ. 14.37 मध्ये ΔABC मध्ये AD=5 सेमी, DB=3 सेमी, AE=2.5 सेमी आणि EC=1.5 सेमी आहे. तर DE‖ BC आहे काय? तुमच्य उत्तरासाठी कारण लिहा.





आ. 14.38

7. आ. 14.38 मध्ये च्या <A चा AD हा कोन दुभाजक आहे. आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे मापे आहेत. त्यावरून x ची किंमत काढा.

8. ΔABC आणि ΔDEF समरूप असून त्यांची परिमिती अनुक्रमे 12 सेमी आणि 18 सेमी आहे. तर च्या क्षेत्रफळाचे ΔDEF च्या क्षेत्रफळाशी गुणोत्तर काढा.

9. ΔABC आणि ΔPQR या दोन समरूप त्रिकोणांची उंची AD आणि PS अनुक्रमे 2.5 सेमी आणि 3.5 सेमी आहे. तर च्या क्षेत्रफळाचे याच्या क्षेत्रफळाशी गुणोत्तर काढा.

10. खालीलपैकी कोणते त्रिकोण काटकोन त्रिकोण आहेत.

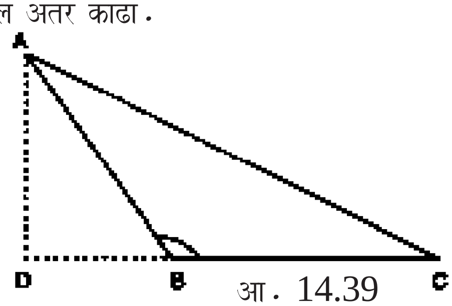
(i)AB=5 सेमी, BC=12 सेमी, AC=13 सेमी (ii)AB=8 सेमी, BC=6 सेमी, CA=10 सेमी (iii)AB=10 सेमी, BC=5 सेमी, CA=6 सेमी (iv)AB=25 सेमी, BC=24 सेमी, CA=13 सेमी (v)$AB=a^2+b^2$, $BC=2ab$, $CA=a^2-b^2$

11. एका समभुज त्रिकोणाची बाजू '2a' आहे. तर त्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ किती?

12. एका सपाट जमिनीवर 12 मी. आणि 17 मी.उंचीचे दोन खांब उभे केले आहेत. त्या दोन खांबातील अंतर 12 मी.आहे. तर दोन्ही खांबाच्या वरच्या टोकांतील अंतर काढा.

13. आ. 14.39 मध्ये दाखवा की,

$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$



आ. 14.39

14. एक शिडी भिंतीला टेकवून उभी केली आहे. त्यांचे भिंतीला टेकणारे टोक जमिनीपासून 8 मी. उंचीवर आहे. भिंत आणि शिडीचे खालचे टोक यामधील अंतर 6 मी. आहे. तर शिडीची लांबी किती?

15. समभुज चौकोनात एका बाजूच्या वर्गाची तिप्पट ही त्याच्या मध्यगेच्या वर्गाच्या चौपट आहे. हे सिध्द करा

उत्तरे : तुमची प्रगती अजमवा.

14.1

1. (i) 6 (ii) 6
2. नाही.

14.2

1. 7.5 सेमी 2. 4 सेमी. 3. $\frac{yz}{x}$ (x=-1 अशक्य)

14.3

(i) x=4.5 , y=3.5

(ii) x=70, y=50

(iii)x= 2 सेमी , y=7 सेमी.

14.4

2. 9:25 3. 1:8

5. 16.81 6. 4:5

14.5

1. (i) होय (ii) नाही (iii) नाही. (iv) होय.
2. 13 सेमी
3. $10\sqrt{2}$ सेमी
8. 5 सेमी.

उत्तरे : संकीर्ण प्रश्नसंग्रह

3. (i) आणि (ii)
4. 6 सेमी
5. 4.5 सेमी
6. होय . $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$
7. 4.5 सेमी.
8. 4:9
9. 25:49
10. (i)(ii),(iv) आणि (v)
11. $\sqrt{3}\ a^2$
12. 13 मी.
14. 10 मी.

15

प्रास्ताविक ः

तुम्हाला रेषाखंड,कोन,त्रिकोण,चौकोन आणि वर्तुळ या भौमितीक आकृत्यांची ओळख झालीच आहे. चाक, बांगडी, ओ(O अक्षर), इ. वर्तुळाची उदाहरणे आहेत. या प्रकरणात आपण वर्तुळ आणि त्यासंबंधीच्या इतर संबोधांचा सखोल अभ्यास करणार आहोत.

उद्दिष्टेः

या प्रकरणाचा अभ्यास केल्यावर विद्यार्थ्याला खालील गोष्टी करता येतील.

- वर्तुळाची व्याख्या करणे.
- वर्तुळाच्या संदर्भातील विविध बाबींची उदाहरणे देणे.
- एकरूप वर्तुळे आणि एककेंद्री वर्तुळे यांचे स्पष्टिकरण देणे.
- जीवा, कंस, वर्तुळपाकळी, वर्तुळखंड या वर्तुळासंबंधीच्या बाबी ओळखता येणे आणि त्याचे स्पष्टीकरण करणे.
- वर्तुळकंस आणि वर्तुळजीवा यावर आधारलेल्या गुणधर्मांचा पडताळा घेणे.
- वरील गुणधर्म उदाहरणे सोडविण्यास वापरणे.

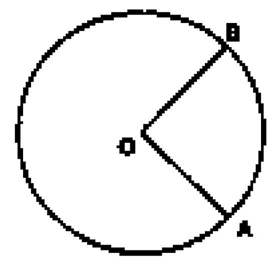
अपेक्षित पूर्वज्ञान ः

- रेषाखंड आणि त्याची लांबी.
- कोन आणि त्याचे माप.
- समांतर रेषा आणि लंब रेषा
- त्रिकोण चौकोन आणि बहुभुजाकृती अशा बंदिस्त आकृत्या.
- बंदिस्त आकृत्यांची परिमिती.
- बंदिस्त आकृत्यांची एकरूपता

15: 1.1 वर्तुळ ः

एकाच प्रतलातील एका स्थिर विंदूपासून ठराविक अंतरावर असणा-या सर्व बिंदूचा संच म्हणजे वर्तुळ होय.

त्रिज्या ः वर्तुळकेंद्र आणि वर्तुळावरील कोणताही बिंदू यांना जोडणारा रेषाखंड म्हणजे वर्तुळाची त्रिज्या होय. आकृती 15: 1 मध्ये O केंद्र असलेले वर्तुळ दिले आहे. OA ही एक त्रिज्या अ हे त्याचा वर्तुळाची OB ही दुसरी त्रिज्या आहे.



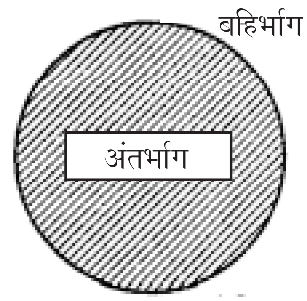
आकृती 15: 1

तुमच्यासाठी कृती ः

त्रिज्या OA आणि OB यांची लांबी मोजा. (आ. 15.1) तुमच्या असे लक्षात येईल की,ती समान आहे. यावरून

वर्तुळाच्या त्रिज्या समान असतात

त्रिज्येची लांबी ही सर्वसाधारणपणे ‘r’ या अक्षराने दर्शवितात. त्रिज्येची लांबी असे लिहिण्याऐवजी केवळ त्रिज्या लिहिले तरी चालते. एखादया प्रतलातील एखादया बंदिस्त आकृतीमुळे प्रतलाचे तीन भाग होतात. आकृतीचा अंतर्भाग, (आ. 15.2)मध्ये रेखांकित भाग हा वर्तुळाचा अंतर्भाग आहे. त्याची कडा म्हणजे वर्तुळ होय. आणि रेखांकित न केलेला भाग म्हणजे बहिर्भाग होय.

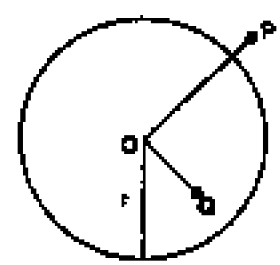


आकृती 15: 2

तुमच्यासाठी कृती ः

(a)आ. 15.3 पहा. Q हा वर्तुळाच्या अंतर्भागात एक बिंदू घ्या. OQ मोजा. तुम्हाला असे आढळेल की $OQ < r$. अशा सर्व बिंदूनी तयार झालेल्या वर्तुळाच्या आतील भाग म्हणजे वर्तुळाचा अंतर्भाग होय.

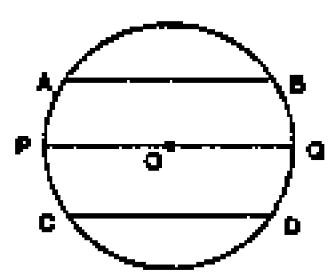
(b)आता (आ. 15.3 पहा) त्यात वर्तुळाच्या बाहेर कोठेही P बिंदू घ्या. OP मोजा तुम्हाला असे आढळेल की $\mathbf{OP > r}$, अशा सर्व P बिंदूनी तयार झालेला वर्तुळाच्या बाहेरील भाग म्हणजे वर्तुळाचा बाहयभाग होय.



आकृती 15: 3

5.1.2 <u>जीवा ः</u>

वर्तुळावरील कोणतेही दोन बिंदू जोडणारा रेषाखंड म्हणजे जीवा होय. आकृती 15.4 मध्ये O केंद' आणि ‘r’ ही त्रिज्या असलेल्या वर्तुळाची AB, PQ आणि CD या तीन जीवा होय. जीवा PQ ही O या केंद्रातून जाते. अशा जीवेला वर्तुळाचा व्यास असे म्हणतात. व्यास हा सामान्यपणे ‘d’ या अक्षराने दर्शविला जातो.



आकृती 15: 4

15.1.2 <u>जीवा ः</u>

वर्तुळावरील कोणतेही दोन बिंदू जोडणारा रेषाखंड म्हणजे जीवा होय. आकृती 15.4 मध्ये O केंद्र' आणि 'r' ही त्रिज्या असलेल्या वर्तुळाच्य AB, PQ आणि CD या तीन जीवा आहेता. जीवा PQ ही O या केंद्रातून जाते. अशा जीवेला वर्तुळाचा व्यास असे म्हणतात. व्यास हा सामान्यपणे 'd' या अक्षराने दर्शविला जातो.

वर्तुळकेंद्रातून जाणा-या जीवेला व्यास असे म्हणतात.

तुमच्यासाठी कृती :

PQ ची लांबी मोजा. त्याला 'd' म्हणा. त्रिज्या जर r असेल तर d ची लांबी तुम्हाला 2r मिळेल.

$\therefore d = 2r$

म्हणजे वर्तुळाचा व्यास = वर्तुळाच्या त्रिज्येची दुप्पट.

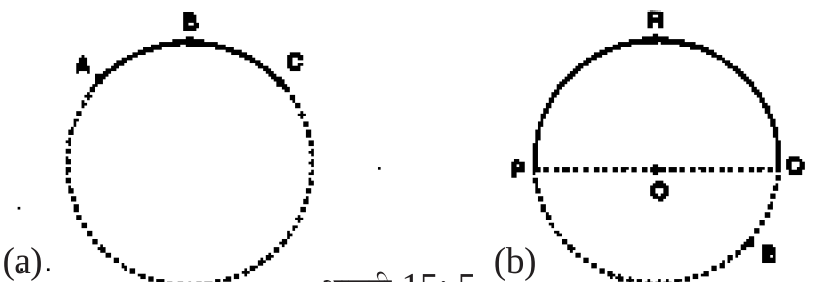
PQ,CD, AB यांची लांबी मोजा. तुम्हाला असे आढळेल की, PQ> AB तसेच PQ> CD.

यावरून असे लक्षात येते की,

व्यास म्हणजे वर्तुळाची सर्वात मोठी जीवा

15.1.3 कंस :

वर्तुळाचा काही भाग म्हणजे वर्तुळकंस होय. आकृती 15.5 (a) मध्ये ABC हा कंस आहे. हा कंस ABC असे किंवा $\overset{\frown}{ABC}$ असे लिहितात.



(a) आकृती 15: 5 (b)

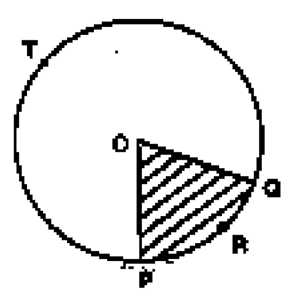
15.1.4 अर्धवर्तुळ :

वर्तुळाच्या व्यासामुळे वर्तुळाचे दोन समान कंसात विभाजन होते. त्या प्रत्येक भागाला अर्धवर्तुळ म्हणतात.

आ. 15.5 (b) मध्ये PQ हा व्यास आहे. आणि कंस $\overset{\frown}{PRQ}$ हे अर्धवर्तुळ आहे. कंस $\overset{\frown}{PBQ}$ हे सुध्दा अर्धवर्तुळच आहे.

15.1.5 वर्तुळपाकळी :

वर्तुळाचा कंस आणि दोन त्रिज्या यांनी बंदिस्त केलेले क्षेत्र म्हणजे वर्तुळपाकळी होय. आ. 15.6 मध्ये कंस PRQ ने तयार झालेला रेखांकित भाग म्हणजे वर्तुळपाकळी होय. आणि कंस PTQ ने तयार झालेला रेखांकित नसलेला भागसुध्दा वर्तुळपाकळी आहे.

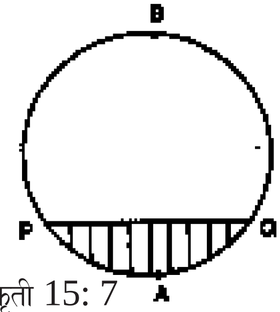


आकृती 15: 6

टिपा

15.1.5 वर्तुळखंडः

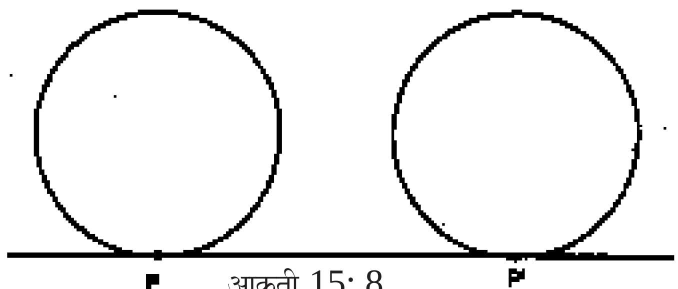
जीवेमुळे वर्तुळाच्या अंतर्भागाचे दोन भाग पडतात. प्रत्येकाला वर्तुळखंड असे म्हणतात. आ. 15.7 मध्ये रेखांकित भाग PAQP आणि रेखांकित नसलेला भाग PBQP हे दोन्ही वर्तुळखंड आहेत. रेखांकित PAQP याला लघुवर्तुळखंड आणि PBQP याला विशालवर्तुळखंड असे म्हणतात.



आकृती 15: 7

15.1.7 परिघ ः

वर्तुळावरील कोणताही P बिंदू घ्या. हा बिंदू जर वर्तुळावरून एकदा फिरला आणि पुन्हा जर त्याच ठिकाणी आला. तर P बिंदूने आक्रमिलेले अंतर म्हणजे त्या वर्तुळाचा परिघ होय.



आकृती 15: 8

<u>तुमच्यासाठी पुढील कृती कराः</u>

एक चाक घ्या. ते चाक जमिनीवर जेथे टेकले तेथे P बिंदू घ्या. तो ठळक करा. एका रेषेवर ते चाक फिरवत न्या. P बिंदू पुन्हा जेव्हा जमिनीला टेकेल तेव्हा थांबा. P ची पहिली स्थिती आणि P ची त्या रेषेवरची नंतरची स्थिती यामधील अंतर मोजा. हे अंतर म्हणजेच त्या चाकाचा (वर्तुळाचा)परिघ होय. म्हणजेच

वर्तुळाच्या कडेची लांबी म्हणजे त्या वर्तुळाचा परिघ होय.

तसेच पुढील कृती करून पहा ः

वेगवेगळी वर्तुळे घ्या आणि त्यांचे परिघ व व्यास मोजा. प्रत्येक वेळी तुम्हाला असे आढळेल की वतुळाचा परिघ व त्याचा व्यास यांचे गुणोत्तर समान आहे.

वर्तुळाच्या परिघाचे त्याच्या व्यासाशी असलेले गुणोत्तर स्थिर असते. हा स्थिरांक नेहमी ग्रीक अक्षर π या चिन्हाने दाखवितात.

$\therefore \frac{c}{d} = \frac{c}{2r} = \pi$ येथे **c** हा वर्तुळाचा परिघ **d** हा त्याचा व्यास आणि **r** ही त्रिज्या होय. π ची अंदाजे किंमत $\frac{22}{7}$ आहे. आर्यभट्ट (पहिला इ.स.पूर्व 476)या भारतीय गणितज्ञाने ची किंमत 3.1416 अशी सांगितली आहे. खरे तर ही अपरिमेय संख्या आहे.

15.2 वर्तुळाच्या कंसाचे माप ः

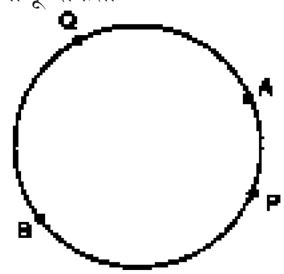
(आकृती 15.9) वर्तुळाचा कंस PAQ विचारात घ्या.
त्यांची लांबी मोजण्यासाठी या कंस PAQ वर एक दोरा ठेवा.
नंतर त्या दो-याची लांबी पट्टीने मोजा. तसेच तुम्ही कंस PBQ ची लांबी मोजू शकता.

15.2.1 ः लघुवर्तुळकंस ः -

अर्धवर्तुळापेक्षा कमी लांबी असलेल्या कंसाला लघुवर्तुळकंस असे म्हणतात.
आ. 15.9 मध्ये कंस PAQ हा लघुवर्तुळकंस आहे.

15.2.2 .ः विशालवर्तुळकंस ः

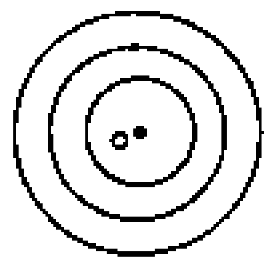
अर्धवर्तुळापेक्षा अधिक लांबी असलेल्या कंसाला विशालवर्तुळकंस असे म्हणतात. आ. 15.9 मध्ये कंस PBQ हा विशालवर्तुळकंस आहे.



आकृती 15.9

15.3 .ः समकेंद्री वर्तुळे ः(एककेंद्री वर्तुळे)

एकच केंद्र परंतु भिन्न त्रिज्या असणा-या वर्तुळांना समकेंद्री किंवा एककेंद्री वर्तुळे असे म्हणतात. (आ. 15.10 पहा)



आकृती 15.10

15.4 ः एकरूप वर्तुळे किंवा एकरूप कंस ः

दोन वर्तुळे (किंवा कंस) एकमेकांवर ठेवल्यास जर ते तंतोतंत जुळत असतील तर त्या वर्तुळांना (किंवा कंसाना) एकरूप वर्तुळे (किंवा कंस) असे म्हणतात.

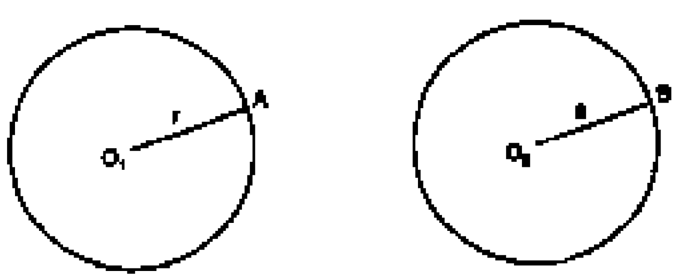
15.5 ः काही महत्त्वाचे नियम ः

खालील कृती कराः

(i) O_1 आणि O_2 केंद्र असलेली आणि त्रिज्या अनुक्रमे r व s असणारी दोन वर्तुळे काढा. (आ. 15.11 पहा)

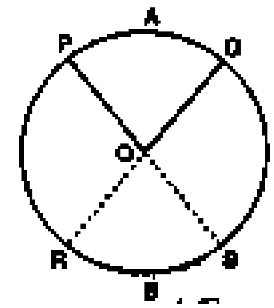
(ii) दोन्ही वर्तुळे कापून घ्या व ती एकमेकांवर ठेवा. O_1 आणि O_2 केंद्र एकमेकांवर पडले पाहिजेत.

(iii) तुमच्या असे लक्षात येईल की जर r = s असेल तरच दोन्ही वर्तुळे एकमेकांना तंतोतंत जुळतील.



(i) आकृती 15.11 (ii)

दोन वर्तुळे एकरूप असतात, जेव्हा त्यांच्या त्रिज्या समान असतात तरच आणि जेव्हा दोन वर्तुळांच्या त्रिज्या समान असतील तर ती वर्तुळे एकरूप असतात.



आकृती 15.12

आकृती 15.12 मध्ये जर कंस PAQ= कंस RBS

तर < POQ=<ROS आणि याउलट जर < POQ=<ROS

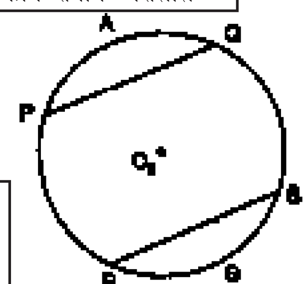
तर कंस PAQ= कंस RBS असते. दोन कंस एकरूप असतात जर त्यांनी केंद्राशी आंतरीत केलेले कोनसमान असतील आणि जर दोन कंस एकरूप असतील तर त्यांनी केंद्राशी आंतरित केलेले कोन समान असतात.

दोन कंस एकरूप असतात जर त्यांनी केंद्राशी आंतरीत केलेले कोन समान असतील आणि जर दोन कंस एकरूप असतील तर त्यांनी केंद्राशी आंतरित केलेले कोन समान असतात.

आकृती 15.13 मध्ये जर कंस PAQ= कंस RBS

तर PQ= RS आणि याउलट जर PQ= RS

तर कंस PAQ= कंस RBS



आकृती 15.13

एका वर्तुळाचे दोन कंस एकरूप असतील तर त्यांच्या संगत जीवा समान असतात आणि जर वर्तुळाच्या दोन जीवा एकरूप असतील तर त्यांचे संगत कोन समान असतात.

खालील कृती कराः

(i) **O** केंद्र असलेले एक वर्तुळ काढा.

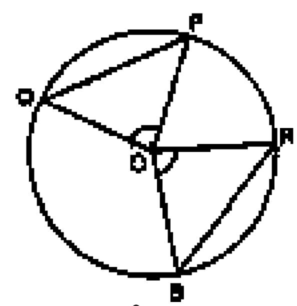
(ii) **PQ** आणि **RS** या दोन समान जीवा काढा (आ. 15.14)

(iii) **OP, OQ, OQ** आणि **OS** जोडा.

(iv) $< POQ$ आणि $< ROS$ मोजा.

तुमच्या असे लक्षात येईल की,

$< POQ =< ROS$ याउलट जर तर असते.



आकृती 15.14

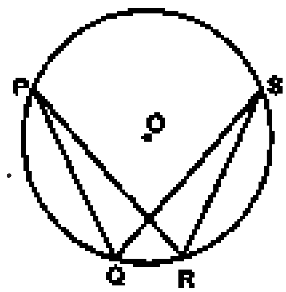
वर्तुळाच्या एकरूप जीवा वर्तुळकेंद्राशी एकरूप कोन करतात आणि याउलट जर एका वर्तुळात केंद्रापाशी जीवांनी केलेले कोन एकरूप असतील तर त्या जीवा समान असतात.

टीप ः वरील गुणधर्म एकरूप वर्तुळांनाही लागू होतो. वरील गुणधर्माचा उपयोग करता येईल अशी काही उदाहरणे पाहू.

उदा. 15.1ः

आकृती 15.15 मध्ये जीवा **PQ** =जीवा **RS** तर सिध्द करा

जीवा **PR** =जीवा **QS**



आ. 15.15

उत्तर ः **PQ** आणि **RS** या समान जीवांचे संगत कंसही समान आहेत.

∴ कंस **PQ** = कंस **RS**

वरील विधानात दोन्ही बाजूत कंस **QR** मिळवा.

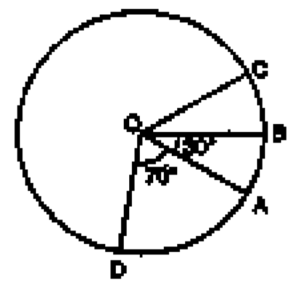
∴ कंस **PQ** + कंस **QR** =कंस **RS** +कंस **QR**

∴ कंस **PQR** = कंस **QRS**

∴ जीवा **PR** = जीवा **QS** हे सिध्द.

उदा. 15.2 ः

आ. 15.16



आ. 15.16

आ. 15.16 मध्ये कंस **AB** = कंस **BC**, $< AOB = 30^o$

आणि $< AOD = 70^o$ तर $< COD$ काढा.

उत्तर ः कंस AC = कंस BC दिलेले

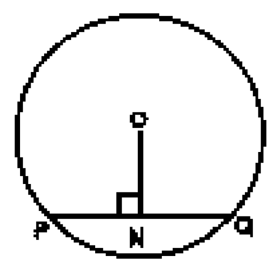
$\therefore < AOB = < BOC$ (समान कंस वर्तुळकेंद्राशी समान कोन करतात)

$< BOC = 30^o$

$\therefore < COD = < COB + < BOA + < AOD$

$= 30^o + 30^o + 70^o$

$\therefore < COD = 130^o$



आ. 15.17

पुढील कृती करून पहा ः

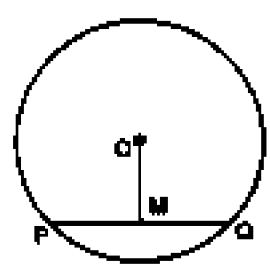
(i) **O** केंद्र असलेले एक वर्तुळ काढा. (आ. 15.17)

(ii) जीवा **PQ** काढा.

(iii) **PQ** चा **M** हा मध्यबिंदू काढा.

(iv) **PQ** जोडा.

(v) $< OMP$ आणि $< OMQ$ मोजा.



आ. 15.18

टिपा

(गुण्याच्या किंवा कोन मापकाच्या सहाय्याने मोजा)

तुमच्या असे लक्षात येईल की,

$$< OMP = < OMQ = 90°$$

वर्तुळाचा केंद्र आणि जीवेचा मध्य जोडणारी रेषा त्या जीवेला लंब असतो.

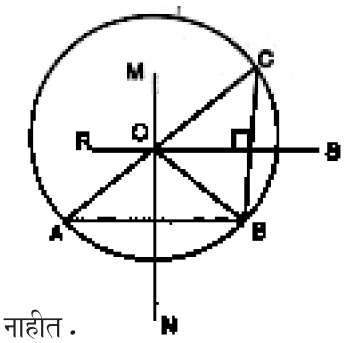
खालील कृती कराः

A, B, C हे तीन नैकरेषीय विंदू काढा. **AB** आणि **BC** जोडा.

AB आणि BC चे अनुक्रमे **MN** आणि **RS** लंबदुभाजक काढा.

A, B, C हे तीन नैकरेषीय असल्यामुळे MN आणि RS या समांतर नाहीत.

त्या दोन्ही रेषा O या एका बिंदूत छेदतात. OA, OB, OC जोडा आणि त्यांची लांबी मोजा. तुमच्या असे लक्षात येईल की . O हा केंद्र आणि OA एवढी त्रिज्या घेऊन एक वर्तुळ काढा. हे वर्तुळ AB आणि C या बिंदूतून जाते. असेच तीन नैकरेषीय विंदू घेऊन वरील कृती पुन्हा करा. तुमच्या असे लक्षात येईल की दिलेल्या नैकरेषीय तीन बिंदूतून केवळ एक आणि एकच वर्तुळ जाते. तीन नैकरेषीय बिंदूतून जाणारे वर्तुळ काढण्याची ही पध्दती आहे.



आ. 15.20

टीप ः तीन एकारेषीय बिंदूतून जाणारे एकही वर्तुळ काढता येत नाही.

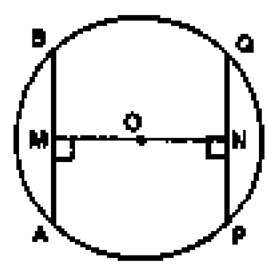
खालील कृती कराः

(i) O केंद्र असलेले एक वर्तुळ काढा.[आ. 15.20(a)]

(ii) AB आणि PQ या दोन समान जीवा काढा.

(iii) OM ⊥ **AB** आणि ON ⊥ **OQ** काढा.

(iv) OM आणि ON मोजा. तुमच्या असे लक्षात येईल की हे दोन्ही समान आहेत.



आ. 15.20(a)

एका वर्तुळाच्या समान जीवा केंद्रापासून समान अंतरावर असतात.

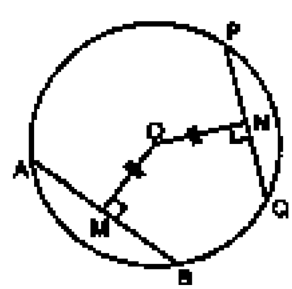
आ. 15.20(b) मध्ये OM=ON.

आता AB आणि PQ मोजा. ते समान आहेत असे आढळेल.

यावरून आपणास पुढील गुणधर्म मिळतो.

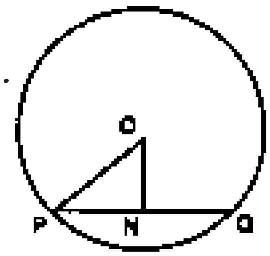
वर्तुळाच्या ज्या जीवा वर्तुळकेंद्रापासून समान अंतरावर असतात त्या समान असतात.

एकरूप वर्तुळांसाठी सुध्दा वरील गुणधर्म सत्य आहे. याचा पडताळा घेता येईल. आता या गुणधर्माचा उपयोग करून काही सोडविलेली उदाहरणे पहा ः



आ. 15.20(b)

उदा. 15.3: आ. 15.21 मध्ये O हा वर्तुळाचा केंद्र आहे. ON ⊥ PQ. जर PQ = 8 सेमी आणि ON = 3सेमी तर OP काढा.



आ. 15.21

उत्तर : ON ⊥ PQ ... ... (दिलेले आहे.)

वर्तुळकेंद्रातून जीवेवर टाकलेला लंब जीवेस दुभागतो.

$\therefore$ $PN = NQ = \frac{1}{2} \times 8 = 4$ सेमी.

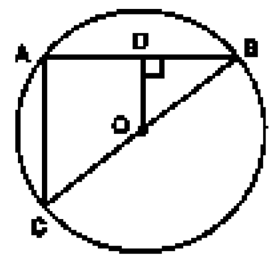
आता काटकोन त्रिकोण OPN मध्ये

$OP^2 = PN^2 + ON^2$

$\therefore OP^2 = 4^2 + 3^2 = 25$

$\therefore$ PN = 5 सेमी.

उदा. 15.4 : आ. 15.22 मध्ये OD हा O केंद्र असलेल्या वर्तुळाच्या AB या जीवेवर टाकलेला लंब आहे. BC हा त्या वर्तुळाचा व्यास आहे. तर सिध्द करा की



आ. 15.22

$CA = 2 \times OD$

उत्तर : OD ⊥ AB ... ... (पक्ष)

$\therefore$ D हा AB चा मध्य ($\therefore$ वर्तुळकेंद्रातून जीवेवर टाकलेला लंब जीवेला दुभागतो)

O हा BC चा मध्य आहे ($\therefore$ BC हा व्यास आहे)

आता ΔABC मध्ये O आणि D हे च्या बाजू आणि चे मध्यबिंदू आहेत.

$\therefore$ त्रिकोणाच्या दोन बाजूंचे मध्यबिंदू सांधणारा रेषाखंड तिसऱ्या बाजूला समांतर असतो आणि तिच्या निम्मा असतो.

$\therefore OD = \frac{1}{2} CA$ म्हणजेच $CA = 2 \times OD$ हे सिध्द.

उदा. 15.5 : एका वर्तुळात एक सुसम षटकोन आंतरलिखीत केला आहे. त्याची प्रत्येक बाजू वर्तुळाच्या केंद्रापाशी किती अंशाचा कोन करेल?

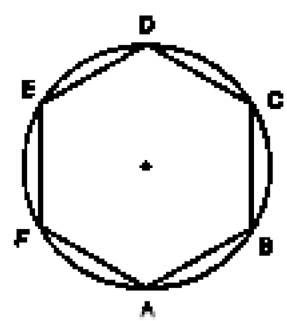
उत्तर : सुसम षट्कोन म्हणजे सहा समान बाजू असलेली बहुभुजाकृती होय.

$\therefore$ प्रत्येक बाजू वर्तुळकेंद्राशी समान कोन करेल.

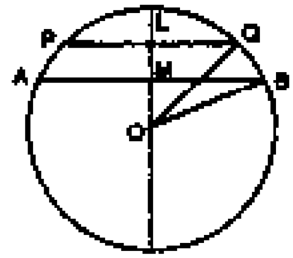
समजा षटकोनाची प्रत्येक बाजू वर्तुळकेंद्राशी x^0 चा कोन करत असेल तर $6x = 360^0$

$\therefore x = 60^0$

म्हणजेच सुसम षटकोनाची प्रत्येक बाजु वर्तुळकेंद्रापाशी 60^0 चा कोन करते.



आ. 15.23



आ. 15.24

उदा. **15.6 :** आ. 15.24 मध्ये **O** केंद्र असलेल्या वर्तुळात जीवा **PQ** ‖ जीवा **AB** असून त्यांची लांबी अनुक्रमे 7 सेमी आणि 13 cm आहे. जर **PQ** व **AB** यांच्यातील अंतर 3 सेमी असेल तर त्या वर्तुळाची त्रिज्या काढा.

उत्तर : केंद्र असलेले वर्तुळ आहे.

PQ चा लंबदुभाजक **OL** काढा. जो **AB** ला **M** सेमी मध्ये छेदेल. **OQ** आणि OB जोडा. (आ. 15.24 पहा)

OM= x मानू. आणि त्रिज्या **r** सेमी मानू.

$\therefore$ $OB^2=OM^2+MB^2$ आणि $OQ^2=OL^2+LQ^2$

$r^2=x^2+()^2$ ……………….(i)

आणि $r^2=(x+3)^2+()^2$ ……………….(ii)

निष्कर्ष (i) व (ii) वरून

$$r^2+(\frac{13}{2})^2= (x+3)^2 +(\frac{7}{2})^2$$

$$\therefore 6x= \frac{169}{4} - 9- \frac{49}{4}$$

$6x=21$ $\qquad\qquad$ $\therefore 6x= \frac{21}{6}$

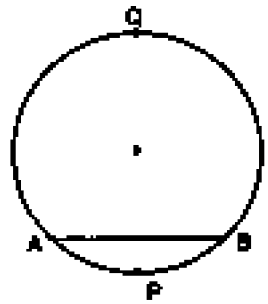
$$\text{आणि } r^2=(\frac{7}{2})^2 +(\frac{13}{2})^2$$

$$\therefore r^2= \frac{49}{4} + \frac{169}{4}= \frac{218}{4}$$

$\therefore r^2= \frac{218}{4}$ $\qquad\qquad$ $r= \frac{\sqrt{218}}{2}$

$\therefore$ त्रिज्या $= \frac{\sqrt{218}}{2}$ सेमी.

15.1 : तुमची प्रगती अजमावून पहा ः



आ. 15.25

प्रश्न 1 ते 5 मध्ये प्रत्येक विधान सत्य होण्यासाठी रिकाम्या जागा भरा.

1. आकृती 15.25 मध्ये ,

(i) AB ही वर्तुळाची ....आहे.

(ii) AB शी निगडीत असलेला लघुवर्तुळकंस ....आहे.

2. वर्तुळाची सर्वात मोठी जीवा .... आहे.

3. वर्तुळाचा परीघ आणि त्याचा व्यास यांचे गुणोत्तर नेहमी .... असते.

4. ....या भारतीय गणिततज्ञाने 'x' ची किंमत 3.1416 दिली आहे.

5. एकच केंद्र असलेल्या वर्तुळांना ....वर्तुळे म्हणतात.

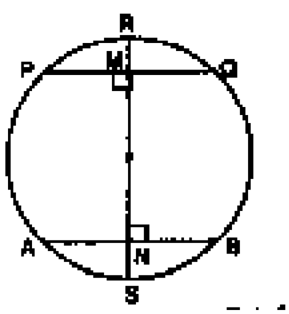
6. एका वर्तुळाचा व्यास 30 सेमी आहे. त्या वर्तुळाची जीवा 20 सेमी लांबीची आहे तर वर्तुळकेंद्रापासून जीवेवर टाकलेल्या लंबाची लांबी किती सेमी असेल?

7. वर्तुळाचा परिघ काढा. वर्तुळाची त्रिज्या खाली दिली आहे.

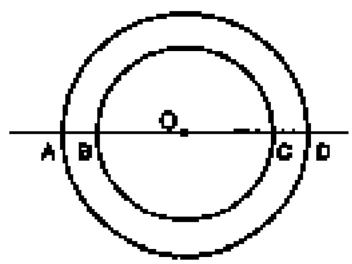
(i) 7 सेमी (ii) 11 सेमी ($\pi = \frac{22}{7}$ घ्या.)

8. आ. 15.26 मध्ये RS हा वर्तुळाचा व्यास त्याच्या जीवा **PQ** आणि **AB** यांना अनुक्रमे **M** आणि **N** मध्ये दुभागतो. तर **PQ** ∥ **AB** आहे का? कारण लिहा.

9. आकृती 15.27 मध्ये O केंद्र असलेल्या दोन समकेंद्री वर्तुळांना रेषा **l** ही **A, B, A, C, D** या बिंदूत छेदते. तर **AB** ∥ **CD** आहे का? कारण लिहा.



आ. 15.26



आ. 15.27

सारांश ः

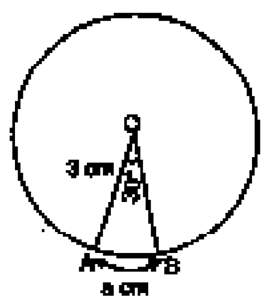
- r त्रिज्या असलेल्या वर्तुळाचा परिघ $2\pi r$ असतो.

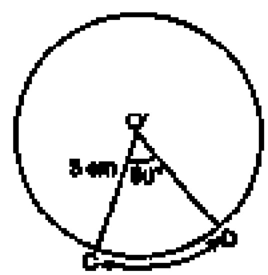
- वर्तुळाच्या केंद्राशी दोन कंसांनी केलेले कोन एकरूप असतील तर ते कंस एकरूप असतात. याउलट दिलेले कंस किंवा त्यांच्याशी निगडीत जीवा समान असतील तर त्यांनी वर्तुळकेंद्राशी केलेले कोन एकरूप असतात.
- एका वर्तुळाच्या समान जीवांनी केंद्राशी केलेले कोन समान असतात आणि त्याच्या व्यत्यास.
- वर्तुळाच्या केंद्रातून त्या वर्तुळाच्या जीवेवर टाकलेला लंब जीवेला दुभागतो.
- वर्तुळकेंद्र आणि त्या वर्तुळातील जीवेचा मध्य जोडणारा रेषाखंड त्या जीवेला लंब असतो.
- तीन नैकरेषीय बिंदूतून एक आणि एकच वर्तुळ जाते.
- एका वर्तुळाच्या समान जीवा वर्तुळकेंद्रापासून समान अंतरावर असतात आणि त्याचा व्यत्यास.

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह

1. एका वर्तुळातील एका जीवेची लांबी 16 सेमी आहे आणि त्या जीवेचे वर्तुळकेंद्रापासूनचे अंतर 6 सेमी आहे. तर त्या वर्तुळाची त्रिज्या काढा.

2. O आणि O' केंद्र असणारी दोन एकरूप वर्तुळे आहेत. (आ. 15.28 पहा) कंस CD ची लांबी काढा.

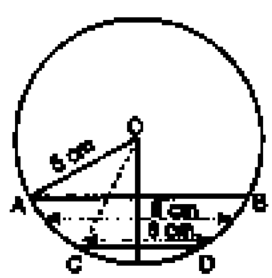




आ. 15.28

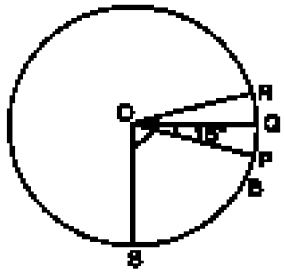
3.एक सुसम पंचकोन एका वर्तुळात आंतरलिखित केला आहे. पंचकोनाच्या प्रत्येक बाजूने केंद्राशी केलेल्या कोनाचे माप काढा.

4. आ. 15.29 मध्ये AB=8 सेमी आणि CD=6 सेमी या O केंद्र असलेल्या वर्तुळाच्या दोन समांतर जीवा आहेत. तर त्या जीवांमधील अंतर काढा.



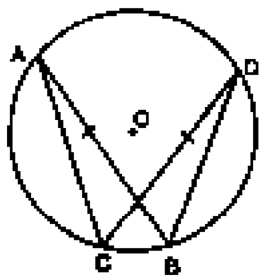
आ. 15.29

5. आ. 15.30 मध्ये कंस PQ= कंस QR, $<POQ=150^{\circ}$, $<SOR=110$ तर $< SOP$ काढा.



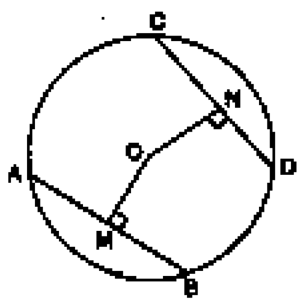
आ. 15.30

6. आ. 15.31 मध्ये O' केंद्र असलेल्या वर्तुळात AB आणि CD या दोन समान जीवा आहेत. तर जीवा BD= जीवा CA आहे का ? कारण लिहा.



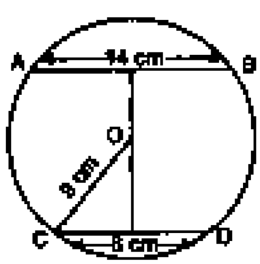
आ. 15.31

7.O केंद्र असलेल्या वर्तुळाच्या जीवा AB आणि C या दोन समान जीवा आहेत. (आ. 15.32)आणि $OM \perp ON$ आहे का ? कारण लिहा.



आ. 15.32

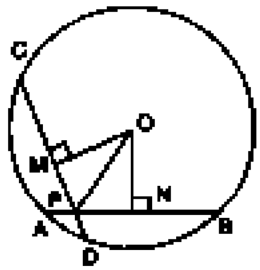
8.आ. 15.33 मध्ये O' केंद्र असलेल्या वर्तुळात जीवा AB ‖जीवा CD असून त्याची लांबी अनुक्रमे 14 सेमी आणि 6 सेमी आहे. तर जीवा AB आणि CD यांच्यातील अंतर काढा.



आ. 15.33

टिपा

9. आ. 15.34 मध्ये O' केंद्र असलेल्या वर्तुळात जीवा AB आणि CD या परस्परांना P मध्ये छेदतात.



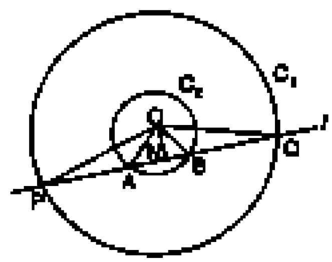
आ. 15.34

OM $\perp$ **CD** आणि ON $\perp$ **AB** तसेच <OPM=<OPN

तर (i) OM=ON आणि (ii) AB=CD आहे का? कारण द्या.

10. आ. 15.35 मध्ये O केंद्र असणारी C_1 आणि C_2 ही दोन समकेंद्री वर्तुळे आहेत. रेषा ℓ ही रेषा C_1 ला P आणि Q मध्ये छेदते. आणि C_2 ला A आणि B मध्ये छेदते.

जर . ON$\perp$ l तर PA=BQ आहे का? कारण लिहा.



आ. 15.35

उत्तरे ः18.1 : तुमची प्रगती अजमावून पहा .

1. (i) जीवा (ii) APB 2. व्यास. 3. स्थिरांक 4. आर्यभट्ट – I

5. समकेंद्री 6. $\sqrt[5]{5}$ सेमी. 7. (i) 44 सेमी (ii) 69.14 सेमी.

8. होय. 9. होय.

उत्तरे ः संकीर्ण प्रश्नसंग्रह

1. 10 सेंमी. 2. 2a सेंमी. 3. 72^{0} 4. 1सेंमी.

5. 80^{0} 6. होय. (वर्तुळाच्या समान कंसाशी निगडीत असणा–या जीवा समान असतात)

7. होय. (समान जीवा वर्तुळकेंद्रापासून समान अंतरावर असतात)

8. $10\sqrt{2}$ सेंमी. 9. (i) होय. (ii) होय($\Delta OMP \cong \Delta ONP$)

10. होय. (N हा **PQ** चा तसेच **AB** चा मध्यबिंदू आहे.)

16

वर्तुळातील कोन आणि चक्रीय चौकोन

प्रास्ताविक ः

दोन सरळ रेषांमधील कोन तुम्ही मोजलेला आहे. आता आपण वर्तुळातील जीवा आणि कंस यांनी केलेला कोन तसेच चक्रीय चौकोन यांचा अभ्यास करणार आहोत.

उद्दिष्टेः

या प्रकरणाचा अभ्यास केल्यावर विद्यार्थ्याला खालील गोष्टी करता येतील.

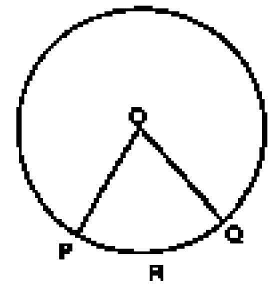
- एखाद्या कंसाने त्या वर्तुळाच्या केंद्राशी केलेला कोन हा त्या कंसाने उरलेल्या भागातील कोणत्याही बिंदूशी केलेल्या कोनाच्या दुप्पट असतो. हे सिध्द करणे.
- एकाच वर्तुळखंडातील कोन समान असतात हे सिध्द करणे.
- चक्रीय बिंदूंची उदाहरणे देणे.
- चक्रीय चौकोनाची व्याख्या सांगणे.
- चक्रीय चौकोनाच्या समोरासमोरील कोनांची बेरीज 180° असते हे सिध्द करणे.
- चक्रीय चौकोनाचे गुणधर्म वापरणे.
- सिध्द केलेल्या प्रमेयावर आधारित उदाहरणे सोडविणे आणि पडताळा घेतलेल्या गुणधर्मावर इतर अंकात्मक उदाहरणे सोडविणे.

अपेक्षित पूर्वज्ञान ः

- त्रिकोणाचे कोन
- कंस जीवा आणि वर्तुळाचा परिघ.
- चौकोन आणि त्याचे प्रकार.

16.1 ः वर्तुळातील कोन ः

केंद्रीय कोन ः वर्तुळातील कंसाची किंवा जीवेची टोके त्रिज्येच्या सहाय्याने वर्तुळकेंद्राशी जोडल्यावर मिळणारा कोन म्हणजे केंद्रीय कोन होय. यालाच कंसाने केंद्राशी आंतरीत केलेला कोन असे म्हणतात. आ. 16.1 मध्ये कंस PQR ने केलेला कोन $< POQ$ हा केंद्रिय कोन आहे. कंसाची लांबी ही त्या कंसाने त्या वर्तुळाच्या केंद्राशी केलेल्या कोनाशी निगडित आहे. आता आपण केंद्रीय कोनाच्या स्वरूपात कंसाचे अंशात्मक माप म्हणजे काय ते पाहणार आहोत.

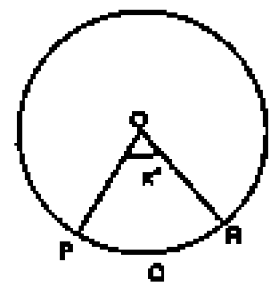


आ. 16.1

लघुकंसाचे अंशात्मक माप म्हणजे त्या कंसाने केलेल्या केंद्रीय कोनाचे माप होय. आकृती 16.2 मध्ये कंस PRQ चे अंशात्मक माप $= x^0$ मानू.

अर्धवर्तुळाचे अंशात्मक माप $= 180^0$ असते.

विशालवर्तुळकंसाचे माप हे 360^0 वजा त्याच्या संगत लघुवर्तुळकंसाच्या मापाएवढे असते.



आ. 16.2

कंसाची लांबी आणि त्याचे अंशात्मक माप यांचा संबंध =

कंसाची लांबी =परिघ $\times$ कंसाचे अंशात्मक माप 360^0

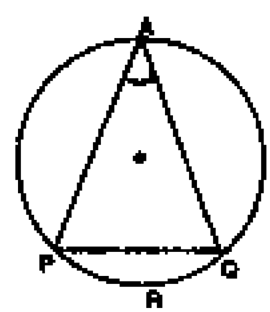
जर कंसाचे अंशात्मक माप 40^0असेल तर

कंस PQR ची लांबी $= 2\,\pi r \times \frac{40^0}{360^0} = \frac{2}{9}\,\pi r$ होईल.

<u>आंतरलिखित कोन ः</u>

एखाद्या कंसाने (किंवा जीवेने) त्या वर्तुळाच्या उरलेल्या भागावरील बिंदूशी केलेला कोन म्हणजे आंतरलिखित कोन होय.

आ. 16.3 मध्ये कंस PQR ने वर्तुळाच्या उरलेल्या भागावरील A या बिंदूशी केलेला $<PQR$ हा आंतरलिखित कोन आहे.



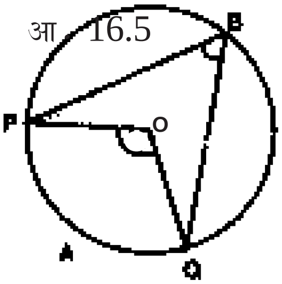
आ. 16.3

16.2 काही महत्त्वाचे गुणधर्म ः-

खालील कृती कराः

O केंद्र असलेले एक वर्तुळ काढा.

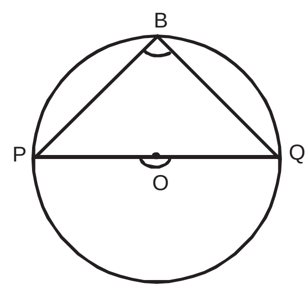
PAQ हा कंस घ्या आणि **B** हा वर्तुळाच्या उरलेल्या भागावरील कोणताही एक बिंदू घ्या. केंद्रीय कोन **POQ** मोजा आणि त्या कंसाने वर्तुळाच्या उरलेल्या भागावरील बिंदूशी केलेला आंतरलिखित कोन **PBQ** मोजा.



आ. 16.4

$< POQ\,2\,x < PBQ < \square\square\square = 2\,\square < \square\square\square$

वेगवेगळी वर्तुळे आणि वेगवेगळे कंस घेऊन ही कृती पुन्हा करा. आपल्या असे लक्षात येते की, एखाद्या कंसाने त्या वर्तुळाच्या केंद्राशी केलेला कोन हा त्या कंसाने वर्तुळाच्या उरलेल्या भागातील कोणत्याही बिंदूशी केलेल्या कोनाच्या दुप्पट असतो. O केंद्र असलेले वर्तुळ काढा. PAQ हे अर्धवर्तुळ विचारात घ्या. आणि <PBQ हा आंतरलिखित कोन विचारात घ्या. $2\,x < PBQ = < POQ$



आ. 16.5

($\therefore$ कंसाने त्या वर्तुळाच्या केंद्राशी केलेला कोन हा त्या कंसाने वर्तुळाच्या उरलेल्या भागातील कोणत्याही बिंदूशी केलेल्या कोनाच्या दुप्पट असतो)

परंतु $< POQ = 180^0$ ($\therefore$ PQ हा वर्तुळाचा व्यास आहे)

$\therefore 2\,x < PBQ = 180^0$

$\therefore < PBQ = 90^0$

यावरून पुढीलप्रमाणे निष्कर्ष काढता येतो,

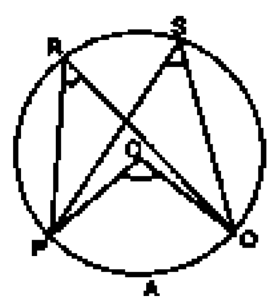
अर्धवर्तुळातील आंतरलिखित कोन काटकोन असतो.

प्रमेय : एकाच वर्तुळखंडातील कोन समान असतात.

पक्ष : O केंद्र असलेल्या वर्तुळात $< PRQ$ आणि $< PSQ$ हे जीवा **PQ** (किंवा कंस **PAQ**) ने एकाच वर्तुळखंडात केलेले कोन आहेत.

साध्य : $< PRQ =< PSQ$

रचना : **OP** आणि **OQ** जोडा.



आ. 16.6

सिध्दता : एखाद्या कंसाने त्या वर्तुळाच्या केंद्राशी उरलेल्या भागातील कोणत्याही बिंदूशी केलेल्या कोनाच्या दुप्पट असतो.

$\therefore < POQ = 2 \times < PRQ$ .... (i)

आणि $< POQ = 2 \times < PSQ$ .... (ii)

विधान (i) आणि (ii) वरून

$2 \times < PRQ = 2 \times < PSQ$ म्हणजेच $< PRQ =< PSQ$ हे सिध्द .

जर एखाद्या रेषाखंड, त्याच्या एकाच बाजूशी दोन भिन्न बिंदू घेऊन त्या बिंदूशी समान कोन करीत असेल तर त्या रेषाखंडाची टोके आणि कोनबिंदू हे एकच वर्तुळावर असतात.

पुढील कृती करा ः-

AB हा एक रेषाखंड (5 सेमी पर्यंत) काढा. च्या एकाच बाजूत आणि असे दोन बिंदू घ्या की होईल. आता ABC या नैकरेषीय तीन बिंदूतून जाणारे वर्तुळ काढा. हे वर्तुळ **D** बिंदूतून जाते का? तर आपणास असे आढळून येते की ते वर्तुळ D बिंदूतूनसुध्दा जाते. म्हणजेच ABC आणि D हे चार बिंदू चक्रीय बिंदू (एकाच वर्तुळावर असणारे) आहेत.

वरील कृती पुन्हा करून या गुणधर्माचा पडताळा घेता येईल. प्रत्येक वेळी तुम्हास असे आढळुन येते की चार बिंदू चक्रीय बिंदू आहेत.आता वरील गुणधर्मावर आधारित काही उदाहरणे आपण पाहू.

उदा. **16.1** ः आ. 16.7 मध्ये O हा वर्तुळकेंद्र आहे आणि असलेल्या वर्तुळात

$\angle AOC = 120^o$ तर $\angle ABC$ काढा.

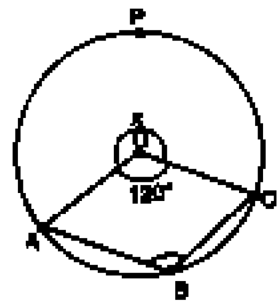
उत्तर ः कंस **APC** ने वर्तुळकेंद्राशी केलेला कोन $\angle x$ आहे.

आणि $\angle ABC$ हा आंतरलिखित कोन आहे.

$\therefore \angle x = 2 \times \angle ABC$

परंतु $\angle x = 360^o - 120^o = 240^o$

$\therefore 2\angle ABC = 240^o$ $\quad\quad \therefore \angle ABC = 120^o$



आ. 16.7

उदा. **16.2** ः आ. 16.8 मध्ये O हा वर्तुळकेंद्र‘ आहे आणि

$\angle PAQ = 35^o$ आहे तर $\angle OPQ$ काढा.

उत्तर ः $\angle POQ = 2 \times \angle PAQ = 70$ ....(i)

(कंसाने केंद्राशी केलेला कोन हा त्या कंसाने वर्तुळाच्या उरलेल्या भागातील कोणत्याही बिंदूशी केलेल्या कोनाच्या दुप्पट असते).

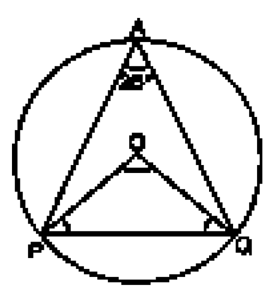
तसेच $OP = OQ$ ($\because$ एकाच वर्तुळाच्या त्रिज्या)

$\therefore \angle OPQ = \angle OQP$ (समान बाजूसमोरील कोन)(ii)

परंतु $\angle OPQ + \angle OQP + \angle POQ = 180^o$

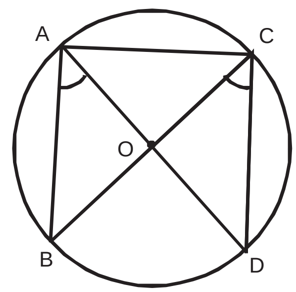
$$\therefore 2\angle OPQ = 180^o - 70^o = 110^o$$

$$\therefore \angle OPQ = 55^o$$



आ. 16.8

उदा. **16.3** : आ. 16.9 मध्ये **O** केंद्र असलेल्या वर्तुळात **AD** हा $< BAC$ चा दुभाजक आहे.
तर $< BCD$ काढा.



आ. 16.9

उत्तर : **BC** हा व्यास आहे.

$\therefore < BAC = 90^a$ (अर्धवर्तुळातील कोन)

AD हा चा दुभाजक आहे.

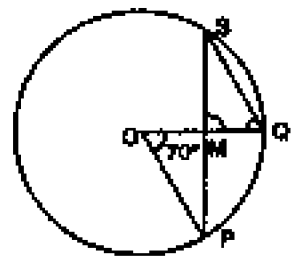
$\therefore < BAD = 45^a$

परंतु $< BCD =< BAD$

($\therefore$ एकाच वर्तुळखंडातील कोन एकरूप)

$\therefore < BAD = 45^a$

उदा. **16.4** : आ. 16.10 मध्ये **O** हा वर्तुळकेंद्र आहे.
$< POQ = 70^a$ आणि
$PS \perp OQ$ तर $< MQS$ काढा.



आ. 16.10

उत्तर : $2 < PSQ =< POQ = 70^a$

($\therefore$ एखाद्या कंसाने त्या वर्तुळाच्या केंद्राशी केलेला कोन हा त्या कंसाने वर्तुळाच्या उरलेल्या भागातील कोणत्याही बिंदूशी केलेल्या कोनाच्या दुप्पट असतो)

$< PSQ = 35^a$

तसेच $< MSQ + < SMQ + < MQS = 180^a$

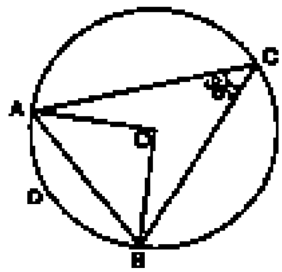
($\therefore$ त्रिकोणाच्या कोनांची बेरीज)

$\therefore 35^a + 90^a + < MQS = 180^a$

$\therefore < MQS = 180^a - 125^a = 55^a$

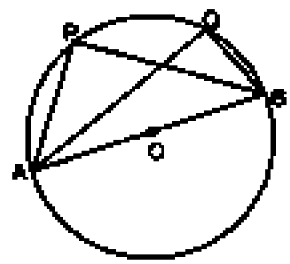
तुमची प्रगती अजमावून पहा : 16.1

1)आकृती 16.11 मध्ये **O** केंद्र असलेल्या वर्तुळाचा **ADB** कंस आहे. जर $< ACB = 35^a$, तर $< AOB$ काढा.



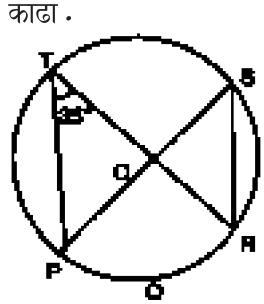
आ. 16.11

2) आकृती 16.12 मध्ये **AOB** हा व्यास आहे तर $\angle APB = \angle AQB = 35^\circ$, आहे का? कारण द्या.



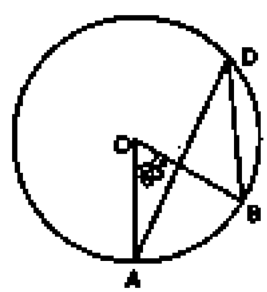
आ. 16.12

3) आकृती 16.13 मध्ये **O** हा केंद्र असणा-या वर्तुळाचा PQR, हा कंस आहे. जर $\angle PTR = 35^\circ$, तर $\angle PSR$ काढा.



आ. 16.13

4) आकृती 16.14 मध्ये **O** हे केंद्र आहे आणि कोन $\angle AOB = 60^\circ$, तर $\angle ADB$ काढा.

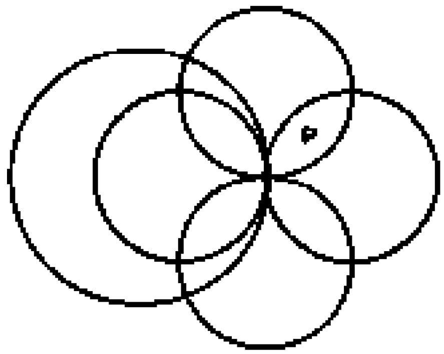


आ. 16.14

16.3 चक्रीय बिंदू ः

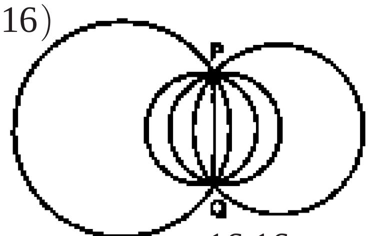
व्याख्या ः एकाच वर्तुळावर असणा-या बिंदूंना चक्रीय बिंदू असे म्हणतात. आपण आता अशा काही अटी पाहणार आहोत की ज्यामुळे बिंदू चक्रीय असतात.

P हा एक बिंदू घेतला तर त्यातून जाणारे फक्त एकच नाही तर अनेक वर्तुळे जातात. (आ. 16.15 पहा)



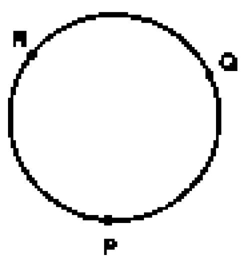
आ. 16.15

आता एका कागदावर P आणि Q असे दोन बिंदू घ्या. या बिंदूमधून तुम्हाल पाहिजे तेवढी वर्तुळे काढता येतील. (आ. 16.16)



आ. 16.16

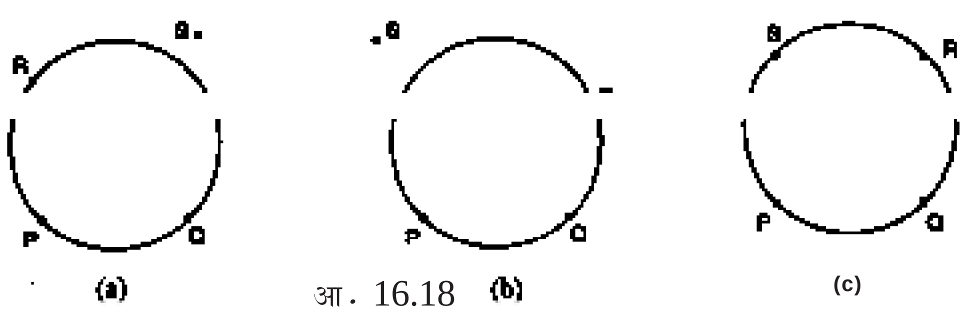
एका रेषेत नसणारे **P, Q, R** असे तीन बिंदू घ्या. आपणास माहित आहे की तीन नैकरेषीय बिंदूतून जाणारे एक आणि एकच वर्तुळ काढता येते. (आ. 16.17 पहा)



आ. 16.17

आता **P, Q, R, S** असे चार बिंदू घ्या की ते एका सरळ रेषेवर नाहीत. तुमच्या असे लक्षात येईल की या चार नैकरेषीय बिंदूतून जाणारे वर्तुळ काढणे दरवेळी शक्य नसते.

आ. 16.18 (a) आणि (b) मध्ये हे बिंदू चक्रीय नाहीत.



आ. 16.18

परंतु आ. 16.18 (c) मध्ये हे बिंदू चक्रीय आहेत.

टीप : जर P, Q, R हे बिंदू एकरेषीय असतील तर त्यांना समाविष्ट करणारे वर्तुळ काढणे शक्य नसते.

यावरून खालीलप्रमाणे निष्कर्ष काढता येतात –

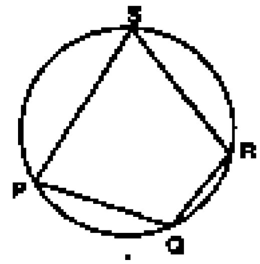
१. एक किंवा दोन बिंदु दिले असता त्यांच्यामधून जाणारी अनंत वर्तुळे काढता येतात.

२. तीन नैकरेषीय बिंदू नेहमी चक्रीय असतात आणि त्यांना समाविष्ट करणारे केवळ एक आणि एकच वर्तुळ काढता येते.

३. तीन नैकरेषीय बिंदू चक्रीय असतात.

४. चार नैकरेषीय बिंदू चक्रीय असतात किंवा चक्रीय नसतात.

16.3.1 : चक्रीय चौकोन :



आ. 16.19

चौकोनाच्या चारही शिरोबिंदूतून जर एखादे वर्तुळ जात असेल तर त्या चौकोनाला चक्रीय चौकोन म्हणतात.

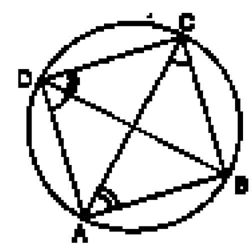
आ. 16.19 मध्ये चौकोन PQRS हा चक्रीय चौकोन आहे.

प्रमेय : चक्रीय चौकोनाच्या समोरासमोरील कोनांची बेरीज 180° असते.

पक्ष : ABCD हा चक्रीय चौकोन आहे.

साध्य : $< ABC + < ADC = < BAD + < BCD = 180^\circ$

रचना : AC आणि BD जोडा.



आ. 16.20

सिध्दता : $< ACB = < ADB$ आणि $< BAC = < BDC$ } एकाच वर्तुळखंडातील कोन

$\therefore < ACB + < BAC = < ADB + < BDC = < ADC$

$< ABC$ दोन्ही बाजूला मिळवून.

$< ACB + < BAC + < ABC = < ADC + < ABC$

परंतु $< ACB + < BAC + < ABC = 180^\circ$ (Δ च्या कोनांची बेरीज)

$\therefore < ADC + < ABC = 180^\circ$

तसेच $< BAD + < BCD = 360^\circ - (< ADC + < ABC)$

$\therefore < BAD + < BCD = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$ हे सिध्द.

या प्रमेयाचा व्यत्यासही सत्य आहे.

जर एखाद्या चौकोनाच्या समोरासमोरील कोनांची जोडी पूरक कोनांची जोडी असेल तर तो चौकोन चक्रीय असतो.

पडताळा : चौकोन **PQRS** असा काढा की $,< P+< R = 180^{0}$

□ PQRS मध्ये $,< P+< R = 180$ (दिले आहे)

$\therefore < P+< R = 180^{0}$ येईल.

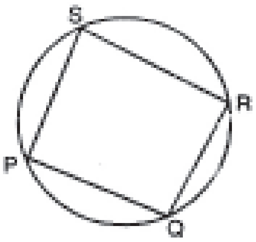
$\therefore$ **P, Q, R** बिंदूमधून जाणारे वर्तुळ काढा.

तुमच्या असे लक्षात येईल की ते वर्तुळ **S** बिंदूतून जाते.

यावरून असा निष्कर्ष काढता येतो की PQRS

हा चक्रीय चौकोन आहे. वरील गुणधर्माचा उपयोग करून

खाली काही उदाहरणे सोडविली आहेत.

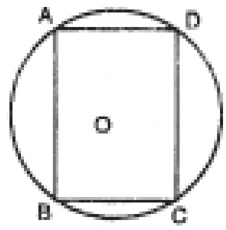


आ. 16.21

उदा. 16.5: PQRS हा जर चक्रीय समांतरभुज चौकोन असेल तर तो आयत असतो हे दाखवा.

उत्तर : $,< A+< C = 180^{o}$ ($\therefore$ *ABCD* हा चक्रीय चौकोन आहे)

आणि $,< A+< C$ – – – – ($\therefore$ **ABCD** हा समांतरभुज आहे) ($\therefore$ **ABCD** हा आयत आहे हे सिध्द



आ. 16.22

उदा. 16.6: जर चक्रीय चौकोनाच्या समोरासमोरील बाजूंची एक जोडी समान असेल तर त्याचे कर्णही समान असतात हे दाखवा.

उत्तर : *ABCD* हा चक्रीय चौकोन आहे.

तसेच **AB = CD....** (पक्ष)

$\therefore$ कंस **AB =** कंस **CD** (संगत कंस)

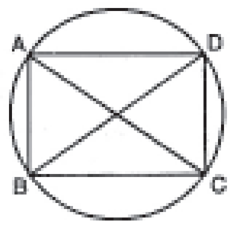
दोन्ही बाजूत कंस **AD** मिळवू.

$\therefore$ कंस **AB =** कंस **AD =** कंस **CD** + कंस

$\therefore$ कंस **BAD =** कंस **CDA**

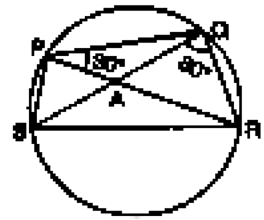
$\therefore$ जीवा **BD =** जीवा **CA**

BD = हे सिध्द.



आ. 16.23

उदा. **16.7** : आ. 16.24 मध्ये **PQRS** हा चक्रीय चौकोन असा आहे की त्याचे कर्ण परस्परांना **A** बिंदूर छेदतात. जर $< SQR = 80^o$ आणि $< QPR = 30^o$ तर $< SQR$ काढा.


आ. 16.24

उत्तर : $< SQR = 80^o$ ... ... (पक्ष)

$< SQR = \ < SPR$.... (एकाच वर्तुळखंडातील कोन)

$\therefore < SPR = 80^o$

$< SPQ = \ < SPR + < RPQ$

$< SPQ = \ 80^o + 30^o$

$\therefore < SPQ = 110^o$

परंतु $< SPQ + < SRQ = 180^o \therefore < SRQ = 180^o - 110^o = 70^o$

($\therefore$ चक्रीय चौकोनाचे संमुख कोन)

उदा. **16.8** : **PQRS** हा चक्रीय चौकोन आहे.

जर $< Q = < R = 65^0$ तर $< P$ आणि $< S$ काढा.

उत्तर: $< P + < R = 180^o$ ... ...($\therefore$ चक्रीय चौकोनाचे संमुख कोन)

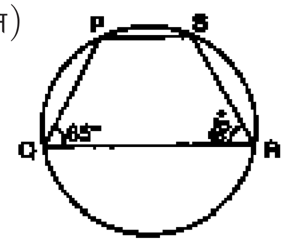
$\therefore < P = 180^o - < R = 180 - 65 = 115^o$

म्हणजेच $\therefore < P = 115^o$

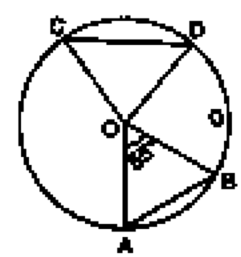
तसेच $< Q + < S = 180^o$

$\therefore < S = 180^o - < Q = 180^o - 65^o =$

म्हणजेच $\therefore < S = 115^o$

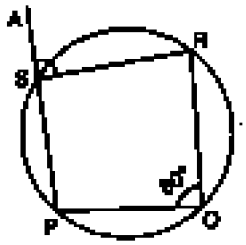

आ. 16.25

तुमची प्रगती अजमावून पहा . 16.8:


आ. 16.26

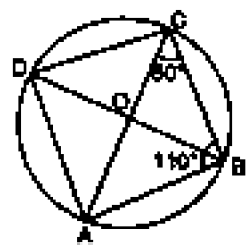
1. आ. 16.26 मध्ये **O** केंद्र असलेल्या वर्तुळाच्या AB ही बाजू CD या समान जीवा आहेत. जर $<AOB = 55^o$ तर $< COD$ काढा.

2. आ. 16.27 मध्ये **PQRS** हा चक्रीय चौकोन आहे. PS ही बाजू S च्या पुढे वाढविली. जर $< PQR = 80^o$ तर $< ASR$ काढा.



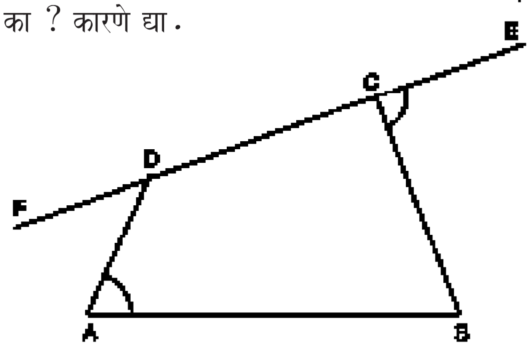
आ. 16.27

3. आ. 16.28 मध्ये ABCD हा चक्रीय चौकोन आहे. यांचे कर्ण परस्परांना O मध्ये छेदतात. जर $<ACB = 50^\circ, < ABC = 110^\circ$ tr $< BDC =$ काढा.



आ. 16.28

4. आ. 16.29 मध्ये ABCD हा चौकोन आहे. जर <A=<BCE आहे. तर हा चक्रीय चौकोन आहे का ? कारणे द्या.



आ. 16.29

सारांश :

- कंसाने (किंवा जीवेने) वर्तुळाच्या केंद्रापाशी केलेला कोन म्हणजे केंद्रीय कोन होय आणि त्या कंसाने वर्तुळाच्या उरलेल्या भागातील कोणत्याही विंदूशी केलेल्या कोनाला आंतरलिखित कोन म्हणतात.
- एकाच वर्तुळावर असणा-या विंदूना चक्रीय विंदू म्हणतात.

- एखाद्या कंसाने त्या वर्तुळाच्या केंद्राशी केलेला कोन हा त्या कंसाने त्या वर्तुळाच्या ठरलेल्या भागातील कोणत्याही बिंदूशी केलेल्या कोनाच्या दुप्पट असतो.
- अर्धवर्तुळातील कोन काटकोन असतो.
- एकाच वर्तुळखंडातील कोन समान असतात.
- चक्रीय चौकोनाच्या समोरासमोरील कोनांची बेरीज **180^{0}** असते.
- जर एखाद्या चौकोनाचे समोरासमोरील कोन जर पूरक असतील तर तो चौकोन चक्रीय चा

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह

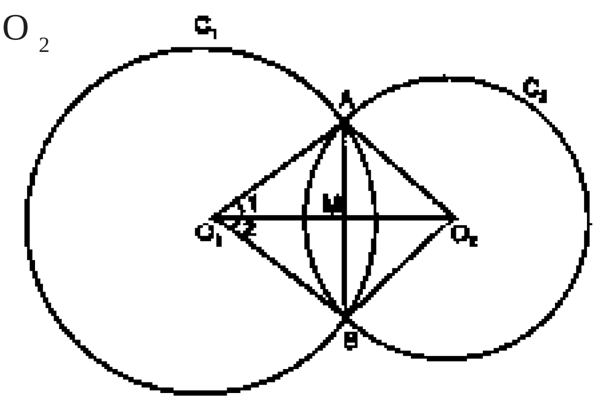
1. **O** केंद्र असलेल्या वर्तुळात PQRS हा चौरस आंतरलिखीत केला आहे. तर त्याची प्रत्येक बाजू वर्तुळकेंद्राशी किती मापाचा कोन करेल ?

2.आ. 16.30 मध्ये O_1आणि O_2 हे अनुक्रमे C_1आणि C_2 या वर्तुळांचे केंद्र आहेत. ही वर्तुळे परस्परांना A आणि B बिंदूत छेदतात. जर $O_1 O_2$ हा रेषाखंड AB ला M मध्ये छेदत असेल तर दाखवा की

(i) $\Delta O_1AO_2 \cong$ **(i)**ΔO_1BO_2

(ii) M हा AB चा मध्य आहे.

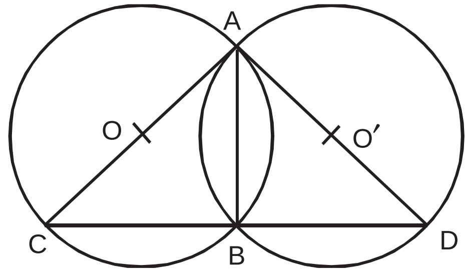
(iii) $AB \perp O_1O_2$



आ. 16.30

(सूचना : **(i)** वरून असा निष्कर्ष काढता येतो की, <1= <2 नंतर $\Delta AO_1M \cong \Delta BO_1M$ सिध्द करा)

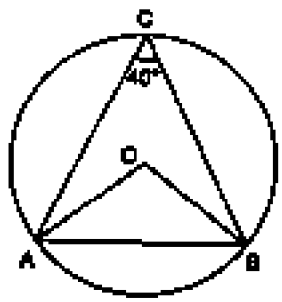
3.दोन वर्तुळे एकमेकींना A आणि B बिंदूत छेदतात. AC आणि AD हे वर्तुळांचे व्यास आहेत. तर C,B,D हे एकरेषीय आहेत हे सिध्द करा



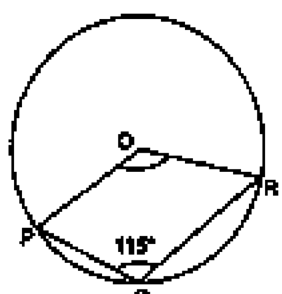
आ. 16.31

(सूचना : **CB, BD, AB** जोडा. $<ABC = 90^\circ$ आणि $< ABD = 90^\circ$ दाखवा)

4. आ. 16.32 मध्ये **O** केंद्र असलेल्या वर्तुळाची AB ही जीवा आहे. जर $<ACB = 40^\circ$ तर $< OAB$ मिळवा.



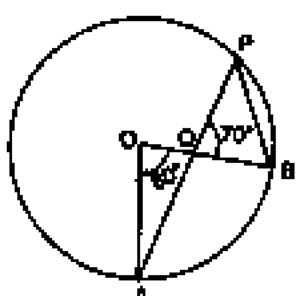
5. आ. 16.33 मध्ये **O** हा वर्तुळाचा केंद्र आहे . $<PQR = 115^\circ$ तर $< POR$ काढा.



आ. 16.33

6. आ. 16.34 मध्ये हा वर्तुळाचा केंद्र आहे . <AOB= आणि $< PQB = 70^\circ$ तर $< PBO = ?$

उत्तरे :



आ. 16.34

तुमची प्रगती अजमावून पहा :

16.1

1. 70°
2. होय (∴ अर्धवर्तुळातील कोन काटकोन)
3. 35°
4. 30°

16.2

1. 55°
2. 80°
3. 20°
4. होय

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह

1. 90°

4. 50°

5. 130°

6. 70°

17

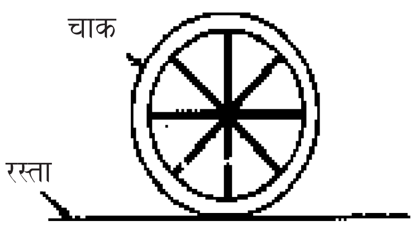
वृत्तछेदिका,स्पर्शिका आणि त्यांचे गुणधर्म

प्रास्ताविक ः

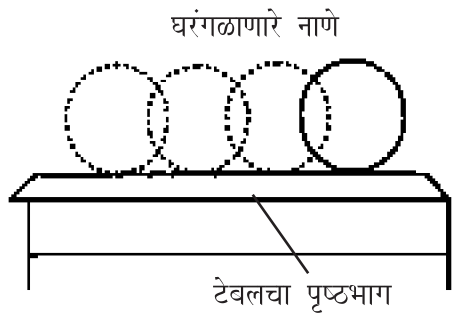
चालत्या सायकलचे निरिक्षण तुम्ही केले असेल. तुमच्या लक्षात आले असेल की कोणत्याही क्षणी चाकाचा फारच थोडा पृष्ठभाग, खरं म्हणजे एक बिंदूच रस्त्याला स्पर्श करतो.

गुळगुळीत जमिनीवर किंवा टेबलच्या पृष्ठभागावर एखादे वर्तुळाकार जाणे जेव्हा घरंगळत जाते तेव्हाही कोणत्याही क्षणी त्या नाण्याचा एकच बिंदू पृष्ठभागाला स्पर्श करतो.

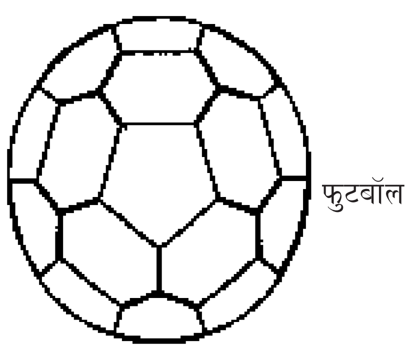
वरील अनुभवातून कोणती गोष्ट तुमच्या लक्षात येते ?



आ. (i)



आ. (ii)



(iii) (आ. 17.1)

सायकलचे चाक किंवा नाणे म्हणजे एक वर्तुळ आहे आणि ते ज्या पृष्ठभागाला स्पर्श करते तो एक रेषा आहे असे मानले तर वरील उदाहरणांद्वारे असे लक्षात येते की, रेषा वर्तुळाला स्पर्श करते. या प्रकरणात

आपण रेषा आणि वर्तुळ यांचा परस्परांशी किती बिंदूत संबंध येतो याचा आणि त्या अनुषंगाने काही गुणधर्मांचा अभ्यास करणार आहोत.

उद्दिष्टे ः

या प्रकरणाचा अभ्यास केल्यानंतर विद्यार्थ्यांमध्ये पुढील क्षमता निर्माण होतील.

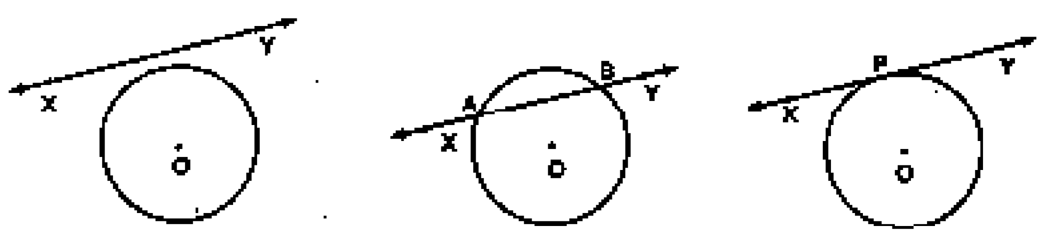
- वृत्तछेदिका आणि स्पर्शिका यांचया व्याख्या सांगू शकेल.
- स्पर्शिका आणि वृत्तछेदिका यातील फरक ओळखता येईल.
- वर्तुळाच्या बाहयभागातील बिंदूतून काढलेल्या स्पर्शिकांची लांबी समान असते हे प्रमेय सिध्द करू शकेल.
- स्पर्शिका आणि वृत्तछेदिका यांच्यासंबंधीचे (अभ्यासक्रमागत दिलेले) महत्वाचे गुणधर्म पडताळून पाहू शकेल आणि त्यांचे उपयोजन करू शकेल.

अपेक्षित पूर्वज्ञान ः

- कोन व रेषाखंड मोजता येणे.
- दिलेल्या त्रिज्यांची वर्तुळे काढता येणे.
- दिलेल्या रेषेला लंब आणि समांतर रेषा काढता येणे.
- कोन आणि रेषा,एकरूपता आणि वर्तुळे यांचे यापूर्वी अभ्यासलेले गुणधर्म माहित असणे.
- पायथागोरसचे प्रमेय माहित असणे.

17.1 ः वृत्तछेदिका आणि स्पर्शिका यांची ओळख.

या आधीच्या प्रकरणात तुमचा रेषा आणि वर्तुळ यांचा काही प्रमाणात अभ्यास झाला आहे. वर्तुळ हा एका प्रतलातील एका स्थिर बिंदूपासून ठराविक अंतरावर असणा–या त्या प्रतलातील बिंदूचा मार्ग असतो. हे तुम्हाला माहित आहे. त्या स्थिर बिंदूला त्या वर्तुळाचे केंद्र म्हणतात आणि ठराविक अंतराला त्रिज्या म्हणतात. रेषा ही दोन्ही बाजूंना अमर्याद असलेला बिंदूसंच असतो. तर रेषाखंड दोन्ही बाजूंना मर्यादित असलेला रेषेचा भाग असतो हे सुध्दा तुम्हाला माहित आहे.



आ. 17.2 (i) (ii) (iii)

आता एकाच प्रतलातील एक रेषा आणि एक वर्तुळ यांचा विचार करू. आ. 17.2 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे तीन भिन्न पर्याय निर्माण होतात.

आ. 17.2 (i) मध्ये रेषा xy ही O केंद्र असणा-या वर्तुळाला छेदत नाही म्हणजेच रेषा xy आणि वर्तुळ यामध्ये एकही सामाईक बिंदू नाही.

आ. 17.2 (ii) मध्ये रेषा xy वर्तुळाला A आणि B बिंदूत छेदते. तर आ. 17.2 (iii) मध्ये रेषा xy वर्तुळाला xy वर्तुळाला P या एक आणि एकाच बिंदूत छेदते. म्हणजेच रेषा xy ही वर्तुळाला P बिंदूमध्ये स्पर्श करते.

यावरून रेषा आणि वर्तुळ एकमेकांना छेदणे याबाबत पुढील तीन पर्याय (शक्यता) असतात.

(i) रेषा वर्तुळाला अजिबात छेदत नाही. म्हणजेच रेषा वर्तुळाच्या बाहयभागात असते.

(ii) रेषा वर्तुळाला दोन भिन्न बिंदूत छेदते. अशावेळी रेषेचा काही भाग वर्तुळाच्या बाहयभागात. दोन छेदनबिंदू वर्तुळावर असतात. आणि उरलेला भाग वर्तुळाच्या अंतर्भागात असतो.

(iii) रेषा वर्तुळाला केवळ एकाच बिंदूत स्पर्श करते.

यावरून स्पर्शिकेची व्याख्या पुढीलप्रमाणे करता येते –

> स्पर्शिका : जी रेषा वर्तुळाला केवळ एकाच बिंदूत स्पर्श करते तिला स्पर्शिका म्हणतात. आणि ती वर्तुळाला ज्या बिंदूत स्पर्श करते त्या बिंदूला स्पर्शबिंदू म्हणतात.

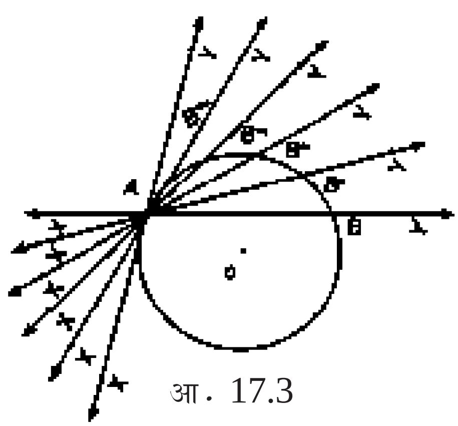
अशा रीतीने आ. 17.2 (iii) मध्ये रेषा xy वर्तुळाला बिंदू P मध्ये स्पर्श करते. P हा स्पर्शबिंदू आहे.

> वृत्तछेदिका : जी रेषा वर्तुळाला दोन बिंदूत छेदते तिला वृत्तछेदिका असे म्हणतात.

आ. 17.2 (ii) मध्ये रेषा xy ही वृत्तछेदिका असून ती O केंद्र असलेल्या वर्तुळाला A आणि B बिंदूत छेदते.

17.2 : वृत्तछेदिकेची अंतिम मर्यादा –स्पर्शिका .

समजा केंद्र O असलेल्या वर्तुळाला A आणि B बिंदूत छेदते. अशी कल्पना करा की, बिंदू A स्थिर असून वृत्तछेदिका xy बिंदू A भोवती फिरत आहे. आ. 17.3 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे ती वर्तुळाला B',B'',B'''.......... अशा दुस-या बिंदूत छेदेल म्हणजेच B बिंदू वर्तुळावरून A कडे सरकू लागेल. B',B''.......... अशा वेगवेगळया जागा घेऊन शेवटी तो बिंदू A शी एकरूप होईल. या स्थितीत रेषा XAY होईल. म्हणजेच रेषा xy ही A बिंदूपाशी वर्तुळाची स्पर्शिका होईल.



आ. 17.3

यावरून आपण असे म्हणू शकतो की, "स्पर्शिका म्हणजे , वृत्तछेदिकेचे छेदनबिंदू एकमेकांवर जुळणे ही अंतिम मर्यादा होय."

17.3 : स्पर्शिका आणि स्पर्शबिंदूतून काढलेली त्रिज्या ः-

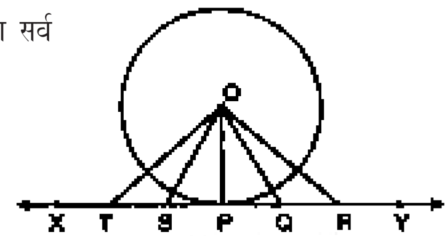
समजा O केंद्र असलेल्या वर्तुळाच्या P बिंदूतून काढलेली रेषा xy ही स्पर्शिका आहे. रेख OP जोडला. स्पर्शिका xy वर Q,R,S आणि T हे बिंदू घेऊन रेख OQ,OR,OS आणि OT काढले. आता बिंदू Q,R,S व T हे वर्तुळाच्या बाहयभागात असून P हा वर्तुळावर आहे.

∴ रेख OP हा OQ,OR,OS आणि OT या प्रत्येकापेक्षा लहान आहे.

रेषा XY च्या बाहेरील बिंदूपासून त्या रेषेपर्यंत काढलेल्या सर्व रेषाखंडातील सर्वात लहान रेषाखंड त्या रेषेला लंब असतो.

हे आपण अगोदरच शिकलो आहोत.

∴ OP ⊥ रेषा XY



आ. 17.4

यावरून आपणास पुढील गुणधर्म मिळतो. –

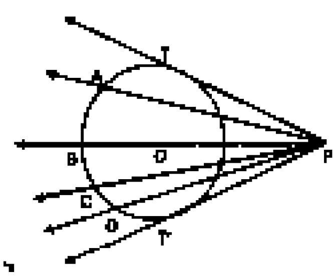
वर्तुळाच्या काढलेल्या त्या स्पर्शिकेच्या स्पर्शबिंदूतून काढलेली त्रिज्या ही त्या स्पर्शिकेला स्पर्श बिंदूपाशी लंब असते.

वरील गुणधर्माचा पडताळा प्रत्यक्ष कोन मोजूनही घेता येईल. आकृतीतील < OPX व < OPY मोजले असता प्रत्येकी ते 90° असल्याचे आढळेल.

17.4 : वर्तुळाच्या बाहयभागातील बिंदूतून स्पर्शिका ः

केंद्र O असलेल्या वर्तुळाच्या बाहयभागात P बिंदू घ्या.

बिंदू P मधून जाणा-या रेषा काढा. PA,PB,PC, PD व PT या रेषा आ. 17.5 मध्ये दाखविल्या आहेत. यापैकी किती रेषा वर्तुळाला स्पर्श करतात हयाचे उत्तर फक्त दोनच असे मिळेल. आणखी एक वर्तुळ आणि त्याच्या बाहयभागातील बिंदू घेऊन वरीलप्रमाणे कृती करा. प्रत्येक वेळी, 'फक्त दोनच स्पर्शिका काढता येतात.' असेच आढळेल.



आ. 17.5

यावरून आपणास पुढील गुणधर्म मिळतो. –

वर्तुळाच्या बाहयभागातील बिंदूतून वर्तुळाला दोन स्पर्शिका काढता येतात.

आता बिंदू P वर्तुळावर असला तरीही त्या बिंदूतून त्या वर्तुळाला दोन स्पर्शिका काढणे शक्य आहे का ? तुमच्या लक्षात येईल की अशा परिस्थितीत वर्तुळाला एकच स्पर्शिका काढता येते. बिंदू P हा वर्तुळाच्या अंतर्भागात असेल तर काय होईल ? तुम्हाला असे आढळून येईल की या परिस्थितीत P बिंदूतून जाणारी प्रत्येक रेषा वर्तुळाला दोन भिन्न बिंदूत छेदेल.

म्हणजेच वर्तुळाला एकही स्पर्शिका काढता येणार नाही.

(A) आता आ. 17.5 मधील PT आणि PT′ मोजा. तुम्हाला PT=PT′ असे आढळून येईल...... (i)

(B) हाच निष्कर्ष तार्किक पध्दतीने सिध्द करू.

ΔOPT आणि $\Delta OPT'$ मध्ये

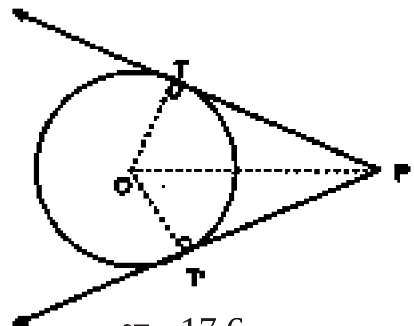
$\angle OTP = \angle OT'P$ (∴ प्रत्येकी 90°)

$OT = OT'$..........(∴ एकाच वर्तुळाच्या त्रिज्या)

$OP = OP$..........(सामाईक)

∴ $\Delta OPT \cong \Delta OPT'$

∴ $PT = PT'$............(ii)



आ. 17.6

वरील (A) आणि (B) वरून पुढील निष्कर्ष मिळतो.

वर्तुळाच्या बाहयभागातील विंदूतून काढलेल्या स्पर्शिकांची लांबी समान असते.

तसेच आ. 17.6 मध्ये $\Delta OPT \cong \Delta OPT'$

∴ $\Delta OPT = \Delta OPT'$

यावरून–

वर्तुळाच्या बाहयभागातील विंदूतून काढलेल्या त्या वर्तुळाच्या स्पर्शिका,तो विंदू आणि वर्तुळकेंद्र जोडणा–या रेषेशी समान कोन करतात.

वरील गुणधर्मावर आधारलेले काही प्रश्न सोडवू.

उदा. **17.1** : आ. 17.7 मध्ये **OP = 5** सेमी आणि वर्तुळाची त्रिज्या **3** सेमी आहे तर केंद्र O असलेल्या वर्तुळाला काढलेल्या PT या स्पर्शिकेची लांबी काढा.

उत्तर : **PT = X** मानू.

$\angle OTP = 90^\circ$

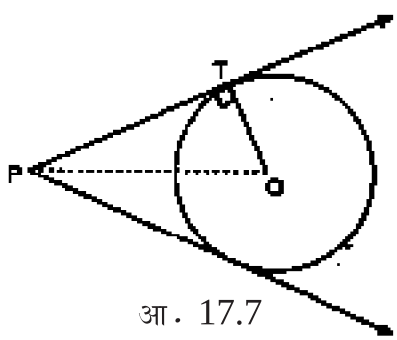
∴ काटकोन ΔOPT मध्ये

$OP^2 = OT^2 + PT^2$

$5^2 = 3^2 + PT^2$

$x^2 = 25-9$

$x^2 = 16$ $\qquad$ $x = 4$ सेमी.



आ. 17.7

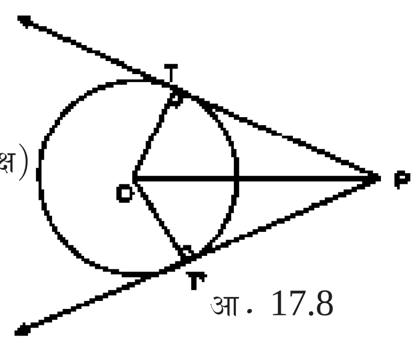
म्हणजेच PT या स्पर्शिकेची लांबी =4 सेमी.

उदा. **17.2 :** आ. 17.8 मध्ये केंद्र O पासून 25 सेमी अंतरावरील P विंदूपासून त्या वर्तुळाला PT आणि **PT′** या स्पर्शिका काढल्या आहेत. वर्तुळाची त्रिज्या 7 सेमी आहे. तर PT आणि **PT′** यांची लांबी काढा.

उत्तर : **OP = 25** सेमी व **OT = 7** सेमी.......... (पक्ष)

$\angle OTP = 90^\circ$

∴ $PT^2 = OP^2 - OT^2$



आ. 17.8

$\therefore$ $PT^2 = 25^2 - 7^2$

$\therefore$ $PT^2 = 625 - 49$

$PT^2 = 576$ $\qquad$ $PT = 24$ सेमी

आता $\therefore$ $\mathbf{PT = PT'}$

$\therefore$ $PT' = 24$ सेमी

उदा. **17. 3:** आ. 17.9 मध्ये A,B,C हे केंद्र O असलेल्या वर्तुळाच्या बाहयभागात आहेत. स्पर्शिका AP,BQ आणि CR यांची लांबी अनुक्रमे 3 सेमी , 4 सेमी आणि 3.5 सेमी आहे. तर ΔABC ची परिमिती काढा.

उत्तर ः AP =AR,

BP=BQ,

CQ=CR

आणि AP =AR=3 सेमी

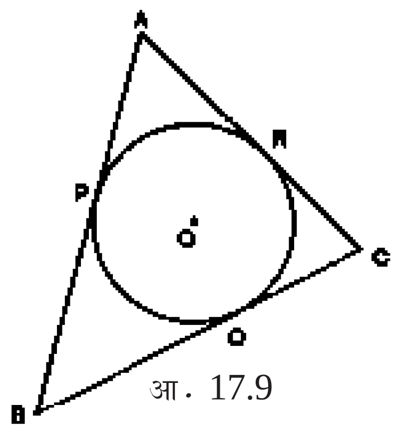
BP=BQ=4 सेमी आणि CQ=CR=3.5 सेमी होईल.

आता AB =AP+PB=3 +4=7 सेमी

BC =BQ+QC=4 +3.5=7.5 सेमी आणि

CA=AR+CR=3 +3.5=6.5 सेमी

$\therefore$ ΔABC ची परिमिती =7+7.5=6.5=21 सेमी



आ. 17.9

उदा. **17.4 :** आ. 17.10 मध्ये $\angle AOB = 50^0$ तर $\angle ABO$ व $\angle OBT$ काढा.

उत्तर ः आपणास माहित आहे की,

$OA \perp AY$ $\qquad$ $\therefore$ $<OAB = 90^0$

$<ABO = 180^0 - (<OAB + <AOB)$

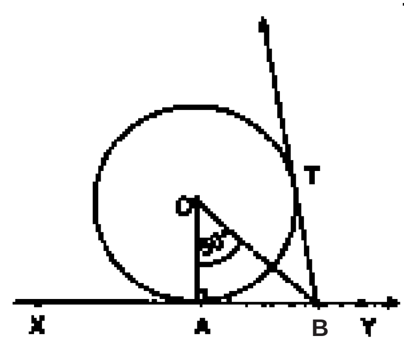
$< ABO = 180^0 - (90^0 + 50^0)$

$< ABO = 180^0 - 140^0 = 40^0$

तसेच $< OAB = <OBT$

$\therefore$ $< OBT = 40^0$

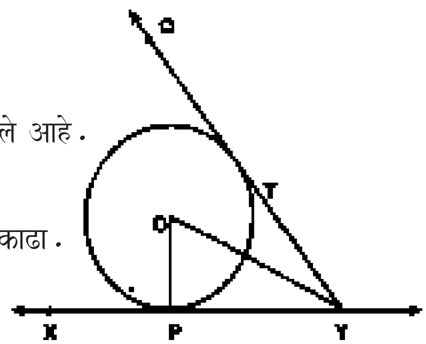
$\therefore$ $< ABO = < OBT = 40^0$



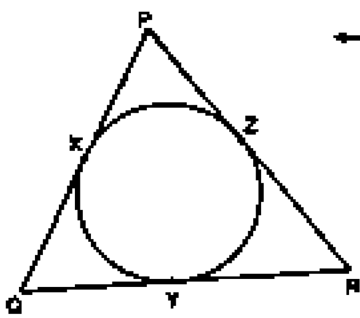
आ. 17.10

तुमची प्रगती अजमावून पहा 17.1 :

1. रिकाम्या जागी योग्य शब्द लिहा.
   - (i) स्पर्शिका स्पर्शबिंदूतून काढलेल्या त्रिज्येला .... असते.
   - (ii) बाहयभागातील बिंदूतून वर्तुळाला काढलेल्या स्पर्शिका .... असतात.
   - (iii) स्पर्शिका म्हणजे वृत्तछेदिकेचे छेदनबिंदू .... होणे ही अंतिम मर्यादा होय.
   - (iv) वर्तुळाच्या बाहयभबिंदूतून त्या वर्तुळाला................ स्पर्शिका काढता येतात.
   - (v) वर्तुळाच्या अंतर्भागातील बिंदूतून त्या वर्तुळाला ...... .स्पर्शिका काढता येत नाही.
2. आ. 17.11 मध्ये, $< POY = 40^{o}$ तर $< OYP$ व $< OYT$ काढा.
3. आ. 17.12 मध्ये Δ PQR चे अंतर्वर्तुळ काढले आहे. जर PX=2.5 सेमी RZ= 3.5 सेमी आणि ची परिमिती 18 सेमी असेल तर QY ची लांबी काढा.



आ. 17.11



आ. 17.12

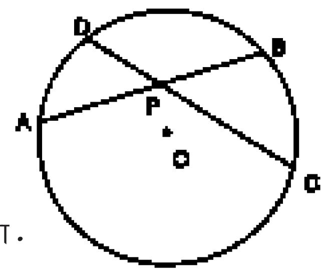
4. वर्तुळाच्या बाहयभागातील बिंदूतून त्या वर्तुळास काढलेल्या स्पर्शिका समान लांबीच्या असतात हे दर्शविणारी एक कृती लिहा.

17.5 : वर्तुळाच्या आत आणि बाहेर छेदणा–या जीवा ः-

मागील प्रकरणात तुम्ही वर्तुळाच्या जीवांसंबधीचे विविध गुणधर्म अभ्यासले. आता आपण वर्तुळाच्या आंतरभागात छेदणा–या आणि वाढविल्यावर वर्तुळाच्या बाहयभागात छेदणा–या जीवांचे काही गुणधर्म पडताळून पाहू

त्यासाठी पुढील कृती करा

केंद्र O असलेले आणि कोणतीही त्रिज्या असलेले एक वर्तुळ काढा. या वर्तुळाच्या आत P बिंदुत छेदणा–या जीवा AB आणि जीवा CD काढा. रेषाखंड PD,PC,PA आणि PB यांची लांबी मोजा. PA $\times$ PB आणि PC$\times$ PD यांच्या किंमती काढा.त्या समान



आ. 17.13

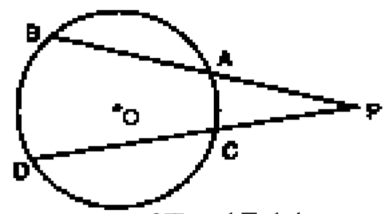
असल्याचे निदर्शनास येईल.दोन भिन्न वर्तुळे काढून प्रत्येकाच्या आत छेदणा-या जीवा काढा. आणि वरीलप्रमाणेच कृती करा. प्रत्येक वेळेस तुम्हाला असे दिसेल $PA \times PB = PC \times PD$

आता वर्तुळाबाहेर छेदणा-या जीवांचा विचार करू. त्यासाठी पुढीलप्रमाणे कृती करू.

केंद्र O असणारे कोणत्याही त्रिज्येचे एक वर्तुळ काढा. जीवा BA आणि जीवा DC या (वाढविल्यावर)वर्तुळाबाहेर P मध्ये छेदणा-या दोन जीवा काढा. रेषाखंड PA,PB,PC आणि PD मोजा आणि पुन्हा $PA \times PB$ आणि $PC \times PD$ यांच्या किंमती मिळवा. यामध्ये सुध्दा PA X PB=PC X PD असेच तुम्हाला आढळेल. अशीच कृती आणखी दोन वर्तुळे काढून प्रत्येक वेळी PA X PB=PC X PD याचा पडताळा होतो हे आढळून येईल.

यावरून पुढील गुणधर्म मिळतो.-

वर्तुळाच्या दोन जीवा जीवा AB आणि जीवा CD (वर्तुळाच्या आत किंवा बाहेर) P बिंदूत छेदत असतील तर $PA \times PB = PC \times PD$ मिळते.



आ. 17.14

17.6 : वर्तुळाच्या परस्परांना छेदणा-या छेदिका आणि स्पर्शिका ः-

आ. 17.15 वृत्तछेदिका आणि तिला वर्तुळाबाहेर छेदणारी स्पर्शिका यामध्ये काही संबंध आहे का हे पुढील कृतीवरून पाहू.

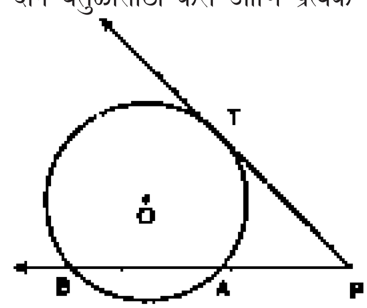
कोणतीही त्रिज्या आणि O केंद्र घेऊन एक वर्तुळ काढा. वर्तुळावाहेरील P बिंदूतून PT ही स्पर्शिका आणि PAB वृत्तछेदिका काढा.

PA,PB आणि PT यांची लांबी मोजा. $PA \times PB$ आणि $PT \times PT$ म्हणजेच PT^2 यांची किंमत काढा. काय आढळते?

तुम्हाला असे आढळेल की, $PA \times PB = PT^2$ ही कृती आणखी दोन वर्तुळांसाठी करा आणि प्रत्येक वेळी $PA \times PB = PT^2$ सत्य असते असाच निष्कर्ष मिळेल.

यावरून पुढीलप्रमाणे गुणधर्म मिळतो.-

जर PAB ही छेदिका वर्तुळाला A आणि B मध्ये छेदत असेल आणि PT ही स्पर्शिका T मध्ये स्पर्श करत असेल तर $PA \times PB = PT^2$.



आ. 17.15

आता वरील गुणधर्मावर आधारलेले काही प्रश्न सोडवू.

उदा. 17.5: आ. 17.16 मध्ये AB आणि CD या दोन जीवा वर्तुळाच्या अंतर्भागात P बिंदूत छेदतात.

जर PA=3 सेमी, PB=2 सेमी, आणि PC=1.5 सेमी, तर PD ची लांबी काढा.

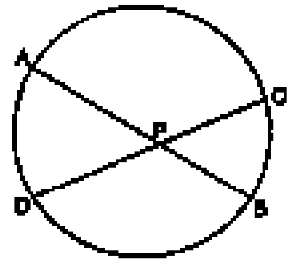
उत्तर ः PA=3 सेमी, PB=2 सेमी, आणि PC=1.5 सेमी, तर PD= x मानू.

$\therefore PA \times PB = PC \times PD$ यामध्ये किंमती घालू.

$\therefore 3 \times 2 = 1.5 \times x$

$\therefore x = \frac{3 \times 2}{1.5} = 4$

रेषाखंड PD ची लांबी सेमी आहे.



आ. 17.16

उदा. **17.6 :** आ. 17.17 मध्ये वर्तुळाबोहरील P बिंदूतून काढलेली PAB वृत्तछेदिका वर्तुळकेंद्र O मधून जाते. रेषा PT स्पर्शिका आहे. जर PT=8 सेमी आणि OP=10 सेमी असेल तर $PA \times PB = PT^2$ हा गुणधर्म वापरून वर्तुळाची त्रिज्या काढा.

उत्तर ः वर्तुळाची त्रिज्या x सेमी मानू.

OP =10 सेमी.........(पक्ष)

$\therefore$ PB= $10 + x$ सेमी होईल. ($\therefore$ PB = PA + OB आणि OB ही त्रिज्या आहे.)

तसेच PA=PO-OA=(10- x) सेमी

PT = 8 सेमी (पक्ष)

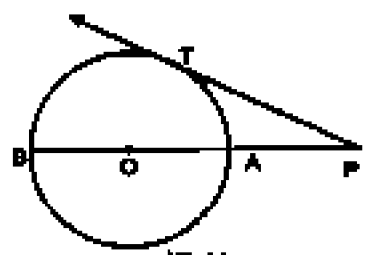
आता PA X PB = PT^2 यात किंमती घालून.

$(10- x)(10+ x)=8^2$

$100- x^2 =64$

$x^2 =36$ $\qquad x =6$ सेमी

$\therefore$ वर्तुळाची त्रिज्या =6 सेमी आहे.



आ. 17.17

उदा. **17.7 :** आ. 17.18 मध्ये BA आणि DC या जीवा वर्तुळाबाहेर P बिंदूत छेदतात. जर PA=4 सेमी , PB=10 सेमी, CD=3 सेमी तर PC काढा.

उत्तर ः PA=4 सेमी , PB=10 सेमी, ... (पक्ष)

आणि CD=3 सेमी

PC=x सेमी मानू.

टिपा

आता PA × PB = PC × PD यात किंमती घालू.

$\therefore 4 \times 10 = x(x+3)$

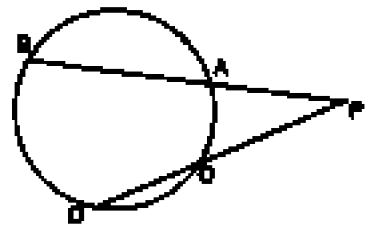
$40 = x^2 + 3x$

$x^3 + 3x - 40 = 0$

$\therefore (x+8)(x-5) = 0$

$\therefore x+8=0$ किंवा $x-5=0$

$x = -8$ किंवा $x = 5$



आ. 17.18

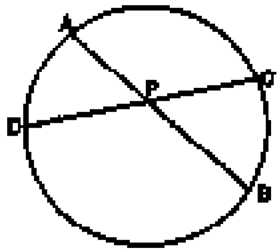
परंतु x ही ऋण अशक्य. यासाठी $x = -8$ हे अग्राहय.

$x = 5$ सेमी. म्हणजेच PC = 5 सेमी आहे.

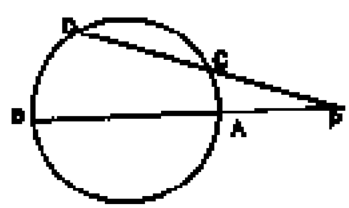
तुमची प्रगती अजमावून पहा ः 17.2:

1. आ. 17.19 मध्ये जर PA=3 सेमी, PB=6 सेमी, आणि PD=4 सेमी तर PC ची लांबी काढा.

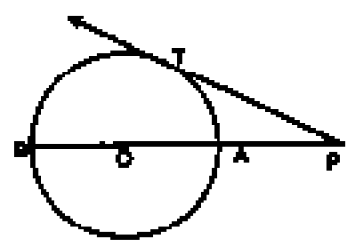
2. आ. 17.19 मध्ये जर PA=4 सेमी, PB=$(x+3)$ सेमी, आणि PD=3 सेमी आणि PC =(x+5) सेमी तर x ची किंमत काढा.



आ. 17.19



आ. 17.20



आ. 17.21

3. आ. 17.20 मध्ये जर PA=4 सेमी, PB=10 सेमी, आणि PD=5 सेमी तर PD=?

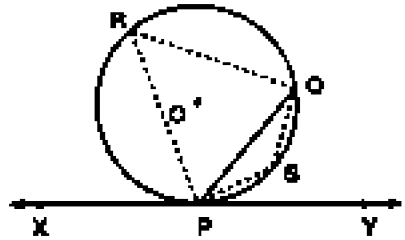
4. आ. 17.20 मध्ये जर PC=4 सेमी, PD=(x+5) सेमी, PA=5 सेमी आणि PB =$(x+2)$ सेमी तर x ची किंमत काढा.

5. आ. 17.21 मध्ये PT= $2\sqrt{7}$ सेमी, OP=8 सेमी जर O हा वर्तुळकेंद्र असेल तर वर्तुळाची त्रिज्या काढा.

17.7 : स्पर्शिका व स्पर्शबिंदूतून काढलेली जीवा यातील कोन ः -

समजा केंद्र O असलेल्या वर्तुळाच्या P या बिंदूत स्पर्श करणारी xy ही स्पर्शिका आहे. जीवा PQ काढली. (आ.17.22), विशालवर्तुळकंसावर R आणि लघुवर्तुळकंसावर S बिंदू घेतला. विशालकंस PRQ आणि जीवा PQ यांनी तयार होणारा वर्तुळखंड हा <QPY चा विरूध्द वर्तुळखंड आहे असे म्हणतात. तसेच लघुकंस PSQ आणि जीवा PQ यांनी तयार झालेला

वर्तुळखंड हा <QPX चा विरूध्द वर्तुळखंड आहे. विरूध्द वर्तुळखंडातील कोनांचा जीवा व स्पर्शिका यांनी तयार झालेल्या कोनांशी काही संबंध आहे का ते पाहू.



आ. 17.22

रेषाखंड QR आणि PR काढा. <PRQ व <QPY मोजा. तुम्हाला <PRQ=<QPY असल्याचे आढळून येईल. आता त्याच किंवा भिन्न त्रिज्या घेऊन वर्तुळ काढा. आणि वरीलप्रमाणेच कृती करा. तुम्हाला पुन्हा <QPX=<PRQ असेच आढळेल. <QPX आणि <QSP मोजा. हे कोनसुध्दा समान आहेत असेच दिसेल. यावरून पुढील गुणधर्म मिळतो.

> वर्तुळाची स्पर्शिका आणि स्पर्शबिंदू जोडणारी जीवा यातील कोणताही कोन त्याच्या विरूध्द वर्तुळखंडातील कोनाएवढा असतो.

या गुणधर्माला सामान्यपणे 'विरूध्द वर्तुळखंडातील कोन' असे म्हणतात.

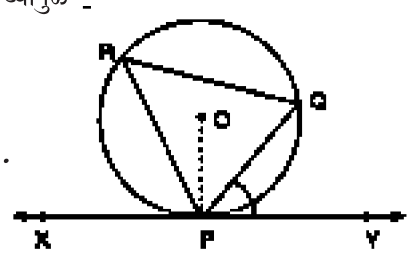
वरील गुणधर्माचा व्यत्यासही सत्य आहे का ते पाहू.

केंद' O असलेले एक वर्तुळ काढा. जीवा PQ काढून तिच्यामुळे झालेल्या एका वर्तुळखंडात <PRQ काढा. < QPY असा काढा की <QRP= <QPY.

रेषा PY दुस-या बाजूला वाढवून तिच्यावर x बिंदू घ्या.

रेख OP काढून <OPY मोजा. (आ. 17.23)

<OPY=90° असे तुम्हाला दिसेल.



आ. 17.23

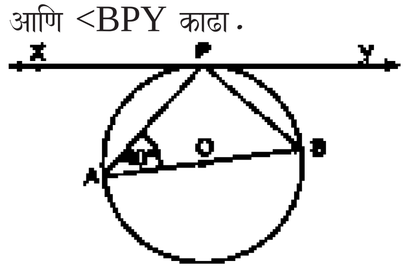
याचा अर्थ रेषा XY वर्तुळाची स्पर्शिका आहे असा होतो.

वेगवेगळी वर्तुळे काढून ती कृती पुन्हा पुन्हा करा. तुम्हाला हाच निष्कर्ष मिळेल.

> जर एखाद्या रेषेने जीवेशी केलेले कोन अनुक्रमे त्या जीवेमुळे झालेल्या विरूध्द वर्तुळखंडातील कोनाएवढे असतील तर ती रेषा त्या वर्तुळाची स्पर्शिका असते.

या गुणधर्मावर आधारित काही प्रश्न सोडवू ......

उदा. 17.8 : आ. 17.24 मध्ये रेषा XY ही केंद्र O असलेल्या वर्तुळाची स्पर्शिका आहे. जर AOB हा व्यास आणि <PAB=90° असेल तर <APX आणि <BPY काढा.



आ. 17.24

उत्तर : विरूध्द वर्तुळखंडातील कोनांच्या प्रमेयाने,

<PAB=<BAP

<BAP=40 ......(पक्ष)

<BAP=40

आता $<APB$ अर्धवर्तुळातील कोन आहे.

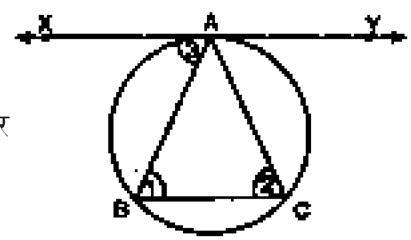
$\therefore <APB=90^\circ$

आता $<BPY+<APB+<APX=180$

$\therefore <APX=180^\circ-(<BPY+<APB)$

$<APX=180-(40+90)^0$

$<APX=50$



आ. 17.25

उदा **17.9:** आ. 17.25 मध्ये ः विरूध्द वर्तुळखंडातील ΔABC हा समद्विभुज आहे. $AB=AC$ आणि रेषा XY ही च्या परिवर्तुळाची स्पर्शिका आहे तर रेषा XY समांतर पाया BC दाखवा.

उत्तर ः मध्ये $AB=AC$ ...... (पक्ष)

$\therefore <1=<2.$

रेषा XY ही स्पर्शिका आहे.

$\therefore$ विरूध्द वर्तुळखंडाच्या प'मेयाने,

$<2=<3.$

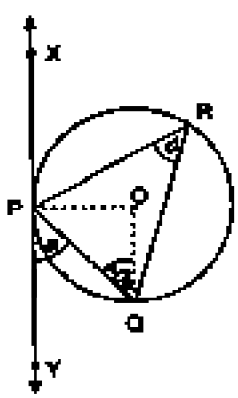
$<1=<3.$ परंतु हे व्युत्क्रम कोन आहेत.

रेषा XY//रेख BC हे सिध्द.

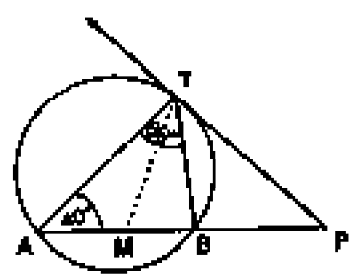
तुमची प्रगती अजमावून पहा ः 17.3:

1. विरूध्द वर्तुळखंडातील कोन म्हणजे काय? हे आकृतीच्या सहाय्याने स्पष्ट करा.

2.आ. 17.26 मध्ये XY ही केंद' O असलेल्या वर्तुळाला P मध्ये स्पर्श करणारी आहे. जर $<OQP=40^\circ$ तर a, b च्या किमती काढा.



आ. 17.26



आ. 17.27

3. आ. 17.27 मध्ये PT ही वर्तुळाची स्पर्शिका आहे. वर्तुळाची जीवा AB वाढविल्यावर TP ला P मध्ये छेदते. TA,TB जोडले. TM हा <ATB चा दुभाजक आहे.
$\angle PAB=38^0$, $\angle ATB=60^0$ तर PM=PT हे दाखवा.

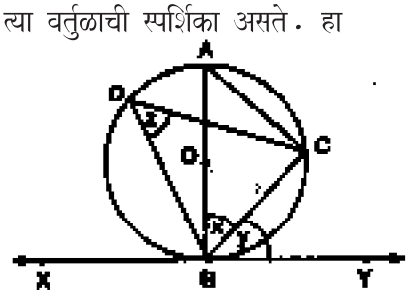
सारांश ः-

- वर्तुळाला दोन बिंदूत छेदणा-या रेषेला वृत्तछेदिका म्हणतात.
- वर्तुळाला एकच बिंदूत स्पर्श करणा-या रेषेला स्पर्शिका म्हणतात.
- वृत्तछेदिकेचे छेदनबिंदू समान होणे ही अंतिम मर्यादा म्हणजे स्पर्शिका होय.
- वर्तुळाच्या स्पर्शिकेच्या स्पर्शबिंदूतून काढलेली त्रिज्या त्या स्पर्शिकेला लंब असते.
- वर्तुळाबाहेरील बिंदूतून वर्तुळाला दोन स्पर्शिका काढता येतात. या स्पर्शिका समान लांबीच्या असतात.
- AB आणि CD या जीवा, वर्तुळाच्या अंतर्भागात किंवा वाहयभागात, P बिंदूत छेदत असतील तर $PA\times PB = PC\times PD$
- वृत्तछेदिका PAB ही वर्तुळाला A आणि B मध्ये छेदत असेल आणि स्पर्शिका PT वर्तुळाला T मध्ये स्पर्श करीत असेल, तर $PA\times PB = PT^2$
- वर्तुळाची स्पर्शिका आणि स्पर्शबिंदू जोडणारी जीवा यातील कोणताही कोन त्याच्या विरूध्द वर्तुळखंडातील कोनाएवढे असतो.
- जर एखाद्या रेषेने जीवेशी केलेले कोन, अनुक्रमे त्या जीवेमुळे झालेल्या विरूध्द वर्तुळखंडातील कोनांएवढे असतील तर ती रेषा त्या वर्तुळाची स्पर्शिका असते.

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह -

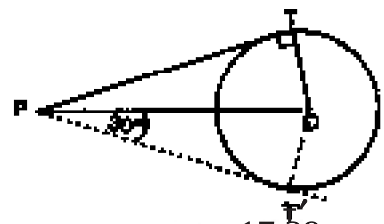
1. वृत्तछेदिका आणि स्पर्शिका यांच्यातील फरक योग्य आकृती काढून स्पष्ट करा.
2. त्रिज्येच्या वर्तुळावरील बिंदूतून त्रिज्येला लंब काढलेली रेषा त्या वर्तुळाची स्पर्शिका असते. हा गुणधर्म दाखविणारी योग्य कृती लिहा.

3. आ. 17.28 मध्ये, जर AC= BC आणि AB हा वर्तुळाचा व्यास असेल तर $\angle x$,$\angle y$ आणि $\angle z$ यांच्या किंमती काढा.



आ. 17.28

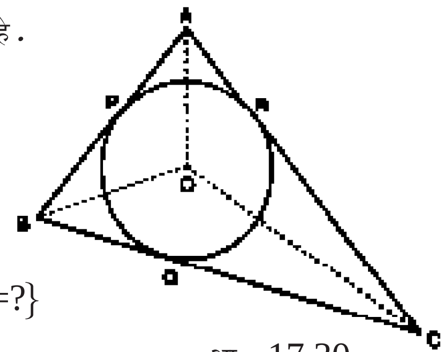
4. आ. 17.29 मध्ये **OT = 7** सेमी, OP= **25** सेमी,
तर PT ची लांबी काढा.
जर PT’ ही वर्तुळाची दुसरी स्पर्शिका असेल
तर PT’ आणि <POT’ काढा.



आ. 17.29

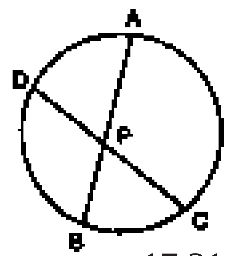
5. आ. 17.30 मध्ये **ΔABC** ची परिमिती 27 सेमी आहे.
जर **PA = 4** सेमी, **QB = 5** सेमी तर **QC** काढा.

6. आ. 17.30 मध्ये जर <ABC=70° तर <BOC=?}
सूचना : <OBC+<OCB=$\frac{1}{2}$(<ABC+<ACB)]



आ. 17.30

7. आ. 17.31 मध्ये AB आणि CD या जीवा वर्तुळाच्या आत विंदू P मध्ये छेदतात. जर PA=(x+3) सेमी, PB=(x-3) सेमी, PD=3 सेमी,
आणि PC= 5 $\frac{1}{3}$ सेमी, तर x ची किंमत काढा.

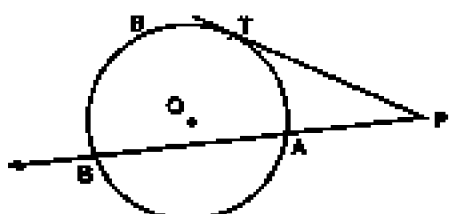


आ. 17.31

8.आ. 17.32 मध्ये O केंद्र असलेल्या वर्तुळाच्या AB व DC या जीवा वर्तुळाबाहेर P मध्ये छेदतात.
जर PA=4 सेमी,
PB=9 सेमी, PC= x सेमी, PD=4x सेमी, तर x ची किंमत काढा.

आ. 17.32

9. आ. 17.33 मध्ये PAB वृत्तछेदिका आणि PT स्पर्शिका आहे .
जर PT= x सेमी, PA=4 सेमी आणि , AB=5 सेमी,
तर x ची किंमत काढा



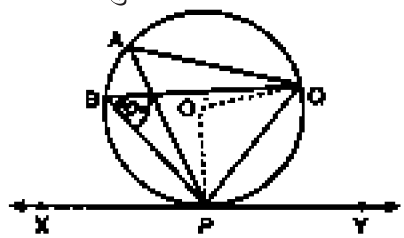
आ. 17.33

10. आ. 17.34 मध्ये O केंद्र असून <PBQ = 40° तर पुढील किंमत काढा.

(i) <QPY

(ii) <POQ

(iii) <OPQ



आ. 17.34

उत्तरे :

17.1 :

1. (i) लंब (ii) समान (iii) समान (iv) दोन (v) एकही.

2. 50°, 50   3. 3 सेमी.

17.2 :

1. 4.3 सेमी   2. 3 सेमी   3. 8 सेमी

4. 10 सेमी.   5. 6 सेमी.

17. 3 :

२. < a= < b=50

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह :

1. <x=<y=<z=45°
1. PT=24 सेमी, PT'=24 सेमी, <POT' =60
2. QC=4.5 सेमी
3. <BOC=125
4. X=5
5. X=3
6. X=6
7. X=5
8. X=3
9. X=6
10. (i) 60   (ii) 80   (iii) 50

18

भूमितीय रचना

प्रास्ताविक :

आकृत्या अचूकतेने काढण्याचे कौशल्य प्राप्त करणे हे भूमिती विषय अध्ययनाचे एक उदि्ष्ट आहे. कंपास व पट्टीचा उपयोग करून त्रिकोण चौकोन, वर्तुळे या आकृत्यांची रचना करण्यास तुम्ही शिकला आहात. तुम्ही $30°$, 60,90,120 आणि 45 या कोनांची रचनाही केली आहे. तसेच रेषाखंडाचा लंबदुभाजक आणि कोनाचा दुभाजकही तुम्हाला काढता येतो.

उद्दिष्टेः

या प्रकारचा अभ्यास झाल्यावर विद्यार्थ्यांमध्ये पुढील क्षमता निर्माण होतील.

- दिलेल्या रेषाखंडाचे दिलेल्या गुणोत्तरात आंतरविभाजन करता येईल.
- पुढीलप्रमाणे माहिती दिल्यास त्रिकोणाची रचना करता येईल.

(i) बा-बा-बा

(ii) बा-को-बा

(iii) को-बा-को

(iv) काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण व एक भुजा.

(v) परिमिती व पायालगतचे कोन.

(vi) पाया, पायालगतचा एक कोन आणि राहिलेल्या बाजूंची बेरीज किंवा वजाबाकी.

(vii) दोन बाजू आणि त्या दोन बाजूंपैकी एका बाजूची मध्यगा.

- दिलेल्या त्रिकोणास समरूप त्रिकोण काढता येईल.
- वर्तुळाला पुढीलप्रमाणे स्पर्शिका काढता येतील.

  (i) वर्तुळावरील बिंदूतून.

  (ii) वर्तुळाबाहेरील बिंदूतून.

अपेक्षित पूर्वज्ञान ः

विद्यार्थ्याला कंपास व पट्टीचा उपयोग करून पुढील रचना करता येतात.

- 30, 45,60,90 आणि 120 कोन काढणे.
- रेषाखंडाचा लंबदुभाजक काढणे.
- कोनाचा दुभाजक काढणे.

18.1 दिलेल्या रेषाखंडाचे दिलेल्या गुणोत्तरात आंरतविभाजन करणे ः-

• रचना 1ः दिलेल्या रेषाखंडाचे दिलेल्या गुणोत्तरात आंतरविभाजन करणे.

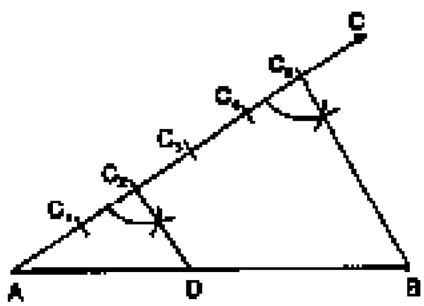
समजा AB हा रेषाखंड दिला असून त्याचे 2 : 3 या गुणोत्तरात आंतरविभाजन करावयाचे आहे. त्यासाठी आपण पुढील पाय-यानी कृती करतो.

पायरी 1 ः रेषाखंड AB शी लघुकोन करणारा AC किरण काढला.

पायरी 2 ः A बिंदूपासून सुरूवात करून AC किरणावर C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 हे समान अंतरावर पाच बिंदू घेतले.

पायरी 3 ः C_5 आणि B जोडले.

पायरी 4 ः C_2 मधून (म्हणजे दुस-या बिंदूतून) C_5 B ला समांतर रेषा काढली. ही रेषा AB ला D मध्ये छेदली. आ. 18.1 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे रेषाखंडाचे 2 : 3 या गुणोत्तरात विभाजन करणारा D बिंदू मिळाला.



आ. 18.1

तुमची प्रगती अजमावून पहा ः 18.1 :

1. 7 सेमी लांबीचा रेषाखंड काढा. याचे 3:4 या गुणोत्तरात आंतरविभाजन करा. प्रत्येक भागाची लांबी मोजा. रचनेच्या पाय-या लिहा.

2.PQ हा 8 सेमी लांबीचा रेषाखंड काढा. त्यावर R बिंदू असा निश्चित करा की PR=$\frac{3}{4}$ PQ.
(सूचना ः PQ चे 3: 4 या प्रमाणात आंतरविभाजन करा)

18.2 ः त्रिकोणांच्या रचना ः

- **रचना : 2 :** त्रिकोणाच्या तीन बाजू दिल्या असता त्रिकोण काढणे. (बा–बा–बा)

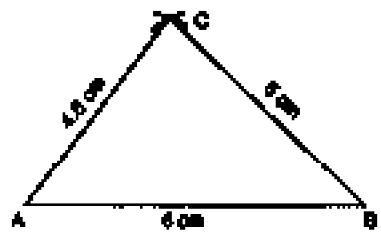
समजा AB=6 सेमी, AC=4.8 सेमी, आणि BC=5 सेमी, असा ΔABC काढावयाचा आहे. खालील पाय–यांनी कृती करून इष्ट त्रिकोण मिळेल.

पायरी 1 : AB = 6 सेमी काढा.

पायरी 2 : केंद्र A आणि त्रिज्या 4.8 सेमी घेऊन एक कंस काढा.

पायरी 3 : केंद्र B आणि त्रिज्या 5 सेमी घेऊन पायरी 2 मध्ये काढलेल्या कंसाला C मध्ये छेदणारा कंस काढा.

पायरी 4 : AC आणि BC जोडा. हा इष्ट त्रिकोण पूर्ण झाला.



आ. 18.2

- रचना 3 ः त्रिकोणाच्या दोन बाजू व समाविष्ट कोन दिला असता त्रिकोण पूर्ण करणे. (बा–को–बा) समजा असा काढावयाचा आहे की,

PQ=5.6 सेमी, QR=4.5 सेमी, आणि PQR=60 पुढीलप्रमाणे कृती केल्यावर इष्ट त्रिकोण मिळेल.

पायरी 1 ः PQ हा 5.6 सेमी रेषाखंड काढा.

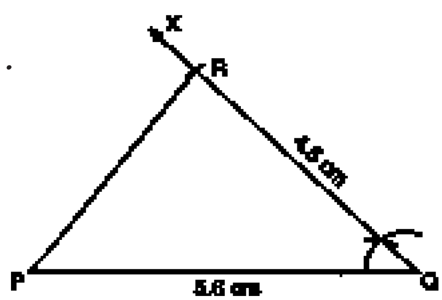
पायरी 2ः $\angle PQX = 60^0$ असा कोन Q बिंदूजवळ काढा.

पायरी 3 ः Q केंद्र व त्रिज्या 4.5 सेमी घेऊन QX ला R मध्ये छेदणारा कंस करा.

पायरी 4 ः PR जोडा.

अशा रीतीने हा इष्ट त्रिकोण मिळाला.

(टीपः PQ ऐवजी QR=4.5 सेमी, हा पाया घेऊन रचना करता येईल.)



आ. 18.3

- रचना 4ः त्रिकोणाचे दोन कोन व त्यांची समाविष्ट बाजू दिली असता त्रिकोण काढणे. (को–बा–को)

$< B = 60°, < C = 45°,$

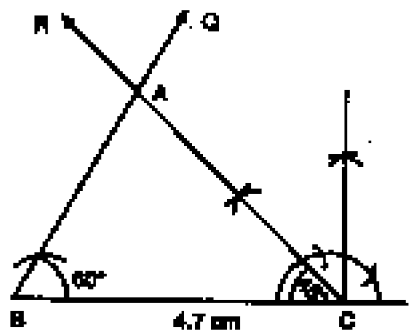
आणि **BC = 4.7** सेमी अशा **ΔABC** ची रचना करू त्यासाठी पुढील पाय-या करू.

पायरी 1 : **BC = 4.7** सेमी काढा.

पायरी 2 : $< CBQ = 60^{\circ}$ ची रचना करा.

पायरी 3 : $< BCR = 45^{\circ}$ ची रचना करा.

किरण BQ आणि किरण CR हे जेथे छेदतात तेथे A नाव द्या. अशा रीतीने **ΔABC** हा इष्ट त्रिकोण मिळतात.



आ. 18.4

<u>टीप</u> : दोन कोन व त्यांच्या समाविष्ट बाजूपेक्षा वेगळी बाजू दिली असेल तर त्रिकोणाच्या कोनांच्या बेरजेचा गुणधर्म वापरून तिसरा कोन काढावा. नंतर वरील प्रमाणे त्रिकोण रचना करावी.

- रचना 5: काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण व एक बाजू दिली असता त्रिकोण काढणे.

ΔABC असा काढू की, **BC = 3** सेमी $< B = 90^{\circ}$ आणि **AC = 5** सेमी ही रचना पुढील पाय-यानी करता येईल.

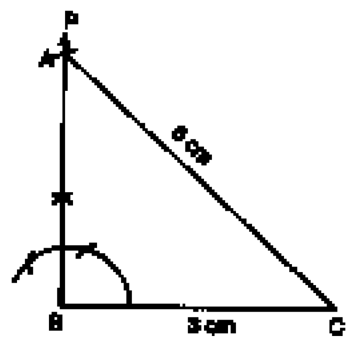
पायरी 1 : **BC = 3** सेमी काढा.

पायरी 2 : $< CBP = 90^{\circ}$ काढा.

पायरी 3 : केंद्र आणि त्रिज्या 5 सेमी घेऊन किरण**BP** ला **A** मध्ये छेदणारा कंस करा.

पायरी 4 : AC जोडा.

अशा रीतीने हा इष्ट त्रिकोण तयार झाला.



आ. 18.5

- रचना 6: त्रिकोणाची परिमिती व पायालगतचे कोन दिले असता त्रिकोण काढणे. समजा आपल्याला परिमिती 9.5 सेमी असलेला आणि पायालगतचे कोन व आहेत. असा त्रिकोण काढावयाचा आहे. पुढील पाय-यांनी कृती केल्यावर हवा असलेला त्रिकोण मिळेल.

पायरी 1 : **XY = 9.5** सेमी काढा.

पायरी 2 : $< YXP = 30^{\circ}$ ची रचना करा. $[\because 30^{\circ} = \frac{1}{2} \times 60^{\circ}]$

पायरी 3 : $< XYQ = 22\frac{1}{2}^{0}$ ची रचना करा . $[22\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 45^{\circ}]$

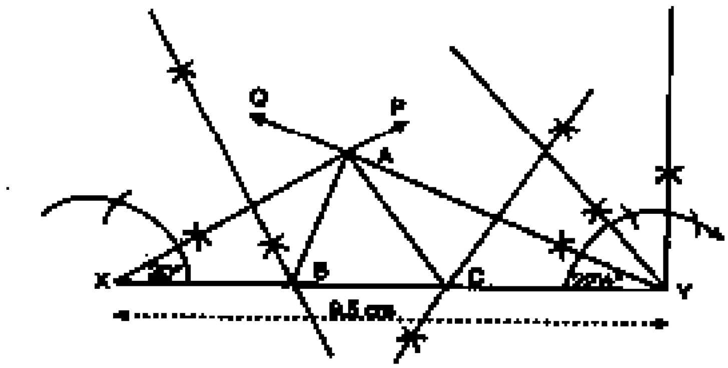
XP व **YQ** चा छेदनबिंदू **A** मिळतो.

पायरी 4: रेख **XA** ची रेख **XY** ला **B** मध्ये छेदणारी लंबदुभाजक रेषा काढा.

पायरी 5 : रेख **YA** ची रेख ला मध्ये छेदणारी लंबदुभाजक रेषा काढा.

पायरी 6 : AB आणि AC जोडा.

ΔABC हा दिलेल्या अटी पूर्ण करणारा त्रिकोण मिळाला.



आ. 18.6

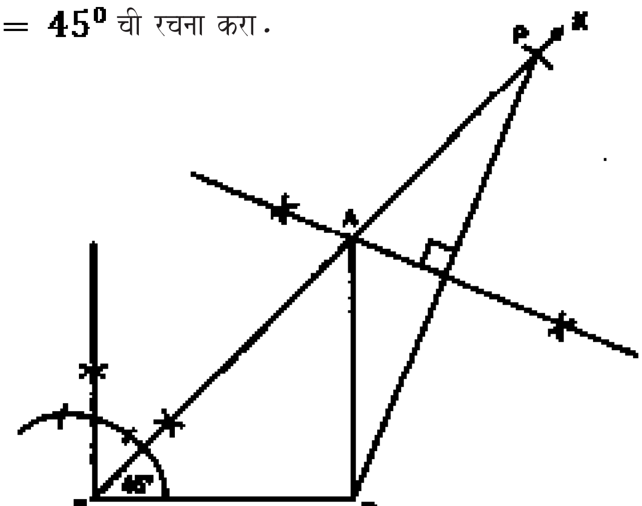
• रचना 7 : त्रिकोणाच्या दोन बाजूंची बेरीज तिसरी बाजू आणि त्या बाजूलगतचा कोन दिला असता त्रिकोण काढणे.

समजा AB + AC = 8.2 सेमी, BC = 3.6 सेमी आनि $< B = 45^0$ असा **Δ ABC** काढावयाचा आहे.

त्यासाठी पुढील पाय-या करू

पायरी 1: BC = 3.6 सेमी काढा.

पायरी 2 : $<$ **CBK** $=$ 45^0 ची रचना करा.



आ. 18.7

पायरी 3 : BK वर P बिंदू असा घ्या, की BP = 8.2 सेमी

पायरी 4 : CP जोडा.

पायरी 5: CP रेषाखंडाची लंबदुभाजक रेषा काढा. ती BP ला ज्या बिंदूत छेदते त्याला A नाव द्या.

पायरी 6: AC जोडा.

ΔABC हा इष्ट त्रिकोण मिळाला.

• रचना 8ः त्रिकोणाच्या दोन बाजूतील फरक तिसरी बाजू आणि त्या बाजू लगतचा कोन दिला असता त्रिकोण काढणे.

समजा **ΔABC** मध्ये **BC = 4** सेमी $< B = 60^\circ$ आणि **AB − AC = 1.2** सेमी. हया अटी पूर्ण करणा-या त्रिकोणाची रचना पुढील पाय-यांनी करू.

पायरी 1 : **BC = 4** सेमी काढा.

पायरी 2: $< CBP = 60^\circ$ मापाच्या कोनांची रचना करा.

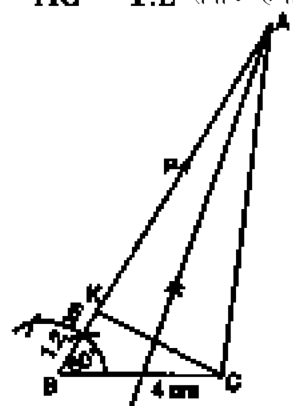
पायरी 3 : **BK** वर **K** बिंदु असा घ्या की, **BK = 1.2** सेमी.

पायरी 4: **CK** जोडा.

पायरी 5: रेख **KC** ची लंबदुभाजक रेषा काढा.

ही रेषा व किरण **BP** यांच्या छेदनबिंदूला **A** नाव द्या.

पायरी 6: ACजोडा.



आ. 18. 8

ΔABC हा दिलेल्या अटी पूर्ण करणारा त्रिकोण होय.

हा दिलेल्या अटी पूर्ण करणारा त्रिकोण होय.

•रचना 9ः त्रिकोणाच्या दोन बाजू आणि त्या दोन बाजूपैकी एकीची मध्यगा दिली असता त्रिकोण काढणे.

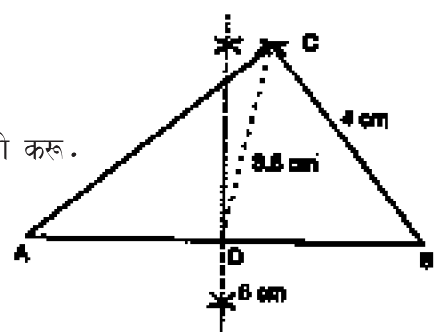
समजाआ. 18.9 **ΔABC** असा काढावयाचा आहे की

AB = 6 सेमी, **BC = 4** सेमी,आणि मध्यगा

CD = 3.5 सेमी,या त्रिकोणाची रचना पुढील पाय-यांनी करू.

पायरी 1ः AB=6 सेमी काढा.

पायरी 2ः AB ची लंबदुभाजक रेषा काढून छेदनबिंदूला **D** नाव द्या.



आ. 18. 9

पायरी 3ः केंद्र D व त्रिज्या 3.5 सेमी घेऊन एक कंस काढा.

पायरी 4ः केंद B व त्रिज्या 4 सेमी घेऊन याआधी काढलेल्या कंसाला मध्ये छेदणारा कंस काढा.

पायरी 5ः ACआणि BC जोडा.

ΔABC हा इष्ट त्रिकोण मिळाला.

तुमची प्रगती अजमावून पहा ः 18.2 :

1. **ΔDEF** ची रचना करा. **DE = 5.1** सेमी, **EF = 4** सेमी,आणि **DF = 5.6** सेमी,रचनेच्या पाय-या लिहा. (टीप ः पुढील सर्व उदाहरणातील रचनेच्या पाय-या लिहा.)

2. ΔPQR ची रचना करा. $PR = 6.5$ सेमी, $< P = 120^\circ$,आणि $PQ = 5.2$ सेमी.
3. ΔABC ची रचना करा , $BC = 5.5$ सेमी $< B = 75^\circ$, आणि $< C = 45^\circ$
4. एक बाजू 3 सेमी आणि कर्ण 7.5 सेमी असलेल्या काटकोन त्रिकोणाची रचना करा.
5. एकरूप बाजूंपैकी एक बाजू 4.8 सेमी असणा-या समद्विभुज काटकोन त्रिकोणाची रचना करा.
6. $AB + BC + AC = 10$ सेमी, $< B = 60^\circ$,$< C = 30^\circ$,अशा ΔABC ची रचना करा.
7. ΔABC ची रचना करा. $AB = 5$ सेमी,,$< A = 60^\circ$ आणि $BC + AC = 9.8$ सेमी.
8. ΔLMN काढा. ,$< M = 30^\circ$,$MN = 5$ सेमी, $LM - LN = 1.5$ सेमी.
9. ΔPQR असा काढा,की ,$PQ = 5$ सेमी, $QR = 4.2$ सेमी आणि मध्यगा $RS = 3.8$ सेमी

18.3 : दिलेल्या त्रिकोणाशी दिलेल्या प्रमाणगुणकानुसार समरूप त्रिकोण काढणे.

[सूचना : प्रमाण गुणक (Scale Factor) म्हणजे दिलेल्या त्रिकोणाशी समरूप असा काढावा लागणा–या त्रिकोणाच्या संगत बाजूंचे गुणोत्तर होय.]

• रचना 10 : ΔABC हया दिलेल्या त्रिकोणाशी एकरूप असा त्रिकोण काढा की, ज्याच्या संगत भुजा संगत भुजा ΔABC च्या संगत भुजांशी $\frac{3}{5}$ पट आहेत.

इष्ट त्रिकोण पूर्ण करण्यासाठी खालील पाय-यांनी कृती करू.

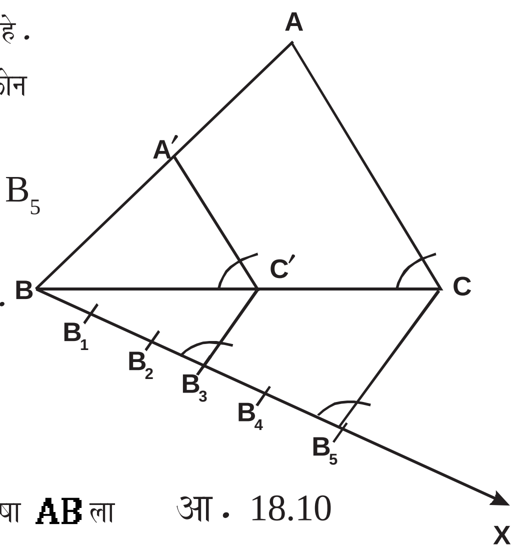
पायरी 1 : समजा ΔABC हा दिलेला त्रिकोण आहे. आता शिरोबिंदू A च्या दुस–या बाजूस BC ला लघुकोन करणारे एक किरण BX काढा.

पायरी 2: किरण BX वर B_1, B_2, B_3, B_4 आणि B_5 असे 5 बिंदू स्थापन करा की,

$BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5$ होईल.

पायरी 3 : बिंदू B_5 व C जोडा. आणि B_3 बिंदूतून B_5 ला समांतर रेषा काढा. ती BC ला C' मध्ये छेदेल.

पायरी 4: C' बिंदूतून CA ला समांतर काढलेली रेषा AB ला जेथे छेदते तेथे A' नाव द्या.



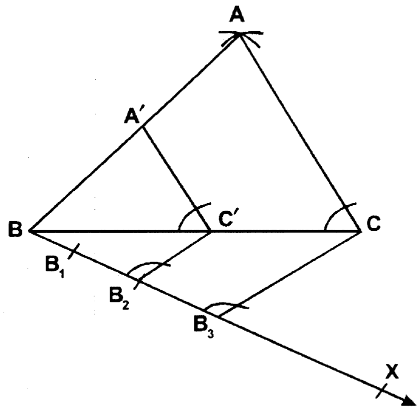
आ. 18.10

$\Delta A'BC'$ हा ΔABC ला समरूप इष्ट त्रिकोण मिळाला.

• रचना 11 : 5 सेमी,6 सेमी आणि 7 सेमी अशा बाजू असणारा एक त्रिकोण काढा. या त्रिकोणाशी समरूप असा त्रिकोण काढा,की संगतभुजांचे प्रमाण गुणक $\frac{2}{3}$ आहे.

• समजा ΔABC च्या बाजू अनुक्रमे 5 सेमी,6 सेमी आणि 7 सेमी आहेत. याला समरूप असा आणि संगत भुजांचे प्रमाण गुणक $\frac{2}{3}$ आहे.

यासाठी खालील पाय-यांनी रचना करू.



आ. 18.11

पायरी 1 ः $BC = 7$ सेमी काढा.

पायरी 2 ः **B** केंद्र आणि 6 सेमी एवढी त्रिज्या घेऊन एक कंस करा.

तसेच **C** केंद्र आणि त्रिज्या 5 सेमी घेऊन आधीच्या कंसाला छेदणारा कंस करा. छेदनबिंदूस **A** नाव द्या.

पायरी 3 ः **AB** आणि **AC** जोडा. ΔABC मिळाला.

पायरी 4 ः **A** च्या दुस-या बाजूस बाजू **BC** ला लघुकोन करणारा किरण **BX** काढा.

पायरी 5 ः **B** किरण **BX** वर B_1,B_2 आणि B_3 असे तीन बिंदू स्थापन करा की, $BB_1=B_1B_2=B_2B$ असेल.

पायरी 6 ः बिंदू B_3 आणि **C** जोडा. बिंदू B_2 मधून B_3C ला समांतर रेषा काढा ती ला मध्ये छेदते.

पायरी 7 ः बिंदू C'मधून CA ला समांतर रेषा काढा. ती AB ला A' मध्ये छेदेल.अशा रीतीने $\triangle A'B'C'$ हा ABC ला समरूप इष्ट त्रिकोण मिळाला.

तुमची प्रगती अजमावून पहा ः 18.3:

1.4 सेमी, 5 सेमी आणि 7 सेमी बाजू असणारा एक त्रिकोण काढा. या त्रिकोणाशी समरूप असणार त्रिकोण असा काढा की संगत भुजांचे प्रमाण गुणक $\frac{3}{4}$ आहे.

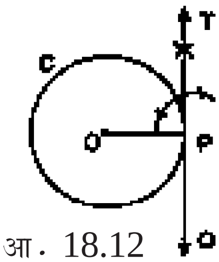
2. ΔABC असा पूर्ण करा की $BC = 7$ सेमी,$AB = 5$ सेमी आणि $< ABC = 60°$. नंतर ΔABC ला समरूप असणारा असा त्रिकोण काढा की संगतभुजांचे प्रमाण गुणक $\frac{4}{5}$ आहे.

3. काटकोन त्रिकोण पूर्ण करा. ज्याच्या दोन बाजू (कर्णाखेरीज) 5 सेमी आणि 6 सेमी आहेत. यानंतर या त्रिकोणाशी समरूपआणि संगतभुजांचे प्रमाण गुणक $\frac{4}{5}$ आहे.असा त्रिकोण पूर्ण करा.

4.ΔABC असा पूर्ण करा की $BC = 6$ सेमी, $< ABC = 60°$. आणि $AB = 4.5$सेमी. $\Delta A'BC'$ हा ला समरूप आणि संगत भुजांचे प्रमाण गुणक $\frac{5}{6}$ असणारा त्रिकोण काढा.

टिपा

18.4 ः वर्तुळाच्या स्पर्शिकांची रचना करणे.



आ. 18.12

● रचना 12ः दिलेल्या वर्तुळाच्या दिलेल्या बिंदुतून जाणा–या स्पर्शिकेची रचना वर्तुळकेंद्राचा उपयोग करून काढणे.

समजा केंद्र **O** असलेल्या **C** या वर्तुळावर **P** हा बिंदू आहे. आपल्याला बिंदुतून वर्तुळाची स्पर्शिका काढावयाची आहे.ही रचना पुढील पाय–यांनी करता येते.

पायरी 1ः **OP** जोडा.

पायरी 2ः **P** बिंदूतून जाणारी रेषा **PT** $\perp$ **OP** काढा.

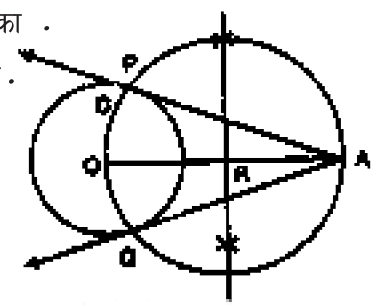
पायरी 3ः **TP** ही **Q** पर्यंत वाढवा. **TPQ** ही इष्ट स्पर्शिका होय.

● रचना 13ः वर्तुळाबाहेरील बिंदूतून त्या वर्तुळाला स्पर्शिका काढणे.

समजा **A** बिंदू **C** या वर्तुळाबाहेर आहे. वर्तुळाला या बिंदूतून स्पर्शिका . काढावयाच्या आहेत. ही रचना आपण पुढील पाय–यांनी करता येते.

(Oहा वर्तुळकेंद्र)

आ. 18.13



पायरी 1ः **OA** जोडा.

पायरी 2ः **OA** चा लंबदुभाजक काढा.

OA च्या R मध्यबिंदूला नाव द्या.

आ. 18.13

पायरी 3ः **R** हे केंद' आणि **RA** त्रिज्या घेऊन दिलेल्या वर्तुळाला **P** व **Q** मध्ये छेदणारे वर्तुळ काढा.

पायरी 4ः **AP** आणि **AQ** जोडा.

AP आणि AQ या इष्ट स्पर्शिका होत.

तुमची प्रगती अजमावून पहा ः 18.4:

1. त्रिज्या 3 सेमी असलेले वर्तुळ काढा. वर्तुळावर **A** बिंदू घ्या. त्या वर्तुळाला वर्तुळकेंद'ाचा उपयोग कसा मधून स्पर्शिका काढा. रचनेच्या पाय–या लिहा.

2.त्रिज्या 2.5 सेमी असलेले वर्तुळ काढा. त्याच्या बाहेरील या बिंदूतून आणि या स्पर्शिका काढा.आणि यांची लांबी समान आहे हे पडताळून पहा.

पहा रचनेच्या पाय–या लिहा.

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह

टीप : पुढील सर्व प्रश्नांच्या उत्तरांत रचनेच्या पाय-या लिहा.

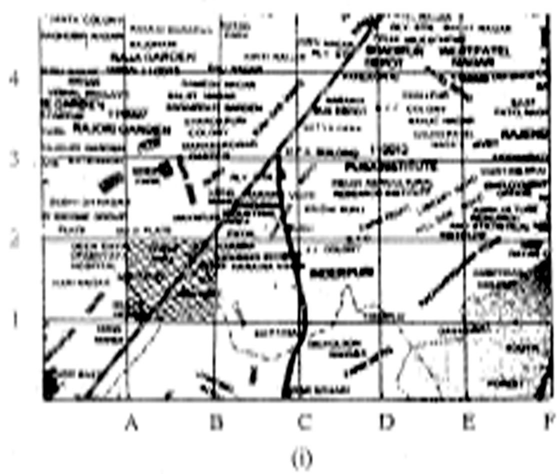
1. **PQ** हा **8** सेमी लांबीचा रेषाखंड काढा. त्याचे 3:5 या प्रमाणात आंतरविभाजन करा.
2. **AB** हा **6** सेमी लांबीचा रेषाखंड काढा. त्यावरील विंदू असा मिळवा, की AC आणि AB आणि AC:CB = 3:2 मोजा.
3. पायालगतचे कोन 60° आणि 90° असून परिमिती 14 सेमी असलेल्या त्रिकोणाची रचना करा.
4. कर्ण 8 सेमी असून उरलेल्या दोनपैकी एक बाजू 5.5 सेमी असणारा काटकोन त्रिकोण काढा.
5. ΔABC काढा. $BC = 3.5$ सेमी, $AB + AC = 8$ सेमी आणि $< B = 60^\circ$.
6. $AB = 4$ सेमी, $< A = 45^\circ$. आणि $AC - BC = 1$ सेमीअसणारा काढा.
7. ΔPQR असा काढा. $PQ = 5$ सेमी, $PR = 5.5$ सेमी आणि पाया $QR = 6.5$ सेमी नंतर $\Delta P'QR'$ हा शी समरूप असून संगत भुजांचे प्रमाण गुणक असणारा काढा.
8. पुढील मापांचा त्रिकोण काढा. **5** सेमी, 12 सेमी आणि 13 सेमी. नंतर या त्रिकोणाशी समरूप असून संगत बाजूंचे प'माण गुणक $\frac{5}{6}$ असणारा काढा.
9. 6 सेमी व्यासाचे वर्तुळ काढा. वर्तुळाबाहेरील **P** या विंदूपासून त्या वर्तुळाच्या दोन स्पर्शिका काढा. (विंदू हा वर्तुळकेंद'ापासून 6 सेमी अंतरावर आहे.)
10. 8 सेमी लांबी असणारा **AB** रेषाखंड काढा. केंद' **A** आणि त्रिज्या 4 सेमी घेऊन एक वर्तुळ काढा. तसेच **B** केंद' मानून 3 सेमी त्रिज्येचे दुसरे वर्तुळ काढा. प्रत्येक वर्तय्ळास दुस-या वर्तुळाच्या केंद'विंदूतून जाणा-या स्पर्शिका काढा.

19

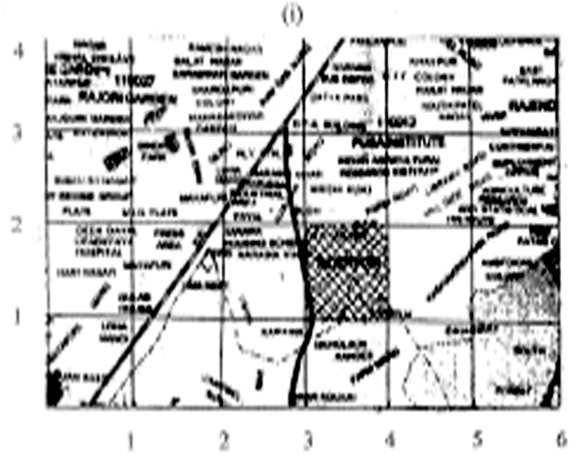
निर्देशक भूमिती

प्रास्ताविक ः

एखाद्या मोठ्या नकाशात एखादे गाव किंवा रस्ता पहाण्यासाठी बरीच शोधाशोध करावी लागते. नकाशा, योग्य मापाच्या चौरसात विभागून हे काम सोपे करता येते. एक अक्षर आणि एक अंक किंवा दोन अंकांनी प्रत्येक चौरसाचे स्थान ओळखता येते. चौरसाच्या उभ्या रेषांनी स्तंभ आणि आडव्या रेषांनी रांगा तयार होतात.



आकृती 19.1(i)



आकृती 19.1 (ii)

वरील आकृती 19.1 (i) मध्ये नकाशात रेखांकित केलेला चौरस (B,2) अशा प्रकारे किंवा आ. 19.1 (ii) मध्ये तो (4,2) अशा प्रकारे ओळखता येईल. या पध्दतीतील दोन संख्यांना ऋत्रिम जोडी असे म्हणतात. अशा प्रकारच्या क्रमित जोडीने रेखांकित चौरसातील एखादे ठिकाण नकाशात कोठे आहे याचा आपण अंदाज घेऊ शकतो. परंतु ते ठिकाण निश्चितपणे कोठे आहे हे समजू शकत नाही. एखाद्या प'तलातील एखाद्या बिंदूचे स्थान अचूक ठरविण्याची पध्दत,फ्रेंच गणिती आणि तत्ववेत्ता रेने देकार्त (इ.स. 1596–1650) याने शोधून काढली. या पध्दतीत कार्तेशियन निर्देशक या नावाच्या क्रमीत जोडीने दिलेल्या प्रतलातील कोणत्याही बिंदूचे स्थान निश्चित करता येते.

या प्रकरणात आपण एखाद्या बिंदूचे कार्तेशियन निर्देशक ,प्रतलातील दोन बिंदूतील अंतर, विभाजन सूत्र आणि त्रिकोणाच्या मध्यगा संपात बिंदूंचे निर्देशक यांचा अधिक अभ्यास करणार आहोत.

उद्दिष्टे ः

- या प्रकरणाचा अभ्यास केल्यानंतर विद्यार्थी प्रतलातील वेगवेगळया बिंदूंचे स्थान निश्चित करू शकेल.
- दोन बिंदूंचे निर्देशक दिले असताना त्यांच्यातील अंतर काढू शकेल.
- रेषाखंडांचे दिलेल्या गुणोत्तरात आंतरविभाजन करणा–या बिंदूचे निर्देशक काढू शकेल.
- दोन बिंदू जोडणा–या रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूचे निर्देशक काढू शकेल.
- त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूंचे निर्देशक दिले असता त्या त्रिकोणाच्या मध्यगा संपातबिंदूचे निर्देशक काढू शकेल.
- वरील संबोधांवर आधोरित प्रश्न सोडवू शकेल.

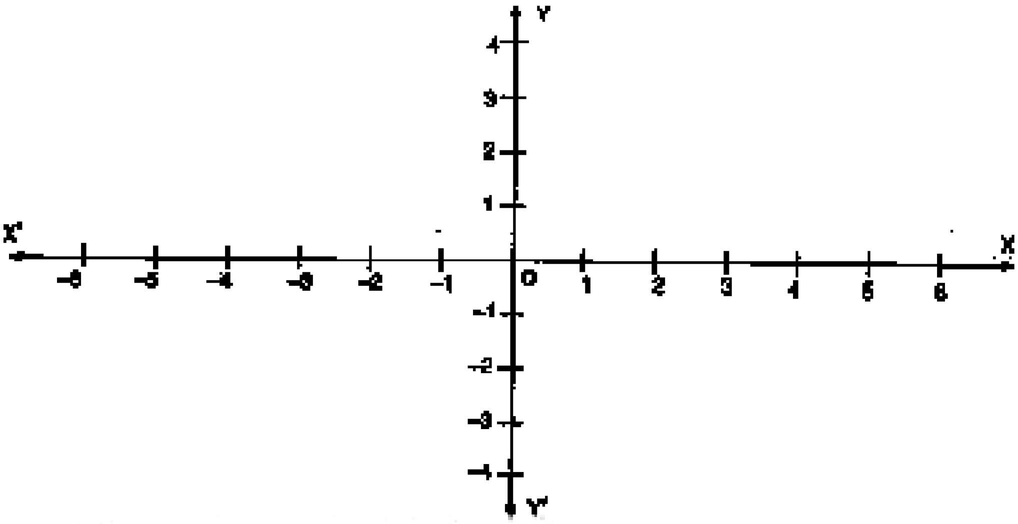
अपेक्षित पूर्वज्ञान ः

- संख्यारेषेची कल्पना.
- संख्यांवरील मूलभूत क्रिया.
- काटकोन त्रिकोणाचे गुणधर्म.

19.1 ः निर्देशक प्रणालीः

प्रकरण 5 मध्ये दोन चलातील रेषीय समीकरणाचा आलेख कसा काढतात ते तुम्ही शिकला आहात.

प्रतलातील एखाद्या बिंदूचे स्थान निश्चित करण्यासाठी दोन अक्षांपासूनचे त्याचे अंतर मोजावे लागते. दोन अक्ष म्हणजे एकमेकींना O या बिंदूत काटकोनात छेदणा–या XOX' आणि YOY' या दोन संख्यारेषा आहेत. (आ. 19.2) XOX' या आडव्या रेषेला X-अक्ष आणि YOY' या उभ्या रेषेला Y-अक्ष असे म्हणतात. दोन अक्ष एकमेकांना O या



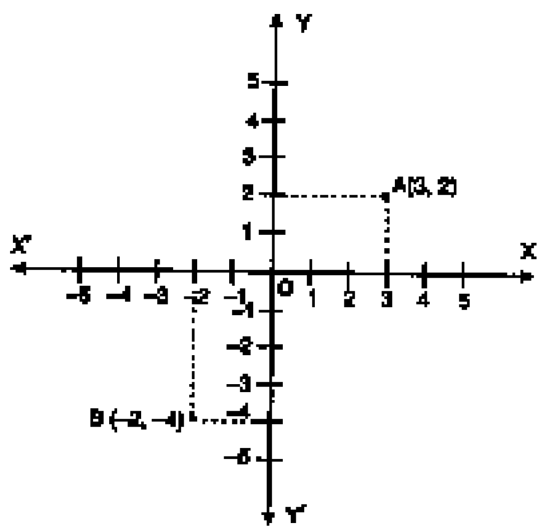
आ. 19.2

बिंदूत छेदतात. O या बिंदूला आरंभबिंदू असे म्हणतात. या दोन्ही अक्षांना मिळून आयताकृती निर्देशक प्रणाली असे म्हणतात.

X-अक्षाची धन दिशा O च्या उजवीकडे OX अशी आहे. तर ऋण दिशा O च्या डावीकडे OX’ अशी आहे. Y अक्षाची धन दिशा O च्या वरील बाजूस OYआहे. तर ऋण दिशा O च्या खालील बाजुस OY अशी आहे.

19.2 ः बिंदूचे निर्देशक ः

एखाद्या बिंदूचे स्थान दाखविण्यासाठी दोन संख्यांची, ज्यांना निर्देशक म्हणतात, जरूरी असते. त्यापैकी पहिली संख्या X-निर्देशक म्हणजे त्या बिंदूचे Y –अक्षापासूनचे अंतर आणि दुसरी संख्या Y-निर्देशक म्हणजे त्या बिंदूचे X –अक्षापासूनचे अंतर असते. वरील आ. 19.3 मध्ये A आणि B या बिंदूंचे निर्देशक अनुक्रमे (3,2) आणि (-2,-4) आहेत. बिंदू A चे Y अक्षापासूनचे अंतर 3 एकक आणि X अक्षापासूनचे अंतर 2 एकक आहे. असे तुम्ही म्हणू शकता. एखाद्या बिंदूचे निर्देशक क्रमीत जोडी स्वरूपात लिहिण्याचा प्रघात आहे. उदा. (X-



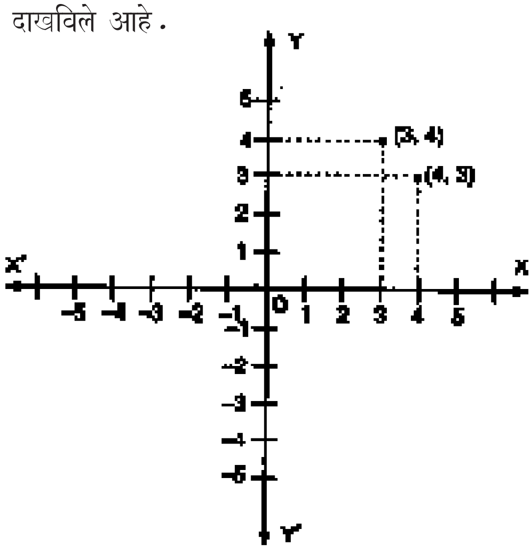
आ. 19.3

निर्देशक, Y-निर्देशक) A(3,2) या विंदूचा X-निर्देशक 3 आणि Y-निर्देशक 2 आहे. तसेच B(-2,-4) या विंदूचा X-निर्देशक -2 आणि Y-निर्देशक -4 आहे.

सर्वसाधारणपणे P(X,Y) याचा अर्थ P चे X- अक्षापासूनचे अंतर Y आणि Y अक्षापासूनचे अंतर X एकक आहे.

O या आरंभबिंदूंचे निर्देशक (O,O) आहेत. हे लक्षात घ्या. X– अक्षावरील प्रत्येक बिंदूचा Y निर्देशक शून्य (O) असतो, तर Y– अक्षावरील प'त्येक बिंदूचा X-निर्देशक शून्य (O) असतो.

'a' ही शून्येत्तर धन संख्या असेल तर आरंभबिंदूच्या उजवीकडील X अक्षावरील कोणत्याही बिंदूचे निर्देशक (a,0) असतात तर आरंभबिंदूच्या उजवीकडील कोणत्याही बिंदूचे निर्देशक (-a,0) असतात.तसेच 'b' ही शून्येत्तर धन संख्या असेल तर आरंभबिंदूच्या उजवीकडील Y अक्षावर असणा–या व X- अक्षाच्या वरील आणि X- अक्षाच्या खालील बाजूस असणा–या कोणत्याही बिंदूचे निर्देशक अनुक्रमे (0,b) आणि (0,-b) असतात. (x,y) आणि (y,x) निर्देशक असणा–या बिंदूचे कार्टेशियन अक्ष प'तलातील स्थान सारखेच नाही हे लक्षात घ्या. आ. 19.4 मध्ये (3,4) आणि (4,3) या बिंदूचे स्थान दाखविले आहे.



आ. 19.4

उदा. **19.1** ः पुढील प'त्येक बिंदूंचे x आणि y निर्देशक लिहा.

(a) (1,1) , (b) (-3,2), (c) (-7,-5) (d) (2, -6)

उत्तर ः(a) x- निर्देशक 1 आणि y निर्देशक 1

(b) x- निर्देशक -3 आणि y निर्देशक 2

(c) x- निर्देशक -7 आणि y निर्देशक -5

(d) x- निर्देशक 2 आणि y निर्देशक -6

उदा. **19.2** ः पुढील प्रत्येक बिंदूंचे y आणि x अक्षापासूनचे अंतर लिहा.

(a) A(3,4) , (b) B(-5,1), (c) C(-3,-3) (d) D(8, -9)

उत्तर ः

(a) बिंदू A आणि Y अक्षापासूनचे अंतर 3 एकक आहे आणि x अक्षापासूनचे अंतर 4 एकक आहे.

(b) बिंदू B चे Y अक्षापासूनचे अंतर -5 एकक आहे आणि x अक्षापासूनचे अंतर 1 एकक आहे.

(c) बिंदू C चे Y अक्षापासूनचे अंतर -3 आहे आणि x अक्षापासूनचे अंतर -3 आहे.

(d) बिंदू D चे Y अक्षापासूनचे अंतर 8 आहे आणि x अक्षापासूनचे अंतर -9 आहे.

वरील उत्तर दुस-या शब्दांत खालीलप‘माणे ः-

(a) बिंदू A चे Y अक्षापासूनचे अंतर आरंभबिंदूच्या उजवीकडे 3 एकक असून x अक्षापासूनचे अंतर आरंभबिंदूच्या वरच्या बाजूस 4 एकक आहे.

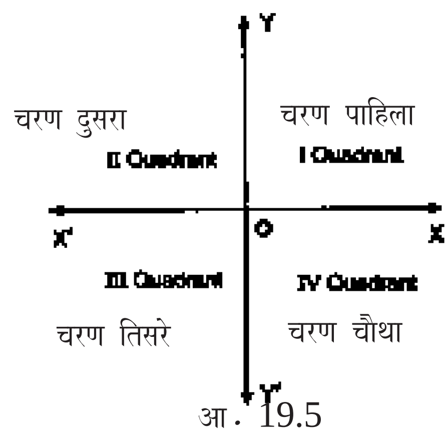
(b) बिंदू B चे Y अक्षापासूनचे अंतर आरंभबिंदूच्या डावीकडे 5 एकक आणि x अक्षापासूनचे अंतर आरंभबिंदूच्या वरच्या बाजूस 1 एकक आहे.

(c) बिंदू C चे Y अक्षापासूनचे अंतर आरंभबिंदूच्या उजवीकडे 3 एकक आणि x अक्षापासूनचे अंतर आरंभबिंदूच्या खालील बाजूस 3 एकक आहे.

(d) बिंदू D चे Y अक्षापासूनचे अंतर आरंभबिंदूच्या उजवीकडे 8 एकक आणि x अक्षापासूनचे अंतर आरंभबिंदूच्या खालील बाजूस 9 एकक आहे.

19.3ः चरण ः (Quadrants):

XOX’ आणि YOY’ हे दोन अक्ष त्या प्रतलाचे चार विभागात विभाजन करतात. प्रत्येक भागास चरण असे म्हणतात.



आ. 19.5

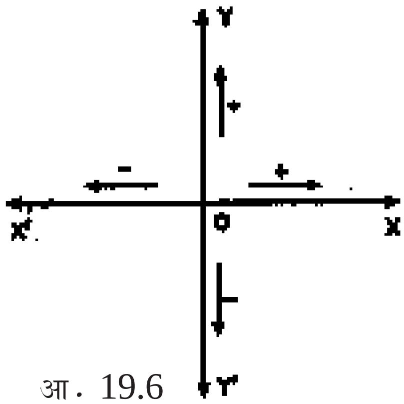
आ. 19.5 मध्ये चार चरणांची नावे पुढीलप्रमाणे ः-

XOY : चरण पहिला ; YOX’: चरण दुसरा

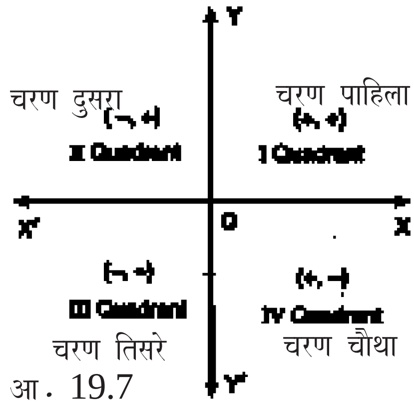
X’OY’ : चरण तिसरा; Y’OX: चरण चौथा.

परिच्छेद 19.4 मध्ये आपण असे पाहिले की,

(i) X- अक्षावरील आरंभबिंदूच्या उजवीकडील दिशा धन आणि डावीकडील दिशा ऋण आहे.



आ. 19.6



आ. 19.7

(ii) Y- अक्षावरील व X- अक्षाच्या वरील बाजूस असणारी दिशा धन आणि X- अक्षाच्या खालील बाजूस असणारी दिशा ऋण असते. (आ. 19.6 पहा.)

म्हणून पहिल्या चरणातील सर्व बिंदूचे निर्देशक (+, +) या प'कारचे असतात. ः (आ. 19.7)

दुस–या चरणातील कोणत्याही बिंदूचा X- निर्देशक ऋण आणि Y- निर्देशक धन असतो (-, +)

तिस–या चरणातील कोणत्याही बिंदूचे X आणि Y हे दोन्ही निर्देशक ऋण असतात. (-, -)

चौथ्या चरणातील कोणत्याही बिंदूचा X- निर्देशक धन आणि Y- निर्देशक ऋण असतो (+, -)

उदा. (a) P (5,6) हा बिंदू पहिल्या चरणात आहे कारण दोन्ही निर्देशक धन आहेत.

(b) Q (-3,4) हा बिंदू दुस–या चरणात आहे कारण X- निर्देशक ऋण आणि Y- निर्देशक धन आहे.

(c) R (-2,-3) हा बिंदू तिस–या चरणात आहे कारण दोन्ही निर्देशक ऋण आहेत.

(d) S (4,-1) हा बिंदू तिस–या चरणात आहे कारण दोन्ही निर्देशक ऋण आहेत.

तुमची प्रगती अजमावून पहा ः 19.1ः

1. खालील प्रत्येक बिंदूचा x आणि y निर्देशक लिहा.
   (a) (3,3) , (b) (-6,5), (c) (-1,-3) (d) (4, -2)
2. पुढील प्रत्येक बिंदूचे y आणि x अक्षापासूनचे अंतर लिहा.
   (a) A(2,4) , (b) (-2,4), (c) (-2,-4) (d) (2, -4)
3. चरणाप्रमाणे पुढील बिंदूचे गट तयार करा.
   A(-3,2) , B (2,3), C (7,-6) d(1, 1)
   E(-9,-9) , F (-6,1), G (-4,-5) H(11, -3)
   P(3,12) , Q (-13,6).

19.4 : बिंदूंचे निर्देशक दिले असता तो स्थापन करणे.

एखादया बिंदूचे दोन्ही अक्षापासूनचे अंतर मोजून तो बिंदू स्थापन करता येतो.

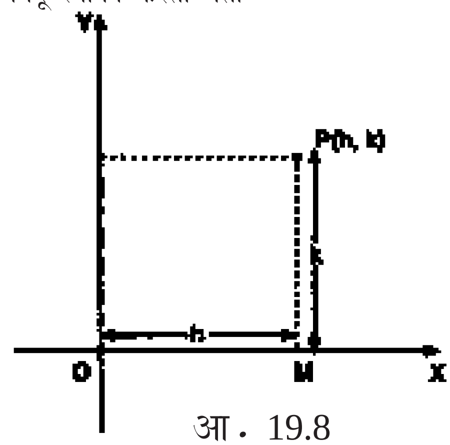
बिंदू (n, k) हा पुढीलप्रमाणे स्थापन करता येतो.

(i) आ. 19.8 मध्ये दाखविल्याप'माणे X- अक्षावर OM=h घ्या.

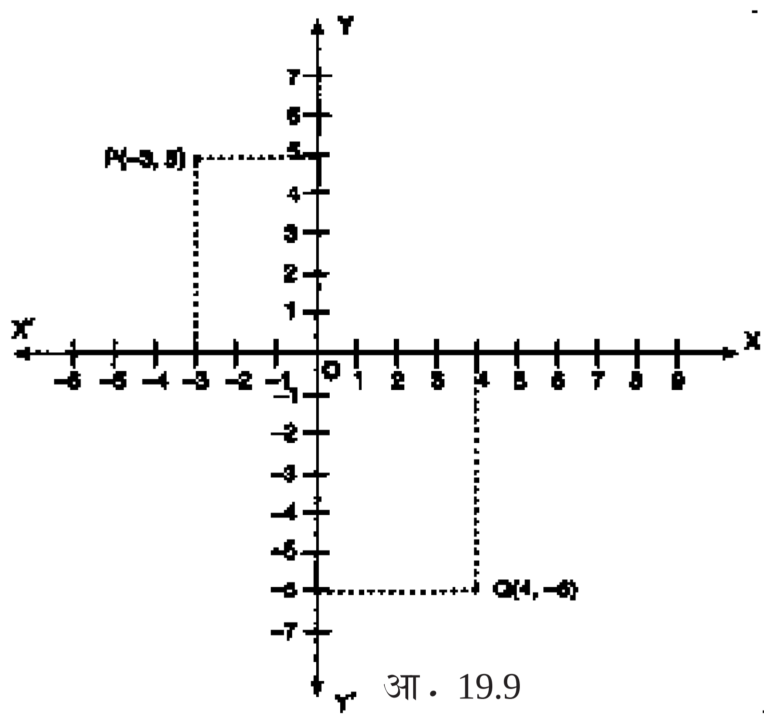
(ii) OM ला लंब असा रेख MP=k घ्या.

प्रत्येक वेळी चिन्हाचा नियम पाळा.

उदा. आकृती 19.9 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे (-3,5) आणि (4,-6) हे बिंदू स्थापन करता येतील.



आ. 19.8



आ. 19.9

19.5 ः दोन बिंदूतील अंतर ः

प्रतलातील P(x,y) आणि Q(x_2,y_2) या दोन बिंदूतील अंतर म्हणजे रेख PQ ची लांबी होय. आ. 19.10 पहा.

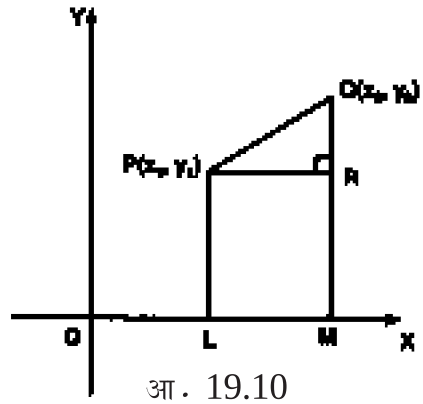
P आणि Q मधून X- अक्षावर PL आणि OM हे लंबरेषाखंड काढा. PR हा QM वर लंब काढा.

$OL=x_1$, $OL=x_2$, $PL=y_1$, $QM=y_2$,

$PR=LM=OM-OL= x_2- x_1$

$QR=QM=RM = QM-PL= y_2-y_1$,

ΔPQR हा काटकोन त्रिकाण आहे.



आ. 19.10

∴ पायथागोरस प्'मेयानुसार

$PQ^2= PR^2+ QR^2$

$PQ^2= x_2- x_1)^2+ y_2- y_1)^2$

$PQ=\sqrt{(x2 = x1)2 + (y2 - y1)2}$

यावरून

दोन बिंदूतील अंतर = $\sqrt{(x\text{निर्देशकातील फरक})^2 + (y \text{ निर्देशकातील फरक})^2}$

तसेच (x_1,y_1) आणि आरंभबिंदू यांच्यातील अंतर $= \sqrt{(x_1 = 0)^2 + (y_1 - 0)^2}$

$= \sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2}$

आता पुढील उदाहरणे पहा.ः

उदा. 19.3 ः पुढील बिंदूतील अंतर काढा.

(a) P(6,8) , आणि Q (-9,-12), (B) A(-6,-1) आणि B (-6, 11)

उत्तर ः (a) P(6,8) आणि Q (-9,-12)

अंतराचे सूत्र वापरून, $PQ = \sqrt{(-9-6)^2 + (-12-8)^2}$

$\therefore PQ = \sqrt{(-15)^2 + (-20)^2}$

$\therefore PQ = \sqrt{225 + 400} \qquad = \sqrt{625} \qquad = 25$

$\therefore PQ = 25$ एकक

(b) A(-6,-1) आणि B (-6,11)

अंतराचे सूत्र वापरून, $AB = \sqrt{(-6-(-6)^2 + [11-(-1))]^2}$

$\therefore AB = \sqrt{0^2 + 12^2}$

$\therefore AB = \sqrt{0 + 144}$

$\therefore AB = 12$ एकक

उदा. **19.4** : (0,0) आणि (x,3) या बिंदूतील अंतर 5 आहे तर x ची किंमत काढा.

उत्तर : अंतराचे सूत्र वापरून, (0,0) आणि (x,3)

या बिंदूतील अंतर $\sqrt{(x-0)^2+(3-0)^2}$

परंतु हे अंतर 5 दिले आहे.

$\therefore 5=\sqrt{x^2+9}$ वर्ग करू. (दोन्ही बाजूंचा)

$\therefore 25=x^2+9$

$\therefore x^2+9=25$

$\therefore x^2=25-9=16$

$\therefore x=\pm 4$

म्हणून x ची किंमत +4 एकक किंवा -4 एकक आहे.

उदा. **19.5 :** (1,1) , (3,0) आणि (-1,2) हे बिंदू एकरेषीय आहेत हे दाखवा.

उत्तर : समजा P(1,1) , Q(3,0) आणि R(-1,2) हे दिलेले बिंदू आहेत.

अंतराचे सूत्र वापरून, $PQ=\sqrt{(3-1)^2+(0-1)^2} \quad =\sqrt{4+1} \quad =\sqrt{5}$ एकक

आणि $QR=\sqrt{(-1-3)^2+(2-0)^2} \quad =\sqrt{16+4} \quad =\sqrt{20}=\sqrt[2]{5}$ एकक

तसेच $RP=\sqrt{(-1-1)^2+(2-1)^2}$ $\sqrt{4+1}$ एकक $=\sqrt{5}$ एकक

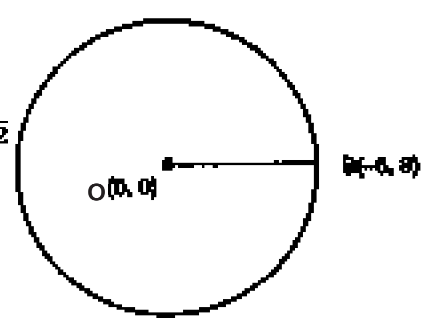
आता $PQ+RP=\sqrt{5}+\sqrt{5}=2\sqrt{5}$ एकक $=QR$

$\therefore$ P, Q, R हे बिंदू एकरेषीय आहेत.

म्हणजेच (1,1) , (3,0) आणि (-1,2) हे बिंदू एकरेषीय आहेत.

उदा. 19.6 : केंद्रबिंदू (0,0) आणि (-6,8) या बिंदूतून जाणा-या वर्तुळाची त्रिज्या काढा.

उत्तर : समजा (0,0) आणि B(-6,8) हे दिलेले बिंदू आहेत.



आ. 19.11

येथे वर्तुळाची त्रिज्या म्हणजे रेख AB ची लांबी होईल.

अंतराचे सूत्र वापरून, $AB=\sqrt{(-6-0^2+(8-0)^2}$

$\therefore OB=\sqrt{6^2+8^2}$

$\therefore OB=\sqrt{36+64}$

$=\sqrt{100} \quad =10$ एकक

$\therefore$ वर्तुळाची त्रिज्या 10 एकक आहे.

तुमची प्रगती अजमावून पहा : 19.2:

1. पुढीलपैकी बिंदूच्या प्र्त्येक जोडीतील अंतर काढा.
   (a) (3,2) , आणि (11,8), (b) (-1,0) आणि (0,3),
   (c) (3, -4) आणि (8,5), (d) (2,-11) आणि (-9,-3)
2. केंद्रबिंदू (2,0) असणा–या (7,-12) बिंदूतून जाणा–या वर्तुळाची त्रिज्या काढा.
3. (-5,6), (-1,2) आणि (2,-1) हे बिंदू एकरेषीय आहेत.

19.6 : विभाजन सूत्रः

दिलेल्या दोन बिंदूना जोडणा–या रेषाखंडाचे दिलेल्या गुणोत्तरात आंतरविभाजन करणा–या बिंदूचे निर्देशक काढणे

समजा $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,

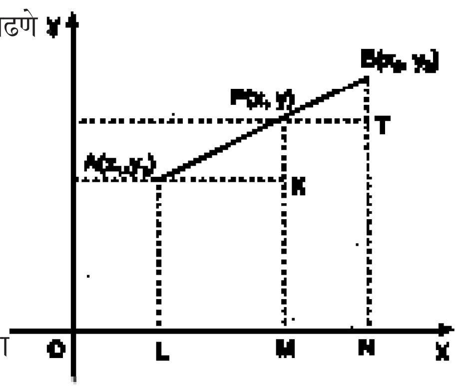
हे दोन दिलेले बिंदू असून

P (x, y) हा बिंदू रेख AB चे m:n

या गुणोत्तरात आंतरविभाजन करतो.

OX अक्षावर AL,PM,BN

हे आणि AK व PT हे अनुक्रमे PM व BN ला लंब काढा.



आ. 19.12

ΔAPK व ΔPBT या समरूप त्रिकोणावरून

$$\frac{AP}{PB}=\frac{AK}{PT}=\frac{KP}{TB}=\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(i)}$$

आता $AK=LM=OM-OL=X-X_1$

$PT=MN=ON-OM=X_2-X$

$KP=MP-MK=MP-LA=Y-Y_1$

$TB=NB-NT=NB-MP=Y_2-Y$

विधान (i) वरून

$$\frac{m}{n} = \frac{x = x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

$\therefore \frac{m}{n} = \frac{x-x1}{x2-x}$ आणि $\frac{m}{n} = \frac{y-y}{y2-y}$

$\therefore mx_2 - mx = nx - nx_1$

$\therefore mx_2 + nx_1 = mx + nx$

$\therefore x(m+n) = mx_2 + nx_1$

$\therefore x = \frac{mx2+nx1}{m+n}$ आणि

$\frac{AP}{PB} = \frac{KP}{TB}$ वरून आपणास पुढील विधान मिळते.

$\frac{m}{n} = \frac{y-y}{y2-y}$ यावरून

$y = \frac{my2+nx1}{m+n}$ मिळते.

$\therefore x = \frac{mx2+nx1}{m+n}$ $\qquad$ $\therefore y = \frac{mx2+nx1}{m+n}$

> यावरून (x_1,y_1) आणि (x_2,y_1) या बिंदूंना जोडणारेषाखंडाचे m:n या गुणोत्तरात आंतरविभाजन करणाऱ्या बिंदूंचे निर्देशक $\left(\frac{mx2+nx1}{m+n}, \frac{my2+ny1}{m+n}\right)$ असतात.

<u>19.6.1: मध्यबिंदूचे सूत्रः</u>

(x_1,y_1) आणि (x_2,y_2) या बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूचे निर्देशक काढण्यासाठी विभाजन सूत्रात m:n ठेवून मिळवू.

$X = \left(\frac{mx2+nx1}{m+n}, \frac{my2+ny1}{m+n}\right)$ आणि

$Y = \left(\frac{my_2+ny_1}{m+n}, \frac{y2+y1}{2}\right)$

> यावरून (x_1,y_1) आणि (x_2,y_2) या बिंदूंना जोडणारेषाखंडाचे मध्यबिंदूचे निर्देशक $\left(\frac{x2+x1}{2}, \frac{y2+y1}{2}\right)$ असतात.

आता पुढील उदाहरणे पहा ः

उदा. 19.7ः पुढील बिंदू जोडणा-या रेषाखंडाचे दिलेल्या गुणोत्तरात आंतरविभाजन करणा-या बिंदूंचे निर्देशक काढा.

(a) (2, 3) आणि (7,8), गुणोत्तर 2:3

(b) (-1, 4) आणि (0,-3), गुणोत्तर 1:4

उत्तर ः (a) समजा हे दिलेले बिंदू A (2,3) आणि B(7,8)

समजा P(x,y) हा रेख AB चे 2:3 गुणोत्तरात आंतरविभाजन करतो.

विभाजन सूत्र वापरून, $y = \frac{my2+ny1}{m+n}, \frac{2\times8+3\times3}{2+3} = \frac{25}{5} = 4$

∴ **P(4,5)** हा बिंदू रेख = AB चे 2:3 गुणोत्तरात आंतरविभाजन करतो.

(b) समजा A (-1,4) आणि B(0,-2) आणि P(x,y) हा बिंदू रेख AB चे 1:4 गुणोत्तरात आंतरविभाजन करतो.

विभाजन सूत्र वापरून, $x = \frac{mx2+nx1}{m+n}, \frac{1\times0+4\times-1}{1+4} = \frac{-4}{5}$ आणि

$y = \frac{my2+ny1}{m+n}, \frac{1\times-3+4\times4}{1+4} = \frac{13}{5}$

∴ $P\left(\frac{4}{5}, \frac{13}{5}\right)$ हा बिंदू रेख = AB चे 1:4 गुणोत्तरात आंतरविभाजन करतो.

उदा. 19.8 ः (3,4) आणि (5,12) यांना जोडणा-या रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूंचे निर्देशक काढा.

उत्तर ः समजा A (3,4) आणि B(5,12) हे दिलेले असून c(x,y) हा रेख AB चा मध्य आहे.

मध्यबिंदूचे निर्देशक सूत्र वापरून,

$x = \frac{x1+x2}{2} = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4$ आणि

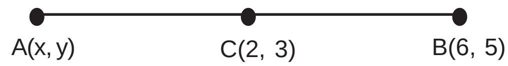
$y = \frac{y1+y2}{2} = \frac{4+12}{2} = \frac{16}{2} = 8$

∴ **C(4,8)** हे (3,4) आणि (5,12) यांना जोडणा-या रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूंचे निर्देशक आहेत.

उदा. 19.9 ः एका रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूचे निर्देशक (2,3) आहेत. जर एका अंत्यबिंदूचे निर्देशक (6,5) असतील.तर दुस-या अंत्यबिंदूचे निर्देशक काढा.

उत्तर ः समजा दुसरा अत्यंबिंदू (x,y) आहेत.

$C(2,3)$ हा मध्यबिंदू आहे.



A (x,y)   C (2,3)   B (6,5)

मध्यबिंदूचे निर्देशक सूत्र वापरून,

$2=\frac{x+6}{2}$ $\therefore 4= x+6$ $\therefore x= -2$

आणि $3=\frac{y+5}{2}$ $\therefore 6= y+5$ $\therefore y= 1$

$\therefore$ A (-2,1) हे दुस-या अंत्यबिंदूचे निर्देशक आहेत.आहेत.

19.7 ः त्रिकोणाच्या मध्यगा संपात बिंदूः

त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूचे निर्देशक दिले असता त्याच्या मध्यगासंपात बिंदूचे निर्देशक काढणे.

व्याख्या ः त्रिकोणाच्या मध्यगा ज्या बिंदूत मिळतात त्याला मध्यगासंपातबिंदू असे म्हणतात.

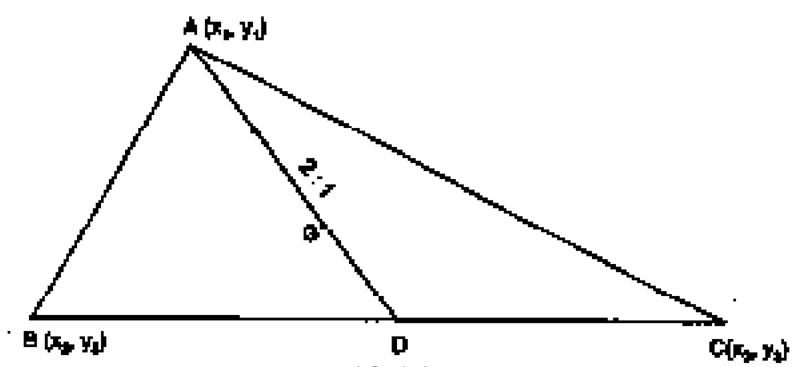
मध्यगासंपातबिंदू प्रत्येक मध्यगा 2: 1 या गुणोत्तरात विभागतो.

समजा ΔABC चे शिरोबिंदू $A (x,y)$ $B (x_2,y_2)$ आणि $C (x_3,y_3)$ आहेत.

समजा AD ही पायाला दुभागणारी मध्यगा आहे.

मध्यबिंदूंचे निर्देशक सूत्र वापरून

$$D= \left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$$



आ. 19.14

मध्यगा **AD** वरील **G** हा विंदू मध्यगासंपातविंदू असून तो रेख चे 2:1 गुणोत्तरात विभाजन करतो. जर G (x,y) असेल तर आंतरविभाजनाचे सूत्र वापरून,

$$x = \frac{2\,X\,\frac{x_2+x_3}{2} + 1\,X\,x_1}{2+1} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} \text{ आणि}$$

$$y = \frac{2\,X\,\frac{y_2+y_3}{2} + 1\,X\,y_1}{2+1} = \frac{y_1+y_2+y_3}{3} \text{ मिळते.}$$

∴ मध्यगा संपात विंदू G $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ आहे.

उदा. **19.10**

एका त्रिकोणाच्या शिरोविंदूचे निर्देशक (3,-1),(10,7) आणि (5,3) आहेत. तर त्याच्या मध्यगा संपात विंदूचे निर्देशक काढा.

उत्तर ः समजा A(3,-1), B(10,7) आणि C(5,3) हे **ΔABC** चे शिरोविंदू आहेत.

आणि

G(x,y) हा मध्यगा संपात विंदू आहे.

∴ मध्यगा संपात विंदूचे निर्देशक आहे. $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$सूत्राचा उपयोग करून,

$$x = \frac{3+10+5}{3} = \frac{18}{3} = 6 \text{ आणि}$$

$$y = \frac{-1+7+3}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

∴G (6,3) हा मध्यगा संपात विंदू आहे.

म्हणजेच मध्यगा संपात विंदूचे निर्देशक (6,3) आहेत.

तुमची प्रगती अजमावून पहा ः 19.3:

1.दिलेल्या विंदूना जोडणा–या रेषाखंडाचे दिलेल्या गुणोत्तरात आंतरविभाजन करणा–या विंदूचे निर्देशक काढा.

(a) (1,-2) आणि (1,-2) गुणोत्तर 1:2

(b) (3,-2) आणि (-4,5) गुणोत्तर 1:1

2. पुढील विंदू जोडणा–या रेषाखंडाच्या मध्यविंदूचे निर्देशक काढा.

(a) (0,0) आणि (8,-5)

(b) (-7,0) आणि (0,10)

3. (5,-1) (-3,-2) आणि (-1,8) असे शिरोविंदू असणा–या त्रिकोणाच्या मध्यगासंपात विंदूचे निर्देशक काढा.

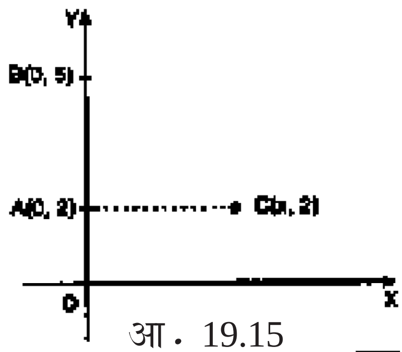
सारांशः

- एका विंदूचे निर्देशक आणि (2,3) असतील तर त्या बिंदूचा x निर्देशक 2 आणि y निर्देशक 3 आहे.
- (x,y) या निर्देशकाचा अर्थ असा की x हे y अक्षापासूनचे आणि y हे x अक्षापासूनचे अंतर आहे.
- आरंभबिंदूचे निर्देशक (0,0) असतात. x अक्षावरील कोणत्याही बिंदूचा y निर्देशक 0 (शून्य) आणि y अक्षावरील कोणत्याही बिंदूचा x निर्देशक 0 (शून्य) असतो.
- XOX' आणि YOY' या दोन अक्षांनी प्रतलाचे चार चरणात विभाजन होते.
- (x_1,y_1) आणि (x_2,y_2) या दोन बिंदूतील अंतर $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ एवढे असते.
- (x_1,y_1) या बिंदूचे आरंभबिंदू (0,0) पासूनचे अंतर $= \sqrt{x1^2+Y1^2}$ एवढे असते.
- (x_1,y_1) आणि (x_2,y_2) या बिंदूना जोडणा-या रेषाखंडाचे m:n गुणोत्तरात आंतरविभाजन करणा-या बिंदूचे निर्देशक $\left(\frac{mx2+nx1}{m+n}, \frac{my2+ny1}{m+n}\right.$ असतात.
- (x_1,y_1) आणि (x_2,y_2) या बिंदूना जोडणा-या रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूचे निर्देशक $\left(\frac{x2+x1}{2}, \frac{y2+y1}{2}\right.$ असतात.

(x_1,y_1), (x_2,y_2) आणि (x_3,y_3) हे त्रिकोणाचे शिरोबिंदू असणा-या मध्यगासंपात बिंदूचे निर्देशक $\left(\frac{x1+x2+x3}{3}, \frac{y1+y2+y3}{3}\right.$ असतात.

संकिर्ण प्रश्नसंग्रह ः

1. आ. 19.15 मध्ये AB=AC तर x ची किंमत काढा.



आ. 19.15

2. (2,3) आणि (4,x) या बिंदूना जोडणा–या रेषाखंडाची लांबी $\sqrt{13}$ एकक आहे. तर x ची किंमत काढा.

3. A(3,4), B(2,-1) आणि C(4,-6) हे शिरोबिंदू असणा–या त्रिकोणाच्या प्रत्येक बाजूंची लांबी काढा.

4. (2,-2) (-2,1) आणि (5,2) हे काटकोन त्रिकोणाचे शिरोबिंदू आहेत हे सिध्दकरा.

5. (2,-1) आणि (-3, 4) हे विंदू जोडणा–या रेषाखंडाचे 2 : 3 या गुणोत्तरात आंतरविभाजन करणा–या विंदूचे निर्देशक काढा.

6. P(-5,7) आणि Q(3,-11) हे व्यासाच्या अंत्यबिंदूचे निर्देशक असल्यास त्या वर्तुळाच्या केंद्रबिंदूचे निर्देशक काढा.

7. P(-2,4), Q(7,-3) आणि R(4,5) हे शिरोबिंदू असणा–या मध्यगासंपात विंदूचे निर्देशककाढा.

उत्तरे ः 19.1 ः तुमची प्रगती अजमावून पहा ः

1. (a) 3,3 (b) -6,5 (c) -1,-3 (d) 4,-2

2. (a) 2 एकक 4 एकक

   (b) आरंभविंदूच्या डावीकडे 2 एकक , x- अक्षाच्या वरील बाजूस 4 एकक.

   (c) आरंभविंदूच्या डावीकडे 2 एकक , आरंभविंदूच्या खाली 4 एकक.

   (d) 2 एकक , आरंभविंदूच्या खाली 4 एकक.

3. चरण I : B(2,3) , D(1,1),P(3,12)

   चरण II : A(-3,2) , F(-6,1),Q(-13,6)

   चरण III : E(-9,-9) , G(-4,-5)

   चरण IV : C(7,-6) , H(1,-3)

19.2:

1. (a) 10 एकक (b) $\sqrt{10}$ एकक (c) $\sqrt{106}$ एकक
   (d) $\sqrt{185}$ एकक
2. 13 एकक

19.3:

1. (a) (2,1) (b) (-1,1)
2. (a) $(4, \frac{-5}{2})$ (b) $\frac{-7}{2}$ 5)
3. $(\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह उत्तरेः

1. 3 एकक
2. 0 किंवा 6
3. AB=$\sqrt{26}$ एकक BC=$\sqrt{29}$ एकक आणि CA=$\sqrt{10}$ एकक
5. (0,1)
6. (-1,-2)
7. (3,2)

भूमिती

सराव कार्य : भूमिती

वेळ : 45 मिनिटे

सूचना : गुण : 25

1. सर्व प्रश्नांची उत्तरे वेगळया कागदावर लिहावीत.
2. तुमच्या उत्तरपत्रिकेवर खालील माहिती द्यावी.
   - नाव
   - प्रवेश क्रमांक
   - विषय
   - सराव काय—विषय -प्रकरण
   - पत्ता
3. तुमच्या अभ्यासकेंद्रतील विषय शिक्षकाकडून तुम्ही केलेले सराव काम तपासून घ्या, म्हणजे तुम्हाला तुमच्या कार्याचा योग्य अंदाज होईल.

तुमचे सराव कार्य राष्ट्रीय संस्था मुक्त शाळेकडे पाठवू नका.

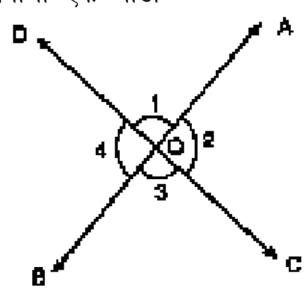
1. शेजारील आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे रेषा AB आणि रेषा CD एकमेकींना O बिंदूत छेदत आहेत. त्यातील विरूध्द कोनाची एक जोडी. 1

(A) 1,2

(B) 2,3

(C) 3,4

(D) 2,4



2. खालीलपैकी कोणते विधान ΔABC साठी सत्य आहे? 1

(A) AB+BC=AC

(B) AB+BC<AC

(C) AB+BC>AC

(D) AB+BC+AC=0

टिपा

3. आयताच्या लगतच्या बाजूंचे मध्यबिंदू जोडून तयार होणारा चौकोन. 1

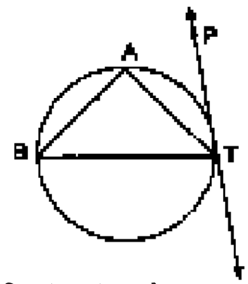
(A) आयत

(B) चौरस

(C) समभुज चौकोन

(D) समलंब चौकोन

4. शेजारील आकृतीत वर्तुळावरील T बिंदूपाशी PT ही स्पर्शिका आहे. जर <BTA=45° आणि <PTB=70 तर <ABT = 1



(A) 110

(B) 70

(C) 45

(D) 25

5. A आणि B बिंदूचे निर्देशक अनुक्रमे (2,3) आणि (4,x) आहेत. जर $AB^2=13$ तर X ची किंमत 1

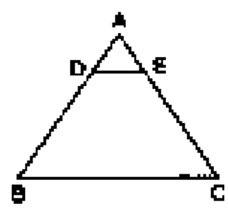
(A)-6

(B) 0

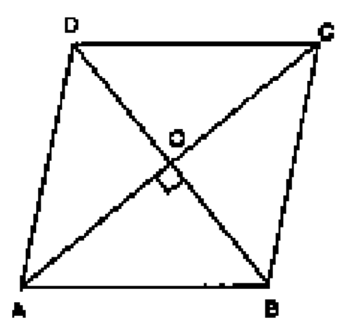
(C)9

(D) 12

6. मध्ये AB=10 सेमी , DEअशी आहे की, AE=AC तर AD काढा. 2



7. हा समभुज चौकोन असेल तर सिध्द करा. $4AB^2=AC^2+BD^2$ 2



8. ज्या विंदूचे निर्देशक (3,8) आणि (9,5) आहेत. अशा विंदूपासून समान अंतरावर असणा–या x- अक्षावरील विंदूचे निर्देशक काढा. 2

9. एका रेषाखंडाच्या मध्यविंदूचे निर्देशक (2,3) आहेत. त्या रेषाखंडाच्या एका अंत्यविंदूचे निर्देशक (6,5) असतील तर दुस–या अंत्यविंदूचे निर्देशक काढा. 2

10. एका त्रिकोणाच्या शिरोविंदूचे निर्देशक (3,-1),(10,7) आणि (5,3) आहेत तर त्या त्रिकोणाच्या मध्यगासंपात विंदूचे निर्देशक काढा. 2

11. लघुकोन त्रिकोण **ABC** मध्ये $AD \perp BC$ तर सिध्द करा की, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC.BD$ 4

12. 'समान पायावर (किंवा एकाच पायावर) उभे असलेले व दोन समांतर रेषांमध्ये बध्द असलेले समांतरभुज चौकोन समक्षेत्र असतात हे सिध्द करा. 6

टिपा

माध्यमिक अभ्यासक्रम

विषय : गणित

गुण : **25** वेळ : **45** मिनिटे

सूचना :

1) सर्व प्रश्नांची उत्तरे स्वतंत्र उत्तर पत्रिकेवर लिहा.

2) तुमच्या उत्तर पत्रिकेवर पुढील माहिती लिहा.

- पूर्ण नाव
- दाखल क्रमांक **(Enrolment Number)**
- विषय
- सराव कार्य ज्या प्रकरणावर आहे, ती प्रकरणे
- पूर्ण पत्ता

3) तुम्ही केलेले सराव कार्य तुमच्या अभ्यास केंद्रावरील विषय शिक्षकांकडून तपासून घ्या आणि त्यांच्याकडून तुमच्या तयारीची निश्चित माहिती मिळवा.

तुमचे सराव कार्य, राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षण संस्थेकडे पाठवू नका.

1. आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे, रेषा AB आणि रेषा CD परस्परांना O मध्ये छेदत आहेत. तर विरुद्ध कोनांची जोडी 1

   (A) 1, 2 (B) 2, 3 (C) 3, 4 (D) 2, 4

2. ΔABC च्या बावतीत खालीलपैकी कोणते विधान सत्य आहे? 1

   (A) $AB + BC = AC$ (B) $AB + BC < AC$

   (C) $AB + BC > AC$ (D) $AB + BC + AC = 0$

3. आयताच्या लगतच्या बाजूंचे मध्यबिंदू साधून होणारा चौकोन ....प्रकारचा असेल. 1

   (A) आयत (B) चौरस (C) समभुज चौकोन (D) समलंब चौकोन

4. आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे, रेषा PT ही वर्तुळाला बिंदू T मध्ये स्पर्शिका आहे. जर $\angle BTA = 45°$, $\angle PTB = 70$, तर $\angle ABT = ?$ 1

   (A) 110° (B) 70° (C) 45° (D) 23°

5. बिन्दू A चे निर्देशक (2, 3) आणि बिंदू B चे निर्देशक (4, x) हे आहेत. $AB^2 = 13$, तर x ची किंमत = 2

   (A) – 6 (B) 0 (C) 9 (D) 12 ......

6. ΔABC मध्ये, $AB = 10$ cm,
रेख DE || रेख BC आणि
रेख AE = – रेख AC
तर रेख AD ची किंमत काढा.

7. ABCD हा समभुज चौकोन आहे. तर सिद्ध करा की, $4AB^2 = AC^2 + BD^2$ 2

8. एका बिंदूचे निर्देशक (3,8) आणि दुसऱ्या बिंदूचे निर्देशक (9, 5) आहेत. या बिंदूपासून समदूर आणि x अक्षावर असणाऱ्या बिंदूचे निर्देशक काढा. 2

9. एका रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूचे निर्देशक (2, 3) असून रेखाखंडाच्या एका अंत्यबिंदूचे निर्देशक (6,5) हे आहेत. तर दुसऱ्या अंत्यबिंदूचे निर्देशक काढा. 2

10. एका त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूचे निर्देशक अनुक्रमे (3, -1) (10, 7) आणि (5, 3) हे आहेत. तर गुरुत्वमध्याचे निर्देशक काढा. 2

11. लघुकोन ΔABC मध्ये, $AD \perp BC$, तर $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC \,.\, BD$ हे सिद्ध करा. 4

12. समान किंवा एकाच पायावर असलेले आणि समांतर रेषांच्या एकाच जोडीत बद्ध असलेले समांतरभुज चौकोन समक्षेत्र असतात, हे सिद्ध करा.

Success Stories

Kavya Madhavan
Enrolment No. 090008103065

Kavya Madhavan is a highly acclaimed actress in the Malayalam film world. Making her debut as a child artiste, Kavya quickly managed to find a place in the hearts of malayalees. However, all this was at the cost of dropping out of school at the Secondary level. Like many others, she too nurtured a dream of acquiring a college degree. Motivated to join the National Institute of Open Schooling (NIOS), Kavya Madhavan appeared for the Senior secondary level examination in Malayalam medium and emerged successful. But this was not achieved easily, she says.

Thanks to the Open Schooling system, Kavya Madhavan has now registered for B.Com in M.G. University, Kottayam, Kerala.

Ganesh
Enrolment No. Secondary Course: 25001292005
Senior Secondary Course: 250012103570

Ganesh has cleared the Secondary course of NIOS with first division and has now appeared in 4 subjects of Senior Secondary course. What differentiates Ganesh from other students is that he is suffering from a non-healing ulcer of bone infection. There is no treatment for his ailment; his lower part below the belt has not grown. The puss leaks from his body continuously. He cannot move, and even has no sensation in the lower part of his body. He has to be carried to be moved from one place to another.

However, support from his family members and the Chief Commissioner of Disabilities facilitated his enrolled as a student under Sarva Shiksha Abhiyan as a private candidate, thereby enabling him to clear Class 5 and Class 8. It was at this point that NIOS came to his rescue by providing the flexibility of studying at his own pace through credit accumulation. He could also study subjects of his own choice and was further allowed to appear for the examination in his house. UT Chandigarh continued to support him by providing him with the facility of tutors, who taught him Maths and Science.

With a keen interest in religion, he has read about the various *Puranas, Ramayana* etc., from which he has derived a lot of internal strength.

Ganesh is certainly determined to study further and wishes to pursue a course in Computer Science after clearing his Senior Secondary course from the NIOS.

विभाग ः ४

महत्वमापन

मानवाच्या रोजच्या व्यवहारातील गरज म्हणून सर्व गणिती संकल्पना उदयास आल्या. मानवाची प्राथमिक गरज गणन करणे ही होती. म्हणूनच संख्याप्रणाली उदयास आली. मानवाने ज्या वेळी शेती करण्यास सुरुवात केली, त्यावेळी त्याला खालील समस्यांना तोंड द्यावे लागले.

i) ज्या शेतात पीक घ्यावयाचे आहे, त्या शेताच्या सीमारेषा निश्चित करणे.

ii) वेगवेगळ्या पिकांसाठी वेगवेगळ्या मापाच्या जमिनीची निश्चिती करणे.

iii) वेगवेगळ्या पिकांपासून मिळणारी वेगवेगळी उत्पादने साठविण्यासाठी योग्य त्या आकाराच्या आणि प्रकाराच्या जागांची निश्चिती करणे.

या समस्यांना तोंड देण्यासाठीच लांबी, क्षेत्र आणि आकारमान मोजण्यासाठी गरज भासू लागली. त्यातूनच गणितातील महत्वमापन या शाखेच्या अभ्यासास सुरुवात झाली.

महत्वमापनामध्ये आपण पुढील समस्यांविषयी विचार करतो. एखाद्या शेताभोवती तारेचे कुंपण करण्यासाठी किती खर्च येईल? एखाद्या खोलीला विशिष्ट मापाच्या किती फरशा लागतील? एखादी भिंत बांधाण्यासाठी किती विटा लागतील? एखादे शेत नांगरण्यासाठी किती खर्च येईल? एखाद्या सोसायटीला पाणी पुरवठ्यासाठी बांधवयाच्या टाकीचे आकारमान व खर्च किती होईल? घराला रंग देण्यासाठी किंवा लाकडी टेबलाला पॉलीश करण्यासाठी किती खर्च येईल? यासारख्या समस्यांची उकल महत्वमापनामध्ये होत असल्याने काही वेळेस महत्वमापनाला गमतीने फर्निचर आणि भिंतीचे शास्त्र असेही म्हणतात.

या सारख्या समस्यांची उकल करण्यासाठी आपणाला वस्तूची / आकारांची लांबी, रुंदी, परिमिती आणि एकप्रतलीय बंदिस्त भौमितिक आकारांचे क्षेत्रफळ तसेच घनाकृती आकारांचे घनफळ काढावे लागते. त्यासाठी महत्वमापनाच्या संकल्पनांचा आणि सूत्रांचा फार मोठा उपयोग होतो.

परिमिती, क्षेत्रफळ, पृष्ठफळ, घनफळ यासंबंधीच्या सर्व संकल्पना आणि संबंध यांचा आपण अभ्यास केलाच आहे. या विभागात आपण याच संकल्पनाचा बारकाईने आणि खूप तपशीलवार अभ्यास करणार आहोत. त्यासाठी लागणारी सर्व सूत्रे आपण मागेच अभ्यासली आहेत.

20

प्रतलीय आकृत्यांची परिमिती आणि क्षेत्रफळे

आपण यापूर्वीच काही प्रतलीय आकृतींशी परिचित आहात जसे आयत, चौरस, समांतरभुज चौकोन, त्रिकोण, वर्तुळ इ. आपणास या आकृतींची परिमिती व क्षेत्रफळे यंत्राच्या सहाय्याने कशी काढतात हे सुध्दा माहिती आहे. या प्रकरणामध्ये (पाठामध्ये) आपण या ज्ञानाचे दृढीकरण करणार आहोत. तसेच त्याबाबत अधिक अभ्यास करणार आहोत. विशेषतः त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी वापरलेले हिरोचे (Heron's) सूत्र आणि वर्तुळ पाकळीचे क्षेत्रफळ काढण्याचे सूत्र

उद्दिष्टे ः

या प्रकरणाचा अभ्यास केल्यानंतर तुम्ही समक्ष व्हाल

- यापूर्वी अभ्यासलेल्या सूत्रांचा उपयोग करून काही त्रिकोण व चौकोन यांची परिमिती व क्षेत्रफळे काढणे.
- त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी "हिरो" च्या सूत्राचा वापर करणे.
- काही अनियमित आकृत्यांचे विभाजन माहित असलेल्या नियमित आकाराच्या उदा.ः त्रिकोण, चौकोन, चौरस, समलंब चौकोन, आयत इ. आकृतीमध्ये करून (चौकोन बिंदूपथसह) त्यांचे क्षेत्रफळ काढणे.
- वर्तुळाचा परीघ व क्षेत्रफळ काढणे.
- वृत्तीय (वर्तुळाकार) विंदूपथांची क्षेत्रफळे काढणे.
- वर्तुळपाकळीची परिमिती व क्षेत्रफळ काढण्याच्या सूत्राची व्युत्पत्ती मांडणे व समजून घेणे.
- वरील सूत्रे वापरून वर्तुळ पाकळीची परिमिती काढणे.
- वर्तुळ, वर्तुळ पाकळी तसेच त्रिकोण, चौरस आणि आयत यांच्या एकत्रित वापर करून तयार झालेल्या संयुक्त आकृत्यांची क्षे'त्रफळे काढणे.
- विविध प्रतलीय आकृत्यांची परिमिती व क्षेत्रफळे यावर आधारीत दैनंदिन जीवनातील समस्यांची , प्रश्नांची सोडवणूक करणे.

अपेक्षित पूर्वज्ञान -

- त्रिकोण, चौकोन, समांतरभुज चौकोन, समलंब चौकोन, चौरस, आयत, वर्तुळ यासारख्या साध्या बंदिस्त आकृत्या व त्यांचे गुणधर्म.
- परिमिती आणि क्षेत्रफळ यांची विविध एकके जसे मी आणि मी^{2} सेमी आणि सेमी ^{2}, मिमी आणि मिमी^{2} इ.
- एका एककाचे दुस-या एककांत रूपांतर
- एकर आणि हेक्टर यासारखी क्षेत्रफळाची मोठी एकके
- विविध आकृत्या संदर्भातील परिमिती व क्षेत्रफळांची खालील सूत्रे

(i) आयताची परिमिती = 2 (लांबी + रूंदी)

(ii) आयताचे क्षेत्रफळ = लांबी $\times$ रूंदी

(iii) चौरसाची परिमिती = 4 $\times$ बाजू

(iv) चौरसाचे क्षेत्रफळ = बाजू ^{2}

(v) समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ = पाया $\times$ संगत उंची

(vi) त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ पाया $\times$ संगत उंची

(vii) समभूज चौकोनाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ कर्णांचा गुणाकार

(viii) समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ (समांतर बाजूंचीबेरीज) $\times$ समांतरबाजू मधील अंतर

(ix) वर्तुळाचा परीघ = 2 त्रिज्या

(x) वर्तुळाचे क्षेत्रफळ = $\pi \times$ (त्रिज्या)^2

२०.१ काही विशिष्ट चौकोन आणि त्रिकोण यांची परिमिती आणि क्षेत्रफळे ः

आपणास माहित आहे की, प्रतलीय बंदिस्त आकृतीची सीमेवरून (कडावरून) चाललेले एकूण अंतर म्हणजेच त्या आकृतीची परिमिती आणि त्या आकृतीने व्यापलेल्या क्षेत्राला तिचे क्षेत्रफळ म्हणतात. तसेच आपणास माहीत आहे की, परिमिती किंवा लांबी ही रेषीय (साध्या) एककात मोजतात तर क्षेत्रफळ वर्ग एककात मोजतात. उदा. मी^{2}. सेमी^{2} किंवा मिमी^{2} ही क्षेत्रफळाची एकके आहेत. (ती वर्ग मी, वर्गसेमी किंवा वर्गमिमी अशीही लिहितात) तसेच तुम्ही काही विशिष्ट चौकोन (जसे चौरस,आयत,समांतरभुज, चौकोन ई.) आणि त्रिकोण यांची सुत्रे वापरून परिमिती व क्षेत्रफळे काढण्याच्या परिगणनाबाबत परिचित आहात. आता आपण या ज्ञानाचे दृढीकरण काही उदाहरणांच्या साहाय्याने करू या.

प्रतिमीटर Rs.15. दराने शेताच्या नांगरणीचा खर्च = 20250Rs.

$\therefore$ शेताचे क्षेत्रफळ = $\frac{20250}{15}$ मी^{2}

= 13.50 मी^{2} .... (2)

(1) व (2) वरून

$$\frac{3x^2}{2} = 1350$$

$$\therefore \quad x^2 = \frac{1350 \times 2}{3} = 900 = 30^2$$

$$\therefore \quad x = 30$$

संगत उंची 30 मी. आणि पाया 3 X 30 म्हणजेच 90 मी.

उदाः 20.5 : 16 सेमी व 12 सेमी कर्ण असलेल्या समभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ काढा.

उकल ः समभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ × कर्णांचा गुणाकार

= $\frac{1}{2}$ X 16 X 12

= 96 सेमी^{2}

उदा ः 20.6 : समलंब चौकोनाच्या समांतर बाजूंची लांबी 20 सेमी. आणि 12 सेमी असून त्यामधील अंतर 5 सेमी आहे. समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ काढा .

उकल ः समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ (समांतर बाजूंची बेरीज) × (त्यामधील अंतर)

= $\frac{1}{2}$ (20 + 12) X 5

= 80 सेमी^{2}

तुमची प्रगती तपासा - 20.1

१. चौरसाकृती क्षेत्राचे क्षेत्रफळ 225 मी^{2} आहे. तर त्या क्षेत्राची परिमिती काढा.

२. 60 सेमी परिमिती असलेल्या चौरसाच्या कर्णाची लांबी काढा.

३. आयताकृती भूखंडाची लांबी, रूंदी अनुक्रमे 22.5 मी. व 12.5 मी आहे तर

 (i) भूखंडाचे क्षेत्रफळ काढा.

 (ii) भूखंडाला कुंपण घालण्यासाठी लागणा-या काटेरी तारेची लांबी काढा.

४. आयताच्या लांबी रूंदीचे गुणोत्तर 3:2 आहे. जर आयताचे क्षेत्रफळ 726 मी^{2} असेल तर त्याची परिमिती काढा.

५. समांतरभुज चौकोनाचा पाय आणि संगत उंची अनुक्रमे 20 मी व 12 मी आहे तर त्याचे क्षेत्रफळ काढा.

६. त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ 280 सेमी^{2} आहे. जर त्याचा पाया 70 सेमी असेल तर त्याची संगतउंची काढा.

७. ज्याच्या समांतर बाजूंची लांबी 26 सेमी व 12 सेमी आहे आणि त्यामधील अंतर 10 सेमी आहे. अशा समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ काढा.

८. समभुच चौकोनाची परिमिती 146 सेमी असून त्याच्या एका कर्णाची लांबी 48 सेमी आहे तर त्याच्या दुस-या कर्णाची लांबी काढा.

20.2 'हिरो'चे सूत्र ः

जर त्रिकोणाचा पाया आणि संगत उंच माहित असेल तर तुम्ही अगोदरच वापरलेले सूत्र खालीलप्रमाणे ः

$$\text{त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ} = \frac{1}{2}\ \text{पाया} \times \text{संगत उंची}$$

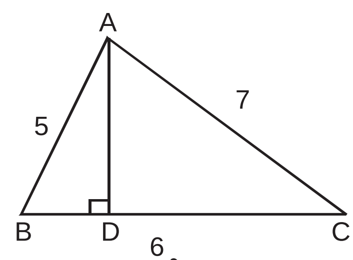
तरीही काही वेळा त्रिकोणाचा पाया आणि संगतउंची न देता त्याऐवजी त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजू दिल्या असतील तर अशा स्थितीत आपण बाजू संगत उंची काढून त्याचे क्षेत्रफळ काढू शकतो. उदाहरणासह ते आपण स्पष्ट करू.

उदाः 20.7 : त्रिकोण ABC च्या बाजू AB, BC आणि CA अनुक्रमे 5 सेमी, 6 सेमी आणि 7 सेमी आहेत तर त्रिकोण ABC चे क्षेत्रफळ काढा.

उकल : $AD \perp BD$ काढा.

समजा $BD = x$

$\therefore CD = (6 - x)$



आकृती २०.१

आता काटकोन त्रिकोण ABC मध्ये

$AB^2 = BD^2 + AD^2$ .... पायथागोरस प्रमेय

$\therefore 25 = X^2 + AD^2$ .... (1)

त्याचप्रमाणे काटकोन त्रिकोन ACD मध्ये

$AC^2 = CD^2 + AD^2$ .... पायथागोरस प्रमेय

$\therefore 49 = (6 - x)^2 + AD^2$ .... (2)

(1) व (2) वरून

$49 - 25 = (6 - x)^2 - x^2$

$24 = 36 - 12x + x^2$

किंवा $12 = 12x$

$\therefore x = 1$

x ची ही किंमत (1) मध्ये ठेवून

$25 = 1 + AD^2$

$\therefore AD^2 = 24$ किंवा $AD = \sqrt{4X6} = 2\sqrt{6}$ सेमी

$\therefore \Delta ABC$ चे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2} X 6 X 2\sqrt{6}$

$= 6\sqrt{6}$ सेमी^{2}

तुमच्या हे निदर्शनास आलेच असेल की, वरील पध्दतीत वापरलेल्या पाय-या खूपच लांबलचक आहेत. अशा परिस्थितीत मदत व्हावी म्हणून त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजू दिल्या असता त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढण्याचे सूत्र आपल्याला ग्रीक गणिती 'हिरो' (इ.स.पूर्व ७५ ते इ.स.पूर्व १०) याने दिले आहे ते खालीलप्रमाणे :

त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $\qquad S = \frac{a+b+c}{2}$

येथे a,b,c या त्रिकोणाच्या तीन बाजू असून त्रिकोणाची अर्धपरिमिति

हे सूत्र आपण उदा. 20.7 प्रमाणे a,b,c च्या किमंती अनुक्रमे 6,7,5 घेवून सिध्द करू शकतो. आता आपण उदा. 20.7 मधील त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ हे सूत्र वापरून काढू.

येथे, a = 6 सेमी, b = 7 सेमी आणि c = 5 सेमी

$\therefore s = \frac{6+7+5}{2} = 9$ सेमी

$\therefore$ त्रिकोण ABC चे क्षेत्रफळ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{9(9-6)(9-7)(9-5)}$ सेमी^{2}

$= \sqrt{9 X 3 X 2 X 3}$ सेमी^{2}

$= =3X2\sqrt{3X2} = 6\sqrt{6}$

सेमी^{2} जे यापूर्वीच आपणाला मिळालेले आहे.

आता आपण आणखी काही नमुना उदाहरणाव्दारे हे स्पष्ट करू या.

उदा. 20.8: त्रिकोणाकृती भूखंडाचा बाजू 165 मी, 154 मी व 143 मी. आहेत. तर त्या भूखंडाचे क्षेत्रफळ काढा.

उकल ः $S = \frac{a+b+c}{2}$

$= \frac{165+154+143}{2}$

$= 231$

$\therefore$ त्रिकोणाकृती भूखंडाचे क्षेत्रफळ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{231(231-165)(231-154)(231-143)}$

$= \sqrt{231 X 66 X 77 X 88}$ मी^{2}

$= 11 X 11 X 3 X 7 X 2 X 2 = 10164$ मी^{2}

उदा. 20.9 : समलंब चौकोनाच्या समांतर बाजूची लांबी 11 सेमी आणि 25 सेमी असून असमांतर बाजूंची लांबी 15 सेमी व 13 सेमी आहे तर समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ काढा.

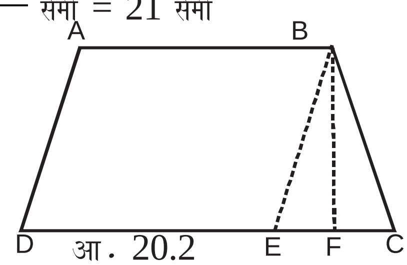
उकल ः समजा □ ABCD हा समलंव चौकोन असून त्याच्या बाजू AB = 11 सेमी CD = 25 सेमी, AD = 15 सेमी आणि BC = 13 सेमी (आ. 20.2)

बिंदू B मधून रेख AD हा समांतर रेषा काढा ती रेख DC ला बिंदू E मध्ये छेदेल.

BF $\perp$ DC काढा. त्रिकोण BEC मध्ये, $S = \frac{15+13+14}{2}$ सेमी $= 21$ सेमी

आता BE = AD = 15 सेमी

BC = 13 सेमी (दिलेले) आणि



आ. 20.2

EC = (25-11) सेमी = 14 सेमी

$\therefore$ $\triangle$ BEC चे क्षेत्रफळ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$= \sqrt{21(21-15)(21-13)(21-14)}$$

$$= \sqrt{21 X 6 X 8 X 7} \text{ सेमी}^2$$

$$= 7 X 3 X 4 \text{ सेमी}^2 = 84 \text{ सेमी}^2 \dots\dots\dots\dots(1)$$

आता $\triangle$ BEC चे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2}$ EC X BF

$$84 = \frac{1}{2} x 14 x BF$$

$$\therefore BF = \frac{84}{7} = 12 \text{ सेमी}$$

$\therefore$ समलंब चौकोन ABCD चे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2}(AB + CD) X BF$

$$= \frac{1}{2}(11 + 25) x 12 \text{ सेमी}^2$$

$$= 18 X 12 \text{ सेमी}^2$$

$$= 216 \text{ सेमी}^2$$

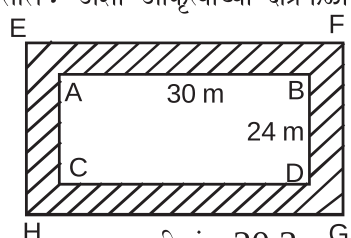
तुमची प्रगती तपासा - 20.2

1. 15 सेमी, 16 सेमी व 17 सेमी बाजू असलेल्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढा.
2. 'हिरो' च्या सूत्राचा उपयोग करून 17 सेमी बाजू असलेल्या समभुज त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढा. तसेच त्रिकोणाची उंची काढा.

20.3 चौकोनाकृती पथ आणि काही नियमित आकृत्यांचे क्षेत्रफळ :

तुम्ही तुमच्या परिसरातील बागामध्ये (उद्यानांमध्ये) चौकोनाकृती पथ पाहिले असतील . तसेच काही वेळा जमीन किंवा भूखंड वेडेवाकाडे असल्याचेही तुम्ही पाहिले असेल म्हणजेच त्या अनेक बहुभुजाकृतीच्या आकारापासून जसे आयत, चौरस, त्रिकोण इ. पासून बनलेल्या असतील. अशा आकृत्यांच्या क्षेत्रफळांचे गणन करण्याविषयीचे स्पष्टीकरण काही उदाहरणाव्दारे करू या.

उदा: **20.10: 30मी लांब व 24 मी. रूंदीच्या बागेभोवती 4 मी रूंदीचा रस्ता आहे. तर त्या रस्त्याचे क्षेत्रफळ काढा.**



आकृती नं. 20.3

उकल ः समजा ABCD ही बाग असून त्याभोवती रेखांकित भागाने दाखविलेला रस्ता आहे. (आकृती नं. 20.3)

∴आयत EFGH ची लांबी = 30+4+4 = 38 मी

आयत EFGH ची रूंदी = 24 +4+4 = 32 मी

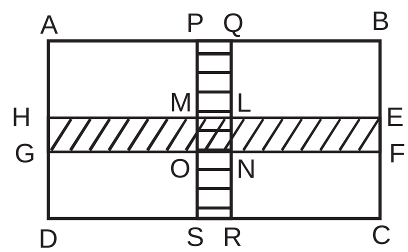
∴ रस्त्याचे क्षेत्रफळ =आयत EFGH चे क्षेत्रफळ – आयत ABCD चे क्षेत्रफळ

= (38 X32-30X24) मी^{2}

= (1261 - 720) मी^{2}

= 496 मी^{2}

• उदाः **20.11: एका बागेमध्ये (आकृती 20.4) मध्ये दाखविल्याप्रमाणे दोन आयताकृती रस्ते आहेत. तर त्या रस्त्याचे कॉंक्रीटीकरण करण्यासाठी 15 रू. प्रति चौरस मीटर दराने येणारा खर्च काढा.**



आकृती नं. 20.4

उकल ः

- दिलेल्या बावी
- AB = CD = 50 मी
- AD = BC = 40 मी
- EF = PQ = 2.5 मी

रस्त्याचे क्षेत्रफळ =PQRS चे क्षेत्रफळ + EFGH चे क्षेत्रफळ – चौरस MLNO चे क्षेत्रफळ

= (40 X 2.5) + (50 X 2.5) – (2.5 X 2.5)

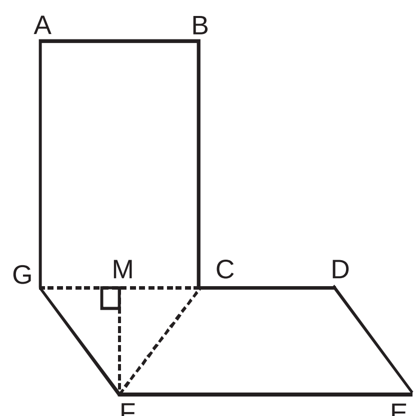
= 218.75 मी^{2}

∴ 15 रू. पति चौरस मीटरप्रमाणे

रस्त्याच्या कॉंक्रीटीकरणाचा खर्च = 218.75 X 15

= 3281.25

उदा. **20.12 : आकृती ABCDEFG (आ. 20.5 पाहा) चे क्षेत्रफळ काढा. ज्यामध्ये ABCG हा आयत असून AB = 3 सेमी, BC = 5 सेमी, GH = 2.5 सेमी = DE = CF, CD = 3.5 सेमी,**



आकृती नं. 20.5

EF = 4.5 सेमी आणि CD ∥ EF.

उकल ः अपेक्षित क्षेत्रफळ = (आयत ABCG + FGCसमाद्विभुज त्रिकोण + DCEF समलंब चौकोन) क्षेत्रफळ   FGC चे क्षेत्रफळ   DCEF चे क्षेत्रफळ   ....(1)

आता आयत ABCG

चे क्षेत्रफळ   = X b

= 5 X 3 = 15सेमी^{2} … (2)

△ FGC चे क्षेत्रफळासाठी FM ⊥ CG काढा.

FG = FC (दिलेले)

∴ M हा GM = $\frac{3}{2}$ = 1.5 सेमी

आता △GFM वरून

$GF^2 = FM^2 + GM^2$

$\therefore (2.5)^2 = FM^2 + (1.5)^2$

$\therefore (FM)^2 = \sqrt{(2.5)^2 - (1.5)^2}$

$\therefore FM = \ 4 \ = 2$

∴ FM = 2 म्हणजेच FM ची लांबी = 2 सेमी

∴ त्रिकोण FGC चे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ GC X FM

= $\frac{1}{2}$ X3X2 सेमी^{2}

= 3 सेमी^{2} ……… (3)

∴ समलंब चौकोन CDEF चे

क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ (समांतर बाजूंची बेरीज) × (समांतर बाजूमधील अंतर)

= [(3.5 + 4.5) X 2] सेमी^{2}

= 8 X2 सेमी^{2} = 16 सेमी^{2} ………. (4)

∴ दिलेल्या आकृतीचे क्षेत्रफळ = (15+3+8) सेमी^{2}

= 26 सेमी^{2}

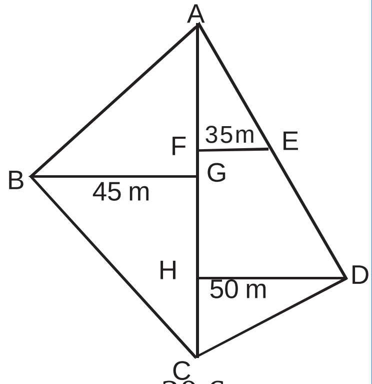
………. (1),(2),(3),(4) वरून

तुमची प्रगती तपासा – 20.3

1. 48 मी लांब आणि 36 मी रूंद आयताकृती बागेच्या कडेला लागून आतून 3 मी रूंदीचा रस्ता काढलेला आहे. तर त्या रस्त्याचे क्षेत्रफळ काढा.

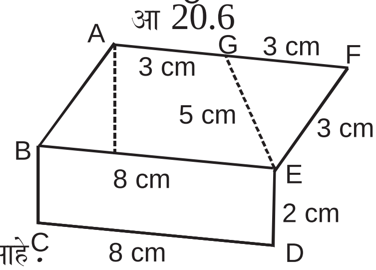
2. 80 मी लांब आणि 60 मी रूंदीच्या आयताकृती उद्यानाच्या मधोमध 2 मी रूंदीचे दोन रस्ते काढले आहेत. त्यापैकी एक लांबीला समांतर व दुसरा रूंदीला समांतर आहे. तर रस्त्यांचे क्षेत्रफळ काढा.

3. आकृती 20.6 मधील आकृती ABCD चे क्षेत्रफळ काढा. EF, BG, आणि DH हे AC वर काढलेले लंब आहेत.
AF = 40 मी, DG = 50 मी
GH = 40 मी आणि CH = 50 मी



आ 20.6

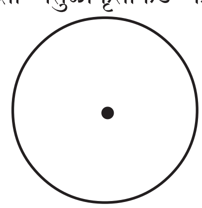
4.आकृती 20.7 मधील आकृती ABCDEFG चे क्षेत्रफळ काढा.येथे ABEG हा समलंब चौकोन असून BCDE हा आयत आहे. आणि AG व BE मधील अंतर 2 सेमी आहे.



आ 20.7

20.4 वर्तुळांचे क्षेत्र आणि वर्तुळाकार मार्गाचे क्षेत्रफळ ः

आतापर्यंत आपण रेषा आणि रेषाखंड तयार झालेल्याच आकृत्या परिमिती व क्षेत्रफळासंबंधी आपण चर्चा केलेली आहे. आता आपण इतर सर्व परिचित आणि उपयोगी अशा वर्तुळाकृतीकडे की जी रेषाखंडापासून बनलेली नाही लक्ष केंद्रित करणार आहोत.



आ 20.8

(आकृती 20.8)(तुम्हाला आधीच माहित आहे की, वर्तुळाची परिमिती (परीघ)या $2\pi r$ तर त्याचे क्षेत्रफळ πr^2 इतके असतो.येथे r ही वर्तुळाची त्रिज्या असून π हा वर्तुळाचा परिघ व त्याचा व्यास यांचे स्थिर गुणोत्तर आहे. तुम्हाला 'π 'ही अपरिमेय संख्या असल्याचे माहित आहे. ज्येष्ठ भारतीय गणिती आर्यभट्ट (476-550 AD)याने π ची किंमत $\frac{62832}{20000}$ दिली आहे. की जी 3.1416 (चार दशांश स्थळापर्यंत) इतकी आहे.तरीही त्याची किंमत दिली असताना सर्वसामान्यपणे व्यवहारात वापरण्यासाठी ची किंमत सोयीसाठी अंदाजे $\frac{22}{7}$ किंवा 3.14 घेतात.
आपण ची किंमत घेऊ या.

उदा. 20.13 ः दोन वर्तुळांच्या त्रिज्या 18 सेमी आणि 10 सेमी आहेत. तर त्यांच्या परिघांच्या बेरजेएवढा परीघ असलेल्या वर्तुळाची त्रिज्या काढा.

उकल ः समजा वर्तुळाची त्रिज्या r सेमी आहे.

$\therefore$ त्याचा परिघ = $2\pi r$ सेमी. .... (i)

$\therefore$ दोन्ही वर्तुळाची एकूण परीघ = $(2\pi \times 18 + 2\pi \times 10)$ सेमी.

= $2\pi \times 28$ सेमी. ...... (ii)

$\therefore$ (i) व (ii) वरून

$\therefore 2r = 2\ 28$

$\therefore r = 28$

$\therefore$ इष्ट वर्तुळाचा परीघ 28 सेमी.

उदा. 20.14 ः 16 मी. त्रिज्या असलेल्या वर्तृळाकृती बागेच्या कडेला लागून आतून 2 मी. रूंदीचा रस्ता काढलेला आहे. तर तो रस्ता विटांचा करण्यासाठी प्'ति चौरस मीटर 24 ‘. दराने किती खर्च येईल ते काढा. (π = 3.14) (आकृत्या 20.9)

उकलः OA ही वर्तृळाकार बागेची त्रिज्या आणि रेखांकित भाग हा रस्ता मानू.

$\therefore$ OA = 16 मी. आणि OB = 16-2= मी.

रस्त्याचे क्षेत्रफळ = $(\pi \times 16^2 - \pi \times 14^2)$ मी^{2}

= (16 + 14) (16 - 14)

= 3.1 X 30 X 2 मी^{2}

= 188.4 मी^{2}

विटा बसविण्याचा एकूण खर्च = (24 प्रतिमीटर दराने).

= 24$\times$ 188.4

= 4521.60

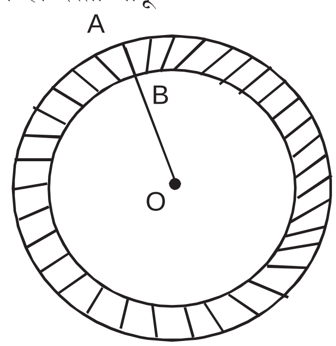


Fig. 20.9

तुमची प्रगती तपासा - २०.४.

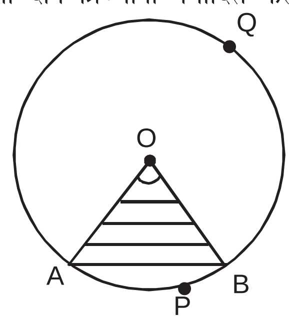
1.दोन वर्तुळांच्या त्रिज्या 9 सेमी आणि 12 सेमी आहेत. तर त्यांच्या एकूण क्षेत्रफळांइतके क्षेत्रफळ असणा-या वर्तुळांच्यात्रिज्या काढा.

2. एका मोटारीच्या प्रत्येक चाकाची त्रिज्या 40 सेमी आहे. जर त्या मोटारीचा वेग 66 किमी दरताशी असेल तर 20 मिनिटामध्ये प्रत्येक चाकाच्या झालेल्या एकूण फे-यांची संख्या काढा.

3. 21 मीटर त्रिज्या असलेल्या उद्यानाच्या बाहेरून सभोवती 7 मी. रूंदीचा रस्ता काढला आहे. तर त्या रस्त्याचे क्षेत्रफळ काढा.

20.5 वर्तृळपाकळीची परिमिती आणि क्षेत्रफळ

वर्तुळपाकळी या सज्ञेची आपणास परिचय आहेच. तथापि वर्तुळाच्या दोन त्रिज्यांनी मर्यादित केलेल्या वर्तुळाच्या क्षेत्रफळाच्या भागाला वर्तुळपाकळी म्हणतात.



आकृती 20.10

आकृती 20.10 मधील O केंद्र असलेल्या वर्तुळाच्या छायाकिंत केलेला भाग OAPB म्हणजेच त्या वर्तुळाची वर्तुळपाकळी आहे

$\angle$ AOB हा क्रेद्रिय कोन किंवा वर्तृळपाकळीचे माप म्हणतात. आणि APB हा या वर्तुळपाकळीशी संबंधित वर्तुळकंस आहे. तुम्ही हे सुध्दा ध्यानांत घ्या की, OAQB (छायाकिंत नसलेला) भागसुध्दा याच वर्तृळाचा एक भाग आहे. साहजिकच OAPB हा लघुवर्तुळपाकळी (Minor Sector) आणि OAQB ला विशाल वर्तुळपाकळी (Major are) म्हणतात. (विशाल वर्तुळकंस AQB सह)

टीप ः वर्तुळपाकळी विषयी स्वतंत्र विशेष उल्लेख नसेल अशा वेळी लघु वर्तुळपाकळी असा अर्थ घ्यावा.

(i) वर्तृळपाकळीची परिमितीः

वर्तुळपाकळी OAPB ची परिमिती =OA+ OB + कंस APB ची लांबी.

समजा, त्रिज्या OA (किंवा OB)ही r ,कंस APB ची लांबी ℓ आणि $\angle$ AOB हा Q मानू. वर्तुळकंस APB ची लांबी आपण खालीलप्रमाणे काढू शकतो.

आपणास माहित आहेच की, वर्तृळाचा परिघ $= 2\pi r$.

2म्हणजेच वर्तृळक्रेंद्राशी एकूण झालेल्या 360^o कोनाशी संबंधित,लांबी= $2\pi r$.

म्हणून Q कोनासाठी लांबी $= \dfrac{2\pi r}{360} \times Q$

किंवा $= \dfrac{\pi r Q}{180^o}$ .....(1)

म्हणून ,OAPB वर्तुळपाकळीची परिमिती = OA + OB+

$$= r + r + \frac{\pi r Q}{180^o}$$

$$= 2r + \frac{\pi r Q}{180^o}$$

(ii) वर्तृळपाकळीचे क्षेत्रफळ

वर्तृळाचे क्षेत्रफळ $= \pi r^2$

टिपा

360° एकूण कोनासाठी ,क्षेत्रफळ $= \pi r^2$

म्हणून Q कोनासाठी ,क्षेत्रफळ $= \frac{\pi r2}{360} \times Q$

म्हणून , OAPB वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ $\frac{\pi r2Q}{360}$

टीप ः (360° - Q) कोन घेवून आपण विशाल वर्तुळपाकळीची (OAQB) ची परिमिती आणि क्षेत्रफळ खालीलप्रमाणे काढू शकतो.

परिमिती $= 2\,r + \frac{\pi r(360° - Q)}{180°}$

आणि क्षेत्रफळ $= \frac{\pi r2}{360} \times (360° - Q)$

दाः 20.15:- वर्तुळाची त्रिज्या 9 सेमी असुन केंद्रिय कोन 35° असलेल्या वर्तुळपाकळीची परिमिती व क्षेत्रफळ काढा.

उकल ः वर्तुळपाकळीची परिमिती $= 2\,r + \frac{\pi rQ}{180°}$

$= (2 \times 9 + \frac{22}{7} \times \frac{9 \times 35°}{180°})$ सेमी

$= (18 + \frac{11 \times 1}{2})$ सेमी

$= \frac{47}{2}$ सेमी

वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ $= \frac{\pi r2\,Q}{360°}$

$= (\frac{22}{7} \times \frac{81 \times 35°}{360°})$

$= (\frac{11 \times 9}{4})$ सेमी^{2}

$= \frac{99}{4}$ सेमी^{2}

दा ः 20.16 :- वर्तुळाची त्रिज्या 6 सेमी असुन वर्तुळकंसाची लांबी 22 सेमी आहे. तर त्या वर्तुळपाकळीची परिमिती व क्षेत्रफळ काढा.

उकल ः वर्तुळपाकळीची परिमिती = 2 r + वर्तुळकंसाची लांबी

$= (2 \times 6 + 22)$ सेमी = 34 सेमी.

क्षेत्रफळासाठी प्रथमतः आपण क्रेंद्रिय कोनाचे माप Q काढू.

म्हणून, $\frac{\pi rQ}{180°} = 22.$

$\therefore \frac{22}{7} \times 6 \times \frac{Q}{180°} = 22$

$$\therefore Q = \frac{180^\circ \times 7}{6} = 210^\circ$$

$$\therefore \text{वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ} = \frac{\pi r^2 Q}{360^\circ}$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{36 \times 210^\circ}{360^\circ}$$

$$= 66 \text{ सेमी}^2$$

क्षेत्रफळ काढण्यासाठी पर्यायी पध्दत.

वर्तुळाचा परिघ $= 2\pi r$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 6 \text{ सेमी}$$

आणि वर्तुळाचे क्षेत्रफळ $= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times 6 \times 6$ सेमी^{2}

$\therefore$ लांबी $2 \times \frac{22}{7} \times 6$ सेमी साठी, क्षेत्रफळ $= \frac{22}{7} \times 6 \times 6$ सेमी^{2}

$\therefore 22$ सेमी. लांबीसाठी, क्षेत्रफळ $= \frac{22}{7} \times \frac{6 \times 6 \times 7 \times 22}{2 \times 22 \times 6}$ सेमी^{2}

$$= 66 \text{ सेमी}^2$$

तुमची प्रगती तपासा - 20.5.

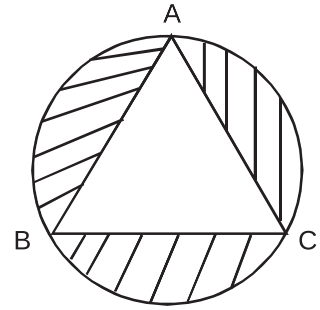
१. वर्तुळाची त्रिज्या 14 सेमी असून केंद्रिय कोनाचे 30° असणा-या वर्तुळपाकळीची परिमिती व क्षेत्रफळ काढा.

२. वर्तुळाची त्रिज्या 6 सेमी व वर्तृळकंसाची लांबी 11 सेमी आहे. तर त्या वर्तुळपाकळीची परिमिती व क्षेत्रफळ काढा.

20.6 : वर्तुळकृतींचा समावेश असलेल्या संयुक्त आकृत्यांचे क्षेत्रफळ.

आतापर्यंत आपण प्रत्येक आकृतीच्या क्षेत्रफळाविषयी स्वतंत्रपणे चर्चा केली आहे. आता आपण दोन प्रतलीय आकृत्यांच्या संयुक्तपणे तयार झालेल्या आकृत्यांच्या क्षेत्रफळाचे परिगणन करण्याचा प्रयत्न करणार आहोत. आपल्या दैनंदिन जीवनामध्ये अशा विविध आकृत्यांच्या रूपामध्ये आपला संबंध येतो. उदा. टेबल कव्हर, फूलदाणी, खिडक्या इ. वर काढलेली विविध डिझाईन्स, काही उदाहरणाव्दारे अशा आकृत्यांची क्षेत्रफळ काढण्याची पध्दती आपण समजावून घेवून या.

उदा. **20.17** :- आकृती **20.11** मध्ये दर्शविल्यानुसार एका वर्तुळाकार टेबल वरील कव्हरवर काढलेल्या डिझाईनमध्ये एक समभुज ΔABC काढलेला आहे.



आ. 20.11

जर त्या कव्हरची त्रिज्या **3.5** सेमी आहे. तर रू. **0.50** प्रतिचौरस सेमीदराने ते डिझाईन तयार करण्यासाठी येणारा खर्च काढा. ($\pi = 3.14$ आणि $\sqrt{3} = 1.7$ घ्या.)

उकल ः समजा कव्हरचे केंद्र O आहे.

OP $\perp$ BC काढा. आणि OB , OC जोडा. आ. 20.11

आता, $\angle BOC = 2 \angle BAC = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$

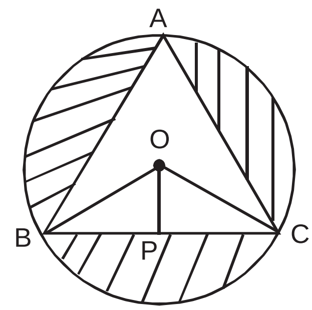
तसेच, $\angle BOP = \angle COP = \frac{1}{2} \angle BOC = \frac{1}{2} \times 120^0 = 60^0$

आता, $\frac{BP}{OB} = \sin BOP = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

म्हणजेच, $\frac{BP}{3.5} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore BP = \frac{3.5 \times \sqrt{3}}{2}$

$$\therefore BC = 2 \times BP$$

$$= 2 \times \frac{3.5 \times \sqrt{3}}{2} = 3.5\sqrt{3} \text{ सेमी.}$$



आ. 20.12

म्हणून , त्रिकोण ABC चे क्षेत्रफळ $= \frac{\sqrt{3}}{4} BC^2$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3.5 \times 3.5 \times 3 \text{ सेमी}^2$$

आता, डिझाईनचे क्षेत्रफळ = वर्तुळाचे क्षेत्रफळ $- \Delta ABC$ चे क्षेत्रफळ

$$= (3.14 \times 3.5 \times 3.5 - \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3.5 \times 3.5 \times 3) \text{ सेमी}^2$$

$$= (3.14 \times 3.5 \times 3.5 - \frac{1.7 \times 3.5 \times 3.5 \times 3}{4} \times) \text{ सेमी}^2$$

$$= 3.5 \times 3.5 (\frac{12.56 - 5.10}{4}) \text{ सेमी}^2$$

$$= 12.25 \left(\frac{7.46}{4}\right) \text{ सेमी}^2$$

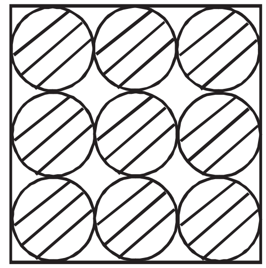
$$= 12.25 \times 1.865 \text{ सेमी}^2$$

∴ रू. 0.50 प्'ति चौ. सेमी. दराने डिझाईन तयार करण्यासाठी

येणारा खर्च = रू.$12.25 \times 1.865 \times 0.50$

= रू.114. 23 (अंदाजे)

उदा. 20.18 :- एका चौरसाकृती हातरूमालावर 7 सेमी त्रिज्येची नऊ वर्तुळे वापरून (आकृती 20.13) मध्ये दाखविल्यानुसार डिझाइन तयार केलेले आहे. तर त्या हातरूमालावरील उरलेल्या भागाचे क्षेत्रफळ काढा.



आ. 20.13

उकल ः ∴ वर्तुळाकृती डिझाइनची त्रिज्या 7 सेमी आहे.

प्रत्येक वर्तुळाचा व्यास = 2X7=14 सेमी

चौरसाकृती हातरूमालाची बाजू = 3X14 सेमी ....(1)

चौरसाचे क्षेत्रफळ = 42X42 सेमी^{2}

आणि एका वर्तुळाचे क्षेत्रफळ $^2 = \pi r^2$ सेमी^{2}

= 154 सेमी^{2}

म्हणून 9 वर्तुळाचे क्षेत्रफळ = 9×154 सेमी^{2} ....(2)

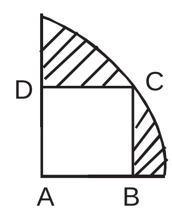
∴ (1) व (2) वरून.

उरलेल्या भागाचे क्षेत्रफळ = $(42 \times 42 - 9 \times 154)$ सेमी^{2}

= (1764–1386) सेमी^{2}

= 378 सेमी^{2}

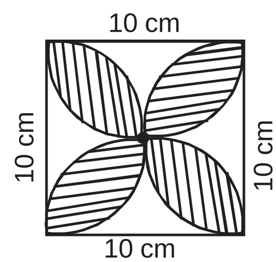
तुमची प्रगती तपासा 20.6



आ. 20.14

1. बाजू 6 सेमी असलेला चौरस ABCD हा 14 सेमी त्रिज्या असलेल्या वर्तृळाच्या एका चरणात आंतरलिखित केलेला आहे. (आकृती 20.14) तर रेखांकित भागाचे क्षेत्रफळ काढा.

2. बाजू 10 सेमी असलेल्या चौरसाकृतीवर आकृती 20.15 मध्ये दर्शविल्यानुसार अर्धवर्तृळे काढून एका डिझाईन तयार केलेले आहे तर छायाकिंत केलेल्या डिझाईनच्या भागाचे क्षेत्रफळ काढा.



आ. 20.15-

+9887

सारांश

- आयताची परिमिती = 2 (लांबी + रूंदी)
- आयताचे क्षेत्रफळ = लांबी $\times$ रूंदी
- चौरसाची परिमिती = $4 \times$ बाजू
- चौरसाचे क्षेत्रफळ = (बाजू)^2
- समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ = पाया $\times$ पायासंगत उंची.
- त्रिकोनाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2} \times$ पाया $\times$ पायासंगतउंची
- आणि $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, येथे a,b,c या त्रिकोणांच्या बाजूंच्या लांबी आहेत.

  आणि $s = \frac{a+b+c}{2}$
- समभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2} \times$ चौकोनाच्या कर्णांचा गुणाकार
- समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$(समांतर बाजूंची बेरीज) $\times$ त्यामधील अंतर
- आयताकृती रस्त्याचे (मार्गिकेचे) क्षेत्रफळ = (बाहयआयताचे क्षेत्रफळ) – (आतील आयताचे क्षेत्रफळ)
- (परस्परांना छेदणा-या रस्त्यांच्या मध्यभागाचे क्षेत्रफळ) = (दोन्ही रस्त्यांचे क्षेत्रफळ)— (सामाईक भागाचे क्षेत्रफळ)
- वर्तृळाचा परिघ = $2\pi r$ (त्रिज्या 4 असलेल्या)
- r त्रिज्येच्या वर्तुळाचे क्षेत्रफळ = $\pi r2$
- (वर्तुळाकार मार्गाचे रस्त्याचे क्षेत्रफळ) = (बाहयवर्तुळाचे क्षेत्रफळ)— (आतील वर्तुळाचे क्षेत्रफळ)
- त्रिज्या r_1 आणि केंद्रिय कोन Q असलेल्या

  वर्तुळपाकळीच्या संबंधित कंसाची लांबी $\ell = \frac{\pi r Q}{180^\circ}$
- त्रिज्या r_1 आणि केंद्रिय कोन असलेल्या

  वर्तुळपाकळीची परिमिती $= 2r = = \frac{\pi r Q}{180^\circ}$
- त्रिज्या r_1 आणि केंद्रिय कोन असलेल्या

  वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ $= = \frac{\pi r2Q}{360^\circ}$

- अनियमित आकाराच्या ब-याच आकृत्यांचे क्षेत्रफळ त्या आकृतींचे माहित असलेल्या आकृत्यांमध्ये उदा. चौरस,आयत,त्रिकोण इ. विभाजन करून मिळवितात.
- वर्तुळाकृतींचा समावेश असलेल्या विविध संयुक्त आकृत्यांचे व डिझाइन्सचे क्षेत्रफळ माहित असलेल्या विविध सूत्रांचा उपयोग करून मिळवितात.

सत्र स्वाध्याय

1. चौरसाकृती बागेची बाजू 37.5 मी. आहे तर तिचे क्षेत्रफळ काढा.
2. चौरसाची परिमिती 480 सेमी आहे तर त्याचे क्षेत्रफळ काढा.
3. एका चौरसाकृती भूखंडाचे क्षेत्रफळ 40,000 चौरस मीटर आहे. एक मनुष्य त्याच्या सीमांवरून 4 किमी/ ताशी या वेगाने पायी जात आहे. तर त्यासाठी त्याला एका फे-यासाठी किती वेळ लागेल?
4. एका खोलीची लांबी तिच्या रूंदीच्या तीन पट आहे. जर तिची रूंदी 4.5 मी असेल तर खोलीच्या जमिनीचे क्षेत्रफळ काढा.
5. एका आयताच्या लांबी व रूंदीचे गुणोत्तर 5:2 असून परिमिती 980 सेमी आहे तर त्या आयताचे क्षेत्रफळ काढा.
6. खालील प्रत्येक समांतर भुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ काढा.
   i) एक भुजा 25 सेमी आणि संगत लंबउंची 12 सेमी आहे.
   ii) लगतच्या दोन बाजू 13 सेमी व 14 सेमी असून एक कर्ण 15 सेमी आहे.
7. आयताकृती जागेचे क्षेत्रफळ 27,000 मी^{2} आहे आणि त्याच्या लांबी आणि रूंदीचे गुणोत्तर 6:5 आहे. या जागेभोवती काटेरी तारेचे चार पदरी कुंपण करण्यासाठी प्रति 10 मीटरला 7 रू. दराने किती खर्च येईल?
8. खालील प्रत्येक समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ काढा.

अ.क्र.	समांतर बाजूंच्या लांबी	समांतर बाजूमधील अंतर
(i)	30 सेमी आणि 20 सेमी	15 सेमी
(ii)	15.5 सेमी आणि 10.5 सेमी	7.5 सेमी
(iii)	15 सेमी 45 सेमी	4.6 सेमी
(iv)	40 सेमी आणि 22 सेमी	12 सेमी

9. एका चौकोनाकृती भूखंडाचा एक कर्ण 20 मी. लांबीचा असून त्याच्या विरूध्द कोप-यातून त्यावर टाकलेल्या लंबांची लांबी अनुक्रमे 12 मी. व 18 मी. आहे. तर त्या भूखंडाचे क्षेत्रफळ काढा.
10. एका समलंब चौकोनाकृती जागेच्या समांतर वाजूंची लांबी 48 मी. व 160 मी. असून असमांतर बाजूंची लांबी 50 मी. व 78 मी. आहे. तर त्या जागेचे क्षेत्रफळ काढा.

11. □ABCD मध्ये AB = 8.5 सेमी, BC = 14.3 सेमी, CD = 16.5 सेमी, AD = 8.5 सेमी आणि BD = 15.4 सेमी आहे तर □ ABCD ची परिमिती व क्षेत्रफळ काढा.

12. खाली त्रिकोणाच्या बाजु दिल्या आहेत त्यावरून त्या प्रत्येक त्रिकोणांचे क्षेत्रफळ काढा.
    (i) 2.5 सेमी, 6 सेमी आणि 6.5 सेमी
    (ii) 6 सेमी, 11.1 सेमी आणि 15.3 सेमी

13. एका त्रिकोणाच्या बाजू 51 सेमी, 52 सेमी व 53 सेमी आहेत तर
    (i) त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढा.
    (ii) 52 सेमी लांबी असलेल्या बाजूवर संमुख शिरोबिंदूवरून काढलेल्या लंबाची लांबी काढा.
    (iii) वरील उदा. (ii) मधील लंबामुळे तयार झालेल्या दोन्ही त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढा.

14. एका समभुज चौकोनाची बाजू 5 मी असून त्याच्या एका कर्णाची लांबी 8 मी आहे तर त्या समभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ काढा.

15. 312 चौसेमी. क्षेत्रफळ असलेल्या समलंब चौकोनाच्या दोन समांतर बाजूमधील फरक 8 सेमी आहे. जर समांतर बाजूमधील फरक 24 सेमी असेल तर दोन समांतर बाजूंच्या लांबी काढा.

16. 200 मी X 150 मी. मिती असलेल्या आयताकृती बागेच्या मधोमध परस्परांना लंब असलेले, 10 मी. रूंदीचे दोन रस्ते काढलेले आहेत. त्यापैकी एक रस्ता लांबीशी समांतर तर दुसरा रूंदीशी समांतर आहे. तर हे रस्ते तयार करण्यासाठी दर चौ.मीटरला 5 रू. दराने येणारा खर्च काढा.

17. 65 मी. X 40 मी. मिती असलेल्या आयताकृती हिरवळीच्या जागेच्या आतील बाजूने सभोवती 8 मी रूंदीचा रस्ता काढला आहे. या रस्त्यावर लाल दगडांचे ब्लॉक बसवायचे आहेत. तर 5.25 प्रति चौरस मीटर दराने किती खर्च येईल ?

18. एका आयताकृती बागेची लांबी 30 मी. व रूंदी 20 मी आहे. त्यामध्ये सभोवती 2 मी. रूंदीचे दोन रस्ते आहेत. (एक तिच्या आतील बाजूस व दुसरा बाहेरील बाजूस) तर या रस्त्यांचे एकूण क्षेत्रफळ काढा.

19. वर्तुळाचा परीघ व व्यास यामधील फरक 30 सेमी आहे तर त्याची त्रिज्या काढा.

20. 9 मी. त्रिज्येच्य वर्तुळाकृती बागेच्या सभोवती बाहेरून 3 मी रूंदीचा रस्ता आहे. तर या रस्त्यांचे क्षेत्रफळ काढा.

21. 15 मी. त्रिज्येच्या वर्तुळाकृती बागेच्या सभोवती आतील बाजूने 2 मी. रूंदीचा रस्ता आहे. तर त्या रस्त्याचे क्षेत्रफळ काढा.

22. पुठ्ठयाच्या एका वर्तुळाकृती तुकडयाची त्रिज्या 1.47 मी. आहे. त्यामधून 60^0 मापाची एक वर्तुळपाकळी काढली आहे. तर उरलेल्या पुठ्ठयाचे क्षेत्रफळ काढा.

23. 360 मी. बाजू असलेल्या चौरसाकृती जागेचे क्षेत्रफळ हेक्टरमध्ये काढा.

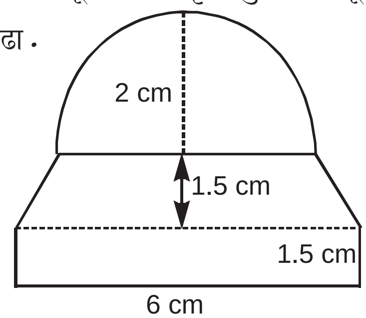
24. एका त्रिकोणाकृती जागेचे क्षेत्रफळ 2.5 हेक्टर आहे. जर त्याची एक बाजू 250 मी असेल तर संगत उंची काढा.

25. समलंब चौकोनाकृतीच्या एका जागेच्या समांतर बाजू 11 मी. व 25 मीटर असून असमांतर बाजू 15 मीटर व 13 मीटर आहेत. तर त्या जागेवर पाणी मारण्यासाठी प्ति 500 चौ.मीटरला 5 पैसे दराने किती खर्च येईल

26. व्यास 8 सेमी असलेल्या वर्तुळाकृती चकतीमधून 1.5 सेमी बाजूचा चौरसाकृती तुकडा काढून घेतला आहे. तर चकतीच्या उरलेल्या भागाचे क्षेत्रफळ काढा.

($\pi = 3.14$ घ्या)

27. आकृती 20.16 मध्ये दिलेल्या मापावरून आकृतीचे क्षेत्रफळ काढा. ($\pi = 3.14$ घ्या)



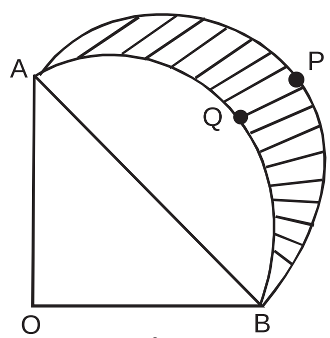
आकृती 20.16

28. एका शेतक-याने दर चौरस मीटरला 700 दराने एक वर्तुळाकृती क्षेत्र 316800 रूपयास विकत घेतले. तर त्या क्षेत्राची परिमिती काढा.

29. 12 मी. बाजू असलेल्या चौरसाकृती जागेच्या एका कोप-यात एका खुंटीला 3.5 मी. लांबीच्या दोराने एक घोडा बांधला आहे. तर त्या जागेपैकी किती भागातील गवत घोडा खाऊ शकेल?

30. परीघ 44 सेमी असलेल्या वर्तुळाच्या एका चरणाचे (quadrant) चे क्षेत्रफळ काढा.

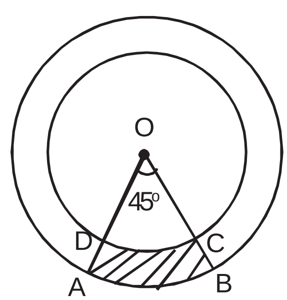
31. आकृती 20.17 मध्ये OAQB हे वर्तुळाचे एक चरण असून वर्तुळाची त्रिज्या 7 सेमी आहे. APB हे अर्धवर्तुळ आहे तर रेखांकित भागाचे क्षेत्रफळ काढा.



आकृती 20.17

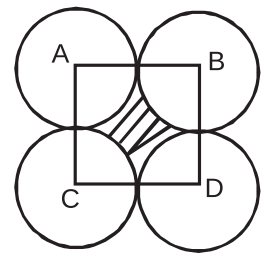
32. आकृती 20.18 मध्ये दोन एक केंद्री वर्तुळाच्या त्रिज्या 7 सेमी व 14 सेमी असून $\angle AOB = 45^0$ तर रेखांकित भाग ABCD चे क्षेत्रफळ काढा.

33. आकृती 20.19 मध्ये 7 सेमी त्रिज्येची



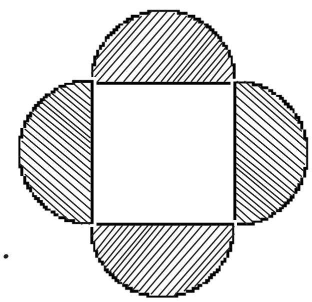
आकृती 20.18

चार एकरूप वर्तुळे एकमेकांना बाहेरून स्पर्श करतात. A, B, C आणि D ही त्यांची वर्तुळकेंद्र आहेत. तर रेखांकित भागाचे क्षेत्रफळ काढा.



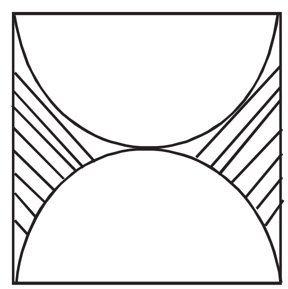
आकृती 20.19

34. आकृती 20.20 मध्ये, अर्धवर्तुळाकृती फूलझाडांनी युक्त रेखांकित जागेचे क्षेत्रफळ काढा. आकृतीत अर्धवर्तुळांचे व्यास अनुक्रमे 14 सेमी, 28 सेमी, 14 सेमी, व 28 सेमी आहेत.



आकृती 20.20

35. आकृती 20.21 मध्ये, 14 सेमी बाजू असलेल्या चौरस ABCD मध्ये आतून आकृतीत दाखविल्यानुसार दोन अर्धवर्तुळे काढलेली आहेत. तर रेखांकित भागाचे व विगर रेखांकित भागाचे क्षेत्रफळ काढा.



आकृती 20.21

खालील उदा.क्र. 36 ते 42 मध्ये, प्रत्येक उदाहरणासाठी दिलेल्या चार पर्यायी उत्तरातून अचूक उत्तर लिहा.

36. a बाजू असलेल्या चौरसाची परिमिती

(A) a^2 (B) 4a

(C) 2a (D) $\sqrt{2a}$

37. त्रिकोणाच्या बाजू 15 सेमी, 20 सेमी आणि 25 सेमी आहेत. त्याचे क्षेत्रफळ =

(A) 30 सेमी ^{2} (B) 150 सेमी ^{2} (C) 187.5 सेमी ^{2} (D) 300 सेमी ^{2}

38. समद्विभूज चौकोनाचा पाया 8 सेमी आणि प्रत्येक एकरूप बाजू 5 सेमी आहे. तर त्या त्रिकोणाची संगत उंची =

(A) 5 सेमी (B) 4 सेमी (D) 3 सेमी (D) 2 सेमी

39. जर समभज त्रिकोणाची बाज a आहे तर त्याची उंची =

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2a^2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2a}$

40. समांतरभुज चौकोनाची एक बाजू 15 सेमी आणि संगत उंची 5 सेमी आहे. तर त्या समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ =

(A) 75 सेमी ^{2} (B) 37.5 सेमी ^{2} (C) 20 सेमी ^{2} (D) 3 सेमी ^{2}

41.समभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ 156 सेमी^{2} आणि त्याचा एक कर्ण 13 सेमी आहे. तर त्याच्या दुसऱ्या कर्णाची लांबी =

(A) 12 सेमी (B) 24 सेमी (C) 36 सेमी (D) 48 सेमी

42.समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ 180 सेमी^{2} असून त्याच्या दोन्ही समांतर बाजू 28 सेमी व 12 सेमी आहेत. त्याच्या दोन्ही समांतर बाजूतील अंतर =

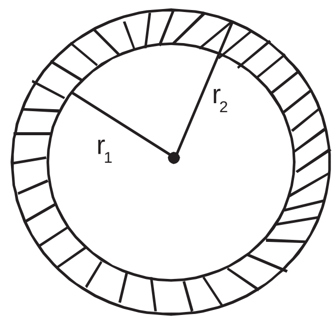
(A) 9 सेमी (B) 12 सेमी (C) 15 सेमी (D) 18 सेमी

43.खालीलपैकी कोणती विधाने सत्य आणि कोणती असत्य आहेत ते लिहा.

(i) आयताची परिमिती लांबी + रूंदी इतकी असते.

(ii) r त्रिज्येच्या वर्तुळाचे क्षेत्रफळ πr^2 असते.

(iii) शेजारीच्या आकृतीमधील रेखांकित भागाचे क्षेत्रफळ म्हणजे $\pi r^2 - \pi r_2^2$ आहे.



(iv) a,b,c बाजू असलेल्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ हे $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ आहे.

येथे s ही त्रिकोणाची अर्ध परिमिती आहे.

(v) त्रिज्या r, आणि केंद्रीय कोन 60^0 असलेल्या वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ $\frac{\pi r^2}{6}$ आहे.

(iv)त्रिज्या 5 सेमी आणि केंद्रीय कोन 120^0 असलेल्या वर्तुळपाकळीची परिमिती 5 सेमी + $\frac{10\pi}{3}$ सेमी आहे.

44. रिकाम्या जागा भरा.

(i) समभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ त्याच्या .... चा गुणाकार

(ii) समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ (त्याच्या ...... ची बेरीज) X (......... मधील अंतर)

(iii) त्रिज्या 4 सेमी आणि 8 सेमी आणि केंद्रीय कोन 100^0 व 50^0 असलेल्या वर्तुळपाकळयांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर .... आहे.

(iv) त्रिज्या 10 सेमी व 5 सेमी आणि केंद्रीय कोन 75^0 आली 150^0 असलेल्या दोन वर्तुळाच्या वर्तुळपाकळयांच्या कंसांच्या लांबीचे गुणोत्तर .... आहे.

(v) कर्ण 16 सेमी व 12 सेमी असलेल्या समभुज चौकोनांची परिमिती ...... आहे.

तुमची प्रगती तपासा – उत्तरे

20.1

1. 60 मी,   2. $15\sqrt{2}$ सेमी   3. (i) 281.25 मी^{2} (ii) 70 मी

4. 110 मी (टीप – $3x$ X 2 = 726   11 मी)   5. 240 सेमी^{2}

6. 80 सेमी   7. 190 सेमी^{2} 8. 55 सेमी, 1320 सेमी^{2}

20.2

1. $24\sqrt{21}$ सेमी^{2} 2. $36\sqrt{3}$ सेमी^{2} , $6\sqrt{3}$ सेमी

20.3

1. 648 मी^{2} 2. 276 मी^{2} 3. 7225 मी^{2} 4. $\left(27+\frac{5}{4}\sqrt{11}\right)$ सेमी^{2}

20.4

1. 15 सेमी   2. 8750   3. 1078 मी^{2}

20.5

1. परिमिती = $35\frac{1}{2}$ सेमी, क्षेत्रफळ = $\frac{154}{3}$ सेमी^{2}

2. परिमिती = 23 सेमी, क्षेत्रफळ = 38सेमी^{2}

20.6

1. 118 सेमी^{2} 2. $4 \times \frac{1}{2}\pi \times 5^2 - 10 \times 10$सेमी^{2} = $(50\pi - 100)$ सेमी^{2}

उत्तरे : संकीर्ण प्रश्नसंग्रह

1. 1406.25 m^2 2. 14400 cm^2 3. 12 minutes

4. 60.75 m^2 5. 49000 cm^2 6. (i) 300 cm^2 (ii) 168 cm^2

7. ₹ 1848

8. (i) 375 cm^2 (ii) 97.5 cm^2 (iii) 438 m^2 (iv) 372 cm^2

9. 300 m^2 10. 3120 m^2 11. 129.36 cm^2

12. (i) 7.5 cm^2 (ii) 27.54 cm^2

13. (i) 1170 cm^2 (ii) 45 cm (iii) 540 cm^2, 630 cm^2

14. 24 m^2 15. 17 cm and 9 cm 16. ₹ 17000

17. ₹ 7476 18. 400 m^2 19. 7 cm

20. 198 m^2 21. 176 m^2 22. 1.1319 m^2

23. 12.96 ha 24. 200 m 25. ₹ 216

26. 47.99 cm^2 27. 22.78 cm^2 28. 75 — m

29. — m^2 30. — cm^2 31. — cm^2

32. — cm^2 33. 42 cm^2 34. 1162 cm^2

35. 42 cm^2, 154 cm^2 36. (B) 37. (B)

38. (C) 39. (C) 40. (A)

41. (B) 42. (A)

43. (i) सत्य (ii) सत्य (iii) असत्य
(iv) असत्य (v) सत्य (vi) असत्य

44. (i) diagonals (ii) parallel sides, them (iii) 1 : 2
(iv) 1 : 1 (v) 40 cm.

21

घनाकृतींचे पृष्ठफळ आणि घनफळ

मागील पाठात आपण त्रिकोण, चौकोन, चौरस, समलंब चौकोन, आमत, वर्तुख, वर्तुळखंड या एकप्रतलीय आकृत्मांची परीमिती आणि क्षेत्रफळे काढण्याविषमीचा अभ्यास केला. मा सर्व आकृत्यांना एकप्रतलीय आकृत्या असे म्हणतात. कारण त्या संपूर्णपणे एकाच प्रतलात असतात. परंतु रोजच्या व्यवहारात आपला संबंध मुख्यतः एकाच प्रतलात नसणाऱ्या आकृत्यांशी (वस्तुंशी) येत असतो. उदा. चेंडू, वीट, आईस्क्रीम कोन, वाजवामचा ढोल इ. मा पदार्थांना घनाकृती किंवा त्रिमितीय पदार्थ असे म्हणतात. या पदार्थांच्या कागदावर काढलेल्या आकृतीस घन रेखाआकृती किंवा त्रिमितीय आकृती असे म्हणतात.

इष्टिकाचिती, त्रिकोणी सूची, घन, वृत्तचिती, शंकू आणि गोल या घनाकृती आपल्या नेहमी पाहण्यात असतात. या घनाकृतींचे पृष्ठफळ आणि घनफळ काढण्माविषमीचा अभ्यास आता आपण करणार आहोत.

उद्दिष्टे -

या पाठाचा आलील गोष्टी समजतील.

- घनाकृतींचे पृष्ठफळ आणि घनफळ म्हणजे काय हे स्पष्ट करू शकाल.
- कोणत्या परिरिस्थितीत घनाकृतीचे पृष्ठफळ आणि कोणत्या परिस्थितीत घनाकृतीचे घनफळ काढावे लागेल हे आपण स्पष्ट करू शकाल.
- इष्टिकाचिती, घन, वृत्तचिती, शंकू, गोल आणि अर्धगोल मांचे पृष्ठफळ योग्म ती सूत्रे वापरून काढू शकाल.
- घनाकृतींचे पृष्ठफळ आणि घनफळ संबंधात रोजच्या व्मवहारात येणाऱ्मा समस्या सोडवू शकाल.

अपेक्षित पूर्वज्ञान-

- एकप्रतलीय आकृत्यांची परिमिती आणि क्षेत्रफळ
- वर्तुळपरीघ आणि वर्तुळाचे क्षेत्रफळ
- चार मुलभूत गणिती क्रिया (संख्यांवरील)
- एकचलीय आणि द्विचलीय समीकरणे

२१.१ घनाकृतीचे पृष्ठफळ आणि घनफळ याचा

चित्रामध्ये दर्शविलेल्या पदार्थांचे यादीत त्यांच्यापुढे दर्शविलेल्मा त्रिमिती आकृतीशी साधर्म्य आहे.

पदार्थ	त्रिमिती आकृती
वीट, कपाट	घन
फासा, चहाचा पुडा	इष्टिकाचिती
वाजवायचा ढोल, पावडरचा डबा	वृत्तचिती
विदुषकाची टोपी, आईस्क्रीम कोन	शंकू
फूटबॉलचा चेंडू	गोल
कटोरा	अर्धगोल

चौकोन म्हणजे त्याच्या बाजूंनी बनलेली आकृती, हे आपणास माहितच आहे. तसेच त्याच्या बाजूंच्या बेरजेस परिमिती आणि बाजूंनी बंदिस्त केलेल्या प्रतलास त्याचे क्षेत्रफळ असे म्हणतात, हे आपण पाहिले आहे. तसेच त्रिकोणाच्या बाजूंच्या बेरजेस त्रिकोणाची परिमिती आणि बाजूंनी बंदिस्त केलेल्मा प्रतलास त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ असे म्हणतात. म्हणजेच प्रतलीय आकृतींचे मोजमाप म्हणजे त्या आकृतींच्या बाजूंचे मोजमाप होय. बाजूंनी बंदिस्त केलेल्या प्रतलास त्या आकृतीचे क्षेत्रफळ असे म्हणतात.

घनाकृतीसुद्धा वरील माहितीला अनुरूप अशाच आहेत. घनाकृतीसुद्धा बाजूंचीच (किंवा बाह्यपृष्ठभागांनीच) बनलेल्या असतात. उदा. इष्टिकाचिती ही घनाकृती सहा आयताकृती पृष्ठभागांनी बनलेली आहे. गोल हा सलग बाह्यपृष्ठभागाने बनलेला आहे. प्रतलीय आकृतींप्रमाणेच घनाकृतीचे मोजमापसुद्धा दोन प्रकारे करतात.

१) घनाकृतीच्या पृष्ठभागाचे मोजमाप - याला घनाकृतीचे पृष्ठफळ असे म्हणतात.

२) घनाकृतीने बंदिस्त केलेल्मा अवकाशाचे मापन- याला घनाकृतीचे घनफळ असे म्हणतात.

म्हणजेच पृष्ठफळ हे त्या घनाकृतीचे मापन आहे, तर घनफळ हे घनाकृतीने बंदिस्त केलेल्या अवकाशाचे मापन आहे. पृष्ठफळ चौरस एककात तर घनफळ घन एककात मोजतात. घनफळाचे एकक घन आहे. जर 1 ला बाजू असलेला घन घेतला, तर घनाफळाचे एकक l^3 मेते. तसेच 1 बाजू असलेला घन घेतला, तर घनतेचे एकक^3 हे मेईल.

रोजच्या व्यवहारात घनाकृतीचे पृष्ठफळ आणि घनफळ काढण्याची गरज आपणास पडते. उदा. आपणास घराला म्हणजेच खोलीच्या भिंतींना आणि तक्तपोशीला (सिलींगला) रंग द्यावयाचा आपल्याला भिंतीचे आणि तक्तपोशीचे पृष्ठफळ माहिती असणे आवश्मक ठरते. पाणी, दूध किंवा धान्य साठविताना आपणास त्मा धारकाचे (भांड्याचे) घनफळ माहिती असणे आवश्मक ठरते.

२१.२ इष्टिकाचिती आणि घन-

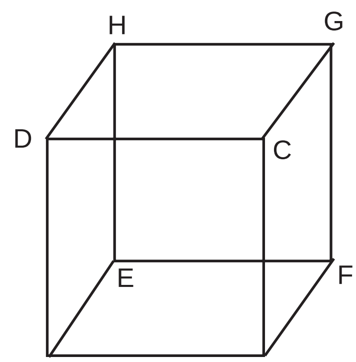
खडूची पेटी, कंपास पेटी, वीट, पुस्तक मा सर्वांचा आकार इष्टिकाचिती आहे. आ. 21.2 मध्ये इष्टिकाचिती दाखविली आहे. आकृतीकडे पाहिजे असता इष्टिकाचितीची सहा आयताकृती पृष्ठेआपणास लक्षात येतात.

ही सहा पुढीलप्रमाणे आहेत.

१) ABCD २) DABEF ३) BCGF
४) EFGH ५) ADHE ६) CDHG

यापैकी परस्परविरूद्ध पृष्ठे एकरूप आणि परस्परांना समांतर आहेत. अशा तीन जोड्या आहेत.

पहिली जोडी– ABFE, CDHG
दुसरी जोडी– ABCD, EFGH
तिसरी जोडी– ADHE, BCGH



आ. 21.2

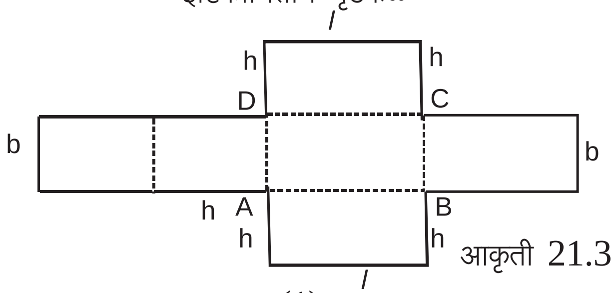
दोन लगतची पृष्ठे एका रेषेवर परस्परांना मिळतात. या रेषेस त्मा इष्ठिकाचितीची कडा असे म्हणतात. उदा. पृष्ठ ABCD आणि पृष्ठ ABFE ही दोन पृष्ठे AB परस्परांना या कडेवर मिळतात. इष्टिकाचितीला 12 कडा असतात.

बिन्दू ABCDEFGH या बिंदूंना घनाकृतीचे शिरोबिंदू असे म्हणतात. इष्टिकाचितीला 8 शिरोबिंदू असतात.

प्रत्यके शिरोबिंदूवर तीन बाजू येऊन मिळतात. त्यांपैकी एका बाजूस लांबी दुसऱ्या बाजूस रूंदी व तिसऱ्या बाजूस उंची, जाडी किंवा खोली म्हणण्याचा प्रघात आहे. साधारणपणे लांबी L या अधराने रूंदी b या अक्षराने आणि उंची h मा अक्षराने दर्शवितात. त्यानुसार आपण AB=EF=CD=GH याला लांबी AE=BF=CG=DH याला रूंदी आणि AD=EH=BC=FG याला त्या घनाची उंची म्हणू.

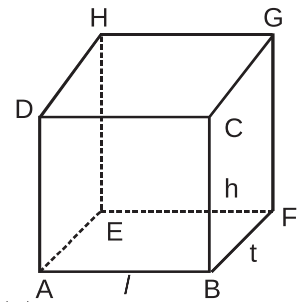
ABCD, AEHD आणि EFGH ही तीन पृष्ठे E मा शिरोबिंदूत मिळतात आणि त्याच्याविरूद्ध असणारी DCGH, BFGC आणि ABCD ही पृष्ठे विरूद्ध शिरोबिंदू C मध्मे मिळतात. त्मामुळे शिरोबिंदू E आणि शिरोबिंदू C ला त्या इष्टिकाचितीचे विरूद्ध शिरोबिंदू असे म्हणतात. बिंदू E आणि बिंदू C जोडणाऱ्या रेषेस त्या इष्टिकाचितीचा कर्ण असे म्हणतात. रेख EC हा इष्टिकाचितीचा कर्ण आहे. त्याचप्रमाणे रेख AG, रेख BH आणि रेख FD हे इष्टिकाचितीचे उरलेले कर्ण आहेत. अशातऱ्हेने इष्टिका–चितीला एकूण चार कर्ण असतात.

इष्टिकाचितीचे पृष्ठफळ–



आकृती 21.3

(1)



(2)

आता आ.21.3 (1) चे निरीक्षण करा.

जर तिची रेखांकित बाजूंवर घडी घातली, तर ती आकृती आ. 21.3 (2) प्रमाणे दिसेल. मालाच इष्टिकाचिती असे म्हणतात. आ. 21.3(2) मध्ये आपल्याला इष्टिकाचितीची लांबी (L), रूंदी(b) आणि उंची (h) स्पष्टपणे कळून मेते. आकृतीच्मा पृष्ठफळाविषयी काम सांगता मेईल? अर्थातच आकृतीचे एकूण पृष्ठफळ म्हणजे आ. 21.3(1) मध्मे दाखविलेल्मा सर्व सहा आमतांच्या क्षेत्रफळांची बेरीज होम.

इष्टिकाचितीचे एकूण पृष्ठफळ =

$= (Lxb)+(bxh)+(hxl)+(lxb)+(bxh)+(hxl)$

$= 2\ (lb+bh+hl)$

आ. 21.3 (2) मधील बिंदू BE आणि बिंदू EC जोडू.

(पहा आ.21.4)

आता,

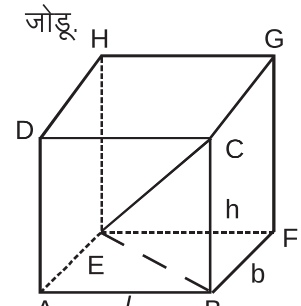
$BE^2=AB^2+AE^2$ (EAB=90^0)

किंवा $BE^2= l^2=+ b^2=$...........1

त्माचप्रमाणे,

$EC^2=BC^2+BE^2$ (CBE =90^0)

$EC = \sqrt{l^2+b^2+h^2}$



आ. 21.4

इष्टिकाचितीचा कर्ण$\sqrt{l^2+b^2+h^2}$

आपल्याला माहित आहे की घन ही विशिष्ट प्रकारची इष्टिकाचितीच आहे, यामध्ये लांबी =रूंदी=उंची

l = b=h

व बाजू असलेल्मा घनाचे एकूण पृष्ठफळ

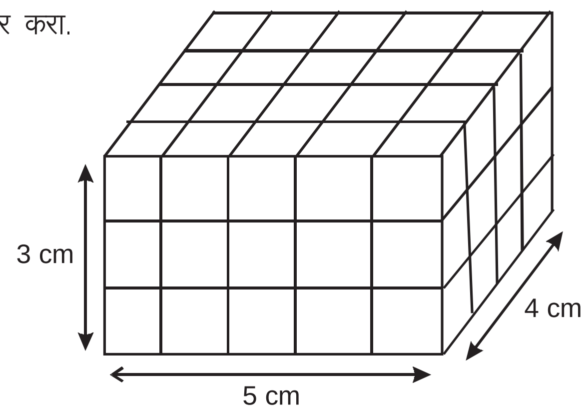
$= 2\ (a \times a + a \times a + a \times a)$
$= 6a^2$

आणि त्याचा कर्ण $= \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$

टीप– आ. २३.३ (२) दाखविलेल्मा इष्टिकाचितीची पूर्वरचना म्हणजे आ. २३.३(१) होम.

घनफळ–

1 cm बाजू असलेले घन घ्या आणि आ. 21.5 मध्मे दाखविल्माप्रमाणे इष्टिकाचिती तयार करा.



आ. 21.5

1cm बाजू असलेल्मा घन ठोकळ्मांची प्रत्मक्ष मोजणी करून इष्टिकाचितीमध्मे 60 ठोकळ्यांची बनली आहे हे कळते.

इष्टिकाचितीचे घनफळ = 60 घनसेंटीमीटर किंवा $60 cm^3$ येईल.
(कारण 1cm बाजू असलेल्या एका ठोकळ्माचे घनफळ=$1cm^3$)

त्माचप्रमाणे सूत्रावरून,

लांबी x रुंदी x उंची

$l \times b \times h$

बाजू असलेल्या घनाचे घनफळ =

$= a \times a \times a$
$= a^3$

या सूत्राचा उपयोग करून काही उदाहरणे सोडवू.

उदा. 21.1 एका इष्टिकाचितीची लांबी, रुंदी आणि उंची अनुक्रमे 4cm, 3cm आणि 12cm आहे. तर,

१) इष्टिकाचितीचे एकूण पृष्ठफळ
२) इष्टिकाचितीचे घनफळ
३) इष्टिकाचितीच्या कर्णाची लांबी काढा.

उकल–

१) इष्टिकाचितीचे एकूण पृष्ठफळ

$$= 2\ (lb+bh+hl)$$

$= 2\,(4x3 + 3x12 + 12x4)cm^2$

$= 2\,(12 + 36 + 48)\ cm^2$

$= 2\,(96)\ cm^2$

$= 192cm^2$

२) इष्टिकाचितीचे घनफळ $= l\ b\ h$

$= 4 \times 3 \times 12$

$= 144\ cm^3$

३) इष्टिकाचितीच्या कर्णाची लांबी

$= \sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$

$= \sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2}$

$= \sqrt{16 + 9 + 14}$

$= \sqrt{169}$

$= 13\ cm$

उदा. 21.2– एका इष्टिकाकृती दगडाची लांबी 3cm रूंदी 2 m आणि जाडी 25 cm आहे. या दगडाचे घनफळ काढा.

उकल– उदाहरणामध्ये लांबी $= l = 3m$

रूंदी $= b = 2m$

आणि उंची $= 25\ cm = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}\ m$

(टीप– या ठिकाणी तिसरी मिती म्हणून उंचीऐवजी जाडी घेतली आहे.)

दगडाचे घनफळ $l\ b\ h$

$= 3 \times 2 \times \frac{1}{4}$

$= \frac{3}{2}$

$= 1.5\ m^3$

उदा. 21.3– एका घनाचे घनफळ $2197cm^3$ आहे. तर मा घनाचे (1) एकूण पृष्ठफळ आणि (2) कर्ण काढा.

उकल– घनाची बाजू a cm आहे, असे मानू.

घनाचे घनफळ $= a^3$

$a^3 = 2197$

टिपा

किंवा $a^3 = 13 \times 13 \times 13$

$a = 13$

घनाची बाजू = 13 cm

(1) घनाचे एकूण पृष्ठफळ $6a^2$

$= 6 \times 13 \times 13$

$= 1014 \text{ cm}^2$

आणि (2) कर्ण = $a\sqrt{3} = 13\sqrt{3}\text{cm}$

एकूण पृष्ठफळ $= 1014 \text{ cm}^2$

आणि कर्ण $= 13\sqrt{3} \text{ cm}$

उदा. 21.4– पाण्माच्या एका टाकीची लांबी 5m व रूंदी 4m आहे. तर टाकी पाण्याने पूर्ण भरलेली असून पाण्याचे आकारमान 60m^3 इतके आहे. तर टाकीमधील पाण्याची खोली काढा.

उकल– टाकीची खोली d मीटर आहे, असे मानू.

टाकीमधील पाण्याचे आकारमान = $l \times b \times h$

परंतु पाण्याचे आकारमान 60m^3 दिलेले आहे.

$5 \times 4 \times d = 60$

$d = \dfrac{60}{5 \times 4}$

$= 3 \text{ m}.$

टाकीमधील पाण्याची खोली = 3m

(टीप– भांड्याच्या घनफळास त्या भांड्याची धारकता असे म्हणतात. म्हणून या ठिकाणी टाकीची धारकता 60m^3 आहे, असे म्हणता येईल.

धारकता लीटर मा एककात सुद्धा सांगतात.

$1 \text{ litre} = \dfrac{1}{1000} \text{ m}^3$

$1\text{m}^3 = 1000$ litrs.

टाकीची धारकता– 60×1000

= 60 किलो लीटर्स इतकी आहे.

असेही सांगता मेईल.

उदा. 21.5– 1.5 m लांब, 1.25 m रूंद आणि 0.65 cm खोली असणारी आणि वरच्या बाजूला उघडी असणारी लाकडी पेटी तयार करावयाची आहे. तर पेटी तयार करण्यासाठी रु. 200 चौरस मीटर या दराने काय खर्च येईल? (लाकडाची जाडी लक्षात घेऊ नका.)

उकल– लाकडी पेटीचे एकूण पृष्ठफळ–

$= lb \times 2bh \times 2hl$ (कारण पेटी वरच्या बाजूला उघडी आहे.)

$= (1.5 \times 1.25) + (2 \times 1.25 \times \frac{65}{100}) + (2 \times \frac{65}{100} \times 1.5)$ m2

$= (1.875 + \frac{162.5}{100} + \frac{195}{100})\ m^2$

$= (1.875 + 1.625 + 1.95)\ m^2$

$= 5.450\ m^2$

Rs.200 दर चौरस मीटर दराने लाकडाची किंमत–

$= 200 \times 5.450$

= Rs. 1090

उदा. 21.6 एक नदी 10m खोल आणि 100m रुंद आहे. ही नदी तर ताशी 4.5 किमी वेगाने वाहते. तर दर सेकंदाला ती नदी किती पाणी समुद्रात वाहून नेते, ते काढा.

उकल– नदीचा वेग 4.5 किमी /तास

$\frac{4.5 \times 1000}{60 \times 60}$ मी / सेकंद

$= \frac{5}{4}$ मी / सेकंद

दर सेकंदाला समुद्रात वाहून जाणारे पाणी = पाण्याच्या इष्टिकाचितीचे घनफळ

$= l \times b \times h$

$= \frac{5}{4} \times 100 \times 10\ m^3$

$= 1250\ m^3$

उदा. 21.7 588 m लांबी आणि 50m रुंदी असलेल्या शेतामध्ये 30m लांब 20 m रूंद आणि 12 m खोल तलाव खणला. तलावातून बाहेर काढलेली माती उरलेल्या शेतामध्मे सारख्याच प्रमाणात पसरली. तर शेताची उंची किती वाढली ते सांगा.

उकल– तलावातून बाहेर काढलेल्या मातीचे आकारमान–

= 30m x 20m x 12m मापाच्या इष्टिकाचितीचे आकारमान (घनफळ)

$= 30 \times 20 \times 12$

$= 7200\ m^3$

शेताच्या उरलेल्या भागाचे क्षेत्रफळ

शेताचे क्षेत्रफळ–तलावाच्या पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ

$= 588 \times 50 \text{ m}^2 - 30 \times 20 \text{ m}^2$
$= 29{,}400 \text{ m}^2 - 600 \text{ m}^2 2$
$= 28{,}800 \text{ m}^2$

शेताची वाढलेली उंची = $\dfrac{\text{मातीचे घनफळ}}{\text{उरलेल्या भागाचे क्षेत्रफळ}}$

$= \dfrac{7200 \text{ m}}{28{,}800}$

$= \dfrac{1}{4} \text{ m}$

$= 25 \text{ cm}$

उदा. 21.8– एका खोलीची लांबी, रूंदी आणि उंची अनुक्रमे 7m, 4m आणि 3m आहे. खोलीला 2mx1.5m मापाचे दार आणि 1.5 m x 1m मापाची खिडकी आहे. तर Rs. $4/\text{m}^2$ मा दराने संपूर्ण खोलीला आणि तक्तपोशीला रंग देण्यास किती खर्च येईल, ते काढा.

उकल– खोलीचे आकारमान इष्टिकाचितीसारखे आहे.

रंग देण्याचे एकूण क्षेत्र= चार भिंतींचे क्षेत्रफळ + तक्तपोशीचे क्षेत्रफळ–दाराचे क्षेत्रफळ–खिडकीचे क्षेत्रफळ

चार भिंतींचे क्षेत्रफळ $= (l \times h) + (b \times h) + (l \times h) + (b \times h)$

$= 2\,(l+b) \times h$

$= 2\,(11) \times \text{m}^2$

$= 66 \text{ m}^2$

तक्तपोशीचे क्षेत्रफळ $= l \times b$

$= 7 \times 4$

$= 28 \text{ m}^2$

रंग देण्याचे एकूण क्षेत्र $= 66\text{m}^2 + 28 \text{ m}^2 - 2 \times 1\dfrac{1}{2} \text{ m}^2 - 1 \times \dfrac{1}{2}\text{m}^2$

$= 94 \text{ m}^2 - 3 \text{ m}^2 - \dfrac{1}{2}\text{m}^2$

$= \dfrac{(188-6-3)}{2} \text{ m}^2$

$= \dfrac{179}{2} \text{ m}^2$

Rs.$4/\text{m}^2$ मा दराने रंग देण्याचा एकूण खर्च

$= 4 \times \dfrac{179}{2}$

= Rs. 358

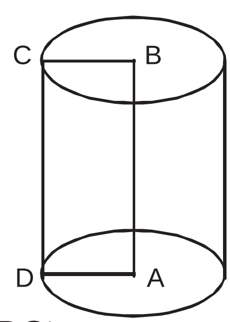
(टीप– चार भिंतींचे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी आपण $2\,(l+b)xh$ हे सूत्र म्हणून वापरू शकतो.)

तुमची प्रगती तपासा. 21.1

1. 6m लांबी, 3m रूंदी आणि 2.5m उंची असलेल्या इष्टिकाचितीचे पृष्ठफळ आणि घनफळ काढा.
2. 3.6 cm माप असलेल्या घनाचे पृष्ठफळ आणि घनफळ काढा.
3. एका घनाचे घनफळ 3375 cm^3 आहे. तर त्मा घनाची बाजू काढा. तसेच त्याचे पृष्ठफळ काढा.
4. एका लाकडी पेटीची बाहेरून घेतलेली मापे 42cm, 32cm आणि 27 cm अशी आहेत. लाकडाची जाडी 1 cm असल्यास पेटीच्या आतील भागाचे घनफळ काढा.
5. एका गुदामाची लांबी, रूंदी आणि उंची अनुक्रमे 12m, 6m आणि 8 m आहे. तर मा गुदामामध्मे 1.5m^3 आकारमानाच्या किती पेट्या मावतील?
6. एका लाकडी खांबाची रूंदी 3m जाडी 75 cmआणि त्माचे घनफळ 33.75 m^3 इतके आहे. तर त्या खांबाची लांबी आणि पृष्ठफळ काढा.
7. 8 cm बाजू असलेले तीन घन एकाशेजारी एक ठेऊन इष्टिकाचिती तयार केली तर त्या इष्टिकाचितीचे पृष्ठफळ आणि घनफळ काढा.
8. एका खोलीची लांबी, रूंदी व उंची अनुक्रमे 6m, 5m आणि 4m आहे. खोलीच्या खिडक्या आणि दार मांचे एकूण क्षेत्रफळ 4m^2 आहे. तर या खोलीच्या भिंतींना लावण्यासाठी 75 cm रूंदीचा किती वॉलपेपर लागेल आणि Rs. 2.40 मीटर मा दराने किती पैसे लागतील?
9. एका खोलीची लांबी, रूंदी व उंची अनुक्रमे 6m, 4m व 3m आहे. तर या खोलीत जास्तीत जास्त किती लांबीची काठी मावेल ते काढा.

21.3 लंबवृत्तचिती–

ABCD हा आयत त्याच्या AB मा कडेवर फिरविला असता जो आकार तयार होतो, त्यास लंबवृत्तचिती असे म्हणतात. (आ.21.6पहा)रोजच्या व्यवहारातील या आकाराच्या अनेक वस्तू आपणास परिचित आहेत. उदा. पाण्याचे नळ, पावडरच्या डब्या, पाण्याचे ड्रम्स इ. आकृतीचे बारकाईने निरीक्षण केले असता लंबवृत्तचितीचा तळ आणि वरचा पृष्ठभाग ही एकरूप वर्तुळे आहेत. आ. 21.6 मध्ये A आणि B हे त्या वर्तुळाचे केंद्र आहेत.



आ. 21.6

AD आणि BC त्या एकरूप वर्तुळांच्या त्रिज्या आहेत. (AD=BC) रेषा AB ही दोन्ही वर्तुळांना लंबरूप आहे.

मेथे AD किंवा BC ला वृत्तचितीची त्रिज्या असे म्हणतात.

तर AB ला वृत्तचितीची उंची असे म्हणतात.

वृत्तचितीचा तळ आणि वरचा पृष्ठभाग सपाट आहे. तर उरलेला पृष्ठभाग वर्तुळाकार आहे.

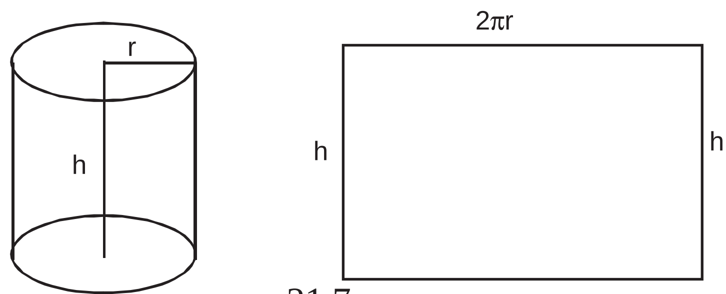
लंबवृत्तचितीचे पृष्ठफळ–

आता एक पोकळ लंबवृत्तचितीचा विचार करू.

टिपा

समजा या वृत्तचितीची त्रिज्या ४ आणि उंची आहे असे मानू.

वृत्तचितीच्या सपाट पृष्ठभागाच्या केंद्राना जोडणाऱ्या सरळ रेषेला समांतर राटील अशा पध्दतीने वर्तुळाकार पृष्ठभाग (आ. 27.7(i)) आपल्याला π r2 ही लांबी 4 ही संदी असलेल्या आयत मिळेल (आ. 27.7(ii)) पहा आयताचे क्षेत्रफळ हे वृत्तचितीच्या वर्तुळाकार पृष्ठभागाएवढे असेल



आ. 21.7

वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ = आयताचे क्षेत्रफळ

π r2 x h = π r2h

वृत्तचिती दोन्ही बाजूंनी बंदेस्त असल्यास तळाच्या आणि वरच्या बाजूच्या वर्तुळांचे क्षेत्रफळ विचारात घ्यावे लागले.

वृत्तचितीचे एकूण पृष्ठफळ

$= \pi rh + \pi r^2$

$= 2\pi r(r+h)$

वृत्तचितीचे घनफळ

इष्टिकाचितीचे घनफळ आपणांस खालील सूत्राने मिळते.

$= l \times b \times h$

=पायाचे क्षेत्रफळ उंची

वृत्तचिती असंख्य लहान लहान इष्टिकाचिती एकत्र येऊन बनली आहे, असे मानल्यास वरील नियम आपल्याला वृत्तचितीलासुद्धा लागू करता मेईल.

वृत्तचितीचे घनफळ = पायाचे क्षेत्रफळ x उंची

$= \pi r^2 x h$

$= \pi r^2 h$

वरील नियमांचे स्पष्टीकरण करणारी उदाहरणे आपण आता पाहू. उदाहरणांमध्ये जर ची किंमत दिली नसेल तर आपण π ची किंमत $\frac{22}{7}$ ही घेणार आहोत.

उदा. 21.9 एका वृत्तचितीची त्रिज्या आणि उंची अनुक्रमे ७ सेमी आणि१० सेमी आहे. तर पुढील किंमती काढा.

1) वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ
2) वृत्तचितीचे एकूण पृष्ठफळ
3) वृत्तचितीचे घनफळ

उकल– 1) वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ–$2\pi rh$ 2

$$=2\times\frac{22}{7}\times7\times10=440cm^2$$

2) वृत्तचितीचे एकूण पृष्ठफळ $2\pi rh+2\pi r^2$

$$=2\times\frac{22}{7}\times7\times10+2\times\frac{22}{7}\times7\times7$$

$$=440cm2+308cm2$$

$$=748cm2$$

3) वृत्तचितीचे घनफळ$=\pi r^2h$

$$=\frac{22}{7}\times7\times7\times10cm3$$

$$=1540cm3$$

उदा. 21.10 दोन्ही बाजूंनी उघड्या असणाऱ्या वृत्तचितीचा बाहेरील व्यास १२ सेमी आहे. वृत्तचितीची लांबी ७० सेमी आणि वृत्तचितीची जाडी १ सेमी असल्यास वृत्तचिती तयार करण्मासाठी किती धातू लागला असेल, ते काढा.

उकल– वृत्तचितीची बाहेरील त्रिज्या $=\frac{12}{2}=6cm$

वृत्तचितीची आतील त्रिज्या = $6-1=5cm$

वृत्तचितीची (धातूची जाडी) = $1cm$

मा ठिकाणी प्रत्मक्षात दोन वृत्तचिती तयार झालेल्मा असून वृत्तचितीसाठी लागलेल्मया धातूचे घनफळ = बाह्य वृत्तवितीचे घनफळ – आतील वृत्तवितीचे घनफळ

$$= \pi r^2h - \pi^2h$$

मा ठिकाणी r1 आणि r2 या वृत्तचितीच्या बाह्य आणि आंतर त्रिज्या आहेत. h ही वृत्तचितीची लांबी आहे.

$$=\frac{22}{7}\times6\times6\times70-\frac{22}{7}\times5\times5\times70cm3$$

$$\frac{22\times36\times70}{7}-\frac{22\times25\times70}{7}$$

$$=22\times10(36-25)cm3=22\times10\times11=2420cm3$$

उदा. 21.11 रस्ता दाबण्मयाच्या रूळाची त्रिज्या 35 सेमी असून त्माची लांबी 1 मी. आहे. एक क्रीडांगण समतल करण्यासाठी रूळाचे 200 फेरे होतात. तर रु. 3 दर या भावाने क्रीडांगण समतल करण्यासाठी किती खर्च मेईल?

उकल– रूळाच्या एक फेरीत क्रीडांगणाचे समतल होणारे क्षेत्र–

= रूळाचे वक्रपृष्ठफळ

$=2\pi r h$

$= 2x \frac{22}{7} X35X100cm^2$ $\left[\begin{array}{l} r = 35cm \\ h = 1m = 100m \end{array}\right]$

r= 35cm

h = 1m = 1000cm

$=22{,}000cm^2$

$= \frac{22000}{100X100} = 2.2m^2$

200 फेऱ्यात क्रीडांगणाचे समतल होणारे क्षेत्र–

$2.2 \times 200 = 440m^2$

$3/m^2$ या दराने क्रीडांगण समतल होण्यासाठी होणारा खर्च

=3 X 440

=Rs. 1320

उदा. 21.12 $1m^3$ आकारमानाच्मा धातूच्या गोळ्यापासून 3.5mm व्यासाची तार काढली तर किती लांबीची तार निघाली?

उकल– तारेची लांबी x mm आहे असे मानू. तारेचा आकार लंबवृत्तचितीसारखाच, हे आपल्या लक्षात आले असेलच.

तारेचा व्यास 3.5 mm आहे.

तारेची त्रिज्या $= \frac{3.5 \text{ mm}}{2} = \frac{35 \text{ mm}}{20} = \frac{7 \text{ mm.}}{4}$

तारेची लांबी म्हणजेच लंबवृत्तीची उंची आहे.

वृत्तचितीचे घनफळ $\pi r^2 h$

$$\frac{22}{7} X \frac{7}{4} X \frac{7}{4} X\, x \text{ mm}^3$$

परंतु $1m^3$ घनफळ असलेल्मा धातूच्या गोळ्यापासून तार काढली गेली आहे.

$$\frac{22}{7} X \frac{7}{4} X \frac{7}{4} X \frac{1}{1000000000} = m^3$$

[1m=1000m]

किंवा

$$x = \frac{1x7x4x4x100{,}000{,}000}{22 \times 7x7} \text{ mm}$$

$$= \frac{16{,}000{,}000{,}000}{154} \text{ mm}$$

$$= \frac{16{,}000,\ 000,\ 000}{154000} \text{ m}$$

$$= \frac{16{,}000,\ 000,}{154} \text{ m}$$

$$= 103896 \text{ m}$$ (अंदाजे)

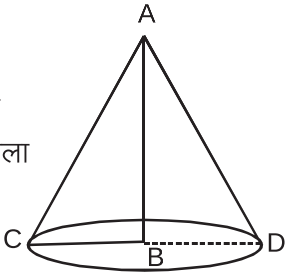
तुमची प्रगती तपासा 21.2

1) 5 मी त्रिज्या आणि 1.4 मी उंची असलेल्या वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ, एकूण पृष्ठफळ आणि घनफळ काढा.
2) एका वृत्तचितीची त्रिज्या 7 सेमी असून तिचे घनफळ 3080 cm^3 आहे. तर तिचे वक्रपृष्ठफळ काढा.
3) एका पाण्माच्या टाकीच्मा तळाचा व्यास 7 मी असून तिची उंच 2.1 मी. तर टाकीची धारकता लिटर्समध्मे काढा.
4) एका कागदाची लांबी 33 सेमी आणि रूंदी 16 सेमी आहे. हा कागद त्याच्या रूंदीभोवती गुंडाळून वृत्तचिती तयार केली. त्मा वृत्तचितीचे घनफळ काढा.
5) वृत्तचितीच्या आकाराच्या बादलीच्या तळाचा व्यास 28 सेमी आणि तिची उंची 12 सेमी आहे. बादली पाण्याने पूर्णपणे भरली आहे. हे पाणी 66 सेमी लांबी आणि 28 सेमी रूंदी असलेल्या आयताकृती पसरट भांड्यात ओतले. तर पसरट भांड्यातील पाण्याची उंची सांगा.
6) 8 सेमी लांबी आणि 2 सेमी जाड अशी दोन्ही बाजूंनी उघडी असणारी धातूची नळी आहे. नळीचा बाह्यव्यास 10 सेमी आहे. तर नळीचे संपूर्ण वक्रपृष्ठफळ काढा.

(टीप– नळीचे संपूर्ण वक्रपृष्ठफळ= आतील बाजूचे वक्रपृष्ठफळ + बाहेरील बाजूचे वक्रपृष्ठफळ)

21.4 शंकू –

या काटकोन त्रिकोणाकृती पुठ्ठ्याचा कोनAB काटकोन आहे. या त्रिकोणाची बाजू AB भोवती हा त्रिकोण संपूर्ण गोलाकार फिरविला असता, जी आकृती तयार होते, त्मा घनाकृतीस शंकू असे म्हणतात. (पहा आ. ⊠)



आ. 21.8

टिपा

रोजच्या व्यवहारात आपण या आकाराच्या अनेक वस्तू पाहतो. उदा. विदूषकाची टोपी, तंबू, आईस्क्रीमचा कोन इ.

शंकूचा पामा म्हणजे वर्तुख असते. आ. 21.8 मध्मे वर्तुळाकृती पायाचा बिंदू हा केंद्र असून BC ही मा पायाची त्रिज्या आहे.ही मा शंकूची उंची असून ती वर्तुळाकृती पायाला लंबरूप असते. बिंदू A हा शंकूचा शिरोबिंदू आहे. AC ही शंकूची तिरकस उंची आहे.

पामथागोरसच्या प्रमेयानुसार,

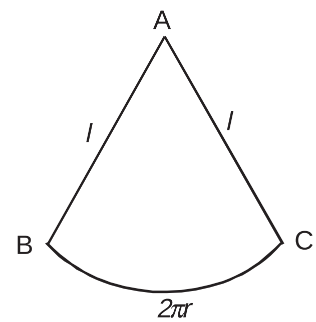
तिरकस उंची= $\sqrt{\text{त्रिज्या}^2 + \text{उंची}^2}$

म्हणजेच, $l = \sqrt{r^2+h^2}$

येथे r = शंकूची त्रिज्या

h =शंकूची लंब उंची

l =शंकूची तिरकस उंची



आ. 21.9

शंकूचे निरीक्षण केले असता, असे लक्षात येते की, शंकूचा वर्तुळाकृती पाया एकप्रतलीय असून त्याचा उरलेला पृष्ठभाग वक्राकृती आहे.

शंकूचे वक्रपृष्ठफळ

त्रिज्या r आणि उंची h असलेला एक पोकळ शंकू घ्या. आणि तो त्याच्या तिरकस उंचीवर कापा. हा शंकू एका कागदावर पसरा. आपल्याला l त्रज्या असलेली वर्तुळपाकळी मिळते. या वर्तुळ कंसाची लांबी या r असते. (आ. 21.9 पहा)

मा वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफल = $\dfrac{\text{वर्तुळखंडाची त्रिज्या}}{l \text{ त्रिज्या असलेल्या वर्तुळाचा परीघ}}$ x l त्रिज्या असलेल्या वर्तुळाचे क्षेत्रफळ

$2\pi r$

यामध्ये तळाचे क्षेत्रफळ मिळविल्मास एकूण वक्रपृष्ठफळ मिळेल.

एकूण वक्रपृष्ठफळ= $\pi r\ell + \pi r^2$

$= \pi r(\ell + r)$

शंकूचे घनफळ

समान उंची आणि वर्तुळाकृती पायाची त्रिज्या समान असणारी वृत्तचिती आणि शंकू घ्मा. आता शंकूमध्मे वाळू (किंवा पाणी) भरा. आणि वाळू (किंवा पाणी) वृत्तचितीमध्ये ओता. हीच क्रिया अजून दोन वेळा (म्हणजे एकूण तीन वेळा) करा. आपल्या असे लक्षात मेईल की वृत्तचिती वाळूने (किंवा पाण्याने) पूर्णपणे भरली आहे. यावरून समान उंची आणि समान वर्तुळाकृती पायाची त्रिज्या असणाऱ्मा शंकूचे घनफळ त्याच मापाच्या वृत्तचितीच्या घनफळाच्या $\frac{1}{3}$ पट असते हे सिद्ध होते.

शंकूचे घनफळ = $\frac{1}{}$ वृत्तचितीचे घनफळ

त्रिज्या असणाऱ्या शंकूचे घनफळ त्याच मापाच्या वृत्तचितीच्या घनफळाच्या $\frac{1}{3}$ पट असते हे सिद्ध होते.

शंकूचे घनफळ = $\frac{1}{3}$ वृत्तचितीचे घनफळ

आता या सूत्रावर आधारीत काही उदाहरणे पाहू.

उदा. 21.13 एका शंकूची त्रिज्या 7 सेमी आणि उंची 24 सेमी आहे. तर शंकूची तिरकस उंची, एकूण वक्रपृष्ठफळ आणि घनफल काढा.

उकल– शंकूची त्रिज्या = 7 सेमी, उंची = 24 सेमी

शंकूची तिरकस उंची= r^2+h^2

$= \sqrt{7x7+24x24}$

$= \sqrt{49+576}$

$= \sqrt{625}$

$= 25$ cm

शंकूचे वक्रपृष्ठफळ = $\pi r \ell$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 25$

$= 550$ cm^2

शंकूचे एकूण वक्रपृष्ठफळ = $\pi r \ell + \pi r \ell^2$

$= 550 + \frac{22}{7} \times 7 \times 7$

$= 550 + 154$

$= 704$ cm^2

शंकूचे घनफळ = $\frac{1}{3} \pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 49 \times 24$

$= 1232$ cm^2

उदा. 21.14 एका लंबची उंची 6 मी आणि पायाची त्रिज्या 8 मी आहे तर तंबू बनविण्यासाठी दर मीटरला रु. 120 भाव असलेले कॅनव्हास वापरल्यास किती खर्च येईल ते काढा. (π= 3.14घ्या)

उकल– शंकूची तिरकस उंची काढू.

$l = \sqrt{r2+h2}$

$l = \sqrt{36+64}$

$l = \sqrt{100}$

$l = 10$

तंबूची तिरकस उंची 10 मी आहे.

तंबूचे वक्रपृष्ठफळ = $\pi r \ell$

$= 3.14 \times 8 \times 10$

$= 251.2$ m^2

तंबू बनविण्यासाठी लागणारे एकूण कॅनव्हास

कॅनव्हासची एकूण किंमत

रु. 120 दराने कॅनव्हाची एकूण किंमत = 12 x 251.2 = 30,144 रु.

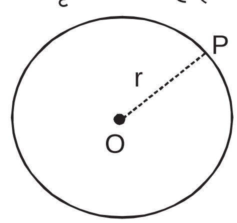
तंबू बनविण्यासाठी येणारा खर्च रु.30,144.

प्रगती तपासा. 21.3

1) एका शंकूची त्रिज्या 5 सेमी आणि उंची 12 सेमी आहे. तर शंकूचे वक्रपृष्ठफल एकूण पृष्ठफळ आणि घनफल काढा.
2) एका शंकूच्या पायाचे क्षेत्रफळ 616 सेमी^{2} आणि उंची 9 सेमी आहे. तर शंकूचे घनफळ काढा.
3) एका शंकूची उंची 10.5 सेमी आहे. आणि शंकूचे घनफळ 176 सेमी^{3} आहे. तर शंकूची त्रिज्या काढा.
4) 12 मी उंची आणि 9 मी त्रिज्या असलेला तंबू तयार करावयाचा आहे. तर तंबू तमार करण्यासाठी 3 मी रुंदी असलेले किती कॅनव्हास लागेल ते काढा. (π = 3.14 घ्या.)
5) एका शंकूचा व्यास 42 सेमी असून त्याचे घनफल 12,936 सेमी^{3} इतके आहे. तर त्मा शंकूचे वक्रपृष्ठफळ काढा.

21.5 गोल–

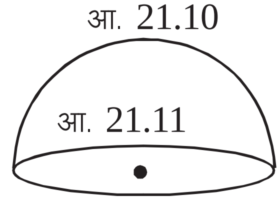
एक अर्धवर्तुळ घेऊन ते अर्धवर्तुळ त्याच्या व्यासाभोवती संपूर्णपणे फिरविल्यास जी घनाकृती तयार होईल. त्यास गोल असे म्हणतात. गोलाची व्याख्या खालीलप्रमाणे सुद्धा करता मेईल. रोजच्या व्यवहारातल्या या आकाराच्या अनेक वस्तू आपणास परिचित आहेत उदा. गोटी, क्रिकेटचा चेंडू, फूटबॉलचा चेंडू इ.



आ. 21.10

अर्धगोल–

गोलाच्या केंद्रातून जाणाऱ्या प्रतलाने गोलाचे दोन समान भाग होतात. त्मा प्रत्येक भागाला अर्धगोल असे म्हणतात. (आ. 21.11 पहा)



आ. 21.11

गोलाचे आणि अर्धगोलाचे वक्रपृष्ठफळ–

एक रबराचा किंवा लाकडी चेंडू घ्या. तो मध्यावर कापून त्याचे दोन समान भाग (दोन अर्धगोल) तमार करा. (आ. 21.12 (1) पहा.)

चेंडूची त्रिज्या r आहे, असे मानू.

अर्धगोलाच्या वर एक खिळा ठोका. नंतर एक सुतळीचा बंडल घ्या. आणि खिळ्यापासून सुरुवात करून वरच्या अर्धगोलाभोवती सुतळी गुंडाळण्यास प्रारंभ करा. संपूर्ण अर्धगोल झाकला जाईल अशा पद्धतीने सुतळी गुंडाळा. (मासाठी आ. 21.12(2) चे निरीक्षण करा.)

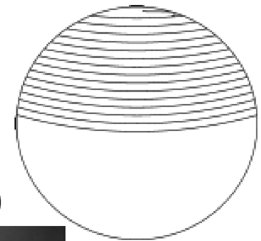
अर्धगोलाला गुंडाळलेल्या सुतळीची लांबी मोजा.

आता अर्धगोलाएवढ्याच त्रिज्येचे (म्हणजे r)

वर्तुळ काढा. वर्तुळाच्या केंद्रापासून सुरुवात करून अर्धगोलाला सुतळी गुंडाळा. (पहा आ. 21.11 (3))

अर्धगोलाला झाकण्याच्या सुतळीची लांबी मोजा. आपल्याला काम आढळून मेते? आपल्या असे लक्षात

येईल की वर्तुळ झाकण्यासाठी जितक्या लांबीची सुतळी लागते, त्याच्या दुप्पट लांबीची सुतळी अर्धगोल झाकण्यासाठी लागते.



2)

आ. 21.12

3)

ज्मा अर्थी दोन्ही वर्तुळाची रुंदी सारखी आहे त्या अर्थी,

अर्धगोलाचे पृष्ठफळ =2xवर्तुळाचे क्षेत्रफळ

$= 2 \times \pi r^2 = 2\pi r^2$ (वर्तुळाचे क्षेत्रफळ = πr^2)

संपूर्ण गोलाचे पृष्ठफळ $= 2 \times 2\ \pi r^2$

$= 4\ \pi r^2$

संपूर्ण गोलाचे पृष्ठफळ $= 4\ \pi r^2$

भरीव अर्धगोलाचे एकूण पृष्ठफळ

= अर्धगोलाचे वक्रपृष्ठफळ + वर्तुळाचे क्षेत्रफळ

$= 2\ \pi r^2 + \pi r^2$

$= 3\ \pi r^2$

गोलाचे आणि अर्धगोलाचे घनफळ

समान उंची आणि समान त्रिज्या असलेल्या एक पोकळ शंकू आणि पोकळ अर्धगोल घ्या. आता शंकूमध्ये वाळू (किंवा पाणी) भरा आणि वाळू (किंवा पाणी) अर्धगोलात ओता. हीच क्रिया परत एकदा करा (म्हणजे एकूण दोन वेळा) आपल्या असे लक्षात मेईल की अर्धगोल वाळूने (किंवा पाण्याने) पूर्णपणे भरला आहे. मावरून समान उंची आणि समान त्रिज्या असलेल्या शंकूचे घनफळ त्याच मापाच्या अर्धगोलाच्या १/२ पट असते हे सिद्ध होते.

अर्धगोलाचे घनफळ $= 2 \times \frac{1}{3} \pi r^2 h$

$= \frac{2}{3} \times \pi r^2 \times r \quad [\because h = r]$

$$= \frac{2}{3} \times \pi r^2 \times r^3$$

∵ r त्रिज्या असलेल्या गोलाचे घनफळ

$$= 2 \times \frac{2}{3} \times \pi r^3$$

$$= \frac{4}{3} \pi r^3$$

∵ गोलाचे घनफळ = ∵ = $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r = वर्तुळाची त्रिज्या)

अर्धगोलाचे घनफळ∵ = $\frac{2}{3} \pi r^3$ (r =वर्तुळाची त्रिज्या)

मा सूत्राचा वापर करून काही उदाहरणे सोडवू.

उदा. २१.१५–२१ सेमी व्यास असलेल्मा गोलाचे पृष्ठफळ आणि घनफल काढा.

उकल– गोलाचा व्यास = 21 cm

गोलाची त्रिज्या = $\frac{21}{2}$ cm

गोलाचे पृष्ठफळ = $4 \pi r^2$

$$= 4 \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2}$$

$$= 1386 \text{ cm}^2$$

गोलाचे घनफळ = $4 \pi r^2$

$$= 4 \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2}$$

$$= 4851 \text{ cm}^3$$

उदा. 21.16 एका अर्धगोलाकृती वाडग्याचे घनफळ २३२५.५सेमी३ आहे तर वाडग्याची त्रिज्या आणि पृष्ठफळ काढा.

उकल– वाडग्याची त्रिज r आहे, असे मानू.

∵ घनफळ = 2425.5

∵ $\frac{2}{3}\ 4 \pi r^3 = 2425.5$

$$\frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times r^3 = 2425.5$$

$$r^3 = \frac{2425.5}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{7}{22}$$

$$= \frac{50914.5}{44}$$

$$= 1157.150$$

$$= \sqrt[3]{1157.150}$$

$$= 10.5 \text{ cm}$$

अर्धगोलाकृती वाडग्याचे पृष्ठफळ $= 2\pi r^2$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 10.5 \times 10.5$$

$$= \frac{2}{1} \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2}$$

$$= 693 \text{ cm}^2$$

टीप– अर्धगोलाकृती वाडगा वरच्या बाजूने उघडाच असतो. त्मामुळे वरच्या वर्तुळाकृती पृष्ठाचे क्षेत्रफळ वाडग्माच्या पृष्ठफळात मिळविण्यात आले नाही.

तुमची प्रगती तपासा 21.4

1) 14 सेमी त्रिज्या असलेल्या गोलाचे पृष्ठफळ आणि घनफल काढा.
2) एका गोलाचे घनफळ 28808 सेमी^{3} आहे. गोलाची त्रिज्या आणि पृष्ठफळ काढा.
3) एका अर्धगोलाकृती खेळण्याचा व्यास 56 सेमी आहे तर खेळण्याचे (1) वक्रपृष्ठफळ (२) एकूण पृष्ठफळ आणि (3) घनफळ काढा.
4) 28 सेमी त्रिज्या असलेला धातूचा भरीव गोळा वितळवून सेमी त्रिज्या असलेले धातूचे भरीव गोळे तयार केले. तरया आकाराचे एकूण किती गोळे तयार झाले ते काढा.

सारांश–

- ज्या आकृती किंवा पदार्थ एकाच प्रतलात नसतात, अशा आकृतींना किंवा पदार्थांना घनाकृती किंवा त्रिमितीय आकृती असे म्हणतात.
- बाजूंनी बंदिस्त केलेल्या घनाकृतीच्या भागास घनाकृतीचा पृष्ठभाग असे म्हणतात.
- घनाकृतीने बंदिस्त केलेल्या अवकाशाच्या मापनास त्या घनाकृतीचे घनफळ असे म्हणतात.

टिपा

- काही घनाकृतींचे पृष्ठभाग सपाट असतात. काही घनाकृतींचे पृष्ठभाग वक्र असतात. तर काही घनाकृती सपाट आणि वक्र पृष्ठभाग मिळून तयार झालेल्या असतात.
- इष्टिकाचितीचे पृष्ठफळ = $2(lb+bh+hl)$ $l =$ लांबी
- इष्टिकाचितीचे घनफळ = $l \times b \times h$
- इष्टिकाचितीच्या कर्णाची लांबी = $\sqrt{l^2+b^2+h^2}$
- घन म्हणजे सर्व बाजू समान लांबीच्या असणारी इष्टिकाचिती होय.
- घनाचे एकूण पृष्ठफळ $6a^2$ आणि घनफळ a^3(a=बाजूची लांबी)
- घनाच्या कर्णाची लांबी $a\sqrt{3}$ (a = बाजूची लांबी)
- l लांबी, b रूंदी आणि h उंची असलेल्या खोलीच्या भिंतीचे क्षेत्रफळ = $२(l+b)h$
- वृत्तचितीचे वक्र पृष्ठफळ = $2\pi rh$
- वृत्तचितीचे एकूण पृष्ठफळ = $2\pi rh$ + = $2\pi rh^2$
- वृत्तचिती घनफळ = $\pi r^2 h$(r = त्रिज्या h = उंची)
- शंकूचे वक्र पृष्ठफळ = πrl (l =शंकूची तिरकस उंची)
- शंकूचे एकूण वक्र पृष्ठफळ = $\pi r\ell + \pi r^2$
- शंकूचे घनफळ $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ r = पायाची त्रिज्या
  h = शंकूची उंची
- l =शंकूची तिरकस उंची
- गोलाचे पृष्ठफळ $4\pi r^2$ गोलाचे घनफळ $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r = गोलाची त्रिज्या)
- त्रिज्या असलेल्या अर्धगोलाचे पृष्ठफळ = $2\pi r^2$
- अर्धगोलाचे एकूण पृष्ठफळ = $3\pi r^2$
- अर्धगोलाचे घनफळ = $\frac{3}{2}\pi r^2$

स्वाध्याय–

१) रिकाम्या जागा भरा.

१) लांबी l रूंदी b आणि b उंची असणाऱ्या इष्टिकाचितीचे पृष्ठफळ=----------

२) लांबी l रूंदी b आणि b उंची असणाऱ्या इष्टिकाचितीचा कर्ण=----

३) a बाजू असलेल्या घनाचे घनफळ=---------------

४) एका बाजूने उघड्या असलेल्या वृत्तचितीचे एकूण पृष्ठफळ = ---------
(येथे त्रिज्या r आणि h उंची)

५) त्रिज्या r आणि h उंची असलेल्या वृत्तचितीचे घनफळ= ---------

6) शंकूचे वक्रपृष्ठफळ=---------
7) r त्रिज्या असलेल्मा गोलाचे पृष्ठफळ=---------
8) r त्रिज्या असलेल्या अर्धगोलाचे घनफळ =---------

२) दिलेल्या चार पर्यायातून योग्य पर्याय निवडा.

(१) मापाच्या इष्टिकाचितीचे घनफळ आणि एका घनाचे घनफळ सारखेच आहे.घनाची बाजू = ---------सेमी

अ) 21 ब) 28 क) 36 ड) ४२

(२) गोलाची त्रिज्या दुप्पट केली असता नवीन होणाऱ्या गोलाचे घनफळ मूळ गोलाच्या घनफळाच्या पट होईल.

अ) 2 ब) 3 क) 4 ड) 8

(३) समान त्रिज्या आणि समान उंची असलेली वृत्तचिती आणि शंकू घेतला तर वृत्तचितीचे घनफळ शंकूच्या घनफळाच्या पट असेल.

अ) ☒ ब) 2 क) $\frac{1}{3}$ ड) 3

3) एका घनाचे पृष्ठफळ 96 सेमी आहे, त्माचे घनफळ काढा.

4) एका इष्टिकाचितीची लांबी 3मी, रूंदी 2.5 मी आणि उंची 1.5 मी आहे तर इष्टिकाचितीचे पृष्ठफळ व घनफळ काढा.

५) एका घनाची बाजू 1.6 सेमी आहे त्मा घनाचे पृष्ठफळ आणि घनफळ काढा.

६) एका इष्टिकाचितीची मापे 6cm x 8cm x 10cm अशी आहेत. या इष्टिकाचितीच्मा कर्णाची लांबी काढा.

७) 8 सेमी बाजू असलेल्या घनाच्या कर्णाची लांबी काढा.

८) इष्टिकाचितीच्या तीन लगतच्या पृष्ठांचे क्षेत्रफळ अनुक्रमे आणि AB,C चौरस एकक आहेत. इष्टिकाचितीचे घनफळ V घन एकक आहे. तर सिद्ध करा की $V^2 = ABC$

9) 10 सेमी उंची असलेली एक वृत्तचिती दोन्ही बाजूंनी उघडी असून तिची जाडी १.२ सेमी आणि बाह्यव्यास 10 सेमी आहे तर तिचे एकूण पृष्ठफळ काढा. (π=3.14घ्मा.)

10) एका शंकूची त्रिज्या 21 सेमी असून त्याचे घनफळ 12936सेमी^{3} आहे. तर शंकूची तिरकस उंची आणि एकूण पृष्ठफळ काढा.

11) 150 मी लांबी आणि 70 मी रूंदी असलेल्या एका शेतात 5.6 मी त्रिज्या आणि ☒ मी खोली असलेली एका शेतात 5.6 मी त्रिज्या आणि 20 मी खोली असलेली एक विहीर खणली. विहीरीतून बाहेर काढलेली माती उरलेल्या शेतामध्मे सारख्माच प्रमाणात पसरली तर शेताची उंची किती वाढली ते सांगा.

12) एका गोलाचे घनफळ 606.375 मी^{3} आहे. तर गोलाची त्रिज्या आणि पृष्ठफळ काढा.

13) 12 मी लांबी 4 मी रूंदी आणि 3 मी उंची असलेल्या एका खोलीत 2 मी 1 मी मापाच्या 2 खिडक्या आहेत आणि 2.5 मी 2 मी मापाचा एक दरवाजा आहे. तर खोलीच्या भिंतींना रु. 20 मी^{२} मा दराने रंग देण्यास किती खर्च मेईल?

14) 1 cm^3 आकारमानाच्या सोन्माच्या गोळ्यापासून 0.2मीमी व्यासाची तार ओढली. तर तयार झालेल्या तारेची लांबी काढा. (π=3.14ही किंमत घ्या.)

15) गोलाची त्रिज्या तिप्पट केली असता, खालील गुणोत्तरे काढा.
   (1) मूळच्या व नवीन गोलाचे घनफळ
   (2) मूळच्या व नवीन गोलाचे एकूण पृष्ठफळ

16) शंकू, वृत्तचिती आणि अर्धगोल या तिघांची त्रिज्या आणि उंची समान आहे. त्मांच्या घनफळाचे गुणोत्तर काढा.

17) एका शंकूची त्रिज्या 7 सेमी असून तिरकस उंची 25सेमी आहे तर (1) शंकूचे पृष्ठफळ (२) एकूण पृष्ठफळ (3) घनफळ काढा.

18) 5 सेमी मापाचे चार घन एकाशेजारी एक ठेवले. तर त्या इष्टिकाचितीचे पृष्ठफळ आणि घनफळ काढा.

19) दोन वृत्तचितीच्या त्रिज्मा 1:3 आणि उंची 7:4 मा प्रमाणात आहेत, तर त्यांचे घनफळ आणि वक्रपृष्ठफळ यांचे गुणोत्तर काढा.

20) खालीलपैकी कोणती विधाने सत्य व कोणती असत्य आहेत, ते सांगा.
   (१) a बाजू असलेल्या घनाचे पृष्ठफळ = $6a^2$
   (२) कोनाचे एकूण पृष्ठफळ πrl इतके असते. या ठिकाणी l ही कोनाची त्रिज्या आणि l ही कोनाची तिरकस उंची आहे.
   (३) शंकू आणि अर्धगोल यांच्या त्रिज्या व उंची समान आहेत. या ठिकाणी अर्धगोलाचे घनफळ शंकूच्या तिप्पट असते.
   (४) लांबी l रूंदी आणि उंची b असणाऱ्या h खोलीत मावणाऱ्या बांबूची जास्तीत जास्त लांबी काढण्याचे सूत्र = $\sqrt{l^2+b^2+h^2}$ हे आहे.
   (५) l त्रिज्या असलेल्या वक्रपृष्ठफळ हे $2\pi r$असते.

तुमची प्रगती तपासा– उत्तरे

21.1

1) $81m^2$, $45m^2$
2) $77.76\ cm^2$, $46.656\ cm^2$
3) 14cm, 1350 m3
4) $30,000\ cm^3$
5) 384
6) 15 m, $117\ m^2$
7) $896\ cm^2$, $1536\ cm^3$
8) Rs. 460.80
9) $\sqrt{61}$m

21.2

1) $44m^2$, $201\frac{1}{7}\ m^2$, $110m^3$
2) $880\ cm^2$
3) 80850 lit.
4) $1386\ cm^3$
5) 4cm
6) $401.92\ cm^2$

21.3

1) $\frac{1430}{7}cm^2$, $\frac{1980}{7}\ cm^2$, $\frac{2200}{7}\ cm^3$,
2) $1848\ cm^3$
3) 2 cm
4) 141.3 m
5) $2310\ cm^2$

21.4

1) $2464\ cm^2$ $5544\ cm^2$ 2) 21cm, $5544m^2$
3) (1) $9,928\ cm^2$ (2) $14892\ cm^2$ (3) $92,661\frac{1}{3}$ cm3
4) 64

सत्र स्वाध्याम उत्तरे

1) (1) 2 (lb + bh + hl) (2) $\sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$ (3) a^3

(4) $\pi rh + \pi r^2$

(5) $\pi r^2 h$

(6) πrl त्रिज्या, तिरकस उंची

(7) $4\pi r^2$ 8) $\frac{2}{3} 4\pi r^3$

2) (1) D (2) D (3) D

3) 64 cm^3

4) 31.5 cm^2; 11.25 m3

5) 76cm^2, 3.136 cm^3

6) 10 2 cm

7) 8 3 cm

8) A = $\sqrt{lh}$; B=bh x c = hl (उदा. सोडविणेबाबत मार्गदर्शन)

9) $\sqrt{56.4}$ cm^2

10) 35 cm, 3696 cm^2

11) 18.95 cm

12) 21 m, 5544 m^2

13) Rs. 2610

14) 31.34 m

15) (i) 1:27, 1:9 (ii) 70h cm^2 (iii) 1232 cm^2

16) 1:3:2

17) (i) 550 cm^2

18) 350 cm^2, 375 cm^3

19) (i) 63 :16 (ii) 21:8

20) (i) सत्य (ii) असत्य (iii) असत्य (iv) सत्य (v) असत्य

माध्यमिक अभ्यासक्रम

विषय ः गणित

गुण ः **25** वेळ ः **45** मिनिटे

सूचना ः

1) सर्व प्रश्नांची उत्तरे स्वतंत्र उत्तर पत्रिकेवर लिहा.

2) तुमच्या उत्तर पत्रिकेवर पुढील माहिती लिहा.

- पूर्ण नाव
- दाखल क्रमांक **(Enrolment Number)**
- विषय
- सराव कार्य ज्या प्रकरणावर आहे, ती प्रकरणे
- पूर्ण पत्ता

3) तुम्ही केलेले सराव कार्य तुमच्या अभ्यास केंद्रावरील विषय शिक्षकांकडून तपासून घ्या आणि त्यांच्याकडून तुमच्या तयारीची निश्चित माहिती मिळवा.

तुमचे सराव कार्य, राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षण संस्थेकडे पाठवू नका.

1. एका समभुज त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $\sqrt{\ }$ cm^2 आहे. तर त्या त्रिकोणाची बाजू = ... cm

   (A) 8 (B) 4 (C) 2 (D) 16 1

2. एका त्रिकोणाच्या बाजू 3 : 5 : 7 या प्रमाणात आहेत. त्रिकोणाची परिमिती 60cm आहे. म्हणून या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = ... cm^2. 1

   (A) 60 (B) 30 (C) 15 (D) 120

3. एका समभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ 96cm^2 आहे. त्याचा एक कर्ण 16cm लांबीचा तर दुसऱ्या कर्णाची लांबी .... cm 1

   (A) 5 (B) 6 (C) 8 (D) 10

4. एका घनाच्या लगतच्या तीन पृष्ठांची क्षेत्रफळे अनुक्रमे a, b, c आहेत. म्हणून त्याचे घनफळ = ... 1

   (A) $\sqrt{\ }$ (B) $\sqrt{\ }$ (C) abc (D) $a^3b^3c^3$

5. अर्धवर्तुळाकार आकाराच्या भांड्याची त्रिज्या 3.5m आहे. म्हणून त्याचे पृष्ठफळ . . . . आहे. 1

   (A) 38.5 m^2 (B) 77m^2 (C) 115.5 m^2 (D) 154 m^2

6. समलंब चौकोनाच्या समांतर बाजूंची लांबी अनुक्रमे 20m आणि 16m आहे. या बाजूंमधील अंतर 11m आहे. तर समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ काढा. 2

7. एका वर्तुळाकृती बागेची त्रिज्या 9m आहे. या बागेभोवती 3m रुंदीचा रस्ता केला आहे. या रस्त्याचे क्षेत्रफळ काढा. 2

8. दोन वृत्तचितींच्या त्रिज्यांचे गुणोत्तर 4 : 5 असून त्यांच्या उंचीचे गुणोत्तर 5 : 3 आहे. तर त्याच्या घनफळाचे गुणोत्तर काढा. 2

9. 9m उंची असलेल्या कोनाच्या पायाच्या परिघाची लांबी 44m आहे. या कोनाचे घनफळ काढा. 2

10. एक चेंडूचा व्यास 41 cm आहे. तर त्याचे पृष्ठफळ आणि घनफळ काढा. 2

11. एका वर्तुळाकृती कोनाची त्रिज्या आणि उंची यांचे गुणोत्तर 5 : 12 आहे. त्याचे घनफळ $314 m^3$ असल्यास त्याची तिरकस उंची काढा. 4
($\pi = 3.14$ ही किंमत घ्या)

12. एका शेताची लांबी 200m आणि रुंदी 75m आहे. या शेतात $40m \times 20m \times 10m$ या आकाराचे तळे खोदून खोदलेली सर्व माती शेतात समप्रमाणात पसरली, तर शेताची उंची किती वाढेल? 6

विभाग ः ५

त्रिकोणमिती

अशी कल्पना करा की, एखादा मनुष्य एका टेकडीच्या पायाजवळ उभा राहून टेकडीच्या माथ्यावरील देवळाकडे पहात आहे. त्या टेकडीवर चढण्याचे साहस करण्यापूर्वी त्याला आपणापासून त्या देवळापर्यंतचे अंदाजे अंतर माहीत असणे आवश्यक आहे. आपणास माहीत आहे की, अशा प्रकारचे अथवा याच्याशी संबंधित असलेले प्रश्न ज्या शास्त्राने सोडविता येतात त्याला त्रिकोणमिती म्हणतात.

या पाठाची पहिली ओळख ख्रिस्तपूर्व १४० मध्ये हिपरकस (Hipparcus) याने करून दिली. त्याच्या मते सहज शक्य नसलेल्या पदार्थांमधील अंतरे आणि उंची काढता येणे शक्य आहे, असे होते. इ. स. १५० मध्ये टॉलेमीने अशीच शक्यता वर्तवून त्यासाठी काटकोन त्रिकोणाचा वापर करता येईल असे सुचविले. परंतु आर्यभट्टांनी जया (Jaya) या नावाचे एखाद्या काटकोन त्रिकोणाच्या लघुकोनाची साईन ओळख करून दिली तिलाच त्याचेच पुढे साईन हे रूप तयार झाले. भास्कराचार्यांनी (1114AD) Goladhayay (गोलाध्याय) वर अभ्यासपूर्वक लिहिताना वरील विषयाची पूर्तता केली. त्यामध्ये त्यांनी आत्ताच्या वापरात असलेल्या साईन, कोसाईन आणि टॅजँट यांना अनुक्रमे जया, कोटिज्या आणि स्पर्शिज्या (Jaya, Kotijya, Sparshija) असे शब्द वापरले होते. परंतु याचे श्रेय Neelkanth Somstuvan (1500AD) यांना मिळाले. त्यांनी या शास्त्राची प्रगति करताना उन्नत, अवनत असे शब्द वापरून, उंची आणि अंतरावरील प्रश्न सोडविण्यास मदत केली.

या पाठात आपण एखाद्या किरणाची मूळ स्थिती व त्याभोवती होणाऱ्या भ्रमणाने येणारी अंतिम स्थिती या स्वरूपात धन व ऋण कोनाची व्याख्या करणार आहोत. तसेच एखाद्या काटकोन त्रिकोणातील लघुकोनाची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे, बाजूच्या संदर्भातील त्रिकोणमितीय नित्य समीकरणे आणि काटकोनाची त्रिकोणमिती गुणोत्तरे यांच्या व्याख्या अभ्यासणार आहोत. त्याआधारे अंतर व उंची संबंधी प्रश्न सोडविताना आपण विशेष करून ३०°, ४५° आणि ६० अशा दोन प्रकारच्या काटकोन त्रिकोणांचा वापर करणार आहोत.

Success Stories

Jaspal Singh
Enrolment No.: Secondary - 27020212195
Senior Secondary – 92279300066

Forced to discontinue his tenth class in 1993 in order to earn a livelihood to support his family, when his parents met with an accident, Jaspal Singh resumed his studies in 2003 by enrolling for the Secondary level course in NIOS. The flexibility of the NIOS system enabled him to pursue his studies along with his vocation. He acquired skills in fashion designing while working as a freelancer in garment export houses.

Having completed his Senior Secondary course from the NIOS and moved by the desire to continue studies, Jaspal Singh has managed to obtain admission to a three year course in Fashion Management at the University of Thames Valley, London.

Ms. Sudha
Enrolment No. : 27029182593

Ms. Sudha was a only housewife until such time that her husband passed away and she was offered the job of a constable in the Delhi Police. She then took up the job to support the family consisting of her two children.

Sudha who had not completed her schooling was motivated by her children to join the NIOS. She then passed the Secondary examination from NIOS in April 2009. A resident of Sant Nagar, Burari, Delhi and posted at the Rohini Court, Delhi, Sudha today feels more confident and empowered by the qualification acquired by her through the NIOS.

22

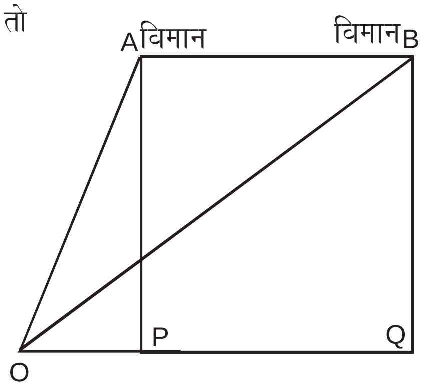
त्रिकोणमितीची ओळख

गणित विषयामध्ये त्रिकोणाच्या अभ्यासास एक विशेष असे स्थान आहे. त्रिकोण ही एक किमान बाजूंनी बंदिस्त अशी आकृती असून सरळ रेषा वापरून तयार होणारी कोणतीही बंदिस्त आकृतीचे त्रिकोणी भाग करून अभ्यासणे शक्य आहे. काटकोन त्रिकोणाचा संदर्भ घेऊन वर्तुळाचा अभ्यास करने सुध्दा सोपे झाले आहे.

भूमिती विषयामध्ये त्रिकोणासंबंधी अभ्यास करताना बहुतेक निष्कर्ष हे विधानांच्या स्वरूपात आहेत परंतु त्रिकोणमिती या पाठातील निष्कर्ष हे अगदी भिन्न स्वरूपात असून सोप्या व सुटसुटीत स्वरूपाचे आहेत. यातील निष्कर्ष हे सूत्राच्या स्वरूपात आहेत. त्रिकोणमितीमध्ये काटकोन त्रिकोणावर अधिक भर दिला आहे. आता आपण कशा परिस्थितीत काटकोन त्रिकोण करता येतो ते पाहू. तुम्ही कधी नारळाचे उंच झाड पाहिले आहे काय? त्या झाडाची उंची किती? असा प्रश्न निर्माण झाला असेलच तर त्या झाडाची उंची प्रत्यक्ष न मोजता तुम्ही काढू शकाल ? झाडाच्या शेंडयाकडे पाहताना आपल्या डोळयाने, डोळयाच्या क्षितिज समांतर रेषेला केलेला कोन, झाडाच्या शेंडयापासून जमिनीवर टाकालेला लंब, यांनी काटकोन त्रिकोण तयार हातो यांची कल्पना करा.

आपण आणखी काही उदाहरणे पाहू.

समजा तुम्ही पतंग उडवित आहात, जेव्हा पतंग आकाशात उंच जाईल तेव्हा तो किती उंचीवर असेल? आता येथे सुध्दा पतंगाकडे पाहताना डोळयापासून समांतर दृष्टिपातळीशी होणारा कोन, पतंगापासून जमिनीवर टाकलेला लंब यापासून काटकोन त्रिकोण तयार होईल. अशीच स्थिती आपणास पुढील उदाहरणात आढळून येते. एक मनुष्य नदीच्या एका काठावर उभा असून तो त्याच नदीच्या अगदी समोरील बाजूस दुस-या काठावरील असलेल्या मंदिराच्या कळसाकडे पाहतो, जर तुम्हास मंदिराची उंची माहित असेल तर नदीच्या पात्राची रूंदी काढू शकाल काय ? या प्रकारात सुध्दा काटकोन त्रिकोण तयार होईल अशी कल्पना करता येते. शेवटी तुम्ही घराच्या गच्चीवर उभे आहात आणि अचानक आकाशात विमान दिसले. तुम्ही त्या विमानाकडे पाहताना एक काटकोन त्रिकोण तयार होतो अशी कल्पना करा. ते विमान तुमच्यापासून दूर जात आहे यामुळे काही सेकंदानी पुन्हा त्या विमानाकडे पाहताना होणारा दुसरा काटकोन त्रिकोण होईल असे समजा. हे दोन्ही काटकोन त्रिकोण हे तुमचा डोळा, विमान आणि क्षितिज समांतर रेषा यावर विमानापासून काढलेले लंब यांनी तयार होतील .हे सोबतच्या आकृतीत दाखविले आहे. यामधील AB हे अंतर किती आहे हे मिळवू शकाल काय ? यावरून तेवढया कालावधीत ते विमान किती अंतर गेले हे मिळविता येइल.



आकृती 22.1

टिपा

वरील सर्व चारही उदाहरणे आनि अशी स्थिती निर्माण होणारी उदाहरणे घेतली तर आपण उंची अथवा अंतरे (प्रत्यक्ष न मोजता) गणितातील त्रिकोणमिती या शाखेच्या सहाय्याने मिळविणे शक्य आहे. त्रिकोणमिती (Trigonometry) हा शब्द असा मिळून तयार झाला आहे. Tri म्हणजे तीन, Gon म्हणजे बाजू आणि metron म्हणजे मोजमाप (tomeasure) करणे अशा अर्थाचे आहेत म्हणून त्रिकोणमितीचा शब्दशःअर्थ म्हणजे त्रिकोणाच्या बाजु व कोनांचे मापन करणे होय. त्रिकोणमिती ही गणितातील अशी एक शाखा आहे की ज्यामध्ये त्रिकोणाच्या बाजू व कोन यांच्या मापनांचा विचार केला जातो. गणितातील या शाखेमुळे वास्तुशिल्प (engineering) जमीन मोजणी (surveying) , नौदल (navigation), खगोलशास्त्र (Astronomy), भूगोल (Geography) इ. यांची प्रगति होण्यास मदत झाली. प्राचिन काळातसुध्दा खगोलशास्त्रज्ञ तारे व ग्रह यांचे पृथ्वीपासूनचे अंतर काढण्यासाठी या शाखेचा उपयोग करीत होते. आधुनिक जगात प्रगत तंत्रज्ञानाचा पाया हा त्रिकोणमितीच्या सिध्दांतावरच आधारला आहे.

या पाठामध्ये आपण त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांच्या व्याख्या आणि कोनांच्या संबंधी त्रिकोणमितीय गुणोत्तर हे बाजूंच्या गुणोत्तरावरून मिळविणार आहोत तसेच बाजूंच्या या गुणोत्तरावरून विविध त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे प्रस्थापित करून काही त्रिकोणमितीय नित्य समीकरणे (Trigonometric identities) अभ्यासणार आहोत.

उद्दिष्टे ः

या पाठाचा अभ्यास केल्यानंतर आपणास खालील बाबींचे ज्ञान होईल.

- काटकोन त्रिकोणाच्या लघुकोनाची त्रिकोणमितीस गुणोत्तरे लिहिणे.
- काटकोन त्रिकोणाच्या काही बाजू आणि त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे माहिती झाली असता त्याच्या उरलेल्या बाजू व कोन शोधणे.
- त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांतील संबंध लिहिणे.
- त्रिकोणमितीय नित्य समीकरणे सिध्द करणे.
- त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे आणि नित्य समीकरणांवर आधारीत प्रश्न सोडविणे.
- दिलेल्या लघुकोनाच्या त्रिकोणमितीय गुणोंत्तरावरून त्या कोनाच्या कोटिकोनाचे त्रिकोणमितीय गुणोत्तर मिळवून त्यावर आधारीत प्रश्न सोडविणे.

अपेक्षित पूर्वज्ञान ः

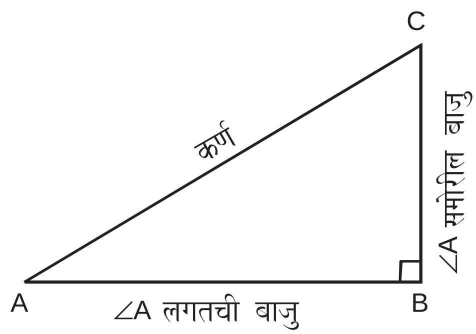
- कोनांची संकल्पना
- काटकोन त्रिकोणाची रचना
- समांतर व लंब रेषा काढणे.
- कोनांचे प्रकार ः लघुकोन, विशालकोन, काटकोन

टिपा

- त्रिकोणाचे प्रकार ः लघुकोन, विशालकोन, काटकोन
- त्रिकोणाचे प्रकार ः समव्दिभूज, समभुज
- कोन व त्याचा कोटिकोन

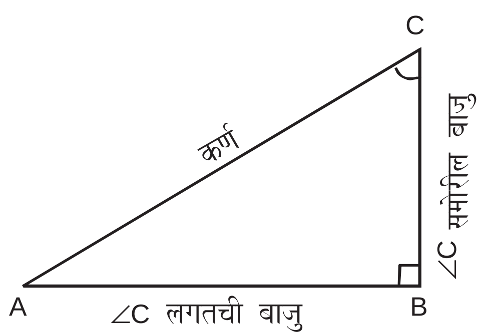
काटकोन त्रिकोणातील लघुकोनांची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे ः

समजा **Δ ABC** हा काटकोन त्रिकोण असून यामध्ये < B हा काटकोन आहे. येथे A (i. CAB) हा लघुकोन, बाजू AC हा कर्ण, बाजू BC ही A समोरील बाजू असून बाजू AB ही A लगतची होईल.



आकृती 22.2

तसेच C हा विचारात घेतला असता. बाजू AB ही C ची संमुख बाजू आणि बाजू BC ही C ची लगतची बाजू होईल.



आकृती 22.3

आता आपण काटकोन त्रिकोणातील बाजूसंबंधी काही गुणोत्तरे पाहू त्यांना 'त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे' म्हणतात. या काटकोन त्रिकोणातील A संबंधी त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांच्या व्याख्या पुढीलप'माणे ः

(i) Sine A = $\dfrac{\angle A \text{ समोरील बाजू}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{BC}{AC}$

(ii) Consine A = $\dfrac{\angle A \text{ समोरील बाजू}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{AB}{AC}$

(iii) tangent A = $\dfrac{\angle A \text{ समोरील बाजू}}{\angle A \text{ लगतची बाजू}} = \dfrac{BC}{AC}$

(iv) cosecant A = $\dfrac{\text{कर्ण}}{\angle A \text{ समोरील बाजू}} = \dfrac{AC}{BC}$

(v) secant A = $\dfrac{\text{कर्ण}}{\angle A \text{ लगतची बाजू}} = \dfrac{AC}{AB}$

(vi) cotangent A = $\dfrac{\angle A \text{ समोरील बाजू}}{\angle A \text{ लगतची बाजू}} = \dfrac{AB}{BC}$

वरील त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे सोसायटी संक्षेप स्वरूपात अनुक्रमे ः sinA, cos A, tan A, cosecA, secA आणि cotA अशी लिहिता येतात. ही त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे संक्षेप स्वरूपात 't – गुणोत्तर' या नावाने ओळखली जातात.

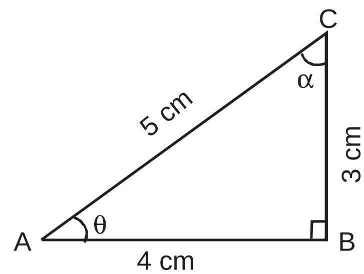
जर आपण $\angle A = \theta$ असे घेतले तर वरील सर्व गुणोत्तरे पुढीलप्रमाणे होतील.

$$\sin\theta = \frac{BC}{AC}, \cos\theta = \frac{AB}{AC}, \tan\theta = \frac{BC}{AB}, \operatorname{cosec}\theta = \frac{AC}{BC}$$

$$\sec\theta = \frac{AC}{AB} \text{ आणि } \cot\theta = \frac{AB}{BC}$$

टीप ः येथे $\sin\theta$ आणि $\operatorname{cosec}\theta$ हे परस्परांचे गुणाकार व्यस्तांक (Reciprocal) आहेत. त्याचप्रमाणे $\cot\theta$ व $\sec\theta$ हे अनुक्रमे $\tan\theta$ व $\cos\theta$ यांची गुणाकार व्यस्तांक आहेत.

अशा रीतीने काटकोन ΔABC मध्ये AB = 4 cm, BC = 3cm आणि AC = 5cm असेल तर



आ. 22.4

$$\sin\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$$

$$\cos\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{3}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{3}$$

$$\sec\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{4}$$

आणि $\cot\theta = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{4}{3}$

वरील आकृतीत, जर आपण $\angle C = \alpha$ असा घेतल्यास ः

$$\sin \propto = \frac{\angle\propto \text{ समोरील बाजू}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \propto = \frac{\angle\propto \text{ लगतची बाजू}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$$

$$\operatorname{cosec} \propto = \frac{\text{कर्ण}}{\angle\propto \text{ समोरील बाजू}} = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{4}$$

$$\sec \propto = \frac{\text{कर्ण}}{\angle\propto \text{ लगतची बाजू}} = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{3}$$

आणि $\cot \propto = \frac{\angle\propto \text{ लगतची बाजू}}{\text{समोरील बाजू}} = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4}$

 लक्षात (ध्यानात) ठेवणे

1. sin A किंवा **sinθ** ही एक संयुक्त संज्ञा असून त्यापासून sin हे A किंवा θ पासून अलग करता येत नाही. ते sin X A किंवा sin X θ असे नव्हे. हाच नियम इतर त्रिकोणमितीय गुणोत्तराकरिता लागू आहे.

२. प्रत्येक t त्रिकोणमितीय गुणोत्तर ही एक वास्तव संख्या आहे.

३. सोयीकरिता आपण $\sin^2\theta, \cos^2\theta, \tan^2\theta$ हे संकेत अनुक्रमे $(\sin\theta)^2$, $(\text{Cos}\theta)^2, (\tan\theta)^2$ यांकरिता वापरणार आहोत. हेच संकेत त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांच्या यापेक्षा अधिक घातांकासाठी वापरले जातील.

4. $\angle$A किंवा $\angle$Q लघुकोन असतानाच फक्त आपण त्यांच्या त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांचा अभ्यास करणार आहोत.

<u>आता प्रश्न निर्माण होतो ः</u>

विविध लांबींच्या बाजू असणा-या काटकोन त्रिकोणात एकाच (त्याच) कोनाकरिता t गुणोत्तराची किंमत तीच राहील की नाही ? यासाठी आपण समजा काटकोन त्रिकोण ABC मध्ये B हा काटकोन आहे आणि P हा कर्ण AC वर एक बिंदू आहे. समजा PQ ABआता काटकोन Δ ABC मध्ये

$$\sin A = \frac{BC}{AC} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

आणि काटकोन Δ AQP मध्ये

$$\sin A = \frac{PQ}{AP} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$$

टिपा

आता ΔAQP आणि ΔABC मध्ये

$\angle Q = \angle B$ .... (प्रत्येकी 90^0)

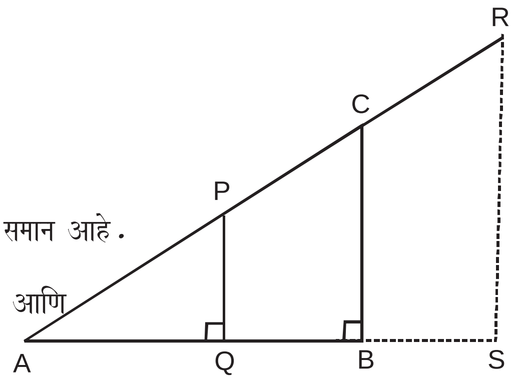
आणि $\angle A = \angle A$ .... (सामाईक)

$\therefore \Delta AQP \approx \Delta ABC$ .... (कोको समरूपता कसोटी)

$\therefore \frac{AP}{AC} = \frac{QP}{BC} = \frac{AQ}{AB}$

किंवा $\frac{BC}{AC} = \frac{PQ}{AP}$ ....(iii)

विधान (i), (ii) आणि (iii) वरून आपणास असे दिसून येते की दोन्ही त्रिकोणासाठी sinA ची किंमत समान आहे.



आकृती 22.5

त्याचपमाणे आपणास $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{AQ}{AP}$ आणि $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{PQ}{AQ}$ मिळतील.

समजा R बिंदू हा वाढविलेल्या AC वर असून $RS \perp AB$ काढली तर ती वाढविलेल्या AB ला S मध्ये मिळते. आता तुम्ही काटकोन ΔASR करिता सुध्दा त्याच त्रिकोणमितीय किंमती मिळतात हे पडताळा. अशा रितीने आपणास पुढीलप्रमाणे निष्कर्ष काढता येतो. एखाद्या कोनाची त्रिकोणमितीय गुणोत्तराची किंमत ही काटकोन त्रिकोणाच्या लहान मोठया आकारावर अंवलबून नसते तर ती किंमत फक्त कोनावर अवलंबून असते.

<u>उदा. 22.1 :</u> आ. 22.6 मध्ये ΔABC मध्ये B बिंदूजवळ काटकोन आहे. जर AB = 5cm, BC = 12 cm आणि AC = 13cm, तर tan C, cosecC आणि secc यांच्या किंमती मिळवा.

उकल : आपणास माहित आहे,

$\therefore \tan c = \frac{AB}{BC}$

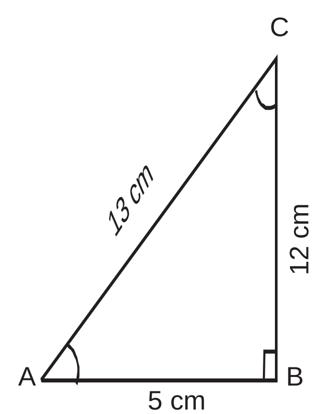
$\therefore \tan c = \frac{5}{12}$ ....उत्तर

तसेच cosecc = कर्ण / $\angle C$ समोरील बाजू

$\therefore cosecc = \frac{AC}{AB}$

$\therefore cosecc = \frac{13}{5}$ .... उत्तर

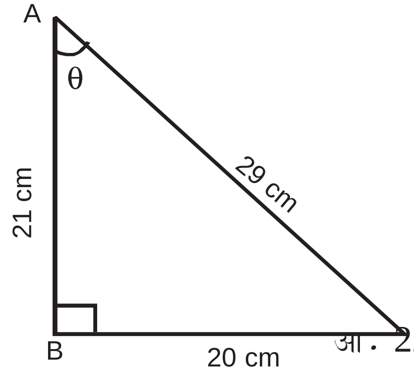
आणि secc = कर्ण / $\angle C$ लगतची बाजू



आकृती 22.6

$\therefore\ secc = \dfrac{13}{12}$ .... उत्तर

<u>उदा. 22.2 :</u> पुढील आकृती (22.7) वरून $\sin\theta, \cot\theta$ आणि $\sec\theta$ यांच्या किंमती काढा.



आ. 22.7

उकल : $\sin\theta = \dfrac{\theta \text{ कोनासमोरील बाजू}}{\text{कर्ण}}$

$$\therefore \sin\theta = \frac{BC}{AC}$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{20}{29}$$ .... उत्तर

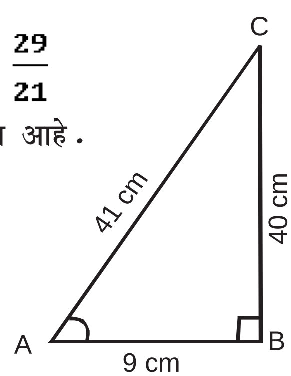
तसेच $\cot\theta = \dfrac{\angle\theta \text{ लगतची बाजू}}{\text{समोरील बाजू}}$

$\cot\theta = \dfrac{AB}{BC}$ $\qquad\qquad \therefore \cot\theta = \dfrac{21}{20}$

आणि $\sec\theta = \dfrac{\text{कर्ण}}{\angle\theta \text{ लगतची बाजू}}$

$\therefore\ \sec\theta = \dfrac{AC}{AB}$ $\qquad\qquad \therefore \sec\theta = \dfrac{29}{21}$

<u>उदा. 22.3 :</u> काटकोन त्रिकोण ABC मध्ये $\angle$ **B** हा काटकोन आहे. (आ. 22.8). जर AB = 9 cm, BC = 40 cm आणि AC = 41 cm तर cosc, cotc, tanA आणि cosecA यांच्या किंमती काढा.



आ. 22.8

उकल : आता आकृतीवरून,

$\text{Cos } c = \dfrac{\angle C \text{ लगतची बाजू}}{\text{कर्ण}}$

$$\therefore \cos c = \frac{BC}{AC}$$

$$\therefore \cos c = \frac{40}{41}$$

आणि $\text{Cot } c = \dfrac{\text{लगतची बाजू}}{\text{समोरील बाजू}} = \dfrac{40}{9}$

टिपा

तसेच $< A$ च्या संदर्भात बाजू AB ही लगतची आणि बाजू BC ही संमुख बाजू होईल.

$\therefore \tan A = \dfrac{< A \text{ समोरील बाजू}}{< A \text{ लगतची बाजू}}$

$\therefore \tan A = \dfrac{BC}{AB} \quad \therefore \tan A = \dfrac{40}{9}$

आणि $\operatorname{cosec} A = \dfrac{\text{कर्ण}}{< A \text{ समोरील बाजू}}$

$\therefore \operatorname{cosec} A = \dfrac{AC}{BC} \quad \therefore \operatorname{cosec} A = \dfrac{41}{40}$

उदा. 22.4 : आ. 22.9 मध्ये ΔABC हा काटकोन Δ असून $< B = 90^0$ तसेच $< A = < C, AC = \sqrt{2}\text{cm}$ आणि AB = 1 cm तर sinC, cos C आणि tan C यांच्या किंमती काढा.

उकल : ΔABC मध्ये $< A = < C$ ....(पक्ष)

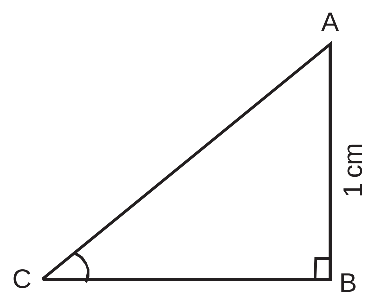
$\therefore BC = AB$ .... (Δ त एकरूप कोनासमोरील बाजू)

परंतु AB = 1cm ………….... (पक्ष)

$\therefore AB = AC = 1\text{cm}$

आता $\sin C = \dfrac{< C \text{ समोरील बाजू}}{\text{कर्ण}}$

$\therefore \sin c = \dfrac{AB}{AC} \quad \therefore \sin c = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$



आ. 22.9

तसेच $\cos C = \dfrac{< C \text{ लगतची बाजू}}{\text{कर्ण}}$

$\therefore \cos C = \dfrac{BC}{AC} \quad \therefore \cos C = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

आणि $\tan c = \dfrac{< C \text{ समोरील बाजू}}{< C \text{ लगतची बाजू}}$

$\therefore \tan c = \dfrac{AB}{BC} \quad \therefore \tan c = \dfrac{1}{1} = 1$

□ ध्यानात ठेवणे :

मागील उदाहरणात (उदाहरण 22.4) $< A = < C$ आणि $< B = 90^0$ दिले आहे.

$\therefore < A = < C = 45^0$ होतील. ∴ आपणास पुढील निष्कर्ष मिळतात.

उदा. 22.5 : आकृती 22.10 मध्ये ΔABC हा बिंदू C जवळ काटकोन करणारा काटकोन त्रिकोण आहे. जर AB = C, AC = b आणि BC = a तर खालीलपैकी कोणती विधाने सत्य होतील ?

(i) $\tan A = \dfrac{b}{b}$ (ii) $\tan A = \dfrac{c}{b}$

(iii) $\cot A = \dfrac{b}{a}$ (iv) $\cot A = \dfrac{a}{b}$

उकल : $\tan A = \dfrac{< A \text{ समोरील बाजू}}{< A \text{ लगतची बाजू}}$

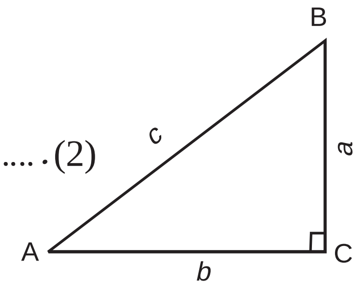
$\therefore \tan A = \dfrac{BC}{AC} \quad \therefore \tan A = \dfrac{a}{b} = 1$.(1)

आणि $\cot A = \dfrac{\angle A \text{ समोरील बाजू}}{\angle A \text{ लगतची बाजू}}$

$\therefore \cot A = \dfrac{AC}{BC} \quad \therefore \cot A = \dfrac{b}{a} = 1$ ....(2)

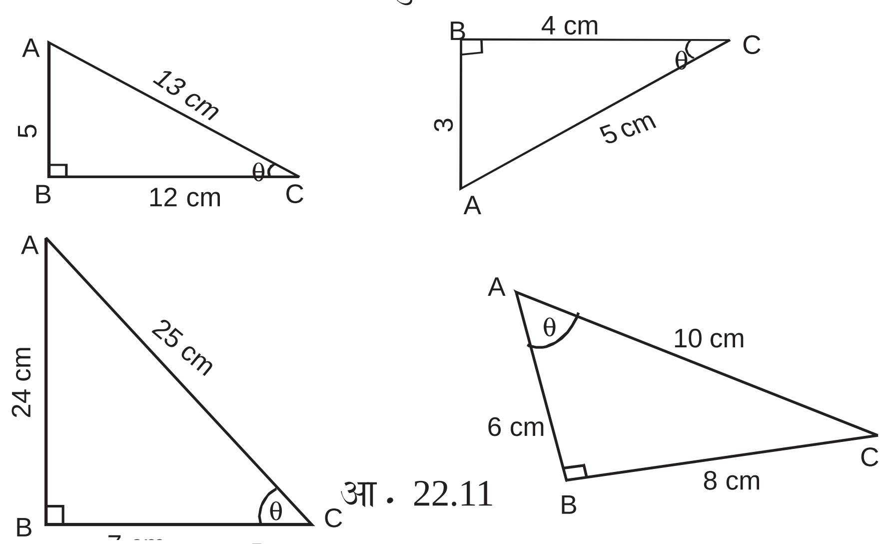
निष्कर्ष (1) व (2) वरून दिलेल्यापैकी विधान

iii) म्हणजेच $\therefore \cot A = \dfrac{b}{a}$ हे सत्य आहे.



आ. 22.10

1)पुढे दिलेल्या प्रत्येक आकृतीमध्ये ΔABC हा काटकोन त्रिकोण असून तो B बिंदूजवळ काटकोन आहे. तर θ कोनांची सर्व त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे लिहा.



आ. 22.11

2) ΔABC मध्ये, $\angle B = 90^0$, BC = 5 cm, AB = 4 cm आणि AC = $\sqrt{41}$ cm, तर sin A, cosA आणि tan A यांच्या किंमती काढा.

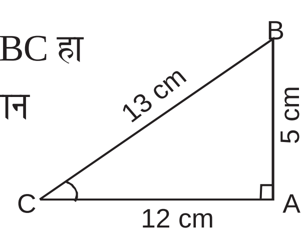
3)ΔABC हा काटकोन Δ असून B बिंदूजवळ काटकोन आहे. जर AB = 40 cm, BC = 9cm आणि AC = 41 cm, तर पुढील गुणोत्तराच्या किंमती मिळवा. Sin C, Cot C, cos A आणि cot A

4)Δ ABC मध्ये $\angle B = 90^0$, जर AB = BC= 2cm आणि AC = $2\sqrt{2}$ cm, तर secC, cosec C आणि cot C यांच्या किंमती काढा.

5) पुढे दिलेल्या आकृती 22.12 मध्ये, काटकोन त्रिकोण ABC हा A बिंदूजवळ काटकोन आहे. तर खालीलपैकी कोणते विधान सत्य आहे ?

(i) $\cot C = \dfrac{13}{12}$ (ii) $\cot C = \dfrac{12}{13}$

(iii) $\cot C = \dfrac{5}{12}$ (iv) $\cot C = \dfrac{12}{5}$



आ. 22.10

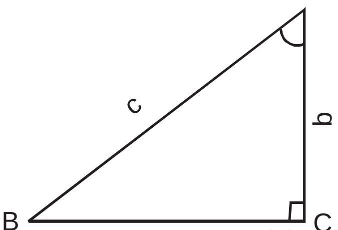
टिपा

6)आकृती 22.13 मध्ये AC = b, BC = a आणि AB = c

तर पुढीलपैकी सत्य कोणते ?

(i) $cosecA = \frac{a}{b}$ (ii) $cosecA = \frac{c}{a}$

(iii) $cosecA = \frac{c}{b}$ (iv) $cosecA = \frac{b}{a}$

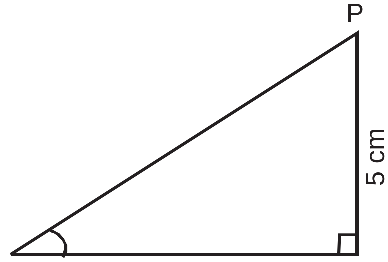


आ. 22.13

22.2 काटकोन त्रिकोणाच्या दोन बाजू दिल्या असता, त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे

जेव्हा काटकोन त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजू देतात, तेव्हा त्याची तिसरी बाजू पायथागोरसचे प्रमेय वापरून काढता येते. त्यानंतर मागील भागात आपण शिकल्याप्रमाणे दिलेल्या कोनाची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे काढता येतील. खालील काही उदाहरणे पाहू या.

उदा. 22.6 : आकृती 22.14 मध्ये, **Δ PQR** हा काटकोन त्रिकोण असून Q बिंदूजवळ काटकोन आहे. जर PQ = 5cm आणि QR = 12 cm, तर sinR, cosR आणि tanR यांच्या किंमती मिळवा.



आ. 22.14

उकल : प्रथम आपण पायथागोरसचे प्रमेय वापरून काटकोन त्रिकोणाची तिसरी बाजू मिळवू .

∵ ΔPQR मध्ये Q बिंदूजवळ काटकोन होतो. —(पक्ष)

∴ PR हा कर्ण होईल.

∴ $PR = \sqrt{PQ^2 + QR^2}$ ....(पायथागोरस प्रमेयानुसार)

$= \sqrt{5^2 + 12^2}$

$= \sqrt{25 + 144}$

∴ $PR = \sqrt{169} = 13$ cm

आता आपण त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांच्या व्याख्येनुसार त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे मिळवू.

$\text{Sin R} = \dfrac{\angle R \text{ समोरील बाजू}}{\text{कर्ण}}$

∴ $\text{SinR} = \dfrac{PQ}{PR}$ ∴ $\text{SinR} = \dfrac{5}{13}$

तसेच $\text{cosR} = \dfrac{\angle R \text{ लगतची बाजू}}{\text{कर्ण}}$

∴ $\text{cosR} = \dfrac{QR}{PR}$ ∴ $\text{cosR} = \dfrac{12}{13}$

आणि $\tan R = \dfrac{\angle R \text{ समोरील बाजू}}{\angle R \text{ लगतची बाजू}}$

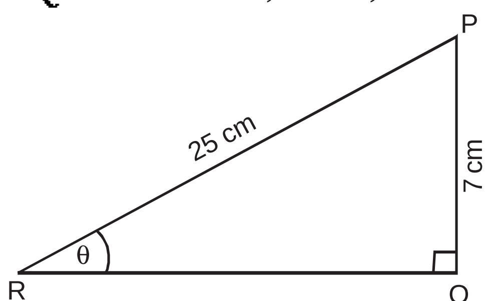
∴ $\text{tanR} = \dfrac{PQ}{QR}$ ∴ $\text{tanR} = \dfrac{5}{12}$

वरील उदाहरणावरून आपणाला <u>**काटकोन त्रिकोणाच्या दोन बाजू दिल्या असता त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे खालील पाय-या वापरून मिळविता येतात ः**</u>

<u>**पायरी 1 :**</u>प्रथम पायथागोरस प्रमेय वापरून दिलेल्या काटकोन त्रिकोणाची माहित नसलेली तिसरी बाजू मिळवा.

<u>**पायरी II :**</u> नंतर त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांच्या (traitors) व्याख्यांचा उपयोग करून संबंधित बाजूंच्या किंमती घाला.

<u>**उदा. 22.7:**</u> आकृती 22.15 मध्ये Δ **PQR** हा काटकोन त्रिकोण असून Q बिंदूजवळ काटकोन आहे. PR = 25cm, PQ = 7 cm आणि $<$ **PQR** = θ तर tan , cosec, आणि sec यांच्या किंमती मिळवा.



आ. 22.15

<u>उकल ः</u> $\because \Delta\, PQR$ हा काटकोन त्रिकोण तो Q बिंदूजवळ काटकोन आहे.———— (पक्ष)

$\therefore PR$ हा कर्ण होईल.

पायथागोरस प्रमेयानुसार,

$\therefore QR = \sqrt{PR^2 - PQ^2}$

$\therefore QR = \sqrt{25^2 - 7^2}$ $\therefore QR = \sqrt{625 - 49}$

$\therefore QR = \sqrt{576}$ cm $\therefore QR = 24cm$

आता त्रिकोणमिती गुणोत्तराच्या व्याख्येनुसार

$\tan\theta = \dfrac{<\theta \text{ समोरील बाजू}}{<\theta \text{ लगतची बाजू}}$

$\therefore \tan\theta = \dfrac{PR}{PQ}$ $\therefore \tan\theta = \dfrac{7}{24}$

तसेच $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{\text{कर्ण}}{<\theta \text{ समोरील बाजू}}$

$\therefore \operatorname{cosec}\theta = \dfrac{PR}{PQ}$ $\therefore \operatorname{cosec}\theta = \dfrac{25}{7}$

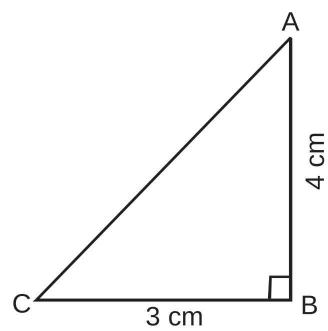
$\sec\theta = \dfrac{\text{कर्ण}}{<\theta \text{ लगतची बाजू}}$

$\therefore \sec\theta = \dfrac{PR}{QR}$ $\therefore \sec\theta = \dfrac{25}{24}$

<u>**उदाः 22.8 :**</u> ΔABC मध्ये, $< B = 90^0$,

जर AB = 4cm आणि BC = 3cm,

तर sinC, cosC, cotC, tanA, secA आणि cosecA यांच्या किंमती काढा. यावरून tanA आणि cotC यांच्या किंमती स्पष्ट करा. तसेच tanA – cotC यांची किंमत काढा.



आ. 22.16

<u>उकल</u> :प्रथम पायथागोरस प्रमेयाने ΔABC ची बाजू AC मिळवू

$\angle B = 90^0$ ———— (पक्ष)

$\therefore AC$ हा कर्ण होईल.

$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$

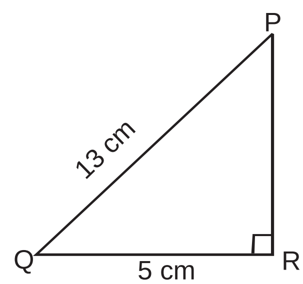
$\therefore AC = \sqrt{4^2 + 3^2}$ $\quad \therefore AC = \sqrt{16+9}$

$\therefore AC = \sqrt{25}$ cm $\quad \therefore AC = 5cm$ आता त्रिकोणमितीय (t) गुणोत्तरांच्या व्याख्येनुसार,

Sin C = $\dfrac{\angle C \text{ समोरील बाजू}}{\text{कर्ण}}$

$\therefore \text{Sin}C = \dfrac{AB}{AC} \quad \therefore \text{Sin}C = \dfrac{4}{5}$

तसेच cosC = $\dfrac{\angle R \text{ लगतची बाजू}}{\text{कर्ण}}$



आ. 22.17

$\therefore \cos C = \dfrac{BC}{AC} \quad \therefore \cos C = \dfrac{3}{5}$

cot C = $\dfrac{\angle C \text{ लगतची बाजू}}{\angle C \text{ समोरील बाजू}}$

$\cot C = \dfrac{BC}{AB} \quad \therefore \cot C = \dfrac{3}{4}$ ———— (1)

आणि $\angle A$ च्या संदर्भात,

tan A = $\dfrac{\angle A \text{ समोरील बाजू}}{\angle A \text{ लगतची बाजू}}$

$\therefore \tan A = \dfrac{BC}{AB} \quad \therefore \tan A = \dfrac{3}{4}$ ———— (2)

secA = $\dfrac{\text{कर्ण}}{\angle A \text{ लगतची बाजू}}$

$\therefore \sec A = \dfrac{AC}{AB} \quad \therefore \sec A = \dfrac{5}{4}$

cosecA = $\dfrac{\text{कर्ण}}{\angle A \text{ समोरील बाजू}}$

$\therefore \text{cosec}A = \dfrac{AC}{BC} \quad \therefore \text{cosec}A = \dfrac{5}{3}$

वरील निष्कर्ष (1) व (2) वरून tanA = cotC = $\dfrac{3}{4}$ म्हणजेच tanA व cotC या गुणोत्तरांच्या किंमती समान आहेत. $\therefore$ tanA – cotC = 0 होईल.

तुमच्या प्रगतिचा आढावा घ्या.

1. काटकोन ΔABC मध्ये, $\angle B = 90^0$, AC = 10 cm आणि AB = 6 cm तर sinC, cosC आणि tanC यांच्या किंमती मिळवा.

2. $\triangle ABC$ मध्ये, $\angle C = 90^0$, BC = 24 cm आणि AC = 7cm तर sinA, cosecA आणि cotA यांच्या किंमती काढा.

3. ΔPQR मध्ये, $\angle Q = 90^0$, PQ = $\sqrt{\ }$ cm, आणि QR = 10cm तर secP, cotP आणि cosecP यांच्या किंमती मिळवा.

4. ΔPQRमध्ये, $\angle Q = 90^0$, PQ = $\sqrt{\ }$ cm, आणि QR = 1 cm तर tanR, cosecR आणि sinP, secP यांच्या किंमती मिळवा.

5. ΔABC मध्ये, $\angle B = 90^0$, AC = 25 cm, AB = 7cm आणि $\angle ACB = \theta$ तर cot θ, sin θ, sec θ आणि tan यांच्या किंमती काढा.

6. काटकोन हा Q बिंदूजवळ काटकोन आहे. PQ = 5cm आणि PR = 7cm तर sinP, cosP, sinR आणि cosR च्या किंमती काढा तसेच (sinP – cosR) ची किंमत मिळवा.

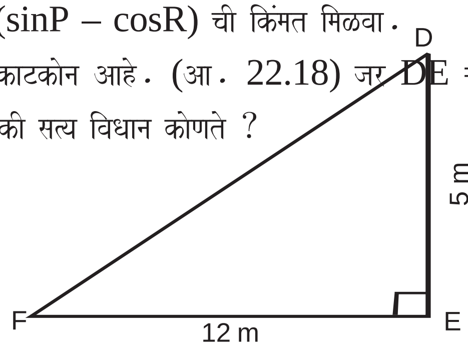
7. काटकोन ΔDEF हा E बिंदूजवळ काटकोन आहे. (आ. 22.18) जर DE = 5cm आणि EF = 12 cm, तर खालीलपैकी सत्य विधान कोणते ?

(i) sinF = $\frac{5}{12}$,

(ii) sinF = $\frac{12}{5}$,

(iii) sinF = $\frac{5}{13}$,

(iv) sinF = $\frac{12}{13}$,



आ. 22.18

22.3 : एका त्रिकोणमितीय गुणोत्तराची किंमत दिली असता उरलेली गुणोत्तरे शोधणे.

काही वेळेस आपणास एका t गुणोत्तराची किंमत माहित असते. अशावेळी इतर t गुणोत्तरांची किंमत सहजपणे काढण्यासाठी आपण t गुणोत्तरांची व्याख्या व पायथागोरस प्रमेयाचा उपयोग करू.

उदा : **समजा $\sin\theta = \frac{12}{13}$. आता आपण इतर t गुणोत्तरे मिळवू.**

उकल : प्रथम आपण एक काटकोन ΔABC काढू.

आ. 22.19

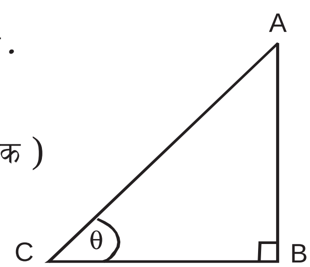
आता $\sin\theta = \frac{12}{13}$ .... (पक्ष)

याचा अर्थ $\angle\theta$ समोरील बाजू 12 एकक असताना कर्ण 13 एकक असेल.

हणून बाजू AB व बाजू AC यांचे गुणोत्तर 12 : 13 होईल.

अशा रीतीने आपण AB = 12k आणि AC = 13k मानू (k हा स्थिरांक)

∴ पायथागोरस प्रमेयानुसार आकृतीवरून



आ. 22.19

$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2}$

टिपा

$\therefore$ BC = $\sqrt{(13k)^2 - (12k)^2}$

$\therefore$ BC = $\sqrt{169k^2 - 144k^2}$

$\therefore$ BC = $\sqrt{25k^2}$ $\quad \therefore$ BC = 5k होईल.

आता आपण t गुणोत्तरांच्या व्याख्येनुसार इतर गणोत्तरे मिळव.

$\cos\theta = \dfrac{\angle\theta \text{ लगतची बाजू}}{\text{कर्ण}}$ $\quad \therefore \cos\theta = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{5k}{13k} = \dfrac{5}{13}$

$\tan\theta = \dfrac{\angle\theta \text{ समोरील बाजू}}{\text{लगतची बाजू}}$ $\quad \therefore \tan\theta = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{12k}{5\ k} = \dfrac{12}{5}$

$\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{\text{कर्ण}}{\angle\theta \text{ समोरील बाजू}}$ $\quad \therefore \operatorname{cosec}\theta = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{13k}{12\ k} = \dfrac{13}{12}$

$\sec\theta = \dfrac{\text{कर्ण}}{\angle\theta \text{ लगतची बाजू}}$ $\quad \therefore \sec\theta = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{13k}{5\ k} = \dfrac{13}{5}$

आणि $\cot\theta = \dfrac{\angle\theta \text{ लगतची बाजू}}{\angle\theta \text{ समोरील बाजू}}$ $\quad \therefore \cot\theta = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{5k}{12\ k} = \dfrac{5}{12}$

<u>* अशा रीतीने एका t गुणोत्तराच्या किंमतीवरून इतर t गुणोत्तरे खालील पायरीने मिळविता येतील.</u>

1. काटकोन ΔABC काढा.
2. दिलेल्या t गुणोत्तराची किंमत संबंधित बाजूंना दाखवा. K हा गुणोत्तराचा स्थिरांक माना.
3. संबंधित दोन बाजू k संदर्भात लिहा.
4. पायथागोरस प्रमेयाने त्रिकोणाची तिसरी बाजू मिळवा.
5. आता t गुणोत्तरांच्या व्याख्या वापरून इतर t गुणोत्तरे मिळवा.

आपण यासाठी आणखी काही उदाहरणे पाहू या.

<u>उदा. 22.10</u> जर $\cos\theta = \dfrac{7}{25}$, तर $\sin\theta$ आणि $\tan\theta$ यांच्या किंमती काढा.

<u>उकल :</u> प्रथम काटकोन ΔABC काढा. ज्यामध्ये $\angle B = 90^0$, आणि $\angle C = \theta$ दाखवा.

आता t गुणोत्तराच्या व्याख्येनुसार

$\cos\theta = \dfrac{\angle\theta \text{ लगतची बाजू}}{\text{कर्ण}}$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{7}{25}$

समजा BC= 7k आणि AC = 25k ($\because$ K हा गुणोत्तराचा स्थिरांक)

नंतर पायथागोरस प्रमेयाने AB मिळवू.

$\therefore AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}$ $\quad \therefore AB = \sqrt{(\quad) - (\quad)}$

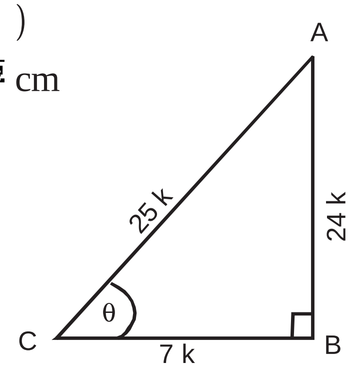
$\therefore AB = \sqrt{625k^2 - 49k^2}$ $\quad \therefore AB = \sqrt{576k^2}$ cm

$\therefore AB = 24k$ होईल.

$\therefore \Delta ABC$ मध्ये t गुणोत्तरांच्या व्याख्येनुसार ,

$\text{Sin } \theta = \dfrac{< \theta \text{ समोरील बाजू}}{\text{कर्ण}}$

$\therefore \text{Sin}\theta = \dfrac{AB}{BC}$ $\quad \therefore \text{Sin}\theta = \dfrac{24k}{25k} = \dfrac{24}{25}$



आ. 22.20

आणि $\tan\theta = \dfrac{< \theta \text{ समोरील बाजू}}{< \theta \text{ लगतची बाजू}}$

$\therefore \tan\theta = \dfrac{AB}{BC}$ $\quad \therefore \tan\theta = \dfrac{24k}{7k} = \dfrac{24}{7}$

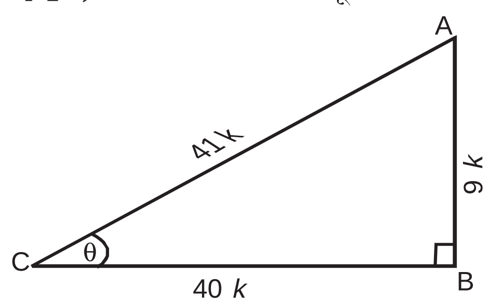
<u>उदा ः **22.11 :**</u> जर $\cot\theta = \dfrac{40}{9}$, तर पुढील राशीची किंमत काढा. $\dfrac{\theta \quad \theta}{\theta}$

उकल ः समजा काटकोन ΔABC मध्ये $< B = 90^0$, आणि $< C = \theta$ मानू

आता t गुणोत्तरांच्या व्याख्येनुसार

$\cot\theta = \dfrac{< \theta \text{ लगतची बाजू}}{< \theta \text{ समोरील बाजू}}$

$\therefore \cot\theta = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{40}{9}$



आ. 22.21

K हा गुणोत्तराचा स्थिरांक मानू.

$\therefore BC = 40k$ आणि $AB = 9k$ होईल.

नंतर काटकोन ΔABC मध्ये पायथागोरस प्रमेयाने AC बाजू मिळवू (येथे AC हा कर्ण आहे.)

$\therefore AC = \sqrt{BC^2 + AB^2}$ $\quad \therefore AC = \sqrt{(40k)^2 + (9k)^2}$

$\therefore AB = \sqrt{1681k^2}$ $\quad \therefore AC = 41k$ मिळते.

आता t गुणोत्तराच्या व्याख्येनुसार

$\text{Sin } \theta = \dfrac{< \theta \text{ समोरील बाजू}}{\text{कर्ण}}$

$\therefore \text{Sin}\theta = \dfrac{AB}{AC}$ $\quad \therefore \text{Sin}\theta = \dfrac{9k}{41k} = \dfrac{9}{41}$

तसेच $\cos \theta = \dfrac{< \theta \text{ लगतची बाजू}}{\text{कर्ण}}$

$\therefore \cos \theta = \dfrac{BC}{AC}$ $\quad \therefore \cos \theta = \dfrac{40k}{41k} = \dfrac{40}{41}$

टिपा

आणि $\sec\theta = \dfrac{\text{कर्ण}}{\angle\theta \text{ लगतची बाजू}}$

$\therefore \sec\theta = \dfrac{AC}{BC}$ $\qquad \therefore \sec\theta = \dfrac{41k}{40k} = \dfrac{41}{40}$

शेवटी $\dfrac{\cos\theta.\sin\theta}{\sec\theta}$ यामध्ये मिळालेल्या किंमती घालू.

$$\therefore \frac{\cos\theta.\sin\theta}{\sec\theta} = \frac{\frac{9}{41} X \frac{40}{41}}{\frac{41}{40}} = \frac{9}{41} X \frac{40}{41} X \frac{41}{40} = \frac{14400}{68921}$$

उदा. 22.12 : ΔPQR मध्ये, $\angle Q = 90^0$, आणि $\tan R = \frac{1}{\sqrt{3}}$ तर
$\sin P.\cos R + \cos P.\sin R = 1$ दाखवा

उकल ः समजा काटकोन ΔPQR असा आहे की ज्यामध्ये $\angle Q = 90^0$, आणि
आपणास माहित आहे की

$\tan R = \dfrac{\angle\theta \text{ समोरील बाजू}}{\angle\theta \text{ लगतची बाजू}}$

$\therefore \tan R = \dfrac{PQ}{QR} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore PQ = k$ आणि $QR = \sqrt{3}$ kघेऊ.

पायथागोरस प्रमेयाने PR मिळवू.

$\therefore PR = \sqrt{PQ^2 + QR^2}$

$\therefore PR = \sqrt{\quad + (\sqrt{\quad}\ )}$

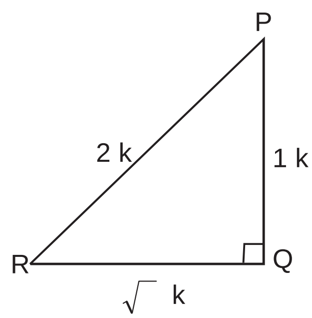
$\therefore PR = \sqrt{k^2 + \sqrt{3}k^2}$ $\quad \therefore PR = \sqrt{4k^2} = 2k$

आता t गुणोंत्तराच्या व्याख्येनुसार

$\therefore \sin P = \dfrac{\angle P \text{ समोरील बाजू}}{\text{कर्ण}}$

$\therefore \sin P = \dfrac{QR}{PR}$ $\quad \therefore \sin P = \dfrac{\sqrt{3}k}{2k} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \cos P = \dfrac{\angle P \text{ लगतची बाजू}}{\text{कर्ण}}$



आकृती 22.22

$\therefore \cos P = \frac{PQ}{PR}$ $\qquad \therefore \cos P = \frac{1k}{2k} = \frac{1}{2}$

आणि $\sin R = \dfrac{< R \text{ समोरील बाजू}}{\text{कर्ण}}$

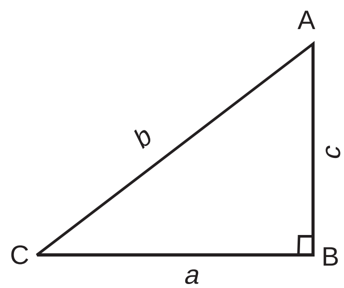
$\therefore \cos R = \frac{QR}{PR}$ $\qquad \therefore \cos R = \frac{\sqrt{3}k}{2k} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ sinP. cosR + cosP.sinR यात वरील किंमती घालू.

$= \sqrt{\ }\ \sqrt{\ }\ x + x$

$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$ हे सिध्द.

उदा. 22.13 : ΔABC मध्ये $< B$ हा काटकोन आहे. जर AB = c, BC = a आणि AC = b तर खालीलपैकी सत्य विधान कोणते ?



आ. 22.23

(i) $\cos C + \sin A = \frac{2b}{a}$

(ii) $\cos C + \sin A = \frac{b}{a} + \frac{a}{b}$

(iii) $\cos C + \sin A = \frac{2a}{b}$

(iv) $\cos C + \sin A = \frac{a}{b} + \frac{c}{b}$

उकल ः t गुणोत्तरांच्या व्याख्येनुसार आकृतीवरून

$\therefore \cos C = \dfrac{< C \text{ लगतची बाजू}}{\text{कर्ण}}$

$\therefore \cos C = \frac{BC}{AC}$ $\qquad \therefore \cos C = \frac{a}{b}$

आणि $\sin A = \dfrac{< A \text{ समोरील बाजू}}{\text{कर्ण}}$

$\therefore \sin A = \frac{BC}{AC}$ $\therefore \sin A = \frac{a}{b}$

आता cosC + sinA यात वरील किंमती घालू.

— + — = —

विधान (iii) म्हणजेच $\cos C + \sin A = \frac{2a}{b}$ हे विधान सत्य आहे.

22.3 तुमच्या प्रगतीचा आढावा घ्या.

1. जर $\sin\theta = \frac{20}{29}$, तर $\cos\theta$ आणि $\tan\theta$ यांच्या किंमती काढा.

2. जर $\tan\theta = \frac{24}{7}$, तर $\sin\theta$ आणि $\cos\theta$ यांच्या किंमती काढा.

3. जर $\cos A = \frac{7}{25}$, तर $\sin A$ आणि $\tan A$ यांच्या किंमती काढा.

4. जर $\cos\theta = \frac{m}{n}$, तर $\cot\theta$ आणि $\operatorname{cosec}\theta$ यांच्या किंमती काढा.

5. जर $\cos\theta = \frac{4}{5}$, तर $\frac{\cos\theta.\cot\theta}{1-\sec^2\theta}$ या राशीची किंमत काढा.

6. जर $\operatorname{cosec}\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$, तर $\sin^2\theta.\cos\theta + \tan^2\theta$ या राशीची किंमत काढा.

7. जर $\cot B = \frac{5}{4}$, तर सिध्द करा की, $\operatorname{cosec}^2 B = 1 + \cot^2 B$. यांच्या किंमती काढा.

8. ΔABC हा काटकोन त्रिकोण असून $< C = 90^0$ जर $\tan A = \frac{3}{2}$, तर $\sin B$ आणि $\tan B$ यांच्या किंमती काढा.

9. जर $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$, आणि $\tan B = \sqrt{3}$ तर $\cos A.\cos B - \sin A.\sin B = 0$ हे दाखवा.

10. जर $\cot A = \frac{12}{5}$, तर $\tan^2 A - \sin^2 A = \sin^4 A.\sec^2 A$ हे दाखवा.

    (सूचना ः प्रथम tanA, sinA आणि secA मिळवा नंतर किंमती घाला.)

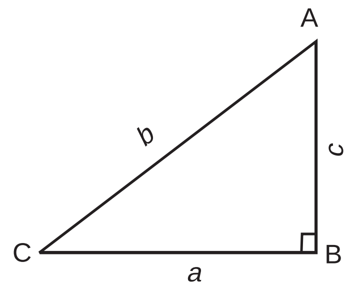
11. आकृती 22.24 मध्ये ΔABC हा B या शिरोबिंदूजवळ काटकोन आहे. जर AB = c, BC = a, आणि CA = b तर पुढीलपैकी सत्य विधान कोणते ?

(i) $\sin A + \cos A = \frac{b+c}{a}$

(ii) $\sin A + \cos A = \frac{a+c}{b}$

(iii) $\sin A + \cos A = \frac{a+b}{c}$

(iv) $\sin A + \cos A = \frac{a+b+C}{b}$



आ. 22.24

22.4: त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांतील परस्पर संबंध ः

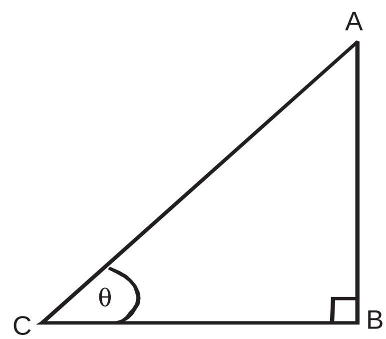
काटकोन त्रिकोण ABC मध्ये $< B = 90^0$

आता t गुणोत्तराच्या व्याख्येनुसार

$\therefore \sin\theta = \frac{AB}{AC}$

$\cos\theta = \frac{BC}{AC}$

आणि $\tan\theta = \frac{AB}{BC}$



आ. 22.25

हेच पुन्हा असे घेऊ (अंश व छेद यास AC ने भागू)

$\therefore \tan\theta = \frac{AB/AC}{BC/AC} = \frac{AB}{AC} \div \frac{BC}{AC}$

$\therefore \tan\theta = \sin\theta \div \cos\theta$ हा निष्कर्ष मिळतो.

म्हणजेच $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ हा संबंध मिळतो.

हा निष्कर्ष आपण AB = 3 cm, BC = 4cm असताना

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$ ...(पायथागोरस प्रमेयानुसार)

$\therefore AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25}$ = 5cm

$\therefore \sin\theta = \frac{3}{5}$, $\cos\theta = \frac{4}{5}$, आणि $\tan\theta = \frac{3}{4}$ होईल.

आता $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4} = \tan\theta$

टिपा

$\therefore \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$ हे सिध्द.

त्याचप्रमाणे $\sin\theta = \frac{AB}{AC}$ यावरून,

$\frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{AB/AC} = \frac{AC}{AB} = \operatorname{cosec}\theta$ हे गुणोत्तर मिळते.

$\therefore \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ हा निष्कर्ष मिळतो.

$\therefore \operatorname{cosec}\theta \times \sin\theta = 1$

याचा अर्थ असा की, $\sin\theta$ व $\operatorname{cosec}\theta$ हे परस्परांचे गुणाकार व्यस्त t गुणोंत्तर आहे.

आणि $\cos\theta = \frac{BC}{AC}$

$$\frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{BC/AC} = \frac{AC}{BC} = \sec\theta$$ होईल.

अशारीतीने $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ किंवा $\sec\theta \times \cos\theta = 1$

$\therefore \sec\theta$ हे $\cos\theta$ चे गुणाकार व्यस्त t गुणोत्तर आहे.

शेवटी $\tan\theta = \frac{AB}{BC}$ यावरून,

$\frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{AB/BC} = \frac{BC}{AB} = \cot\theta$ मिळते.

$\therefore \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ किंवा $\tan\theta \times \cot\theta = 1$ होईल.

म्हणजेच $\cot\theta$ हे $\tan\theta$ चे गुणाकार व्यस्त t गुणोंत्तर आहे.

अशारीतीने $\operatorname{cosec}\theta$, $\sec\theta$ आणि $\cot\theta$ हे अनुक्रमे $\sin\theta$, $\cos\theta$ आणि $\tan\theta$ यांचा गुणाकार व्यस्त t गुणोत्तरे आहेत. यावरून आपणास पुढीलप्रमाणे गुणधर्म (निष्कर्ष) मिळतात.

(i) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(ii) $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

(iii) $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

(iv) $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

आता आपण वरील निष्कर्षांचा (सूत्रांचा) उपयोग करून विविध त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे मिळवू शकतो.

उद. 22.14 जर $\cos\theta = \frac{1}{2}$ आणि $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ तर $\mathrm{cosec}\theta$, $\sec\theta$ आणि $\tan\theta$ यांच्या किंमती मिळवा.

उकल : आपणास माहित आहे की,

$$\mathrm{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\therefore \mathrm{cosec}\theta = \frac{1}{\sqrt{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$ हे उत्तर

तसेच $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

$$\therefore \sec\theta = \frac{1}{1/2} = \frac{2}{1}$$ हे उत्तर

आणि $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$\therefore \tan\theta = \frac{\sqrt{3/2}}{1/2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{1}$$

$$\therefore \tan\theta = \sqrt{3}$$ हे उत्तर

टिपा

उदा. 22.15 काटकोन त्रिकोण ABC करिता, कोन C हा काटकोन घ्या. tan A = 1 तर cosB ची किंमत मिळवा.

उकल : प्रथम आपण काटकोन ΔABC काढू. ज्यामध्ये $\angle C = 90^0$

आता tanA =1 .... (पक्ष)

आणि आकृतीवरून t गुणोत्तराच्या व्याख्येनुसार

$$\tan A = \frac{BC}{AC}$$

$\therefore \frac{BC}{AC} = 1$ $\quad\quad \therefore BC = AC$ होईल

समजा BC = AC = K मानू

$\therefore AB = \sqrt{BC^2 + AC^2}$ ... ($\because$पायथागोरस प्रमेयानुसार)

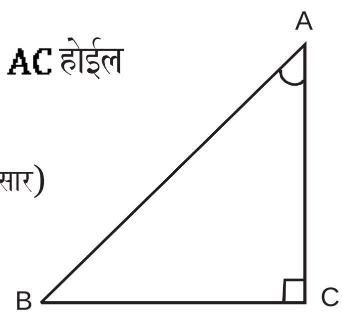
$\therefore AB = \sqrt{\quad + \quad} = \sqrt{\quad}\ 2$

किंवा $\quad \therefore AB = \sqrt{2}.K$

आता $\cos B = \dfrac{\angle B \text{ लगतची बाजू}}{\text{कर्ण}}$

$\therefore \cos B = \frac{BC}{AB}$ $\quad\quad \therefore \cos B = \frac{K}{\sqrt{2}K}$

$\therefore \cos B = \frac{1}{\sqrt{2}}$ हे उत्तर मिळते.



आ. 22.26

तुमच्या प्रगतीचा आढावा घ्या.

1. जर $\sin\theta = \frac{1}{2}$ आणि $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, तर $\cot\theta$ आणि $\sec\theta$ यांच्या किंमती काढा.
2. जर $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ आणि $\tan\theta = \sqrt{3}$, तर $\cos^2\theta + \sin\theta.\cos\theta$ या राशीची किंमत काढा.
3. काटकोन ΔABC हा C कोन बिंदूजवळ काटकोन आहे , $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ तर sinA.sinB + cosA.cosB या राशीची किंमत काढा.
4. जर cosecA = 2, तर sinA आणि tanA यांच्या किंमती काढा.
5. काटकोन ΔABC हा बिंदूजवळ काटकोन आहे. जर $\tan A = \sqrt{3}$, तर

$\tan^2 B.\sec^2 A - (\tan^2 A + \cot^2 B)$ या राशीची किंमत काढा.

22.5 नित्य समीकरणे ः

मागील इयत्तामध्ये आपण समीकरणासंबंधी अभ्यास केला आहे. त्यासंबंधी वापरले जाणारे नियम, गुणधर्म आठवून पहा. जेव्हा दोन विधाने (राशी) "=" (बरोबर चिन्ह) याने जोडली जातात. तेव्हा आपणास समीकरण मिळते याच्या साहयाने आपण त्रिकोणमितींय नित्य समीकरणे पाहू या. जेव्हा दोन विधाने बरोबर चिन्हाने जोडली जातील. तेव्हा आपणास 'नित्य समीकरण' मिळते. जेव्हा दोन विधाने बरोबर चिन्हाने जोडली जातात तेव्हा समीकरण तयार होते. तसेच नित्य समीकरणसुध्दा तयार होते, तर मग 'समीकरणे' आणि 'नित्य समीकरणे' याच्यात फरक काय ? ते आपण पाहू या.

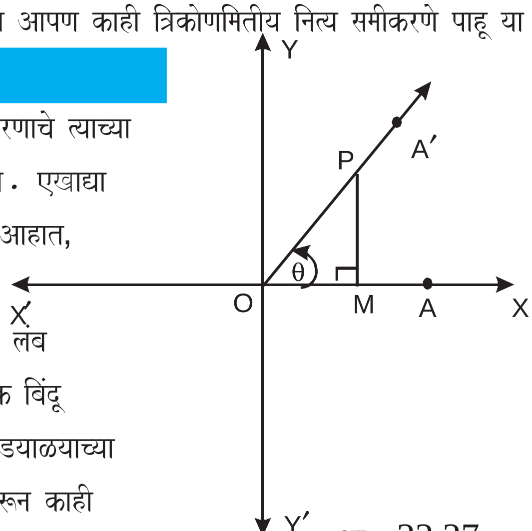
समीकरणे आणि नित्य समीकरणे यांच्यातील मुख्य फरक म्हणजे ; चलांच्या साहयाने तयार होणारे समीकरण हे चलाच्या ठराविक किंमतीसाठी सत्य असते, तर ज्या चलाची किंमत कोणतीही असली, तरी ते सत्यच राहते, तेव्हा त्यास 'नित्य समीकरण' असे म्हणतात.

अशा रीतीने $x^2 - 2x + 6 = 0$ हे समीकरण $x = 1$ याच किंमतीसाठी सत्य होते. तसेच $x^2 - 5x + 6 = 0$ हे समीकरण $x = 2$ आणि $x = 3$ या दोनच किंमतीसाठी सत्य होईल.

जर आपण $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ असे समीकरण घेतले तर, हे नित्य समीकरण होते, आणि हे $x = 2$, $x = 3$ तसेच $x = 0$, $x = 10$, इ. म्हणजेच च्या सर्व किंमतीसाठी हे सत्य होईल. पुढील भागात आपण काही त्रिकोणमितीय नित्य समीकरणे पाहू या.

22.6 : त्रिकोणमितीय नित्य समीकरणे ः

आपणास माहित आहे की, कोन म्हणजे एखाद्या किरणाचे त्याच्या मूळ स्थितीतून अंतिम स्थितीपर्यंत झालेले भ्रमण होय. एखाद्या कोनाची सर्व त्रिकोणमितीय गुणोंत्तरे तुम्ही शिकला आहात, त्याची येथे उजळणी करू या.



आ. 22.27

समजा XOX' आणि YOY' हे दोन परस्परांना लंब अक्ष आहेत. OX अक्षावर 'A' हा कोणताही एक बिंदू आहे. समजा, किरण OA हा 'A'बिंदूभोवती घडयाळयाच्या काटयाच्या विरूध्द दिशेने, मूळ स्थितीतून भ'मण करून काही वेळात OA′ या अंतिम स्थितीत आला. समजा, $\angle A'OA = \theta$ किरण OA' वर P हा कोणताही एक बिंदू घ्या. $PM \perp OX$ काढा.

काटकोन त्रिकोण PMO मध्ये, $\sin\theta = \frac{PM}{OP}$, $\cos\theta = \frac{OM}{OP}$ दोन्हींचा वर्ग करून बेरीज केल्यास,

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{PM^2}{OP^2} + \frac{OM^2}{OP^2}$$

$$\therefore \sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{PM^2+OM^2}{OP^2}$$

$$\therefore \sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{OP^2}{OP^2} \qquad (\because PM^2 + OM^2 = OP^2$$

पायथागोरस प'मेयानुसार)

$$\therefore \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

तसेच आपणास माहित आहे की,

$\sec\theta = \frac{OP}{OM}$ आणि $\tan\theta = \frac{PM^2}{OM^2}$ यांचा वर्ग करून वजावाकी केल्यास

$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = \frac{OP^2}{OM^2} - \frac{PM^2}{OM^2}$$

$$\therefore \sec^2\theta - \tan^2\theta = \frac{OP^2 - PM^2}{OM^2}$$

$$\therefore \sec^2\theta - \tan^2\theta = \frac{OM^2}{OM^2} \qquad (\because OP^2 - PM^2 = OM^2$$

पायथागोरस प'मेयानुसार)

$$\therefore \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

आणि आपणास माहित आहे की,

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{OP}{PM}$ आणि $\cot\theta = \frac{OM}{PM}$ यांचा वर्ग करून वजावाकी केल्यास,

$$\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = \left(\frac{OP}{PM}\right)^2 - \left(\frac{OM}{PM}\right)^2$$

$$\therefore \operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = \frac{OP^2 - OM^2}{PM^2} \qquad (\because OP^2 - OM^2 = PM^2$$

पायथागोरस प्रमेयानुसार)

$$\therefore \operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = \frac{PM^2}{PM^2}$$

$$\therefore \operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

अशा रीतीने मिळालेली (1), (2) आणि (3) ही नित्य समीकरणे बीजगणितातील मूलभूत क्रिया वापरून खालीलप'माणे लिहू.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ हे आपण पुढीलप'माणे लिहिता येईल.

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ किंवा

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ असे होईल.

तसेच $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ यावरून

$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ किंवा

$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$ असे मिळते.

आणि $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$ यावरून

$\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$ किंवा

$\cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta - 1$ असे मिळते.

आता आपण या नित्य समीकरणांचा उपयोग करून काही उदाहरणे सोडवू या.

उदा. **22.16:** सिध्द करा की,

$$\tan\theta + \cot\theta = \frac{1}{\sin\theta.\cos\theta}$$

उकल : डावी बाजू $= \tan\theta + \cot\theta$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta.\sin\theta}$$

($\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

मुलभूत प्रमेय (नित्य समीकरण)

$$= \frac{1}{\cos\theta.\sin\theta}$$

= उजवी बाजू

$\therefore \tan\theta + \cot\theta = \dfrac{1}{\sin\theta.\cos\theta}$ हे सिध्द.

उदा: **22.17:** सिध्द करा की,

$$\frac{\sin A}{1 + \cos A} + \frac{1 + \cos\theta}{\sin A} = 2\operatorname{cosec}A$$

उकल ः डावी बाजू

$$\frac{\sin A}{1+\cos A}+\frac{1+\cos\theta}{\sin A}$$

$$=\frac{\sin^2 A+(1+\cos A)^2}{\sin A\,(1+\cos A)}$$

$$=\frac{\sin^2 A+1+2\cos A+\cos^2 A}{\sin A\,(1+\cos A)}$$

$$=\frac{\sin^2 A+1+2\cos A+\cos^2 A}{\sin^2 A+\cos^2 A+1+2\cos A}$$

$$=\frac{1+1+2\cos A}{\sin A\,(1+\cos A)}$$

($\because \sin^2 A+\cos^2 A=1$ नित्य समीकरण)

$$=\frac{2+2\cos A}{2+(1+\cos A)}$$

$$=\frac{}{\sin A\,(1+\cos A)}$$

$$=\frac{2}{\sin A}$$

$= 2\ \mathrm{cosec}A$ = उजवी बाजू

$\therefore \dfrac{\sin A}{1+\cos A}+\dfrac{1+\cos\theta}{\sin A}=2\ \mathrm{cosec}A$ हे सिध्द

उदा.22.18 सिध्द करा, $\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}=(\sec A-\tan A)^2$

उकल ः डावी बाजू $=\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}$

$$=\frac{1-\sin A}{1+\sin A}\times\frac{1-\sin A}{1-\sin A}$$

($\because$ अंश व छेद यांना एकाच राशीने गुणून)

$$=\frac{(1-\sin A)^2}{1-\sin^2 A}$$

$$=\frac{(1-\sin A)^2}{\cos^2 A}$$

($\because 1-\sin^2 A=\cos^2 A$ मूलभूत प्रमेय)

$$=\left(\frac{1-\sin A}{\cos A}\right)^2$$

$$=\left[\frac{1}{\cos A}-\frac{\sin A}{\cos A}\right]^2$$

$=(\sec A-\tan A)^2$ = उजवी बाजू

$\therefore \dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}=(\sec A-\tan A)^2$ हे सिध्द

आता हेच उदाहरण दुस-या रीतीने सोडवू.

उजवी बाजू = $(\sec A - \tan A)^2$

$$= \left[\frac{1}{\cos A} - \frac{\sin A}{\cos A}\right]^2$$

$$= \left(\frac{1-\sin A}{\cos A}\right)^2$$

$$= \frac{(1-\sin A)^2}{\cos^2 A}$$

$$= \frac{(1-\sin A)^2}{1-\sin^2 A}$$ ($\because$ $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$ मूलभूत प्रमेय)

$$= \frac{(1-\sin A)(1-\sin A)}{(1+\sin A)(1-\sin A)}$$ ($\because$ अंश व छेदाचे अवयव घेऊन)

$$= \frac{1-\sin A}{1+\sin A} = (\sec A - \tan A)^2$$ हे सिध्द

दुसरी पध्दत

हेच नित्य समीकरण आपण डाव्या बाजूकडन सुरू करून खालीलप्रमाणे सोडवू शकतो.

डावी बाजू = $\frac{1-\sin A}{1+\sin A}$

$$= \frac{1-\sin A}{1+\sin A} \times \frac{1-\sin A}{1-\sin A}$$

$$= \frac{(1-\sin A)^2}{1-\sin^2 A}$$

$$= \frac{(1-\sin A)^2}{\cos^2 A}$$

$$= \left(\frac{1-\sin A}{\cos A}\right)^2$$

$$= \left[\frac{1}{\cos A} - \frac{\sin A}{\cos A}\right]^2$$

$$= (\sec A - \tan A)^2$$

= उजवी बाजू

$$\therefore \frac{1-\sin A}{1+\sin A} = (\sec A - \tan A)^2$$ हे सिध्द

लक्षात ठेवा ः वरील उदाहरणावरून आपणास त्रिकोणमितीय नित्य समीकरणांचा उपयोग करून सिध्द करण्यासाठी पुढीलप्रमाणे पाय-या कराव्या लागतील.

<u>त्रिकोणमितीय नित्य समीकरणावरील प्रश्न सोडविण्यासाठी रीत ः</u>

<u>पायरी I :</u> प्रथम डावी बाजू व उजवी बाजू यांचे निरीक्षण करून कोणती बाजू दाखविता येणे सोपे जाईल, याची निवड करावी.

<u>पायरी II:</u> डाव्या बाजूच्या राशीचे रूपांतर उजव्या बाजूस करण्यासाठी (किंवा उलट) विविध त्रिकोणमितीय नित्य समीकरणे वापरून सोपे रूप देत जावे आणि विरूध्द बाजूप्रमाणे उत्तर मिळवावे.

<u>पायरी III</u> जर डावी बाजू = उजवी बाजू असे सोपे रूप देता येणे शक्य नसेल तेव्हा एका बाजूला सोपे रूप देऊन तिचे योग्य रूपांतर करावे. नंतर दुस-या बाजूचे सुध्दा तेच रूपांतर होईल हे पाहावे.

<u>पायरी IV</u> यावरून डावी बाजू व उजवी बाजू समान रूपांतरीत केल्या असता, दिलेल्या उदाहरणातील डावी बाजू = उजवी बाजू सिध्द, असे म्हणता येईल.

<u>आता आपण आणखी काही उदाहरणे त्रिकोणमितीय नित्य समीकरणे वापरून सोडवू या,</u>

उदा. **22.19** सिध्द करा की,

$$\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$$

उकल ः डावी बाजू $= \sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}$

$$= \sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} \text{ X } \frac{\sqrt{1+\sin\theta}}{\sqrt{1+\sin\theta}}$$

$$= \frac{\sqrt{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}}{\sqrt{(1+\sin\theta)(1+\sin\theta)}}$$

$$= \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sqrt{(1+\sin\theta)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\cos^2\theta}}{1+\sin\theta} \qquad (\because\ 1-\sin^2\theta = \cos^2\theta \text{ नित्य समीकरण })$$

$$= \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = \text{उजवी बाजू}$$

$$\therefore \sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} \text{ हे सिध्द}$$

उदा.**22.20 :** सिध्द करा की,

$\cos^4 A - \sin^4 A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A$

उकल ः डावी बाजू = $\cos^4 4 - \sin^4 A$

$= (\cos^2 A + \sin^2 A)(\cos^2 A - \sin^2 A)$ ($\because$ अवयव घेऊन)

$= 1 (\cos^2 A - \sin^2 A)$ .... ($\because$ $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ नित्य समीकरण)

$= \cos^2 A - \sin^2 A$ = उजवी बाजू .... (I)

तसेच $(\cos^2 A - \sin^2 A) = (1 - \sin^2 A) - \sin^2 A$

($\because$ $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$ नित्य समीकरण)

$= 1 - \sin^2 A - \sin^2 A$

$= 1 - 2\sin^2 A$ = उजवी बाजू .... (II)

$\cos^4 4 - \sin^4 A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A$ हे सिध्द

उदा. **22.21 :** सिध्द करा की,

secA (1-sinA) (secA+tanA) =1

उकल ः डावी बाजू = secA (1- sinA) (secA + tanA)

$= \frac{1}{\cos A}(1 - \sin A)\left(\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}\right)$

$= \left(\frac{1 - \sin A}{\cos A}\right)\left(\frac{1 + \sin A}{\cos A}\right)$

$= \frac{(1 - \sin A)(1 + \sin A)}{\cos A \times \cos A}$

$= \frac{1 - \sin^2 A}{\cos^2 A}$ ($\because$ $1 - \sin^2 A = \cos^2 A$ नित्य समीकरण)

$= \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A}$

= 1 = उजवी बाजू

$\therefore$ secA (1-sinA) (secA+tanA) =1 हे सिध्द

उदा. **22.22:** सिध्द करा की,

$$\frac{\tan\theta+\sec\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1}=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

उकल : डावी बाजू $=\dfrac{\tan\theta+\sec\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1}$

$$=\frac{(\tan\theta+\sec\theta)-(\sec^2\theta-\tan^2\theta)}{\tan\theta-\sec\theta+1}$$

($\because\ \sec^2\theta-\tan^2\theta=1$ नित्य समीकरण)

$$=\frac{(\tan\theta+\sec\theta)-(\sec\theta+\tan\theta)(\sec\theta-\tan\theta)}{\tan\theta-\sec\theta+1}$$

$$=\frac{(\tan\theta+\sec\theta)[1-(\sec\theta^2-\tan\theta)]^2}{\tan\theta-\sec\theta+1}$$

$$=\frac{(\tan\theta+\sec\theta)-(\sec\theta+\tan\theta)(\sec\theta-\tan\theta)}{(\tan\theta-\sec\theta+1)}$$

$=\tan\theta+\sec\theta$ ($\because$ अंश व छेद यातून समान अवयव लोपन)

$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos\theta}$$

$=\dfrac{\sin\theta+1}{\cos\theta}$ = उजवी बाजू (I)

तसेच $\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{\cos\theta\,(1-\sin\theta)}$

$$=\frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta\,(1-\sin\theta)}$$

$=\dfrac{\cos^2\theta}{\cos\theta\,(1-\sin\theta)}$ ($\because\ 1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$ नित्य समीकरण)

$=\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$ = उजवी बाजू (II)

अशा रीतीने निष्कर्ष (I) व (II) वरून $\dfrac{\tan\theta+\sec\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1}=\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$ हे सिध्द

उदा. **22.23:**

जर $\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\sin\theta$, तर

$\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\cos\theta$ हे दाखवा.

उकल : $\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\sin\theta$ .... (पक्ष)

$\therefore \cos\theta = \sqrt{2}\sin\theta + \sin\theta$

$\therefore \cos\theta = \sin\theta(\sqrt{2}+1)$

$\therefore \dfrac{\cos\theta}{\sqrt{2}+1} = \sin\theta$ होईल.

आता $\sin\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sqrt{2}+1} \times \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}$

$\therefore \sin\theta = \dfrac{\cos\theta\,(\sqrt{2}-1)}{2-1}$

$\therefore \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}\cos\theta - \cos\theta}{1}$

$\therefore \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta - \cos\theta$

$\therefore \cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$ हे सिध्द

उदा.22.24 :

जर $\tan^4\theta + \tan^2\theta = 1$ तर $\cos^4\theta + \cos^2\theta = 1$ हे सिध्द करा.

उकल : $\tan^4\theta + \tan^2\theta = 1$........................ (पक्ष)

$\therefore \tan^2\theta(\tan^2\theta + 1) = 1$

$\therefore \tan^2\theta + 1 = \dfrac{1}{\tan^2\theta}$

$\therefore \tan^2\theta + 1 = \cot^2\theta$

$\therefore \sec^2\theta = \cot^2\theta$ ($\because$ $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$ नित्य समीकरण)

$\therefore \dfrac{1}{\cos^2\theta} = \dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

$\therefore \sin^2\theta = \cos^4\theta$

$\therefore 1 - \cos^2\theta = \cos^4\theta$ ($\because$ $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ नित्य समीकरण)

$\therefore 1 = \cos^4\theta + \cos^2\theta$

म्हणजेच $\cos^4\theta + \cos^2\theta = 1$ हे सिध्द

22.5: तुमच्या प्रगतीचा आढावा घ्या.

खालील नित्य समीकरणे सिध्द करा.

1. $(\operatorname{cosec}^2\theta - 1)\sin^2\theta = \cos^2\theta$
2. $\sin^4 A + \sin^2 A.\cos^2 A = \sin^2 A$

3. $\cos^2\theta\,(1+\tan^2\theta) = 1$

4. $(1+\tan^2\theta)\sin^2\theta = \tan^2\theta$

5. $\frac{\sin A}{1+\cos A} + \frac{\sin A}{1-\cos A} = 2\,\mathrm{cosec}A$

6. $\sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}} = \frac{1+\cos A}{\sin A}$

7. $\sqrt{\frac{\sec A-\tan A}{\sec A+\tan A}} = \frac{\cos A}{1+\sin A}$

8. $(\sin A - \cos A)^2 + 2\sin A.\cos A = 1$

9. $\cos^4\theta + \sin^4\theta - 2\sin^2\theta.\cos^2\theta = (2\cos^2\theta - 1)^2$

10. $\frac{\sin A-\sin B}{\cos A+\cos B} + \frac{\cos A-\cos B}{\sin A+\sin B} = 0$

11. $(\mathrm{cosec}\theta - \sin\theta)(\sec\theta - \cos\theta)(\tan\theta + \cos\theta) = 1$

12. $\sin A\,(1+\tan A) + \cos A\,(1+\cot A) = \sec A + \mathrm{cosec}A$

13. $\frac{1-\cos A}{1+\cos A} = (\mathrm{cosec}A - \cot A)^2$

14. $\frac{\tan A}{1-\cot A} + \frac{\cot A}{1-\tan A} = 1 + \sec A.\,\mathrm{cosec}A$

15. $\frac{\cot A+\mathrm{cosec}A-1}{\cot A-\mathrm{cosec}A+1} + \frac{1+\cos A}{\sin A} = \frac{\sin A}{1-\cos A}$

16. जर $\sin^2\theta + \sin\theta = 1$, तर $\cos^2\theta + \cos^4\theta = 1$ हे दाखवा.

पुढील प्रश्न क.१७ ते २० साठी प्रत्येकी चार पर्याय दिले आहेत. त्यापैकी योग्य पर्याय निवडा.

17. $(\sin A + \cos A)^2 - 2\sin A.\cos A = ?$

(i) 1 (ii) 2 (iii) 1 (iv) $\sin^2 A - \cos^2 A$

18. $\sin^4 A - \cos^4 A = ?$

(i) 1 (ii) $\sin^2 A - \cos^2 A$ (iii) 0 (iv) $\tan^2 A$

19. $\sin^2 A - \sec^2 A + \cos^2 A + \tan^2 A = ?$

(i) 0 (ii) 1 (iii) $\sin^2 A$ (iv) $\cos^2 A$

20. $(\sec A - \tan A)(\sec A + \tan A) - (\mathrm{cosec}A - \cot A)(\mathrm{cosec}A + \cot A) = ?$

(i) 2 (ii) 1 (iii) 0 (iv) $\frac{1}{2}$

22.7 कोटिकोनाची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे ः

भूमितीमध्ये आपण कोटिकोन व पुरककोन याचा अभ्यास केला आहे. याविषयी आपण उजळणी करू या. जेव्हा दोन कोनांच्या मापांची बेरीज 90^0 असते, तेव्हा त्यांना परस्परांचे कोटिकोन असे म्हणतात. जर $\angle A$ व $\angle B$ हे परस्परांचे कोटिकोन असतात. अशा रीतीने 20^0 आणि 70^0 हे कोटिकोन आहेत म्हणून 20^0 व 70^0 चा कोटिकोन होईल तर 70^0 हा 20^0 चा कोटिकोन होईल. समजा XOX' आणि YOY' हे अक्ष परस्परांना लंब असणारी कार्टेशियन संदर्भ चौकट आहे. OX वर 'A' हा कोणताही एक विंदू आहे. किरण OA हा त्याच्या मूळ स्थितीशी घडयाळयाच्या काटयाच्या विरूध्द दिशेने भ्रमण करून

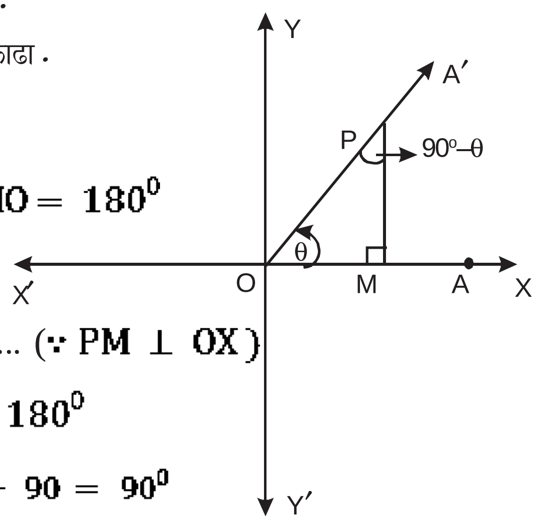
X- अक्षाशी θ कोन तयार करतो असे मानू.

$\therefore \angle POM = \theta$ $\quad PM \perp OX$ काढा.

ΔPMO हा काटकोन त्रिकोण होतो.

तसेच $\angle POM + \angle OPM + \angle PMO = 180^0$

($\because$ Δ च्या आंतरकोनांचे एकूण माप)



परंतु $\angle PMO = 90^0$ .... ($\because PM \perp OX$)

$\therefore \angle POM + \angle OPM + 90^0 = 180^0$

$\therefore \angle POM + \angle OPM = 180 - 90 = 90^0$

$\therefore \angle OPM = 90 - \angle POM$

आ. 22.28

$\therefore \angle OPM = 90 - \theta$ $\quad$ ($\because \angle POM = \theta$)

अशा रीतीने $\angle OPM$ व $\angle POM$ हे परस्परांचे कोटिकोन आहेत. आता काटकोन ΔPMO मध्ये t गुणोत्तरांच्या व्याख्येनुसार

$$\sin\theta = \frac{PM}{OP}, \cos\theta = \frac{OM}{OP} \text{ आणि } \tan\theta = \frac{PM}{OM},$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{OP}{PM}, \sec\theta = \frac{OP}{OM} \text{ आणि } \cot\theta = \frac{OM}{PM}$$

आता $(90^0 - \theta)$ या कोनाच्या संदर्भात काटकोन ΔOPM मध्ये,

टिपा

$$\sin(90^0-\theta) = \frac{OM}{OP} = \cos\theta$$

$$\cos(90^0-\theta) = \frac{PM}{OP} = \sin\theta$$

$$\tan(90^0-\theta) = \frac{OM}{PM} = \cot\theta$$

$$\cot(90^0-\theta) = \frac{PM}{OM} = \tan\theta$$

$$\mathrm{cosec}(90^0-\theta)\,\theta = \frac{OP}{OM} = \sec\theta$$

आणि $\sec(90^0-\theta) = \frac{OP}{PM} = \mathrm{cosec}\theta$

अशा रीतीने वरील सहा निष्कर्ष हे कोटिकोनांची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे आहेत.

उदा. $\sin(90^0-20^0) = \cos 20^0$

म्हणजेच $\sin 70^0 = \cos 20^0$

तसेच $\tan(90^0-40^0) = \cot 40^0$

म्हणजेच $\tan 50^0 = \cot 40^0$

आता वरील निष्कर्ष (सूत्रे) वापरून काही उदाहरणे पाहू या.

उदा. 22.25 : सिध्द करा ः $\tan 13^0 = \cot 77^0$

उकल ः उजवी बाजू $= \cot 77^0$

$= \cot(90^0 - 13^0)$

$= \tan 13^0$ $[(\because \cot(90-\theta) = \tan\theta)]$

$=$ L.H.S.

अशा रीतीने $\tan 13^0 = \cot 77^0$ हे सिध्द

उदा. 22.26 : $\sin^2 40 - \cos^2 50$ या राशीची किंमत काढा.

उकल ः $\cos 50^0 = \cos(90^0 - 40^0)$

$= \sin 40^0$ …………… $(\because (90 - \theta) = \sin\theta)$

$\therefore \sin^2 40^0 - \cos^2 50^0 = \sin^2 40^0 - \sin^2 40^0 = 0$

$\therefore \sin^2 40^0 - \cos^2 50^0 = 0$ हे उत्तर

उदा. **22.27 :** किंमत काढा. $\dfrac{\cos 41^0}{\sin 49^0} + \dfrac{\sec 37^0}{\operatorname{cosec} 53^0}$

उकल ः $\sin 49^0 = \sin(90^0 - 41^0)$

$\therefore \sin 49^0 = \cos 41^0 \; (\because \sin(90^0 - \theta) = \cos\theta)$

आणि $\operatorname{cosec} 53^0 = \operatorname{cosec}(90^0 - 37^0)$

$\therefore \operatorname{cosec} 53^0 = \sec 37^0 \; (\because \operatorname{cosec}(90^0 - \theta) = \sec\theta)$

आता $\dfrac{\cos 41^0}{\sin 49^0} + \dfrac{\sec 37^0}{\operatorname{cosec} 53^0}$ यात वर मिळविलेल्या किंमती घालू

$= \dfrac{\cos 41^0}{\cos 41^0} + \dfrac{\sec 37^0}{\sec 37^0}$

$= 1+1 = 2$ हे उत्तर

उदा. **22.28 :** दाखवा की ,

$3 \sin 17^0 . \sec 73^0 + 2 \tan 20^0 . \operatorname{Tan} 70^0 = 5$

उकल ः $3\sin 17 . \sec(90^0 - 17^0) + 2\tan 20^0 . \tan(90^0 - 20^0)$

$= 3 \sin 17^0 \text{ X } \operatorname{cosec} 17^0 + 2\tan 20^0 \text{ x } \cot 20^0$

$(\because \sec(90^0 - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$ आणि

$\tan(90^0 - \theta) = \cot\theta)$

$= 3\sin 17^0 \text{ X } \dfrac{1}{\sin 17^0} + 2\tan 20^0 \text{ X } \dfrac{1}{\tan 20^0}$

$= 3 + 2 = 5$ ……………… हे सिध्द

उदा. **22.29 :** दाखवा की,

$\tan 7^0 \text{ x } \tan 23^0 \text{ x } \tan 67^0 \text{ x } \tan 83^0 = 1$

उकल ः $\tan 67^0 = \tan(90^0 - 23^0) = \cot 23^0 \; (\because \tan(90^0 - \theta) = \cot\theta)$

टिपा

आणि $\tan 83^0 = \tan(90^0 - 7^0)$

$\therefore \tan 83^0 = \cot 70^0$ $[\because \tan(90-\theta) = \cot\theta]$

आता डावी बाजू $= \tan 7^0 X \tan 23^0 X \tan 67^0 X \tan 83^0$ यात मिळालेल्या किंमती घालू.

$= (\tan 7^0 \times \cot 7^0)(\tan 23^0 \times \cot 23^0)$

$= \tan 7^0 \times \frac{1}{\tan 7^0} \times \tan 23 \times \frac{1}{\tan 23^0}$

$= 1 \times 1 = 1 =$ उजवी बाजू

$\therefore \tan 7^0 \times \tan 23^0 \times \tan 67^0 \times \tan 83^0 = 1$ हे सिध्द

उदा. **22.30:** जर $\tan A = \cot B$, तर सिध्द करा $A + B = 90^0$

उकल : $\tan A = \cot B$ ………….. (पक्ष)

$\therefore \tan A = \tan(90 - B)$ $[\because \cot\theta = \tan(90-\theta)]$

$\therefore A = 90 - B$

$\therefore A + B = 90^0$ हे सिध्द

उदा. **22.31:** ΔABC हा एक त्रिकोण आहे. $\angle A, \angle B, \angle C$ हे या त्रिकोणाचे आंतरकोन आहेत. तर, $\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$ हे दाखवा.

उकल : त्रिकोणाच्या कोनांच्या मापांची बेरीज 180^0 असते.

$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = 180^0$ (ΔABC चे कोन)

म्हणजेच $A+B+C = 180^0$

$\therefore B + C = 180^0 - A$

$\therefore \frac{B+C}{2} = 90^0 - \frac{A}{2}$

$\therefore \sin\left(\frac{B+C}{2}\right) - \sin\left(90^0 - \frac{A}{2}\right)$

$\therefore \sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$ हे सिध्द

उदा. **22.32 :** सिध्द करा की, $\frac{\cos\theta}{\sin(90-\theta)} + \frac{\sin\theta}{\cos(90-\theta)} = 2$

उकल : डावी बाजू $= \frac{\cos\theta}{\sin(90-\theta)} + \frac{\sin\theta}{\cos(90-\theta)}$

$= \frac{\cos\theta}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\sin\theta}$ $[\because \sin(90-\theta) = \cos\theta$

टिपा

$= 1 + 1 = 2$ आणि $\cos(90^0 - \theta) = \sin\theta]$

$\therefore \dfrac{\cos\theta}{\sin(90^0-\theta)} + \dfrac{\sin\theta}{\cos(90^0-\theta)} = 2$ हे सिध्द

उदा. **22.23:** $\dfrac{\sin(90^0-\theta)}{\operatorname{cosec}(90^0-\theta)} + \dfrac{\cos(90^0-\theta)}{\sec(90^0-\theta)} = 1$ दाखवा.

उकल ः डावी वाजू $= \dfrac{\sin(90^0-\theta)}{\operatorname{cosec}(90^0-\theta)} + \dfrac{\cos(90^0-\theta)}{\sec(90^0-\theta)}$

$= \dfrac{\cos\theta}{\sec\theta} + \dfrac{\sin\theta}{\operatorname{cosec}\theta}$

$\because \sin(90^0 - \theta) = \cos\theta$

$= \cos\theta \div \dfrac{1}{\cos\theta} + \sin\theta \div \dfrac{1}{\sin\theta}$

$\cos(90^0 - \theta) = \sin\theta$,

$= \cos\theta \times \cos\theta + \sin\theta \times \sin\theta$

$\operatorname{cosec}(90^0 - \theta) = \sec\theta$

$= \cos^2\theta + \sin^2\theta$ आणि

$\sec(90^0 - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$]

$= 1 =$ उजवी वाजू $[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

$\therefore \dfrac{\sin(90^0-\theta)}{\operatorname{cosec}(90^0-\theta)} + \dfrac{\cos(90^0-\theta)}{\sec(90^0-\theta)} = 1$ हे सिध्द.

उदा. **22.34 :** सोपे रूप द्या.

$$\frac{\cos(90^0-\theta)\sec(90^0-\theta)\tan\theta}{\operatorname{cosec}(90^0-\theta)\sin(90^0-\theta)\cot(90^0-\theta)} + \frac{\tan(90^0-\theta)}{\cot\theta}$$

उकल ः $= \dfrac{(\quad -\theta)\ (\quad -\theta)\ \theta}{(\quad -\theta)\ (\quad -\theta)\ (\quad -\theta)} + \dfrac{(\quad -\theta)}{\theta}$

$= \dfrac{\theta\ \ \theta\ \ \theta\ \ \theta}{\theta\ \ \theta\ \ \theta} + \dfrac{\theta}{\theta}$ ...[$\because \sin\theta \,.\, \cos\theta = 1$ and $\sec\theta \,.\, \cos\theta = 1$]

$= 1 + 1 = 2$ परस्परांची गुणाकार व्यस्त t गुणोत्तरे

उदा. **22.35 :** $\tan 68^0 + \sec 68^0$ यातील कोनाचे 0^0 ते 45^0 मापामध्ये रूपांतर करा.

उकल ः आपणास माहित आहे की,

$\tan(90^0 - \theta) = \cot\theta$ आणि

$\sec(90^0 - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$

$\therefore \tan 68^0 = \tan(90^0 - 22^0) = \cot 22^0$ आणि

$\sec 68^0 = \sec(90^0 - 22^0) = \operatorname{cosec} 22^0$

टिपा

अशा रीतीने $\tan 68^0 + \sec 68^0 = \cot 22^0 + \operatorname{cosec} 22^0$

* <u>लक्षात ठेवा ः</u> कोटिकोन ही संज्ञा वापरताना, सामान्यपणे आपण ज्या कोनाचे माप $> 45^0$ असते अशा कोनाचा कोटिकोन मिळवितो.

उदा.22.36: जर $\tan 2A = \cot (A - 18^0)$, की ज्यामध्ये 2A हा लघुकोन आहे. तर A ची किंमत काढा.

उकल ः येथे $\tan 2A = \cot (A^0 - 18)$ .... (पक्ष)

$\therefore \cot(90^0 - 2A) = \cot(A - 18^0)$ $[\because \cot(90 - 2A) = \tan 2A]$

$\therefore 90^0 - 2A = A - 18^0$

$\therefore 90^0 + 18^0 = A + 2A$ $\qquad \therefore 3A = 108^0$

$\therefore A = \dfrac{108^0}{3} = 36^0$ होईल. $\qquad \therefore A = 36^0$ हे उत्तर

22.6 तुमच्या प्रगतीचा आढावा घ्या.

1. दाखवा की,

(i) $\cos 55^0 = \sin 35^0$ (ii) $\sin^2 11^0 - \cos^2 79^0 = 0$

(iii) $\cos^2 51^0 - \sin^2 39^0$

2. पुढीलपैकी प्रत्येकाची किंमत काढा.

(i) $\dfrac{3\sin 19^0}{\cos 71^0}$ (ii) $\dfrac{\tan 65^0}{2\cot 25^0}$ (iii) $\dfrac{\cos 89^0}{3\sin 1^0}$ (iv) $\cos 48^0 - \sin 42^0$

(v) $\dfrac{3\sin 5^0}{\cos 85^0} + \dfrac{2\tan 33^0}{\cot 57^0}$ (vi) $\dfrac{\cot 54^0}{\tan 36^0} + \dfrac{\tan 20^0}{\cot 70^0} - 2$

(vii) $\sec 41^0 \sin 49^0 + \cos 49^0 \operatorname{cosec} 41^0$

(viii) $\dfrac{\cos 75^0}{\sin 15^0} + \dfrac{\sin 12^0}{\cos 78^0} - \dfrac{\cos 18^0}{\sin 72^0}$

3. खालील प्रत्येक राशीची किंमत काढा.

(i) $\left(\dfrac{\sin 47^0}{\cos 43^0}\right)^2 + \left(\dfrac{\cos 43^0}{\sin 47^0}\right)^2$

(ii) $\dfrac{\cos^2 20^0 + \cos^2 70^0}{3\,(\sin^2 59^0 + \sin^2 31^0)}$

4. सिध्द करा की ः

(i) $\sin\theta . \cos(90^0 - \theta) + \cos\theta . \sin(90^0 - \theta) = 1$

(ii) $\cos\theta \cos(90^0 - \theta) - \sin\theta \sin(90^0 - \theta) = 0$

(iii) $\dfrac{\cos(90^0-\theta)}{1+\sin(90-\theta)}+\dfrac{1+\sin(90^0-\theta)}{\cos(98-\theta)}=2\operatorname{cosec}\theta$

(iv) $\sin(90^0-\theta)\cos(90^0-\theta)=\dfrac{\tan(90^0-\theta)}{1+\tan^2(90^0-\theta)}$

(v) $\tan45^0\tan13^0\tan77^0\tan85^0=1$

(vi) $2\tan15^0\tan25^0\tan65^0\tan75^0=2$

(vii) $\sin20^0\sin70^0-\cos20^0.\cos70^0=0$

5. $\sin(50^0+\theta)-\cos(40^0-\theta)=0$ हे दाखवा.

6. **sinA = cosB** असून **A** व **B** हे लघुकोन आहेत, तर **A+B = 90⁰** हे सिध्द करा.

7. ΔABC मध्ये सिध्द करा की,

(i) $\tan\left(\dfrac{B+C}{2}\right)=\cot\dfrac{A}{2}$

(ii) $\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)=\sin\dfrac{C}{2}$

8. $\tan59^0+\operatorname{cosec}85^0$ ह्या राशीतील कोन 0^0 ते 45^0 दरम्यान असणा-या त्रिकोणमितीय गुणोत्तराचे रूप द्या.

9. $\sec46^0-\cos87^0$ ह्या राशीतील कोन 0^0 ते 45^0 दरम्यान असणा-या **t** गुणोत्तरात व्यक्त करा.

10. $\sec^2 62^0+\sec^2 69$ ह्या राशीतील कोन 0^0 ते 45^0 दरम्यान असणा-या **t** गुणोत्तरात व्यक्त करा.

खालील उदाहरणात (उदा.**11** व उदा. **12**) प्रत्येकी चार पर्यायी उत्तरे दिली आहेत. तर प्रत्येकी योग्य उत्तर (पर्याय) निवडा.

11. $\dfrac{\sin40}{2\cos50^0}-\dfrac{2\sec41^0}{3\operatorname{cosec}49^0}$ या राशीची किंमत = ?

(i) -1 (ii) $\frac{1}{6}$ (iii) -$\frac{1}{6}$ (iv) 1

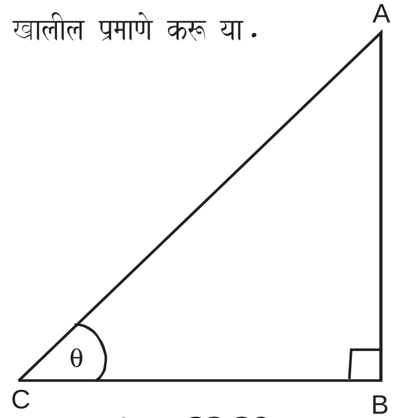
12. जर $\sin(\theta+36^0)=\cos\theta$, आणि यामध्ये $(\theta+36^0)$ हा लघुकोन आहे, तर θ ची किंमत = ?

टिपा

(i) 54^0 (ii) 18^0 (iii) 21^0 (iv) 27^0

सारांश :

आपण काटकोन त्रिकोणात, त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांच्या व्याख्या खालील प्रमाणे करू या.



आ. 22.29;

$$\sin\theta = \frac{< \theta \text{ समोरील बाजू}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\cos\theta \ \text{x} = \frac{\text{लगतची बाजू}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\tan\theta = \frac{< \theta \text{समोरील बाजू}}{< \theta \text{लगतची बाजू}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\cot\theta = \frac{< \theta \text{ लगतची बाजू}}{< \theta \text{ समोरील बाजू}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{कर्ण}}{< \theta \text{ लगतची बाजू}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{कर्ण}}{< \theta \text{ समोरील बाजू}} = \frac{AC}{AB}$$

- <u>त्रिकोणमितीय गुणोंत्तरामधील संबंध खालील प्रमाणे असतो.</u>

(i) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ (ii) $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

(iii) $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ (iv) $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

(v) $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

- <u>त्रिकोणमितीय नित्य समीकरणे</u>

(i) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

(ii) $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

(iii) $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

- जेव्हा दोन कोनांच्या मापांची बेरीज 90^0 असते. तेव्हा त्यांना परस्परांचे कोटिकोन असे म्हणतात.
- $\sin(90^0 - A) = \cos A$, $\cos(90^0 - A) = \sin A$ आणि $\tan(90^0 - A) = \cot A$
- $\operatorname{cosec}(90^0 - A) = \sec A$, $\sec(90^0 - A) = \operatorname{cosec} A$ आणि $\cot(90^0 - A) = \tan A$

या अभ्यासाला पूरक वेबसाइटसः

- http://www.wikipedia.org
- http://mathworld:wolfram.com

सत्रांत प्रश्नसंग्रह

1. जर $\sin A = \frac{4}{5}$, तर cosA आणि tanA च्या किंमती काढा.

2. जर $\tan A = \frac{20}{21}$, तर cosecA आणि secA च्या किंमती काढा.

3. जर $\cot \theta = \frac{3}{4}$, तर $\sin \theta + \cos \theta$ ची किंमती काढा.

4. जर sec $= \frac{m}{n}$, तर sin आणि tan ची किंमती काढा.

5. जर cos = तर $\frac{\sin\theta\tan\theta - 1}{2\tan^2\theta}$ ची किंमती काढा.

6. जर $\sec\theta = \frac{5}{4}$, तर $\frac{\tan\theta}{1+\tan\theta}$ ची किंमत काढा.

7. जर $\tan A = 1$, आणि $\tan B = \sqrt{3}$ तर $\cos A.\cos B - \sin A.\sin B$ या राशीची किंमत काढा.

<u>खालील नित्य समीकरणे सिध्द करा</u>. (उदा. **8** ते **20**)

8. $(\sec\theta + \tan\theta)(1 - \sin\theta) = \cos\theta$

9. $\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = \frac{\operatorname{cosec}\theta}{\sec\theta}$

10. $\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = (\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)^2$

11. $\frac{\tan\theta+\sin\theta}{\tan\theta-\sin\theta} = \frac{\sec\theta+1}{\sec\theta-1}$

12. $\frac{\tan A+\cot B}{\cot A+\tan B} = \tan A.\cot B$

13. $\sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}} = \operatorname{cosec} A + \cot A$

14. $\sqrt{\frac{\operatorname{cosec} A+1}{\operatorname{cosec} A-1}} = \frac{\cos A}{1-\sin A}$

15. $\sin^3 A - \cos^3 A = (\sin A - \cos A)(1 + \sin A\cos A)$

16. $\frac{\cos A}{1-\tan A} + \frac{\sin A}{1-\cot A} = \cos A + \sin A$

17 $\sqrt{\frac{\sec A-1}{\sec A+1}} + \sqrt{\frac{\sec A+1}{\sec A-1}} = 2\operatorname{cosec} A$

18. $(\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \frac{1}{\tan A+\cot A}$

19. $(1 + \cot\theta - \operatorname{cosec}\theta)(1 + \tan\theta + \sec\theta) = 2$

20. $2(\sin^6\theta + \cos^6\theta)(1 + \tan\theta + \sec\theta) = 2$

21. जर $\sec\theta + \tan\theta = p$, तर $\sin\theta = \frac{p^2-1}{p^2+1}$ हे दाखवा.

22. सिध्द करा : $\frac{\cos(90^0-A)}{1+\sin(90^0-A)} + \frac{1+\sin(90^0-A)}{\cos(90^0-A)} = 2\sec(90^0 - A)$

23. सिध्द करा : $\frac{\sin(90^0-A)\cos(90^0-A)}{\tan A} = \sin^2(90^0 - A)$

24. जर $\tan\theta = \frac{3}{4}$ आणि $\theta+\alpha = 90^0$ तर $\cot\alpha$ ची किंमत काढा.

25. जर $\cos(2\theta + 54^0) = \sin\theta$ आणि $(2\theta + 54^0)$ हा लघुकोन

आहे, तर θ ची किंमत काढा.

26. जर $\sec Q = \operatorname{cosec} P$, P आणि Q हे लघुकोन आहेत. तर $P+Q = 90^0$ हे

दाखवा.

तुमच्या प्रगतीचा आढावा - उत्तरे

22.1

1. (i) $\sin\theta = \frac{5}{13}, \cos\theta = \frac{12}{13}, \tan\theta = \frac{5}{12}, \operatorname{cosec}\theta = \frac{13}{5}, \sec\theta = \frac{13}{12}$

आणि $\cot\theta = \frac{12}{5}$

(ii) $\sin\theta = \frac{3}{5}, \cos\theta = \frac{4}{5}, \tan\theta = \frac{3}{4}, \operatorname{cosec}\theta = \frac{5}{3}, \sec\theta = \frac{5}{4}$ आणि

$\cot\theta = \frac{4}{3}$

(iii) $\sin\theta = \frac{24}{25}, \cos\theta = \frac{7}{25}, \tan\theta = \frac{24}{7}, \operatorname{cosec}\theta = \frac{25}{24}, \sec\theta = \frac{25}{7}$

आणि $\cot\theta = \frac{7}{24}$

(iv) $\sin\theta = \frac{4}{5}, \cos\theta = \frac{3}{5}, \tan\theta = \frac{4}{3}, \operatorname{cosec}\theta = \frac{5}{4}, \sec\theta = \frac{5}{3}$ आणि

$\cot\theta = \frac{3}{4}$

2. $\sin A = \frac{5}{\sqrt{41}}$, $\cos A = \frac{4}{\sqrt{41}}$ आणि $\tan A = \frac{5}{4}$

3. $\sin C = \frac{40}{41}$, $\cot C = \frac{9}{40}$, $\cos A = \frac{40}{41}$ आणि $\cot A = \frac{40}{9}$

4. $\sec C = \sqrt{2}$, $\operatorname{cosec}C =$, आणि $\cot C = 1$

5. (IV)

6. (ii)

22.2

1. $\sin C = \frac{3}{5}$, $\cos C = \frac{4}{5}$ आणि $\tan C = \frac{3}{4}$

2. $\sin A = \frac{24}{25}$, $\operatorname{cosec}A = \frac{25}{24}$ आणि $\cot A = \frac{7}{24}$

3. $\sec P = \sqrt{2}$, $\cot P = 1$ आणि $\operatorname{cosec}P = \sqrt{2}$

4. $\tan R = \sqrt{3}$, $\operatorname{cosec}R = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\sin P = \frac{1}{2}$ आणि $\sec p = \frac{2}{\sqrt{3}}$

5. $\cot\theta = \frac{24}{7}$, $\sin\theta = \frac{7}{25}$, $\sec\theta = \frac{25}{24}$ आणि $\tan\theta = = \frac{7}{24}$

6. $\sin P = \frac{2\sqrt{6}}{7}$, $\cos P = \frac{5}{7}$, $\sin R = \frac{5}{7}$ आणि $\cos R = \frac{2\sqrt{6}}{7}$

तसेच $\sin P - \cos R = 0$

7. (iii)

22.3

1. $\cos\theta = \frac{21}{29}$ आणि $\tan\theta = \frac{20}{21}$

2. $\sin\theta = \frac{24}{25}$ आणि $\cos\theta = \frac{7}{25}$

3. $\sin A = \frac{24}{25}$ आणि $\tan \mathbf{A} = \frac{24}{7}$

4. $\cot\theta = \frac{m}{\sqrt{n^2 - m^2}}$ आणि $\text{cosec}\,\theta = \frac{n}{\sqrt{n^2 - m^2}}$

5. $-\frac{256}{135}$

6. $\frac{27}{8}$

8. $\sin B = \frac{2}{\sqrt{13}}$ आणि $\tan B = \frac{2}{3}$

11. (ii)

22.4

1. $\cot\theta = \sqrt{3}$ आणि $\sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$

2. $\frac{3}{4}$

3. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. $\sin \mathbf{A} = \frac{1}{2}$ आणि $\tan = \frac{1}{\sqrt{3}}$

5. $\frac{-14}{3}$

22.5

17. (iii)

18. (ii)

19. (i)

20. (iii)

22.6

1. (i) 3 (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{3}$ (iv) 0

   (v) 5 (vi) 0 (vii) 2 (viii) 1

2. (i) 2 (ii) $\frac{1}{3}$

8. $\cot 31^0 + \sec 5^0$

9. $\operatorname{cosec} 44^0 - \sin 3^0$

10. $\operatorname{cosec}^2 28^0 + \operatorname{cosec}^2 21^0$

11. (ii)

12. (iv)

उत्तरे : सत्रान्त प्रश्नसंग्रह

1. $\cos A = \frac{3}{5}$ आणि $\tan A = \frac{4}{3}$

2. $\operatorname{cosec} A = \frac{29}{20}$ आणि $\sec A = \frac{29}{21}$

3. $\frac{7}{5}$

4. $\sin\theta = \frac{\sqrt{m^2 - n^2}}{m}$ आणि $\tan\theta = \frac{\sqrt{m^2 - n^2}}{n}$

5. $\frac{3}{160}$

6. $\frac{3}{7}$

टिपा

7. $\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

24. $\frac{3}{4}$

25. 12^0

विभाग ः ६

सांख्यिकी

आधुनिक मानवी समाज हा खरोखरच सगळीकडून गोळा केलेल्या सर्व प्रकारच्या माहितीशी संबंधित असणारा समाज आहे. आपल्या जीवनाशी संबंधित असे कोणतेही क्षेत्र राहिले नाही, ज्याचा उल्लेख सार्वजनिक ठिकाणी होत नाही. वर्तमापत्रे, नियतकालिके, मासिके, रेडिओ, दूरदर्शन, इंटरनेट आणि इतर प्रसिद्धीमाध्यमे यातून माहितीचा महापूर सतत वाहत असतो. ही संख्यात्मक माहिती कधी क्रिकेटविषयी असते, कधी महागाई विषयी असते, कधी साक्षरतेची टक्केवारी सांगणारी असते, कधी जर्न्ममृत्यू दर सांगणारी असते. कधी वेगवेगळ्या शहरांचे तापमान आणि पर्जन्यवृष्टी सांगणारी असते. तर कधी पंचवार्षिक योजनेतील खर्चाचा जमाखर्च देणारी असते. अशा तऱ्हेने या माहितीच्या महापूरातून आपल्याला उपयोगी असणारी माहिती कशी संकलित करावयाची हा मोठाच प्रश्न असतो. अशा तऱ्हेने मिळालेल्या माहितीची नीट मांडणी करून उपयुक्त माहिती देणाऱ्या शास्त्रास सांख्यिकी किंवा संख्याशास्त्र असे म्हणतात.

सांख्यिकी माहिती आणि तिची मांडणी या पाठात विद्यार्थ्यांना वेगवेगळ्या प्रकारची सांख्यिकी माहिती, माहिती गोळा करण्याची पद्धत, माहितीची मांडणी करण्याची पद्धत, उदा. वारंवारता सारणी, संचित वारंवारता सारणी माहितीचे आलेखरूपात प्रतिरूपण, आलेखाचे प्रकार, स्तंभालेख, आयतालेख, वारंवारता बहुभूज यांची ओळख करून दिली आहे.

काही वेळेस आपल्याला संख्यारूपात माहितीची गरज पडते. उदा. वर्गातील विद्यार्थ्यांच्या वयाचा मध्य, विद्यार्थ्यांची सरासरी उंची, सर्वसाधारण विद्यार्थ्यांच्या गटाचे कपड्यांचे किंवा बुटाचे माप.

अशा तऱ्हेने संकलित केलेल्या माहितीचे वर्गीकरण करून त्यापासून निश्चित माहिती मिळविणे आवश्यक असते. केंद्रीय प्रवृत्तीचे मापन या पाठामध्ये अवर्गीकृत आणि वर्गीकृत माहितीचा उपयोग करून मध्य, मध्यक, बहुलक गणक करण्यासंबंधी सूत्रे आणि रीती दिल्या आहेत.

संभाव्यता या पाठात संभाव्यता या प्रकारची संकल्पना समजावून सांगितली आहे. एखादी घटना घडण्याची शक्यता कितपत आहे. याचे सांख्यिकीय मापन करण्याची रीत समजावून सांगितली आहे. यासाठी नाणेफेक करणे, फासा टाकणे, व्यवस्थित पिसलेल्या पत्यातून पत्ता काढणे यासारख्या मनोरंजक गोष्टींचा वापर केला आहे.

Mukta Vidya Vani

Mukta Vidya Vani is a pioneering initiative of the National Institute of Open Schooling (NIOS) for using Streaming Audio for educational purposes. This application of ICT will enhance accessibility as well as quality of programme delivery of NIOS Programmes. This is a rare accomplishment of NIOS as the first Open and Distance Learning Institute to start a two way interaction with its learners, using streaming audio and the internet.

Keeping in mind the fact that the transmission is done through the web, the NIOS website (www.nios.ac.in) has a link that will take any user to the Mukta Vidya Vani. Mukta Vidya Vani thus enables a two way communication with any audience that has access to an internet connection, from the studio at its Headquarters in NOIDA, where NIOS has set up a state-of-art studio, which will be used for this purpose as well as for recording educational audio programmes meant for NIOS learners, though others can also take advantage of this facility.

Mukta Vidya Vani is a modern interactive, participatory and cost effective programme, involving an academic perspective along with the technical responsibilities of production of audio and video programmes, which are one of the most important components of the multi channel package offered by the NIOS. These programmes will attempt to present the topic/ theme in a simple, interesting and engaging manner, so that the learners get a clear understanding and insight into the subject matter.

NIOS has launched a scheme to motivate the learners to participate in the Mukta Vidya Vani by sending their Audio CD's to the respective regional centre on various subjects such as-

1. Poetry / Shloka recitation
2. Story telling
3. Radio Drama
4. Music
5. Talks on various topic related to the NIOS curriculum including Painting, Vocational Subjects etc.
6. Quiz
7. Mathematics puzzles etc.

The selected CD can be webcast on Mukta Vidya Vani and the winner participant be rewarded suitably.

Learners may visit the NIOS website and participate in live programmes from 2pm to 5pm on all week days and from 10.30am to 12.30pm on Saturdays, Sundays and all Public Holidays. The Subject Experts in the Studio will respond to their telephonic queries during this time. A weekly schedule of the programmes for webcast is available on the NIOS website. The Studio telephone number are 0120-4626949 and Toll Free No. 1800-180-2543.

23

काही विशिष्ट कोनांची त्रिकाणमितीय गुणोत्तरे

मागील पाठात आपण लघुकोनाची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे व त्यांच्यातील संबंधाचा अभ्यास केला. या पाठात आपल्या भूमितीय ज्ञानाच्या आधारे आपण 30^0, 45^0 आणि 60^0 या कोनांची त्रिकोणामितीय गुणोत्तरे शोधणार आहोत. त्रिकोणमितीच्या ज्ञानाचा उपयोग करून, आपण दैनंदिन जीवनातील जे प्रश्न उंची व अंतरे यावर आधारित आहेत, ते प्रश्न सोडविणार आहोत.

उद्दिष्टे :

या पाठाचा अभ्यास झाल्यानंतर आपणाला खालील बावी समजू शकतील.

- भूमितीच्या आधारे 30^0, 45^0 आणि 60^0 कोनांची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे काढणे.
- 0^0 आणि 90^0 कोनांची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे लिहिणे.
- 0^0 आणि 90^0 कोनांची कोणती त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे ही अव्याख्येय (not defined) आहेत हे सांगणे.
- दैनंदिन जीवनात उंची व अंतरे यावरील प्रश्न, त्रिकोणमितीय गुणोत्तराच्या आधारे सोडविणे.

अपेक्षित पूर्वज्ञान :

- पायथागोरस प्रमेय, म्हणजेच काटकोन ΔABC हा $\angle B$ जवळ काटकोन असेल तर, $AC^2 = AB^2 + BC^2$
- काटकोन मध्ये = 90^0 असताना,

$$\sin C = \frac{\angle C \text{ समोरील बाजू}}{\text{कर्ण}}, \qquad \operatorname{cosec} C = \frac{\text{कर्ण}}{\angle C \text{ समोरील बाजू}}$$

$$\cos C = \frac{\angle C \text{लगतची बाजू}}{\text{कर्ण}}, \qquad \sec C = \frac{\text{कर्ण}}{\angle C \text{लगतची बाजू}}$$

टिपा

$$\tan C = \frac{< C \text{ समोरील बाजू}}{< C \text{ लगतची बाजू}} \qquad \cot C = \frac{< C \text{ लगतची बाजू}}{< C \text{ समोरील बाजू}}$$

$$\operatorname{cosec} C = \frac{1}{\sin C},\ \sec C = \frac{1}{\cos C} \text{ आणि } \cot C = \frac{1}{\tan c}$$

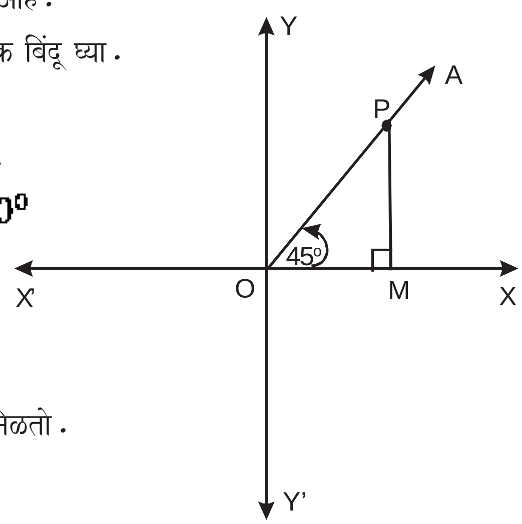
- $\sin(90^0 - \theta) = \cos\theta$, $\cos(90^0 - \theta) = \sin\theta$

$\tan(90^0 - \theta) = \cot\theta$, $\cot(90^0 - \theta) = \tan\theta$

- $\sec(90^0 - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$ आणि $\operatorname{cosec}(90^0 - \theta) = \sec\theta$

23.1 45^0 मापाच्या कोनाची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे :

समजा किरण OA चे OX पासून घडयाळयाच्या काटयाच्या विरूध्द दिशेने भ्रमण होऊन त्याने X अक्षाशी 45^0 मापाचा कोन तयार केला आहे. (आ.23.1) OA वर P हा कोणताही एक विंदू घ्या. PM $\perp$ OX काढा. आता Δ PMO हा काटकोन त्रिकोण आहे.



आ. 23.1

$\therefore < POM + < OPM + < PMO = 180^0$

(त्रिकोणाच्या आंतरकोनांचे माप)

$\therefore\ 45^0 + < OPM + 90^0 = 180^0$

$\therefore < OPM + 135^0 = 180^0$

$\therefore < OPM = 180^0 - 135^0 = 45^0$ मिळतो.

$\therefore$ OM = PM ... ...

(Δ त एकरूप कोनासमोरील बाजू प्रमेय)

समजा OM = PM = a मानू

$\therefore$काटकोन Δ OPM मध्ये पायथागोरस प्रमेयानुसार

$OP^2 = OM^2 + PM^2$

$\therefore\ OP^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

$\therefore\ OP = \sqrt{2}a$ मिळेल.

आता $\sin 45^0 = \frac{PM}{OP} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

तसेच $\cos 45^0 = \frac{OM}{OP} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

आणि $\tan 45^0 = \frac{PM}{OM} = \frac{a}{a} = 1$

त्याचप्रमाणे $\operatorname{cosec}45^0 = \frac{OP}{PM} = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}$

$\sec 45^0 = \frac{OP}{OM} = \frac{\sqrt{2}\,x a}{a} = \sqrt{2}$

आणि $\cot 45^0 = \frac{OM}{PM} = \frac{a}{a} = 1$

23.2 30^0 मापाच्या कोनाची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे ः

समजा OX या मूळ स्थितीशी, किरण OA घडयाळयाच्या काटयाच्या विरूध्द दिशेने भ्रमण करून 30^0चा कोन तयार करतो असे मानू. (आकृती 23.2)

किरण OA वर कोणताही एक P बिंदू घ्या.

$PM \perp OX$ काढा.

PM हा P' पर्यंत असा वाढवा की

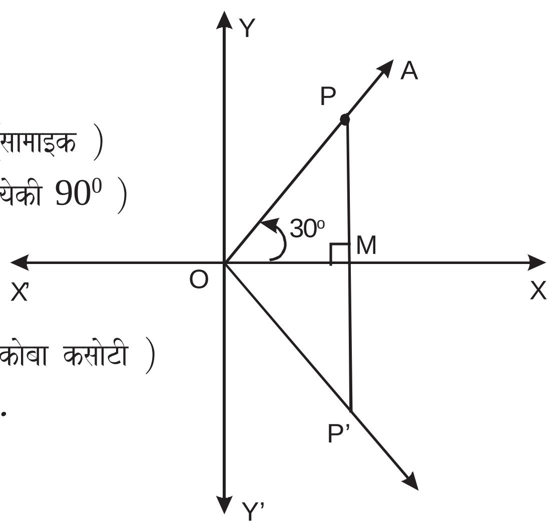
$PM = PM'$. OP' जोडा.

आता ΔPMO आणि $P'MO$ मध्ये

$OM = OM$ …………….. (सामाइक)

$\angle PMO = \angle P'MO$ …..(प्रत्येकी 90^0)

आणि $PM = P'M$ ..(रचना)



आकृती 23.2

$\therefore \Delta PMO \cong \Delta P'MO$ ..(बाकोबा कसोटी)

$\therefore \Delta OPP'$ हा समभुज त्रिकोण होईल.

$\therefore OP = OP'$

$PM = a$ मानू

$\therefore PP' = PM + MP$

$\therefore PP' = a + a = 2a$

$\therefore OP = OP' = PP' = 2a$ ………………….(समभूज Δ च्या बाजू)

आता काटकोन ΔPMO मध्ये पायथागोरस प्रमेयानुसार

$OP^2 = PM^2 + OM^2$

$\therefore (2a)^2 = a^2 + OM^2$

$\therefore 4a^2 - a^2 = OM^2$

$\therefore OM^2 = 3a^2$ $\qquad\qquad \therefore OM = \sqrt{3}a$

आकृतीवरून t गुणोत्तराच्या व्याख्येनुसार

$$\sin 30^0 = \frac{PM}{OP} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^0 = \frac{OM}{OP} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^0 = \frac{PM}{OM} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{cosec} 30^0 = \frac{1}{\sin 30} = \frac{1}{1/2} = 2$$

$$\sec 30^0 = \frac{1}{\cos 30^0} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

आणि $\cot 30^0 = \frac{1}{\tan 30^0} = \frac{1}{1/\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

23.3 60^0 मापाच्या कोनाची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे :

समजा किरण OA हा OX या मूळ स्थितीशी घडयाळयाच्या काटयाच्या विरूध्द दिशेने भ्रमण करून 60^0 मापाचा कोन करतो असे मानू. किरण OA वर 'P' हा कोणताही एक बिंदू घ्या. PM $\perp$ OX काढा. ΔPOM हा काटकोन त्रिकोण होईल. आता OM हा पुढे असा वाढवा की, $OM = MM'$ होईल. PM' जोडा. OM = a मानू

आता ΔPMO आणि $\Delta PMM'$ मध्ये

PM = PM ……………… (सामाइक भुजा)

$\angle PMO = \angle PMM'$ ….(प्रत्येकी 90^0)

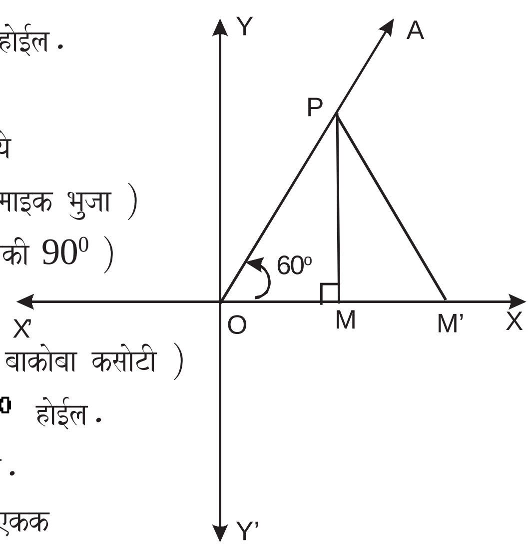
आणि OM = MM' ..(रचना)

$\therefore \Delta POM \cong \Delta PMM'$ …..(बाकोबा कसोटी)

$\therefore \angle POM = \angle PMM' = 60^0$ होईल.

$\therefore \Delta POM'$ हा समभुज त्रिकोण होईल.

$\therefore OP = PM' = OM' = 2a$ एकक



आकृती 23.3

काटकोन ΔPMO मध्ये पायथागोरस प्रमेयानुसार

$OP^2 = PM^2 + OM^2$

$\therefore (2a)^2 = PM^2 + a^2$

$\therefore 4a^2 - a^2 = PM^2$ $\qquad \therefore PM^2 = 3a^2$

$\therefore PM = \sqrt{3}a$ एकक

आता t गुणोत्तराच्या व्याख्येनुसार आकृतीवरून -

$$\sin 60^0 = \frac{PM}{OP} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^0 = \frac{OM}{OP} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^0 = \frac{PM}{OM} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$$

$$\mathrm{cosec}\, 60^0 = \frac{1}{\sin 60^0} = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 60^0 = \frac{1}{\cos 60^0} = \frac{1}{1/2} = 2$$

आणि $\cot 60^0 = \frac{1}{\tan 60^0} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

23.4 0^0 आणि 90^0 कोनाची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे :

23.1, 23.2 आणि 23.3 या विभागात आपण 45^0, 30^0 आणि 60^0 कोनांकरीता त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे अभ्यासली आहेत. 0^0 आणि 90^0 कोनांची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे ही व्याख्या स्वरूपात न अभ्यासता किंवा सिध्द न करता, त्याच्या किंमती खालीलप'माणे आहेत असे गृहित धरू या.

(i) $\sin 0^0 = 0$ आणि म्हणुन $\mathrm{cosec}\, 0^0 =$ अव्याख्येस होईल.

(ii) $\cos 0^0 = 1$ आणि म्हणून $\sec 0^0 = 1$ होईल.

(iii) $\tan 0^0 = 0$, $\therefore \cot 0^0 =$ अव्याख्येस

(iv) $\sin 90^0 = 0$, $\mathrm{cosec}\, 90^0 = 1$

(v) $\cos 90^0 = 0$, $\sec 90^0 =$ अव्याख्येस

(vi) $\tan 90^0 =$ अव्याख्येस , $\cot 90^0 = 0$

लक्षात घ्या :

$\frac{0}{1} = 0$ परंतु $\frac{1}{0}$ हे अव्याख्येय होईल. म्हणजेच अपूर्णाकांचा अंश शून्य असताना त्याची किंमत 0 होईल. परंतु छेद शून्य असताना त्याची किंमत अर्थहीन किंवा अव्याख्येय अशी होईल.

टिपा

<u>लक्षात ठेवण्यासाठी महत्वाचा तक्ता ः</u>

आपणास 0^0, 30^0, 45^0, 60^0 आणि 90^0 कोनांच्या त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांचा वापर करून उदाहरणे सोडविता येतात. खालील तक्ता आपणास **$\sin\theta$** आणि **$\cos\theta$** च्या किंमती लक्षात ठेवण्यास उपयुक्त ठरेल. त्यांच्यातील माहिता असलेल्या संबंधावरून इतर त्रिकोणमितिय गुणोत्तर लिहिता येतील. हा तक्ता लक्षात ठेवणे ही सोपे आहे.

θ / t गुणोत्तर	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
$\sin\theta$	$\sqrt{\frac{0}{4}} = 0$	$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{\frac{4}{4}} = 1$
$\cos\theta$	$\sqrt{\frac{4}{4}} = 1$	$\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{0}{4}} = 0$
$\tan\theta$	$\sqrt{\frac{0}{4-0}} = 0$	$\sqrt{\frac{1}{4-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{4-2}} = 1$	$\sqrt{\frac{3}{4-3}} = \sqrt{3}$	अव्याख्येस
$\cot\theta$	अव्याख्येस	$\sqrt{\frac{3}{4-3}} = \sqrt{3}$	$\sqrt{\frac{2}{4-2}} = 1$	$\sqrt{\frac{1}{4-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{\frac{0}{4-0}} = 0$
$\operatorname{cosec}\theta$	अव्याख्येस	$\sqrt{\frac{4}{1}} = 2$	$\sqrt{\frac{4}{2}} = \sqrt{2}$	$\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{\frac{4}{4}} = 1$
$\sec\theta$	$\sqrt{\frac{4}{4}} = 1$	$\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{\frac{4}{2}} = \sqrt{2}$	$\sqrt{\frac{4}{1}} = 2$	अव्याख्येस

या त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांचा उपयोग करून खालील उदाहरणे सोडवू या.

उदा. 23.1 : किंमत काढा. $\tan^2 60^0 - \sin^2 30^0$

उकल ः आपणास माहित आहे की,

$\tan 60^0 = \sqrt{3}$ आणि $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$

$$\therefore \tan^2 60^0 - \sin^2 30^0 = \left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= 3 - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{12-1}{4} = \frac{11}{4}$$

उदा. **23.2 :** किंमत काढा : $\cot^2 30^0 \sec^2 45^0 + \operatorname{cosec}^2 45^0 \cos 60^0$

उकल : आपणास माहित आहे की ,

$\cot 30^0 = \sqrt{3}, \sec 45^0 = \sqrt{2}, \operatorname{cosec} 45^0 = \sqrt{2}$ आणि $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$

$\therefore \cot^2 30^0 \sec^2 45^0 + \operatorname{cosec}^2 45^0 \cos 60^0$

$= (\sqrt{3})^2 (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 \text{ X } \frac{1}{2}$

$= 3 \text{ x } 2 + 2 \text{ x } \frac{1}{2}$

$= 6 + 1 = 7$

उदा. **23.3 :** पुढील राशीची किंमत मिळवा.

$2(\cos^2 45^0 + \tan^2 60^0) - 6(\sin^2 45^0 - \tan^2 30^0)$

उकल : $2(\cos^2 45^0 + \tan^2 60^0) - 6(\sin^2 45^0 - \tan^2 30^0)$

$= 2\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (\sqrt{3})^2\right] - 6\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]$

$= 2\left(\frac{1}{2} + 3\right) - 6\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$

$= 2\left(\frac{7}{2}\right) - 6\left(\frac{3-2}{6}\right)$

$= 7 - 6 \text{ x } \frac{1}{6} = 7 - 1 = 6$

उदा. **23.4:** पडताळून पहा. $\frac{\tan 45^0}{\operatorname{cosec} 30^0} + \frac{\sec 60^0}{\cot 45^0} - \frac{5\sin 90^0}{2\cos 0^0} = 0$

उकल : डावी बाजू : $\frac{\tan 45^0}{\operatorname{cosec} 30^0} + \frac{\sec 60^0}{\cot 45^0} - \frac{5\sin 90^0}{2\cos 0^0}$

$= \frac{1}{2} + \frac{2}{1} - \frac{5 \text{ x } 1}{2 \text{ x } 1}$

$= \frac{1}{2} + \frac{2}{1} - \frac{5}{2}$

$= \frac{1+4-5}{2} = \frac{0}{2} = 0 =$ उजवी बाजू

म्हणून $\frac{\tan 45^0}{\operatorname{cosec} 30^0} + \frac{\sec 60^0}{\cot 45^0} - \frac{5\sin 90^0}{2\cos 0^0} = 0$ हे सिध्द

उदा. **23.5 :** दाखवा की,

$$\frac{4}{3}\cot^2 30^0 + 3\sin^2 60^0 - 2\operatorname{cosec}^2 60^0 - \frac{3}{4}\tan^2 30^0 = \frac{10}{3}$$

उकल ः डावी वाजू = $\frac{4}{3}\cot^2 30^0 + 3\sin^2 60^0 - 2\operatorname{cosec}^2 60^0 - \frac{3}{4}\tan^2 30^0$

$$= \frac{4}{3}(\sqrt{3})^2 + 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$= \frac{4}{3} \text{ x } 3 + 3 \text{ x } \frac{3}{4} - 2 \text{ x } \frac{4}{3} - \frac{3}{4} \text{ x } \frac{1}{3}$$

$$= 4 + \frac{9}{4} - \frac{8}{3} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{48+27-32-3}{12}$$

$= \frac{75-35}{12} = \frac{40}{12} = \frac{10}{3} =$ उजवी वाजू

$\therefore \frac{4}{3}\cot^2 30^0 + 3\sin^2 60^0 - 2\operatorname{cosec}^2 60^0 - \frac{3}{4}\tan^2 30^0 = \frac{10}{3}$ हे सिध्द

उदा. 23.6 : पडताळून पहा. $\frac{4\cot^2 60^0 + \sec^2 30^0 - 2\sin^2 45^0}{\cos^2 30^0 + \cos^2 45^0} = \frac{4}{3}$

उकल ः डावी वाजू = $\frac{4\cot^2 60^0 + \sec^2 30^0 - 2\sin^2 45^0}{\cos^2 30^0 + \cos^2 45^0}$

$$= \frac{4\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= \frac{4 \text{ x } \frac{1}{3} + \frac{4}{3} - 2 \text{ x } \frac{1}{2}}{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{4}{3} + \frac{4}{3} - 1}{\frac{3+2}{4}} = \frac{\frac{8}{3} - 1}{5/4}$$

$= \frac{5}{3} \text{ x } \frac{4}{5} = \frac{4}{3} =$ उजवी वाजू

म्हणजेच $\frac{4\cot^2 60^0 + \sec^2 30^0 - 2\sin^2 45^0}{\cos^2 30^0 + \cos^2 45^0} = \frac{4}{3}$ हे सिध्द

उदा. 23.7 : जर $\theta = 30^0$, तर $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan\theta}$ हे पडताळून पहा.

उकल ः $\theta = 30^0$ करिता

डावी वाजू = $\tan 2\theta$

$$= \tan 2 \text{x } 30^0$$

$$= \tan 60^0 = \sqrt{3}$$

आणि उजवी बाजू = $\frac{2\tan 2\theta}{1-\tan^2\theta}$

$$= \frac{2\tan 30^0}{1-\tan^2 30^0}$$

$$= \frac{2 \times \frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$= \frac{2/\sqrt{3}}{1-1/3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2} = \sqrt{3} =$ डावी बाजू

$\therefore \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan\theta}$ हे सिध्द

उदा. **23.8 :** समजा $A = 30^0$, तर $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$ हे पडताळा.

उकल : $A = 30^0$ असताना,

डावी बाजू = $\sin 3A$

$$= \sin 3 \times 30^0$$

$$= \sin 90^0$$

$$= 1$$

आणि उजवी बाजू = $3\sin A - 4\sin^3 A$

$$= 3\sin 30^0 - 4\sin^3 30^0$$

$$= 3 \times \frac{1}{2} - 4\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= \frac{3}{2} - 4 \times \frac{1}{8}$$

$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 =$ डावी बाजू

$\therefore \sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$ हे सिध्द

टिपा

उदा. **23.9 :** पुढील सूत्र वापरून $\sin 15^0$ ची किंमत काढा.

सूत्र ः $\sin(A - B) = \sin A.\cos B - \cos A.\sin B$

उकल ः $\sin(A\text{-}B) = \sin A.\cos B - \cos A.\sin B$ ………….. (पक्ष) (i)

समजा $A = 45^0$ आणि $B = 30^0$

विधान (i) वरून आपणास

$$\sin(45^0 - 30^0) = \sin 45^0 \cos 30^0 - \cos 45^0 \sin 30^0$$

$$\therefore \sin 15^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore \sin 15^0 = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

ध्यानात ठेवा :

वरील उदाहरण हे आपण $A = 60^0$ आणि $B = 45^0$ घेऊन सुध्दा सोडविता येईल हे लक्षात घ्या.

उदा. **23.10:** जर $\sin(A+B) = 1$आणि $\cos(A\text{-}B) = 1$, $0^0 < A + < B \le 90^0$,

$A \geq B$, तर A आणि B च्या किंमती काढा.

उकल ः $\because \sin(A + B) = 1 = \sin 90^0$

$$\therefore A + B = 90^0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

तसेच $\cos(A - B) = 1 = \cos 0^0$

$$\therefore A - B = 0^0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$$

(i) आणि (ii) यांची बेरीज करू.

$\therefore A + B + A - B = 90^0 + 0^0$

$\therefore 2A = 90^0$ $\qquad \therefore A = 45^0$

$\therefore A = B = 45^0$

म्हणजेच $A = 45^0$ आणि $B = 45^0$

उदा. **23.11 :** जर $\cos(20^0 + x) = \sin 30^0$ तर $x = ?$

उकल : $\cos(20^0 + x) = \sin 30^0$ ... ... (पक्ष)

परंतु $\cos 60^0 = \sin 30^0 = \frac{1}{2}$

$\therefore \cos(20^0 + x) = \cos 60^0$

$\therefore 20^0 + x = 60^0$

$\therefore x = 60^0 - 20^0 = 40^0$

$\therefore x = 40^0$

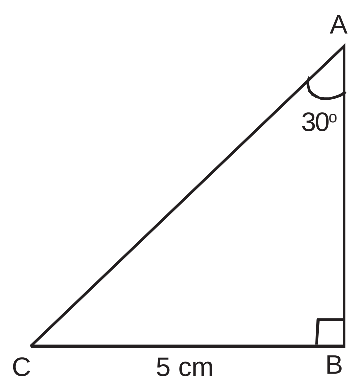
उदा.**23.12 :** ΔABC हा B बिंदूजवळ काटकोन आहे. जर BC = 5cm, $< BAC = 30^0$, तर AB आणि AC बाजूंची लांबी काढा.

उकल : मध्ये तसेच BC = 5cm

आणि .... (पक्ष)

आता t गुणोत्तराच्या व्याख्येनुसार

आकृतीवरून,



आ. 23.4

$\sin A = \frac{BC}{AC}$

$\therefore \sin 30^0 = \frac{5}{AC}$

$\therefore \frac{1}{2} = \frac{5}{AC}$ $\quad (\because \sin 30^0 = \frac{1}{2})$

$\therefore AC = 5 \times 2$ $\quad \therefore AC = 10cm$

आता पायथागोरस प्'मेयानुसार,

$AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}$

$\therefore AB = \sqrt{(10)^2 - 5^2}$ $\quad \therefore AB = \sqrt{100 - 25}$

$\therefore AB = \sqrt{75}$ $\quad \therefore AB = 5\sqrt{3}$ cm

अशारीतीने AC = 10 cm आणि AB = $5\sqrt{3}$ cm

उदा. **23.13 : ΔABC** मध्ये $< C$ हा काटकोन आहे; AC = 4cm, आणि AB = 8cm. तर $< A$ आणि $< B$ यांच्या किंमती काढा.

उकल ः ΔABC हा काटकोन त्रिकोण असून

आणि AB = 8 cm …………….(पक्ष)

t गुणोत्तराच्या व्याख्येनुसार आकृतीवरून

$\sin B = \frac{AC}{AB}$

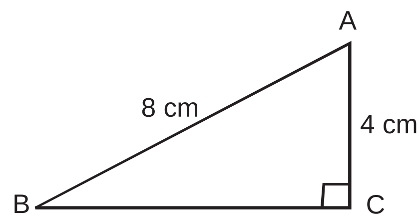
$\therefore \sin B = \frac{4}{8}$

$\therefore \sin B = \frac{1}{2}$

परंतू $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$

$\therefore \sin 30^0 = \frac{1}{2} = \sin 30^0$

$\therefore B = 30^0$



आ. 23.4

आता $< A = 90^0 - 30^0 = 60^0$ ………………… ($\because < A + < B = 90^0$ काटकोन Δ चे लघुकोन)

$\therefore < A = 90^0 - 30^0 = 60^0$

अशारीतीने $< A = 60^0$ आणि $< B = 30^0$

उदा. **23.14 :** ΔABC मध्ये $< B$ हा काटकोन आहे. जर $< A = < C$ तर खालील राशींची किंमत काढा

(i) sinA.cosC + cosAsinC

(ii) sinA. sinB + cosA.cosB

उकल : ΔABC मध्ये $< B = 90^0$ .... (पक्ष)

$\therefore < A + < C = 180^0 - 90^0$

$(\because < A + < B + < C = 180^0)$

$\therefore < A + < C = 90^0$

टसेच $< A = < C$ .... (पक्ष)

$\therefore < A = < C = 45^0$

(i) sinAcosC + cosA. sinC

$$= \sin 45^0 . \cos 45^0 + \cos 45^0 . \sin 45^0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

(ii) sinA.sinB + cosA.cosB

$$= \sin 45^0 . \sin 90^0 + \cos 45^0 . \cos 90^0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \times 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

उदा. **23.15 :** जर $\tan 2x - \sqrt{3} = 0$ तर x ची किंमत काढा.

उकल : $\tan 2x - \sqrt{3} = 0$ .... (पक्ष)

$\therefore \tan 2x = \sqrt{3} = \tan 60^0$ $(\because \tan 60^0 = \sqrt{3})$

$\therefore 2x = 60^0$ $(\therefore x = 30^0)$

म्हणजेच x ची किंमत 30^0 आहे.

टिपा

23.1 तुमच्या प्रगतीचा आढावा घ्या.

1. खालील प्रत्येकाच्या किंमती काढा.

(i) $\sin^2 60^0 + \cos^2 45^0$

(ii) $2\sin^2 30^0 - 2\cos^2 45^0 + \tan^2 60^0$

(iii) $4\sin^2 60^0 + 3\tan^2 30^0 - 8\sin^2 45^0 \cos 45^0$

(iv) $4(\sin^2 30^0 + \cos^4 60^0) - 3(\cos^2 45^0 - 2\sin^2 45^0)$

(v) $\dfrac{\tan 45^0}{\operatorname{cosec} 30^0} + \dfrac{\sec 60^0}{\cot 45^0} - \dfrac{5\sin 90^0}{2\cos 0^0}$

(vi) $\dfrac{5\cos^2 60^0 + 4\sec^2 30^0 - \tan^2 45^0}{\sin^2 30^0 + \cos^2 30^0}$

2. खालील प्रत्येक उदाहरण पडताळून पहा.

$\operatorname{cosec}^3 30^0 \times \cos 60^0 \times \tan^3 45^0 \times \sin^2 90^0 \times \sec^2 45^0 \times \cot 30^0 = 8\sqrt{3}$

(ii) $\tan^2 30^0 + \dfrac{1}{2}\sin^2 45^0 + \dfrac{1}{3}\cos^2 30^0 + \cot^2 60^0 = \dfrac{7}{6}$

(iii) $\cos^2 60^0 - \sin^2 60^0 = -\cos 60^0$

(iv) $4(\sin^4 30^0 + \cos^4 60^0) - 3(\cos^2 45^0 - \sin^2 90^0) = 2$

(v) $\dfrac{\tan 60^0 - \tan 30^0}{1 + \tan 60^0 . \tan 30^0} = \tan 30^0$

3. जर $< A = 30^0$ तर पुढील प्रत्येक उदाहरण पडताळून पहा.

(i) $\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1 + \tan^2 A}$

(ii) $\cos 2A = \dfrac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$

(iii) $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

4. जर $A = 60^0$ आणि $B = 30^0$ तर पुढील प्'त्येक उदाहरण पडताळून पहा.

(i) $\sin(A + B) = \sin A . \cos B + \cos A . \sin B$

(ii) $\tan(A - B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A . \tan B}$

5. $2A = 60^0$ घेऊन, $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$ याचा उपयोग करून $\sin 30^0$ आणि $\cos 30^0$ यांची किंमत मिळवा.

6. $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ या सूत्राचा उपयोग करून $\cos 75^0$ ची किंमत काढा.

7. जर $\sin(A-B) = \frac{1}{2}$, $\cos(A+B) = \frac{1}{2}$, $0^0 < A+B < 90^0$, आणि $A > B$ तर A व B मिळवा.

8. जर $\sin(A+2B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ आणि $\cos(A+4B) = 0$, तर A आणि B च्या किंमती काढा.

9. ΔPQR हा Q बिंदूजवळ काटकोन आहे, PQ = 5 cm, आणि $\angle R = 30^0$ तर QR आणि PR यांच्या किंमती काढा.

10. ΔABC मध्ये $\angle B = 90^0$, जर $AB = 6cm$, आणि AC = 12cm तर $\angle A$ आणि $\angle C$ यांच्या किंमती काढा.

11. ΔABC मध्ये, $\angle B = 90^0$, जर $\angle A = 30^0$,

    तर sinA.cosB + cosA.sinB ची किंमत काढा.

12. जर $\cos(40^0 + 2x) = \sin 30^0$ तर x ची किंमत काढा.

पुढील उदा. 13 ते 15 यांस प्'त्येकी चार पर्याय दिले आहेत त्यापैकी योग्य पर्याय निवडा.

13. ची किंमत = ?

    (A) 2 (B) (C) (D)

14. जर sin2A = 2sinA, तर A = ?

    (A) 30^0 (B) 0^0 (C) 60^0 (D) 90^0

15. $\frac{2\tan 60^0}{1+\tan^2 60} = ?$

    (A) $\sin 60^0$ (B) $\sin 30^0$ (C) $\cos 60^0$ (D) $\tan 60^0$

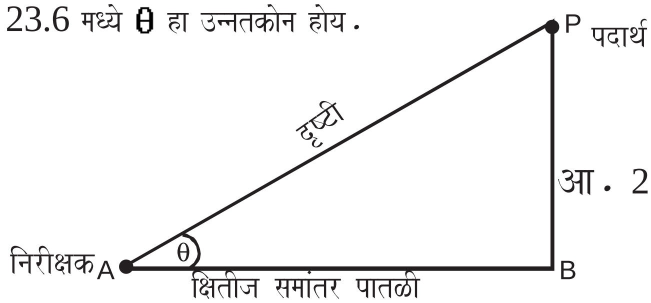
23.5 : त्रिकोणमितीचे उपयोजन :

आतापर्यंत आपण कोनाची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे शिकलो आहोत. याशिवाय 30^0, 45^0 आणि 60^0 या कोनांची त्रिकोणमितीय गुणोंत्तरे व त्यांच्या किंमती काढल्यास शिकलो आहोत. त्याचप्रमाणे 0^0 आणि 90^0 या कोनांची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे सुध्दा मिळविली. या भागात, दोन पदार्थांमधील (अशक्य वाटणारी) अंतरे किंवा उंची काढण्यासाठी त्रिकोणमितीय गुणोंत्तरे

कशी वापरता येतील हे अभ्यासणार आहोत. त्यासाठी दैनंदिन जीवनातील उदाहरणांचा वापर करणार आहोत. अंतर व उंचीसाठी आवश्यक असणा-या काही संज्ञांची आपण व्याख्या स्वरूपात ओळख करून घेऊ.

23.5.1 : उन्नत कोन (Angle of Elevation) :

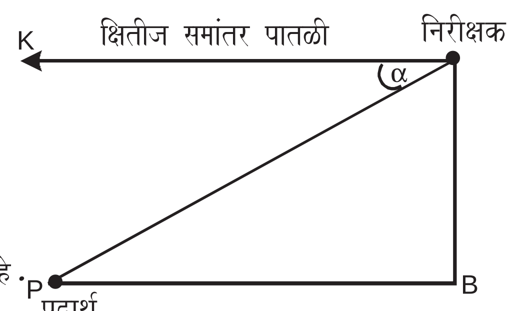
जेव्हा एखादा निरीक्षक त्याच्या उंचीपेक्षा अधिक उंचीवरील पदार्थांकडे पहात असतो, तेव्हा त्याला त्याची दृष्टि वरचे बाजूस वळवावी लागते. अशावेळी क्षितीज समांतर पातळीपासून वरील बाजूस वळविलेल्या दृष्टिने त्या पदार्थापाशी जो कोन तयार केलेला असतो. त्यास 'उन्नत कोन' (Angle of Elevation) असे म्हणतात. आ. 23.6 मध्ये θ हा उन्नतकोन होय.



आ. 23.6

23.5.2 : अवनत कोन : (Angle of Depression)

जर एखादा उंचीवर असलेला निरीक्षक पदार्थांकडे पहात असेल, तर त्याला त्याची दृष्टि क्षितीज समांतर पातळीच्या खालील अंगास वळवावी लागते. अशावेळी क्षितीज समांतर पातळीशी होणा-या कोनाला 'अवनत कोन' (Angle of Depression) असे म्हणतात. आ. 23.7 मध्ये α हा अवनतकोन आहे.



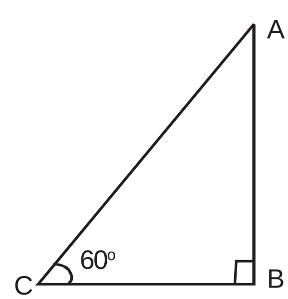
आ. 23.7

उदा. 23.16 : एका घराच्या खिडकीला लावलेली एक शिडी, जमिनीशी 60^0 चा कोन करते. जर शिडीची लांबी 6m असेल. तर शिडीच्या पायाचे भिंतीपासूनचे अंतर काढा.

उकल : समजा, AC शिडीची लांबी असून ती AB या भिंतीशी उभी (तिरपी) केली आहे. BC या क्षितीज समांतर पातळीशी तिने 60^0 चा कोन केला आहे.

येथे AC = 6 मीटर .... (पक्ष)

$$\frac{BC}{AC} = \cos 60^0$$



आ. 23.8

$\therefore \frac{BC}{6} = \frac{1}{2}$ $\qquad (\because \cos 60^0 = \frac{1}{2})$

$\therefore BC = \frac{1}{2} X 6$ $\qquad \therefore BC = 3$ मीटर

शिडीचा पाया भिंतीपासून 3 मी दूर आहे.

उदा. 23.17 : एका उभ्या असलेल्या खांबाची सावली, त्याच्या उंचीच्या $\frac{1}{\sqrt{3}}$ एवढी आहे. तर खांबाचा सूर्याशी होणारा उन्नतकोन 60^0 मापाचा होतो हे दाखवा.

उकल ः समजा AB हा उभा केलेला खांब आहे.

त्याची उंची h एकक मानू.

आणि BC ही त्या खांबाची सावली मानू.

तेव्हा, BC = h $\mathbf{X} \frac{1}{\sqrt{3}}$ एकक होईल.

सूर्याचा उन्नतकोन θ मानू

आकृती आणि t गुणोत्तराच्या व्याख्येनुसार,

$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$

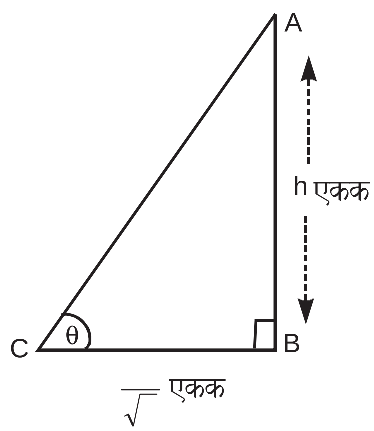
$\therefore \tan\theta = \frac{h}{1/\sqrt{3}}$ $\qquad \therefore \tan\theta = \sqrt{3}$ एकक

परंतु $\tan 60 = \sqrt{3}$

$\therefore \tan\theta = \tan 60$

$\therefore \theta = 60^0$

म्हणजेच सूर्याशी होणारा उन्नतकोन 60^0 आहे.



आ. 23.9

उदा. 23.18 : एक मनोरा जमिनीवर (लंबरूपात) उभा आहे. मनो–याच्या पायापासून 30m अंतरावरील एका बिंदूचा, मनो–याच्या टोकाशी असलेला उन्नतकोन 30^0 चा आहे. तर मनो–याची उंची काढा. ($\sqrt{3} = 1.73$ घ्या)

उकल ः आकृती 23.10 मध्ये दाखविल्याप‘माणे AB हा मनोरा असून त्याची उंची 4 मीटर आहे असे मानू.

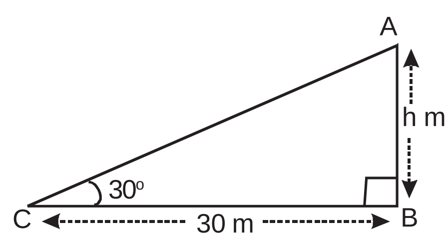
BC = 30 मीटर .... (पक्ष)

येथे उन्नतकोन = 30^0 .... (पक्ष)

$\therefore \tan 30 = \frac{AB}{BC}$

$\therefore 1/\sqrt{3} = \frac{h}{30}$

$\therefore \frac{30}{\sqrt{3}} = h$



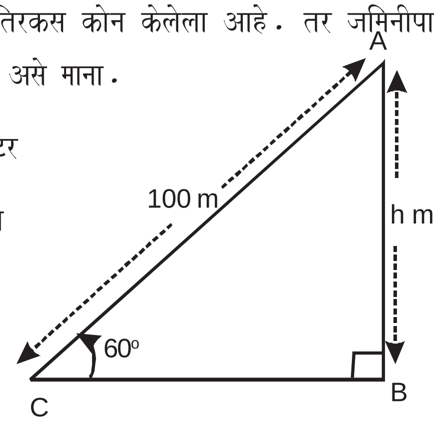
आ. 23.10

$\therefore h = \frac{30 \times \sqrt{3}}{3}$

$\therefore h = 10\sqrt{3}$ मीटर $\therefore h = 10 \times 1.73 = 17.3m$

म्हणजेच मनो-याची उंची = 17.3 मीटर आहे.

उदा. **23.19 :** 100 मीटर लांबीच्या एका केबलने (दोरखंडाने) एक हवामानाचा अंदाज घेणारा फुगा, वेधशाळेवर बांधला आहे. त्याने क्षितिजाशी 60^0 चा तिरकस कोन केलेला आहे. तर जमिनीपासुन फुग्याची उंची काढा. फुग्यास बांधलेला दोरा सरळच आहे असे माना.



उकल : समजा 'A' बिंदूपाशी फुगा असून, तो 100 मीटर लांबीच्या AC या दो-याला बांधला आहे. त्याने BC या जमिनीशी 60^0 कोन केला आहे. AB = h मीटर मानू.

आता काटकोन ΔABC मध्ये

$\sin 60 = \frac{AB}{AC}$,

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{100}$

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} \times 100 = h$ $\therefore h = 50\sqrt{3}$

$\therefore h = 50 \times 1.732$ $\therefore h = 86.600$

$\therefore h = 86.6$ मीटर

म्हणजेच, तो फुगा जमिनीपासून 86.6 मीटर उंचीवर आहे.

उदा. **23.20 :** एका झाडाचा वरील भाग (शेंड्याकडील भाग) जोराच्या वा-यामुळे तुटला आहे. झाडाच्या शेंड्याने क्षितीज समांतर पातळीशी 30^0 चा कोन केला आहे. झाडाचा शेंडा जमिनीवर ज्या बिंदूजवळ टेकला आहे, त्या बिंदूचे झाडाच्या बुंध्यापासूनचे अंतर 10 मीटर आहे. झाडाची उंची काढा.

उकल : AB ही झाडाची उंची मानू. (अखंड झाड)

वा-यामुळे C बिंदूजवळ झाड मोडले, यामुळे शेंडा

जमिनीवर D बिंदूजवळ टेकला. B हा झाडाचा बुंधा $\angle BDC = 30^0$

$\therefore BD = 10$ मीटर

आता आकृती आणि t गुणोत्तराच्या व्याख्येनुसार

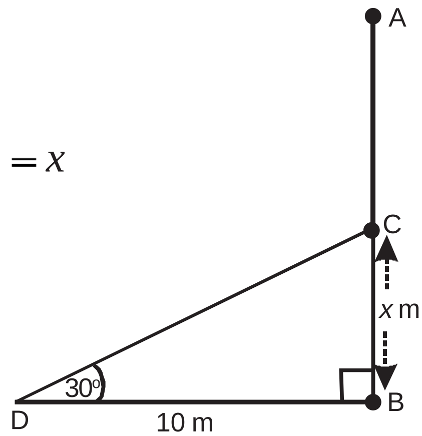
$\tan 30 = \frac{BC}{BD}$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{10}$ $\qquad \therefore \frac{10}{\sqrt{3}} = x$

म्हणजेच $x = \frac{10}{\sqrt{3}}$ मीटर .... (i)

तसेच $\sin 30 = \frac{BC}{DC}$

$\therefore \frac{1}{2} = \frac{x}{DC}$ $\quad \therefore DC = 2x$ मीटर



आ. 23.12

आता झाडाची एकूण उंची = BC + DC

= $x + 2x = 3x$ मीटर

$\therefore$ झाडाची उंची = $3 \text{ x } \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{10}{\sqrt{3}} + \frac{20}{\sqrt{3}}\right)$ .... } $x = \frac{10}{\sqrt{3}}$ (i) नुसार]

झाडाची उंची = $3 \text{ x } \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{10}{\sqrt{3}} + \frac{20}{\sqrt{3}}\right)$ .... } $x = \frac{10}{\sqrt{3}}$ (i) नुसार]

$\therefore$ झाडाची उंची = $\frac{3}{1} \text{ x} \frac{10}{\sqrt{3}} \text{ x } \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

झाडाची उंची = $10\sqrt{3}$ मीटर ($\sqrt{3} = 1.732$)

झाडाची उंची = $10 \text{ x } 1.732 = 17.32$ मीटर

म्हणून झाडाची उंची = 17.32 मीटर

उदा. 23.21 : एका उंच मनो-याची सावली, सूर्याचा उन्नतकोन 45^0 असताना जेवढी पडते त्यापेक्षा 10 मीटर कमी लांबीची सावली सूर्याचा उन्नतकोा 60^0 असताना पडते. तर मनो-याची उंची काढा.

उकल ः समजा AB हा मनोरा असून त्याची उंची h मीटर मानू.

जमिनीवरील C आणि D हे दोन बिंदू अनुक्रमे 45^0 आणि 60^0

उन्नत कोन दर्शवितात.

BD = x मीटर मानू.

CD = 10 मीटर .... (पक्ष)

BC = CD + DB ....($\because$ C-D-B)

$\therefore$ BC = $(10 + x)$ मीटर होईल.

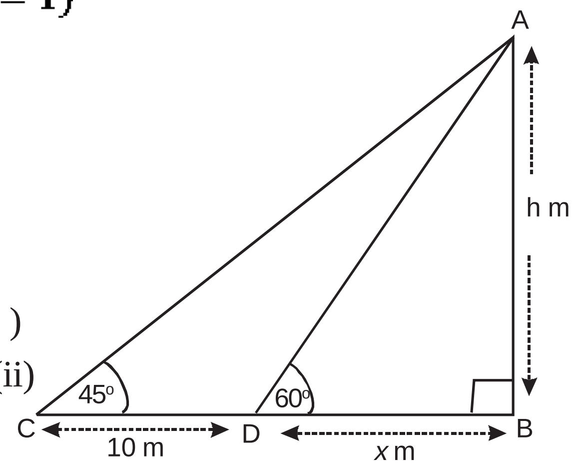
टिपा

प्रथम काटकोन Δ ABC मध्ये

$$\frac{AB}{BC} = \tan 45^0$$

$$\therefore \frac{h}{x+10} = 1 \qquad (\because \tan 45^0 = 1)$$

$\therefore h = (x + 10)$ मीटर ...... (i)



आता काटकोन ΔABD मध्ये,

$$\frac{AB}{BD} = \tan 60^0$$

$$\therefore \frac{h}{x} = \sqrt{3} \qquad (\tan 60^0 = \sqrt{3})$$

$\therefore h = \sqrt{3}\, x$ मीटर .... (ii)

निष्कर्ष (i) व (ii) वरून

$h = x + 10 = \sqrt{3}\, x \;\; \therefore h - 10 = x$...........आ. 23.13 (iii)

$$h = \sqrt{3}\,(h - 10)$$

$$\therefore h = \sqrt{3} \times h - \sqrt{3} \times 10$$

$$\therefore h = \sqrt{3} \times 10 - \sqrt{3}\, h - h$$

$$\therefore h = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$$

$$\therefore h = \frac{10\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$ (छेदाचे परिमेयीकरण करू)

$$\therefore h = \frac{10 \times 3 + 10\sqrt{3}}{3-1}$$

$$\therefore h = \frac{10\,(3+\sqrt{3})}{2} = \frac{5\,(3+\sqrt{3})}{1}$$

$$\therefore h = 15 + 5 \times \sqrt{3} = 15 + 5 \times 1.732$$

$$\therefore h = 15 + 5 \times \sqrt{3} = 15 + 5 \times 1.732$$

$\therefore h = 15 + 8.66 = 23.66$ मीटर

म्हणजेच मनो–याची उंची = 23.66 मीटर

उदा. 23.22 : एक विमान 3000 मीटर उंचीवरून जात असताना त्याचवेळी दुसरे एक विमान त्याच्या लंबरेषेत असताना पुढे जाते. जमिनीवरील एका निरीक्षकास त्या दोन विमानांचे उन्नतकोन अनुक्रमे 60^0 आणि 45^0 आढळून आले तर दोन विमानातील उभे अंतर किती ?

उकल : समजा O या ठिकाणी निरीक्षक आहे. P आणि Q या बिंदूपाशी ठिकाणी विमाने आहेत.

AP = 3000 मीटर, $< AOQ = 45^0$ आणि

$< AOP = 60^0$

प्रथम काटकोन Δ QAO मध्ये,

$\frac{AQ}{AO} = \tan 45^0$

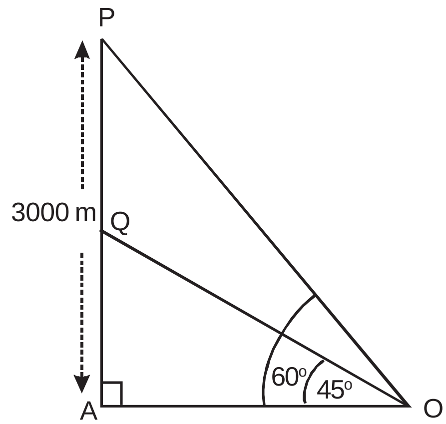
$\therefore \frac{AQ}{AO} = 1$

$\therefore AQ = AO \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

तसेच काटकोन Δ PAO मध्ये

$\frac{PA}{AO} = \tan 60^0$

$\frac{3000}{AO} = \sqrt{3}$



आ. 23.14

$\therefore AO = \frac{3000}{\sqrt{3}} \ldots\ldots\ldots (ii)$

निष्कर्ष (i) व (ii) वरून

$AQ = \frac{3000}{\sqrt{3}}$ $\therefore AQ = \frac{3000 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$

$\therefore AQ = \frac{3000\sqrt{3}}{3}$ $\therefore AQ = 1000\sqrt{3}$

$\therefore AQ = 1000 \times 1.732$ = 1732 मीटर

आता PQ = PA – QA ……………. (5"P – Q = A)

$\therefore PQ = 3000 - 1732 = 1268$ मीटर

$\therefore$ दोन विमानातील उभे अंतर = 1268 मीटर

उदा. 23.13 : एका उंच मनो-याच्या पायापासून इमारतीच्या गच्चीकडे पाहताना 30^0 मापाचा उन्नतकोन होतो. तर त्याच इमारतीच्या पायापासून मनो-याच्या वरच्या टोकाकडे पाहताना 60^0 मापाचा उन्नतकोन आढळतो. जर मनो-याची उंची 50 मीटर असेल तर इमारतीची उंची काढा.

उकल ः समजा PQ हा मनोरा आणि AB ही इमारत मानू.

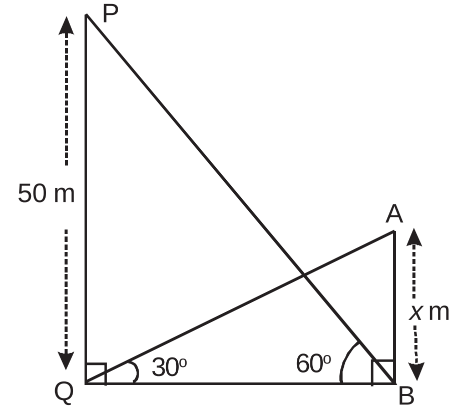
दोन्ही जमिनीशी लंब आहेत.

$\therefore < PQB = < ABQ = 90^0$

PQ = 50 मीटर ………………. (पक्ष)

$< AQB = 30^0, < PBQ = 60^0$

हे कोन उन्नतकोन ....(पक्ष)



आ. 23.15

प्रथम काटकोन ΔABQ मध्ये

$\frac{AB}{BQ} = \tan 30^0$ $\because AB = x$ मीटर मानू)

$\therefore \frac{x}{BQ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore BQ = x\sqrt{3}$ .... (i)

आता काटकोन ΔPQB मध्ये,

$\frac{PQ}{BQ} = \tan 60^0$

$\therefore \frac{50}{BQ} = \sqrt{3}$

$\therefore \frac{50}{\sqrt{3}} = BQ$ ....(ii)

निष्कर्ष (i) व (ii) वरून

$\therefore x\sqrt{3} = \frac{50}{\sqrt{3}}$

$\therefore x = \frac{50}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\therefore x = \frac{50}{3}$ मीटर

$\therefore$ इमारतीची उंची $(x) = \frac{50}{3} = 16.67$ मीटर

उदा. 23.24 : एक मनुष्य नदीच्या एका किना–यावर उभा आहे. त्याने त्याच नदीच्या दुस–या किना–यावरील समोरील झाडाच्या शेंडयाकडे पाहताना 60^0 मापाचा उन्नतकोन होतो. तो मनुष्य त्याच रेषेत नदीपासून 40 मीटर दूर जातो, तेव्हा त्यास त्याच झाडाच्या शेंडयाकडे पाहताना 30^0 चा उन्नतकोन आढळला. तर झाडाची उंची आणि नदीच्या पात्राची रूंदी काढा.

उकल : समजा AB हे झाड असून त्याची उंची h मीटर आहे असे मानू.

नदीच्या पात्राची रूंदी = BC = x मीटर

C आणि D या दोन विंदूपासून A शेंडयाकडे

पहताना उन्नतकोन अनुक्रमे 60^0 आणि 30^0 आहेत.

प्रथम काटकोन ΔABC मध्ये

$\frac{AB}{BC} = \tan 60^0$ $\therefore \frac{h}{x} = \sqrt{3}$

$\therefore \mathbf{h} = x\sqrt{3}$ मीटर .... (i)

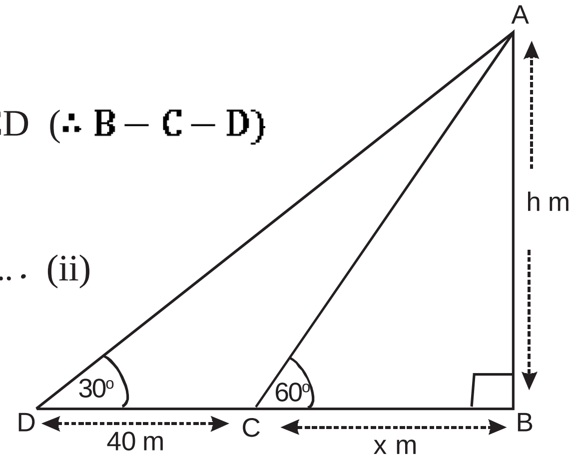
तसेच काटकोन Δ ABD मध्ये

$\frac{AB}{BD} = \tan 30^0$

$\therefore \frac{h}{x+40} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ BD = BC + CD ($\therefore$ B – C – D)

$\therefore$ BD = $(x + 40)$ मीटर

$\therefore \mathbf{h} = \frac{x+40}{\sqrt{3}}$ .... (ii)



आ. 23.16

निष्कर्ष (i) व (ii) वरून

$x\sqrt{3} = \frac{x+40}{\sqrt{3}}$

$\therefore x\sqrt{3} \times \sqrt{3} = x + 40$

$\therefore 3x = x + 40 \;\; \therefore 3x - x = 40$

$\therefore 2x = 40 \quad \therefore x = 20$ मीटर

म्हणजेच नदीच्या पात्राची रूंदी = 20 मीटर

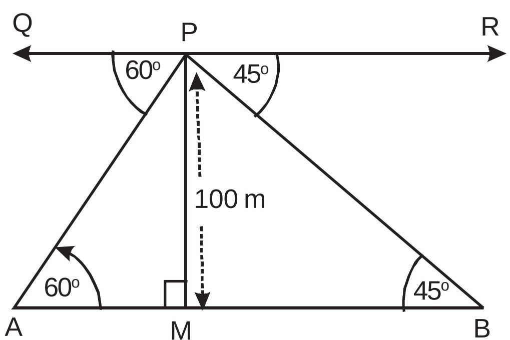
आणि झाडाची उंची (h) (i) वरून मिळवू.

$\therefore \mathbf{h} = x\sqrt{3}$

$\therefore \mathbf{h} = 20\sqrt{3}$ मीटर $\therefore \mathbf{h} = 20 \times 1.732$

$\therefore$ झाडाची ऊंची (h) = 34.64 मीटर असेल.

उदा. 23.25 : स्वातीने एका 100 मीटर उंचीच्या मनो-यावरून मनो-याच्या विरूध्द बाजूस दोन मोटारगाडय पाहिल्या. त्यांच्या अवनतकोन अनुक्रमे 45^0 आणि 60^0 झाला. तर त्या दोन मोटारगाडयातील अंतर काढा.



आ. 23.17

उकल ः समजा PM हा मनोरा. M हा मनो-याचा पाया, P हे शिखर होईल.

$\therefore$ PM = 10 मीटर .... (पक्ष)

QR ही P बिंदूजवळील क्षितीज समांतर पातळी

$< QPA = 60^0 = < PAB$ आणि

$< RPB = 45^0 = < PBA$

काटकोन ΔPMB मध्ये

$\frac{PM}{MB} = \tan 45^0$

$\therefore \frac{100}{MB} = 1$ $\quad (\because \tan 45^0 = 1)$

$\therefore MB = 100$ मीटर .... (i)

तसेच काटकोन ΔPMA मध्ये

$\frac{PM}{MA} = \tan 60^0$

$\therefore \frac{100}{MA} = \sqrt{3}$

$\therefore MA = \frac{100}{\sqrt{3}}$ $\quad \therefore MA = \frac{100}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$\therefore MA = \frac{100\sqrt{3}}{3}$

$\therefore MA = \frac{100 \times 1.732}{3}$

$\therefore MA = \frac{173.2}{3} = 57.74$ मीटर

$\therefore$ दोन मोटारगाडयामधील अंतर = MA + MB .... ($\therefore$ A – M –B)

$\therefore$ दोन गाडयामधील अंतर = 57.74 + 100 = 157.74 मीटर

दोन मोटार गाडयांमधील अंतर = 157.74 मीटर

उदा. **23.26 :** 100 मीटर रूंदीच्या रस्त्याच्या एकेका बाजूस एक असे दोन समान उंचीचे खांब उभारले आहेत. रस्त्यामधील दोन खांबामधील एका बिंदूने त्या खावांच्या टोकाशी केलेले उन्नतकोन अनुक्रमे 60^0 व 30^0 आहेत. तर खांबाची उंची व त्या बिंदूचे स्थान काढा.

उकल ः समजा AB आणि CD हे दोन खांब रस्त्याच्यादोन्ही बाजूस समोरासमोर आहेत.

BD ही रस्त्याची रूंदीहोईल.

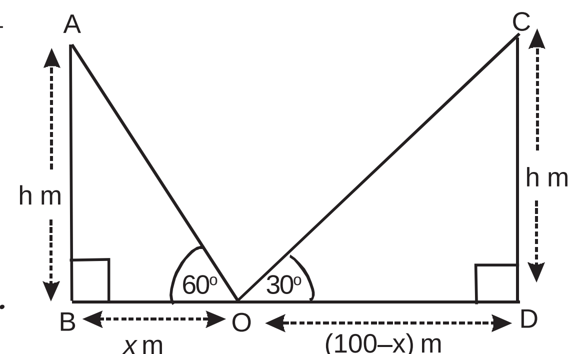
AB = CD = h मीटर मानू.

BD = 100 मीटर, O

हा रस्त्यावरील बिंदू असून B – O –D आहे.

$< AOB = 60^0$ आणि

$< COD = 30^0$ होतील असे मानू.



आ. 23.18

BO = x मीटर मानल्यास OD = (100 – x) मीटर होईल.

प्रथम काटकोन ΔABO मध्ये,

$\frac{AB}{BO} = \tan 60^0$ $\quad \therefore \frac{h}{x} = \sqrt{3}$

$\therefore h = \sqrt{3}\,x$ मीटर .... (1)

तसेच काटकोन ΔCDO मध्ये

$$\frac{CD}{OD} = \tan 30^0$$

$$\therefore \frac{h}{100-x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\therefore h = \frac{100-x}{\sqrt{3}}$ मीटर .... (ii)

निष्कर्ष (i) व (ii) वरून

$\sqrt{3} \, x \, x = \frac{100-x}{\sqrt{3}}$ मिळते.

$$\therefore \sqrt{3} \, x \sqrt{3} \, x = 100 - x$$

$\therefore 3x + x = 100$ $\quad\quad\quad \therefore 4x = 100$ मीटर

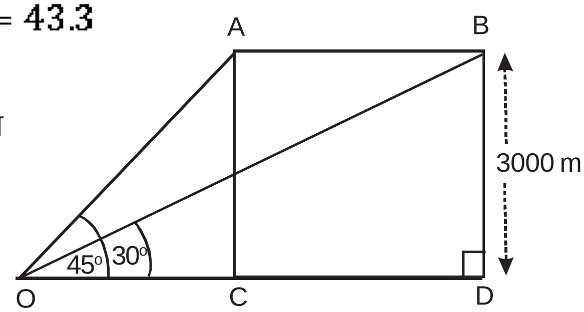
$\therefore x = 25$ मीटर

$\therefore$ रस्त्यावरील O हा बिंदू एका खांबापासून 25 मीटर आणि त्या समोरील खांबापासून 100 -25 = 75मीटर अंतरावर आहे.

आता प्रत्येक खांबाची उंची (h) = $\sqrt{3}\, X\, x$ .... निष्कर्ष (i) वरून

$\therefore h = \sqrt{3} \, x \, 25 = 1.732 \, x \, 25 = 43.3$ मीटर असेल.

उदा.23.27 : एका निरीक्षकाने जमिनीवरून विमानाकडे पाहिले असता 45^0 मापाचा उन्नतकोन होतो. 15 सेकंदाने त्याच ठिकाणापासून पुन्हा विमानाकडे पाहिले असता. 30^0 मापाचा उन्नतकोन झाला.



आ. 23.19

जर ते विमान 3000 मीटर उंचीवरून एकसमान गतीने जात असेल तर त्या विमानाचा वेग काढा.

उकल : समजा आकृती 23.19 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे,

आ. 23.19

A आणि B या दोन स्थिती एकाच विमानाच्या आहेत असे मानू.

AC = BD = 3000m

काटकोन ΔACO मध्ये

$$\frac{AC}{OC} = \tan 45^0$$

$\therefore \frac{3000}{OC} = 1$ $\quad\quad\quad \therefore OC = 3000$ मीटर ...... (i)

तसेच काटकोन ΔBDO मध्ये

$\frac{BD}{OD} = \tan 30^0$ $\therefore \frac{3000}{OD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore OD = 3000\sqrt{3}$ मीटर

$\therefore OC + CD = 3000\sqrt{3}$ $(\because OD = OC + CD.$ आणि $O - C - D)$

$\therefore 3000 + CD = 3000\sqrt{3}$ ....(i) वरून

$\therefore CD = 3000\sqrt{3} - 3000$

$\therefore CD = 3000(\sqrt{3} - 1)$

$\therefore CD = 3000(1.732 - 1)$

$\therefore CD = 3000 \times 0.732$

$\therefore CD = 2196$ मीटर

$\therefore$ विमानाने 15 सेकंदात चाललेले अंतर = AB = CD = 2196 मीटर

आता वेग = $\frac{\text{अंतर}}{\text{वेळ}}$ या सूत्रावरून,

विमानाचा ताशी वेग = $\frac{2196}{15} \times \frac{60 \times 60}{1000}$ km/hr

विमानाचा वेग = 527.04 km/hr.

उदा. **23.28 :** एका मनो-याच्या वरच्या टोकाकडे पहाताना, जमिनीवरील P आणि Q विंदूपासून मनो-याच्या पायथ्यापासून (मनो-याचा पायथा व P,Q हे एकरेषीय आहेत) अनुक्रमे *a*,b अंतरावर आहेत, तर होणारे उन्नतकोन परस्परांचे कोटिकोन आहेत. तर सिध्द करा की, मनो-याची उंची $\sqrt{ab}$ आहे.

उकल ः समजा AB हा मनोरा असून A हे त्याचे वरचे टोक आहे.

PB = *a* आणि QB = b .... (पक्ष)

आता $APB = \alpha^0$

$< AQB = (90 - \alpha)^0$

$\therefore \frac{h}{b} = \cot \alpha$

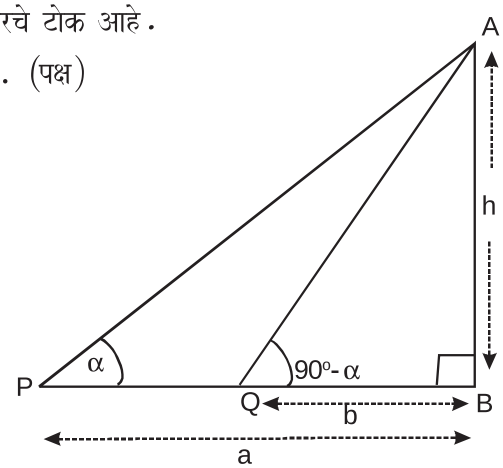
$\therefore h = b \cot \alpha$ ....(i)

तसेच काटकोन ΔAPB मध्ये

$\frac{AB}{PB} = \tan \alpha$

$\therefore \frac{h}{a} = \tan \alpha$

$\therefore h = a \tan \alpha$ ....(ii)



आ. 23.20

Q

निष्कर्ष (i) व (ii) यांचा गुणाकार करून,

$h \times h = ab \tan \alpha . \cot \alpha$

$\therefore h^2 = ab \times 1$ $\therefore h^2 = ab$

$\therefore h = \sqrt{ab}$

$\therefore$ मनो-याची उंची = $\sqrt{ab}$ एकक होईल.

23.2 : तुमच्या प्रगतीचा आढावा घ्या.

1. एका भितींपाशी उभ्या केलेल्या शिडीने जमिनीशी 60^0 चा कोन केला आहे. शिडीचे जमिनीवरील टोक भिंतीपासून 3 मी. अंतरावर आहे. तर शिडीची लांबी काढा.

2.एक निरीक्षक मनो-याच्या पायथ्यापासून 50 मी. दूर अंतरावर उभा आहे. निरीक्षकाने मनो-याच्या टोकाशी केलेला उन्नतकोन 60^0 आहे. तर मनो-याची उंची काढा.

3.मनो-याच्या पायापासून 150 मी. अंतरावरील एका बिंदूने मनो-याच्या टोकाशी केलेला उन्नतकोन 30^0 आहे. तर मनो-याची उंची काढा.

4.एका पतंगाची दोरी 100 मी. लांबीची आहे. त्याने क्षितीज समांतर पातळीशी केलेला कोन 60^0 आहे. पतंगाची दोरी कोठेही वेडीवाकडी झालेली नाही असे गृहीत धरून पतंगाची उंची काढा.

5.एक पतंग जमिनीपासून 100 मी. उंचीवर उडत आहे. पतंगाच्या दोरीने जमिनीवरील बिंदूशी 60^0 चा कोन केला आहे. तर दोरीची लांबी काढा. (दोरी कोठेही वेडीवाकडी झालेली नाही हे गृहित धरा.)

6.एक मनोरा $100\sqrt{3}$ मी. उंचीचा आहे. मनो-यच्या पायथ्यापासून क्षितीज समांतर पातळीवर 100 मी अंतरावरून वरच्या टोकाकडे पाहताना होणारा उन्नतकोन किती?

7.एका झाडाची उंची 12 मी असून ते वा-याने अशरीतीने मोडले की, झाडाचा शेंडा जमिनीवर टेकला तेथे जमिनीशी 60^0 चा कोन झाला. तर ते झाड वा-यामुळे जमिनीपासून किती उंचीवर मोडले ते काढा.

8.एक झाड वादळी वा-यामुळे वरच्या बाजुने मोडून पडले तेव्हा झाडाचा शेंडा झाडाच्या बुंध्यापासून 10 मी. अंतरावर जमिनीवर टेकला.तसेच त्याने जमिनीशी केलेला कोन 45^0 चा झाला तर झाडाची उंची किती ते काढा.

9.जमिनीवरील एका ठिकाणापासून मनो-याच्या वरच्या टोकाकडे पहात असताना 45^0 उन्नतकोन झाला. तेथून मनो-याच्या पायथ्याच्या दिशेने 40 मी. अंतर गेल्यावर पुन्हा त्याचा मनो-याच्य वरच्या टोकाकडे पाहताना 60^0 चा उन्नतकोन झाला. तर त्या मनो-याची उंची किती ते काढा.

10. एका 800 मी. उंचीच्या कडयाच्या एकेका बाजूस दोन माणसे उभी आहेत. त्यांनी कडयाच्या टोकाशी केलेला उन्नतकोन अनुक्रमे 30^0 आणि 60^0 आहे तर त्या दोन माणसामधील अंतर किती ते काढा.

11.एका 60 मी. उंची असणा-या इमारतीच्या टोकावरून एका मनो-याच्या शिखराकडे पायाकडे पाहिले असता, होणारे अवनतकोन अनुक्रमे 45^0 व 60^0 आहेत. तर मनो-याची उंची व त्याचे इमारतीपासूनचे अंतर काढा.

12.एका खोलीच्या खिडकीशी एक 4 मी. लांबीची शिडी तिरपी उभी केली असता, तिचा जमिनीशी झालेला कोन 30^0 चा आहे. शिडीचे जमिनीवरील टोक तेथेच आहे. शिडीच्या विरूध्द बाजूस असलेल्या खोलीच्या खिडकीशी ती तिरपी उभी केली असता तिचा जमिनीशी 60^0 चा कोन होतो. तर त्या दोन खोल्यांमधील अंतर किती ?

13.एका दोन मजली इमारतीच्या पायापासून 15 मी. अंतरावरील जमिनीवरील बिंदूपासुन पहिल्या मनल्याच्या वरच्या टोकाकडे पाहिले असता 30^0 चा उन्नतकोन होतो आणि दुस-या मजल्याच्या वरच्या टोकाकडे पाहताना 45^0 चा उन्नतकोन होतो. तर दुस-या मजल्याची उंची काढा.

14.एक विमान जमिनीपासुन 1 कि.मी. उंचीवर क्षितिज समांतर पातळीत उडत आहे. जमिनीवरून एका विंदूपासुन त्या विमानाकडे पाहताना 60^0 चा उन्नतकोन झाला. 10 सेकंदाने त्याच ठिकाणापासून पुन्हा त्या विमानाकडे पाहिले असता 30^0 चा उन्नतकोन होतो. तर त्या विमानाचा वेग किती ?

15.एका मनो-याच्या पायथ्यापासून एका इमारतीच्या वरच्या बाजूस पाहिले असता 30^0 चा उन्नतकोन होते तसेच इमारतीच्या पायापासून मनो-याच्या टोकाकडे पाहताना 60^0 चा उन्नतकोन होतो. जर मनो-याची उंची 50 मी असेल, तर इमारतीची उंची किती ?

सारांश ः 0^0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0 कोनाकरीता t गुणोत्तरे तक्ता

कोन / गुणोत्तर	0^0	30^0	45^0	60	90^0
$\sin\theta$	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos\theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0
$\tan\theta$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	अव्याख्येस
$\cot\theta$	अव्याख्येस	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0
$\operatorname{cosec}\theta$	अव्याख्येस	2	$\sqrt{2}$	$2/\sqrt{3}$	1
$\sec\theta$	1	$2/\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	अव्याख्येस

पूरक वेबसाईट्स ः •http://www.wikipedia.org•http://mathworld.wolfram.com

सहामाही अभ्यास

1. खालील प्रत्येकाच्या किंमती काढा.

(i) $4\cos^2 60^0 + 4\sin^2 45^0 - \sin^2 30^0$

(ii) $\sin^2 45^0 - \tan^2 45^0 + 3(\sin^2 90^0 + \tan^2 30^0)$

(iii) $\dfrac{5\sin^2 30^0 + \cos^2 45^0 - 4\tan^2 30^0}{2\sin^2 30^0 \cos^2 30^0 + \tan^2 45^0}$

(iv) $\dfrac{\cot^2 45^0}{\sec 30^0 + \operatorname{cosec} 30^0}$

2. सिध्द करा की ;

(i) $2\cot^2 30^0 - 2\cos^2 60^0 - \frac{3}{4}\sin^2 45^0 - 4\sec^2 30^0 = -\frac{5}{24}$

(ii) $2\sin^2 30^0 + 2\tan^2 60^0 - 5\cos^2 45^0 = 4$

(iii)
$\cos 60^0 \cos 45^0 + \sin 60^0 \sin 45^0 = \sin 45^0 \cos 30^0 + \cos 45^0 \sin 30^0$

(iv) $\dfrac{\cot 30^0 \cot 60^0 - 1}{\cot 30^0 + \cot 60^0} = \cot 90^0$

3. जर $\theta = 30^0$, तर पडताळून पहा.

(i) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

(ii) $\cos 2\theta = 1 - \sin^2\theta$

(iii) $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

4. जर $< A = 60^0$ आणि $< B = 30^0$, तर पडताळून पहा.

(i) $\sin(A + B) \neq \sin A + \sin B$

(ii) $\sin(A + B) = \sin A.\cos B + \cos A.\sin B$

(iii) $\cos(A - B) = \cos A.\cos B + \sin A.\sin B$

(iv) $\cos(A + B) = \cos A.\cos B - \sin A.\sin B$

(v) $\tan A = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2 A}}{\cos A}$

5. $\cos(A - B) = \cos A.\cos B + \sin A.\sin B$ हे सूत्र वापरून $\cos 15^0$ ची किंमत काढा.

6. जर $\sin(A + B) = 1$ आणि $\cos(A - B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
$0^0 < A + B \leq 90^0, A > B$ तर
A, B च्या किंमती काढा.

7. एक निरीक्षक एका इमारतीच्या पायापासून 40 मी. अंतरावर उभा आहे. त्याच इमारतीच्या गच्चीवर (वरच्या बाजूस) उभारलेल्या झेंडयाच्या शिखराशी व पायाशी झालेले उन्नतकोन अनुक्रमे 60^0 आणि 45^0 आहेत. तर इमारतीची व झेंडयाची उंची काढा.

8. एका टेकडीच्या माथ्यावरून, एक किलोमीटर अंतरावरील क्रमागत दोन दगडांशी झालेले अवनतकोन अनुक्रमे 60^0 आणि 30^0 आहेत तर टेकडीची उंची काढा.

9. 7 मी. उंचीच्या एका इमारतीवरून केवल मनो-याच्या टोकाकडे पाहिले असता उन्नतकोन 60^0

टिपा

चा होतो. तसेच त्याच ठिकाणाहून मनो-याच्या पायाकडे पाहिले असता 45^0 चा अवनतकोन होतो. तर त्या मनो-याची उंची किती ?

10. एक मनुष्य सागरकिना-यावर असलेल्या मनो-याच्या शिखराजवळून सागर किनारी येणा-या जहाजाकडे पाहतो. तेव्हा 10 मिनिटांच्या अवधित त्या जहाजाचा अवनतकोन 30^0 पासून 60^0 पर्यंत झाला. तर त्या जहाजास किना-याजवळ येण्यास किती वेळ लागेल ?
11. एका दीपगृहाच्या विरूध्द बाजूला असणारी दोन जहाजे दीपगृहाच्या दिशेने येत आहेत. त्या जहाजावरून दीपगृहाच्या दिव्याकडे पाहताना होणारे उन्नतकोन 30^0 आणि 45^0 चे आहेत. त्यावेळी दोन जहाजामधील अंतर 100 मी. असेल तर त्या दीपगृहाची उंची काढा.
12. सपाट जमिनीवर उभारलेल्या मनो-याची सावली, जेव्हा सूर्याचा उन्नतकोन 30^0 असतो तेव्हा पडणारी सावली ही सूर्याचा उन्नतकोन 60^0 चा असताना जेवढी पडते त्यापेक्षा $40\sqrt{3}$ मी. ने अधिक लांबीची असते. तर त्या मनो-याची उंची काढा.
13. दोन मनो-यातील क्षितीज समांतर अंतर 80 मी. एवढे आहे. दुस-या मनो-याच्या टोकावरून पहिल्या मनो-याच्या टोकाकडे पाहताना 30^0 चा अवनतकोन होतो. जर दुस-या मनो-याची उंची 160 मी असेल, तर पहिल्या मनो-याची उंची किती ?
14. एका रस्त्याच्या दोन्ही बाजूंना समोरासमोर दोन इमारती आहेत. एका इमारतीच्या खिडकीतून दुस-या इमारतीच्या वरच्या टोकाकडे व पायाकडे पाहताना होणारे उन्नतकोन व अवनतकोन हे अनुक्रमे 60^0 व 45^0 चे होतात. ती खिडकी जमिनीपासून 10 मी. उंचीवर आहे. या खिडकीच्या समोरील इमारतीची उंची किती ? ($\sqrt{3} = 1.73$ घ्या)
15. एका पुतळयाची उंची 1.6 मीटर असून तो जमिनीवर उंच बनविलेल्या चबुत-यावर उभारलेला आहे. सपाट जमिनीवरील एका बिंदुपासुन पुतळयाच्या वरच्या टोकाकडे पाहिले असता 60^0 चा उन्नतकोन होतो, त्याच बिंदूपासून चबुत-याच्या वरच्या टोकाकडे पाहताना 45^0 चा उन्नतकोन झाला. तर चबुत-याची उंची काढा.

उत्तरे : तुमची प्रगती तपासून पहा :

23.1

1. (i) $\frac{5}{4}$ (ii) $\frac{5}{2}$ (iii) 0 (iv) 2 (v) 0 (vi) $\frac{67}{12}$

5. $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$, $\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

6. $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

7. $A = 45^0$ आणि $B = 15^0$

8. $A = 30^0$ आणि $B = 15^0$

9. QR = $5\sqrt{3}$ cm आणि PR = 10cm

10. $< A = 60^0$ आणि $< C = 30^0$

11. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

12. $x = 10^0$

13. C

14. B

15. A

23.2

(1) 6m	(2) 86.6 m	(3) 86.6 m
(4) 86.6 m	(5) 115.46m	(6) 60^0
(7) 5.57 m	(8) 24.14m	(9) 94.64m
(10) 184.75m	(11) 25.35m	(12) 5.46 m
(13) 6.34m	(14) 415.66 km/h	(15) 16.67m

उत्तरे : सहामाही अभ्यास

1. (i) $\frac{11}{4}$ (ii) $\frac{7}{2}$ (iii) $\frac{40}{121}$ (iv) $\frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)}$

5. $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ 6. A = 60^0 आणि B = 30^0

7. 40m , 29.28 m 8. 4.33 m 9. 19.124m

10. 5 मिनिटे 11. 36.6m 12. 67.5m

13. 113.8m 14. 27.3m 15. 2.18656m

माध्यमिक अभ्यासक्रम

गणित

सराव काम – त्रिकोणमिती

गुण ः 25 वेळ ः 45 मिनिटे

सूचना ः

१. सर्व प्रश्नांची उत्तरे स्वतंत्र (वेगळया) कागदावर लिहा.

२. तुमच्या उत्तरपत्रिकेवर खालील माहिती लिहा.

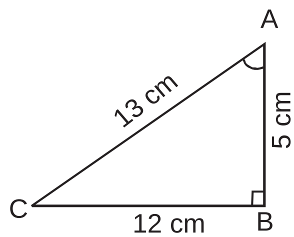
- नाव
- प्रवेश क्रमांक
- विषय
- सराव कामाच्या विभागाचे नाव
- पत्ता

३. तुमचे सराव काम राष्ट्रीय मुक्त विद्यालय क्षिक्षा संस्थानकडे पाठवू नका.

तुमच्या केंद्रावरील विषय शिक्षकांकडून तुमचे सराव काम तपासुन घ्या. म्हणजे तुम्हाला तुमच्या प्रगतीची पूर्ण कल्पना येईल.

तुमचे सराव काम राष्ट्रीय मुक्त विद्यालय क्षिक्षा संस्थानकडे पाठवू नका.

1. सोबतच्या आकृतीत, sinA ची किंमत =............. (1)



(A) $\frac{5}{13}$

(B) $\frac{12}{13}$

(C) $\frac{5}{12}$

(D) $\frac{13}{12}$

2. If $4\cot A = 3$, तर $\frac{\sin A - \cos A}{\sin A + \cos A}$ ची किंमत किती ? (1)

(A) $\frac{1}{7}$ (C) $\frac{5}{6}$

(B) $\frac{6}{7}$ (D) $\frac{3}{4}$

3. $\sec 30^0$ ची किंमत = ? (1)

(A) 2

(B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(C) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(D) $\sqrt{2}$

4. ΔABC मध्ये $\angle B$ हा काटकोन आहे, जर AB = 6 cm, आणि AC = 12 cm, तर $\angle A$ = ? (1)

(A) 60^0

(B) 30^0

(C) 45^0

(D) 15^0

5. $\frac{\sin 36^0}{2\cos 54^0} - \frac{2\sec 41^0}{3\operatorname{cosec} 49^0}$ ची किंमत = ? (1)

(A) -1

(B) $\frac{1}{6}$

(C) $-\frac{1}{6}$

(D) 1

6. जर $\sin A = \frac{1}{2}$, तर $3\cos A - 4\cos^3 A = 0$ दाखवा. (2)

7. $\sin(A - B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$ या सूत्राचा उपयोग करून $\sin 15^0$ ची किंमत काढा. (2)

8. किंमत काढा : $\tan 15^0 \tan 25^0 \tan 60^0 \tan 65^0 \tan 75^0$ (2)

9. $\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$ हे दाखवा. (2)

10. जर $\sin^2\theta + \sin\theta = 1$ तर सिध्द करा की, $\cos^2\theta + \cos^4\theta = 1$ (2)

11. सिध्द करा : $\frac{\cot A+\operatorname{cosec} A-1}{\cot A-\operatorname{cosec} A+1}=\frac{1+\cos A}{\sin A}$ (4)

12. एक निरीक्षक एका इमारतीपासून 40 मी. अंतरावर उभा आहे. त्याला असे आढळून आले की, त्याच इमारतीवर असलेल्या झेंडयाच्या शिखराशी व पायाशी झालेले उन्नतकोन अनुक्रमे 60^0 आणि 45^0 आहेत, तर इमारतीची व झेंडयाची उंची किती? (6)

माध्यमिक अभ्यासक्रम

विषय ः गणित

गुण ः **25** वेळ ः **45** मिनिटे

सूचना ः

1) सर्व प्रश्नांची उत्तरे स्वतंत्र उत्तर पत्रिकेवर लिहा.

2) तुमच्या उत्तर पत्रिकेवर पुढील माहिती लिहा.

- पूर्ण नाव
- दाखल क्रमांक **(Enrollment number)**
- विषय
- सराव कार्य ज्या प्रकरणावर आहे, ती प्रकरणे
- पूर्ण पत्ता

3) तुम्ही केलेले सराव कार्यतुमच्या अभ्यास केंद्रावरील विषय ' शिक्षकांकडून तपासून घ्या आणि त्यांच्याकडून तुमच्या तयारीची निश्चित माहिती मिळवा.

तुमचे सराव कार्य, राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षण संस्थेकडे पाठवू नका.

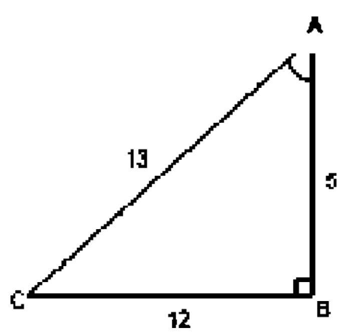
1. वाजूच्या आकृतीमधील, sinA ची किंमत = ...

(A) —

(B) —

(C) —

(D) —



2. जर 4cotA = 3 तर $\frac{-}{+}$ ची किंमत = ...

1

(A) (B) – (C) – (D) –

3. sec 30° = ……..

1

(A) 2 (B) $\frac{\sqrt{}}{}$ (C) $\frac{}{\sqrt{}}$ (D) $\sqrt{}$

4 Δ ABC या काटकोन त्रिकोणात $\angle B = 90°$ जर रेख AB = 6 cm. रेख Ac = 12 cm. तर $\angle = \ldots\ldots\ldots\ ^\circ$ 1

(A) 60° (B) 30° (C) 45° (D) 15°

5. $\frac{\circ}{\circ} - \frac{\circ}{\circ}$ ची किंमत = ... 1

(A) – 1 (B) – (C) – – (D) 1

6. जर sinA = – तर $3\cos A - 4\cos^3 A = 0$ हे सिद्ध करा. 2

7. sin(A–B) = sinAcosB – cosAsinB या सूत्राचा वापर करून sin15° ची किंमत काढा. 2

8. किंमत काढा. 2

tan15° tan25° tan60° tan65° tan75°

9. सिद्ध करा. 2

$\sqrt{\frac{+}{-}}$ = secA + tanA

10. जर $\sin^2\theta + \sin\theta = 1$ तर, $\cos^2\theta + \cos^4\theta = 1$ हे सिद्ध करा. 2

11. सिद्ध करा. 4

$\frac{+ \qquad -}{- \qquad +} = \frac{+}{}$

12. एका इमारतीपासून एक निरीक्षक 40cm अंतरावर उभा आहे. त्याने इमारतीवर फडकत असलेल्या ध्वजाकडे पाहिले असता, ध्वजाच्या काठीच्या वरच्या टोकाचा आणि खालच्या टोकाचा उन्नतकोन अनुक्रमे 60° व 45° आहे, असे त्याच्या निरीक्षणास आले. तर इमारतीची आणि ध्वजाच्या काठीची उंची काढा. 6

24

माहिती आणि तिची मांडणी.

सांख्यिकी हा गणित विषयाचा एक भाग आहे. यामध्ये सांख्यिकी माहिती व तिची मांडणी यांचा अंतर्भान केलेला आहे. या प्रकरणात आपण सांख्यिकी माहिती गोळा करणे, त्याचे वर्गीकरण करणे, मांडणी करणे आणि विश्लेषण करावयास शिकणार आहोत.

दिलेली माहिती वर्गीकृत व अवर्गीकृत यामध्ये वर्गीकरण करून त्याचे वारंवारता वितरण करण्यास शिकणार आहोत.

तसेच संचित वारंवारता , वर्ग ,संचित वारंवारता तक्ता याविषयी शिकणार आहोत.

दिलेल्या माहितीचे आलेख चित्रण स्तंभालेख,आयतालेख, वारंवारता बहुभुज अशा वेगवेगळया प्रकारे कसे करायचे हे शिकणार आहोत.

उद्दिष्टे :

खालील गोष्टी पाठाचा अभ्यास केल्यावर साध्य होतील.

- एकवचनी आणि बहुवचनी -सांख्यिकीची व्याख्या.
- प्राथमिक आणि दुय्यम माहितीतील फरक.
- वर्ग, वर्ग अवकाश, वर्गमर्यादा ,समावेशक आणि उपसमावेशक माहिती, वर्गाची वारंवारता, वर्ग मध्य ,वर्गांतर यांचा अर्थ समजणे.
- वारंवारता सारणी तयार करणे.
- वारंवारता सारणीवरून संचित वारंवारतेचा नमुना.
- वारंवारता सारणीवरून स्तंभालेख.
- दिलेल्या माहितीचा स्तंभालेख.
- सलग माहितीचा आयतालेख आणि वारंवारता बहुभुज
- स्तंभालेख,आयतालेख वाचणे व त्याचे निर्वचन करणे.

अपेक्षित पूर्वज्ञान.

- संख्या चढत्या/ उतरत्या क्रमाने लिहिणे.
- दिलेल्या संख्यांची सरासरी काढणे.

- दोन अक्ष लंब असताना दिलेला बिंदू स्थापन करता येणे.
- गुणोत्तर - प्रमाणाची कल्पना.

24.1 सांख्यिकी आणि सांख्यिकी माहिती.

आपल्या दैनंदिन जीवनात आपण

1. या वर्षी शाळेचे निकाल चांगले लागतील.
2. पुढच्या महिन्यात पेट्रोल / डिझेलचे दर वाढतील.
3. संध्याकाळी जोरात पाऊस पडण्याची शक्यता आहे.
4. आजारी व्यक्ती लवकर बरी होईल इ. वाक्ये ऐकतो.

वरील वाक्यांतर जरा लक्ष केंद्रित करा.

- पहिले विधान मुख्याध्यापक किंवा संस्थेच्या अध्यक्षाचे असेल. त्याने या वर्षीच्या विद्यार्थ्यांचा अभ्यास मागील वर्षाच्या विद्यार्थ्यांच्या मानाने चांगला आहे असे निरीक्षण केले असेल.
- वर्तमानपत्रातील बातम्यांवरून दुसरे विधान केले असले पाहिजे.
- वेधशाळेमध्ये वातावरणाचा अंदाज करणारी व्यक्ति तिसरे विधान करेल वातावरणाच्या अंदाज त्याच्या निरीक्षणांवरून आणि हवामानच्या अंदाजावरून तिसे विधान केले असेल.
- चौथे विधान एखादया डॉक्टरच्या निरिक्षणावरून असेल.

  वरील चारही विधानांची सत्यता प्रत्येक व्यक्तीची निरिक्षण क्षमता, त्याचे विश्लेषण यावर अवलंबू असते. सांख्यिकी हे विज्ञान आहे. ते माहिती गोळा करणे, त्याची योग्य आटोपशीर मांडणी करणे, विश्लेषण करणे व निर्वचन करणे याच्याशी संबंधित आहे.

  देशाची अर्थशास्त्रीय वाढ, शैक्षणिक वाढ, आरोग्य आणि लोकसंख्या यांचे प्रश्न , कृषीशास्त्रातील वाढ यांची माहिती मिळवण्यासाठी माहिती गोळा करणे आणि विश्लेषण करणे आवश्यक आहे. वेगवेगळया संदर्भात सांख्यिकी या शब्दाचे वेगवेगळे अर्थ आहेत.

  खालील वाक्ये वाचा.

1. भारतातील शिक्षण विषयीची सांख्यिकी माहितीची प्रत मला मिळू शकेल का?
2. मला सांख्यिकी शिकायला आवडते. हा अतिशय मनोरंजक विषय आहे.

पहिल्या विधानात सांख्यिकी हा शब्द अनेकवचनी वापरला आहे. त्यामध्ये संख्यांची माहिती किंवा वस्तुस्थिती म्हणून वापरला आहे. यामध्ये शाळांची / महाविद्यालयांची संख्या/ भारतातील संस्था साक्षरतेचा दर यांचा अंतर्भाव असतो.

दुस-या विधानात सांख्यिकी हा शब्द एकवचनी वापरला आहे. याचा अर्थ ज्या विषयात वर्गीकरण, तक्ता करणे, आटोपशीर मांडणी, विश्लेषण, अर्थपूर्ण निष्कर्ष काढणे हा होय.

24.2 माहिती गोळा करणे.

कोणत्याही संशोधनात प्रथम माहिती गोळा करावी लागते. संशोधक या माहितीवरून विश्लेषण करून, संख्याशास्त्रतज्ञ यावरून निष्कर्ष काढतो. यासाठी गोळा केलेली माहिती सत्य आणि योग्य असली पाहिजे. माहिती गोळा करण्याची पध्दत आधीच ठरवलेली असली पाहिजे.कोणत्याही अभ्यासात जर संशोधकाने विशिष्ट उद्दिष्ट ठरवून स्वतःच्या जबाबदारीवर माहिती गोळा केली असेल तर त्याला प'ाथमिक माहिती म्हणतात. उदा. मतदारांच्या याद्या,जनगणना प्रश्न इत्यादी.

संशोधकाला वेळ, पैशाचा अभाव यामुळे स्वतः माहिती गोळा करणे शक्य नसते. अशावेळी संशोधक दुस-याने गोळा केलेली किंवा सरकारने प्रकाशित केलेली माहिती वापरतो. याला दुय्यम माहिती म्हणतात. एखाद्या व्यक्तिसाठी किंवा संस्थेसाठी प्राथमिक असलेली माहिती दुस-यासाठी दुय्यम माहिती असू शकते. मूळ संशोधकाच्या उद्दिष्टाव्यतिरिक्त ही माहिती वेगळयाच कामासाठी गोळा केलेली असते. अशा वेळी ही माहिती वापरणा-या व्यक्तिला तिच्या अभ्यासासाठी उपयुक्त नसते. म्हणून गोळा केलेली माहिती काळजीपूर्वक वापरावी लागते.

आपली प्रगती तपासा . 24.1

1. योग्य शब्द वापरून विधाने अर्थपूर्ण करा.

   (a) एकवचनात सांख्यिकी म्हणजे असा विषय जो .... विश्लेषण करून त्या माहितीचा अर्थपूर्ण .... काढतो.

   (b) अनेकवचनात सांख्यिकी म्हणजे .... या अर्थी वापरला जातो.

   (c) संशोधकाने स्वतः माहिती गोळा केल्यास त्यास ...... म्हणतात.

   (d) सरकारी प्रकाशित केलेली किंवा एखाद्या संस्थेने प्रकाशित केलेली माहिती संशोधकाने घेतल्यास त्यास .... म्हणतात.

   (e) सांख्यिकी म्हणजे गोळा केलेल्या ...... आटोपशीर मांडणी करणे, विश्लेषण करणे व तिचे निर्वचन करणे होय.

2.जावेदला स्वतःच्या परिसरात कोणत्या संस्थेचे बूट जास्तीत जास्त व्यक्ति वापरतात ते पहायचे होते. त्यासाठी तो प्रत्येक घरी गेला आणि माहिती गोळा केली ही .... सांख्यिकी माहिती होती.

3.शाळेमध्ये I ते XII पर्यंत प्रत्येक दिवशी किती विद्यार्थी गैरहजर आहेत, ही माहिती तुम्ही शाळेच्या नोंदीवरून घेतली. ही गोळा केलेली माहिती .... सांख्यिकी माहिती आहे.

24.3 माहितीची मांडणी

जेव्हा माहिती गोळा करण्याचे काम संपते तेव्हा संशोधकाला यानंतर गोळा केलेल्या माहितीची आटोपशीर मांडणी करणे आणि त्याचे गुणधर्म अभ्यासायचे असतात. या मांडणीला माहितीची मांडणी म्हणतात.

समजा वर्गात 20 विद्यार्थी आहेत. वर्गात गणित विषयात प्रत्येकाला 100 पैकी मिळालेले गुण पुढीलप'माणे आहेत.-

45,56,61,56,31,33,70,61,76,56

36,59,64,56,88,28,56,70,64,74

या माहितीला कच्ची / अवर्गीकृत माहिती म्हणतात. प्रत्येकाला मिळालेले गुण म्हणजे निरिक्षण. या माहितीकडे नुसते पाहून जास्तीत जास्त किंवा कमीत कमी मिळालेले गुण कळतात का?

आणखी कोणती माहिती तुम्हाला मिळते?

ही माहिती चढत्या क्रमाने मांडू

28,31,33,36,45,56,56,56,56

59,61,61,64,64,70,70,74,76,88 .... (1)

आता तुम्हाला पुढील माहिती मिळते का?

(1)सर्वात जास्त मिळालेले गुण : 88

(2)सर्वात कमी मिळालले गुण : 28

(3)56 गुण मिळालेल्या विद्यार्थ्यांची संख्या : 5

(4)60 पेक्षा जास्त गुण मिळालेल्या विद्यार्थ्यांची संख्या : 9

(1)मध्ये मांडलेल्या माहितीस रचनाबध्द माहिती म्हणतात.

या पध्दतीत माहिती लिहिण्यास जास्त वेळ लागतो. जेव्हा निरीक्षणे जास्त असतात तेव्हा ही निरीक्षणे तक्त्याच्या स्वरूपात मांडता येतात.

20 विद्यार्थ्यांचे गणित विषयातील गुण

गुण	विद्यार्थी संख्या
28	1
31	1
33	1
36	1
45	1
56	5
59	1
61	2
64	2
70	2
74	1
76	1
88	1
एकूण	20

अवर्गीकृत मांडणीपेक्षा तक्त्याच्या स्वरूपातील मांडणी ही सुधारीता मांडाणी आहे कारण त्यामुळे दिलेल्या माहितीचे ज्ञान योग्य प्रकारे होते. तक्त्यावरून आपल्याला कळते की एका विद्यार्थ्याला 28 गुण आहेत. 5 विद्यार्थ्यांना 56 गुण, 2 विद्यार्थ्यांना 70 गुण इत्यादी. संख्या 1,1,1,1,1,5,2... यांना क्रमाने वारंवारता म्हणतात.

28,31,33,36,45,56,70 ... यांना निरीक्षणे म्हणतात. अशा तक्त्याला वारंवारता वितरण सारणी किंवा वर्गीकृत सारणी म्हणतात.

सूचना : जेव्हा निरीक्षणांची संख्या मोठी असते तेव्हा नुसती वर्गीकृत सारणी पुरेशी नसते. त्यावेळी आपण ताळयाच्या खुणांचा वापर करतो. वारंवारता काढण्यासाठी त्याचा उपयोग होतो. दिलेल्या माहितीची आटोपशीर मांडणी करण्यासाठी आपण त्यांचे वर्ग करतो किंवा त्याला वर्ग अवकाश म्हणतात.

पायरी 1 : प्रथम दिलेल्या माहितीचा वर्ग विस्तार माहीत करून घ्यावा. वर्ग विस्तार म्हणजे दिलेल्या माहितीतील सर्वात लहान व सर्वात मोठया निरीक्षणातील फरक वरील उदाहरणात तो 88-28=60 आहे.

पायरी 2 : आपण किती वर्गात दिलेल्या माहितीचे वितरण करणार आहोत ते ठरवतो. या ठिकाणी किती वर्ग करावे हे ठरलेले नसते. परंतु सर्वसाधारणपणे वर्ग पाचपेक्षा कमी किंवा पंधरा पेक्षा जास्त नसावते.

पायरी 3 : वर्ग विस्तारावरून वर्ग अवकाश ठरवता येतो. वरील उदाहरणात आपण नऊ वर्ग करायचे ठरवले तर वर्ग अवकाश $\frac{60}{9} \approx 7$

पायरी 4 ः यानंतर आपण वर्गमर्यादा ठरवतो. यासाठी वर्गविस्तार व वर्ग अवकाश यांचा विचार करावा लागतो. हे ठरवताना खालचे निरीक्षण व वरचे निरीक्षणाचा समावेश झाला पाहिजे. वर्गामध्ये कोणतेही निरीक्षण सुटता कामा नये किंवा कोणत्याही निरीक्षणांनी परस्परांना व्यापलेले नसावे.

पायरी 5 ः आपण एकेक निरिक्षण घेऊन योग्य वर्गात ताळयाची खूण करतो. सोयीसाठी या ताळयाच्या खुणा पाचच्या गटात मांडतो. उदा. ~~IIII~~

पायरी 6 ः प्रत्येक वर्गातील ताळयाच्या खुणा मोजून वारंवारता लिहितो. (सर्व वारंवारतांची बेरीज निरिक्षणांएवढी आली पाहिजे)

पायरी 7 ः वारंवारता सारणीला योग्य नाव दिले पाहिजे त्यावरून तक्ता कशाचा आहे ते कळले पाहिजे.

वरील पाय-यांचा वापर करून 20 विद्यार्थ्यांच्या मिळालेल्या गुणांचा तक्ता करू.

20 विद्यार्थ्यांना मिळालेल्या गणितातील गुणांचा तक्ता.

वर्गअवकाश (100 पैकी गुण)	ताळयाच्या खुणा	वारंवारता
28-34	III	3
35-41	I	1
42-48	1	1
49-55	-	-
56-62	~~IIII~~ III	8
63-69	II	2
70-76	IIII	4
77-83	-	-
84-90	1	1
	एकूण	20

वरील तक्ता वर्गीकृत निरीक्षणाचा वारंवारता वितरणाचा आहे. याला वर्गीकृत वारंवारता सारणी म्हणतात.

वरील तक्त्यात 28 ते 34 मध्ये 28 ला खालची वर्गमर्यादा तर 34 ला वरची वर्गमर्यादा म्हणतात.

अशा प्रकारच्या तक्त्यावरून आपण निष्कर्ष काढू शकतो. उदा.

(१) 28 ते 34 गुण मिळवणारे 3 विद्यार्थी आहेत.

(२) 49-55 यामध्ये एकही विद्यार्थी नाही. 49,50,51, 53, 53, 54, 55 गुण एकाही विद्यार्थ्या ला मिळाले नाहीत.

(३) 66-62 गुण मिळवणारे विद्यार्थी जास्त आहेत.

या 20 निरिक्षणांचा आपण आणखी एका प्रकारे तक्ता करू शकतो. 28-35, 35-42, 42-49, 49-56, 56-63, 63-70, 70-77, 77-84, 84-91

यामध्ये 28-35,35-42 यामध्ये 35 दोन्ही वर्गात आहेत. एकच निरीक्षण दोन्ही वर्गात घेता येणार नाही. हे टाळण्यासाठी 35 हे निरीक्षण 35-42 या वर्गात घेतात. (28-35) मध्ये नाही. तसेच 42 हे , 42-49 मध्ये घेतात. म्हणजेच 28-35 मध्ये 28 पेक्षा मोठे आणि 35 पेक्षा लहान निरीक्षणे असतात.

वजन (कि.ग्रॅम)	विद्यार्थ्यांची संख्या
31-35	10
36-40	7
41-45	15
45-50	4
51-55	2
56-60	3
61-65	4
66-70	3
71-75	2
एकूण	50

समजा दोन विद्यार्थ्यांची वजने अनुक'मे 35.5 कि.ग्रॅ. आणि 50.54 कि.ग्रॅ. आहेत.तर त्यांना कोणत्या वर्गात धरायचे? 35.5 हे 31-35 या वर्गात किंवा 36-40 या वर्गात घेता येतील का? नाही. 31-35 या वर्गात 35 पर्यंतच वजन असले पाहिजे आणि वर्ग 36-40 मध्ये 36 च्या पुढच्या संख्या आल्या पाहिजेत. म्हणजे येथे खालची वर्ग मर्यादा व वरची वर्गमर्यादा यामध्ये जागा राहिली. ही अडचण सोडवण्यासाठी लगतच्या दोन वर्गांची खालची व वरची वर्गमर्यादा सलग असली पाहिजे. यासाठी पहिल्या वर्गाची वरची मर्यादा व लगतच्या दुस-या वर्गाची खालची वर्गमर्यादा यांची सरासरी काढू. उदाहरणार्थ

टिपा

31-35 आणि 36-40 या दोन वर्गांचा विचार करू. 36-40 ची खालची वर्गमर्यादा 36 31-35 या वर्गांची वरची वर्गमर्यादा 35 . म्हणूनच $\frac{35+36}{2}$ =35.5

किंवा यातील फरक 36-35=1 या फरकाच्या निम्मे म्हणजे 0.5.

म्हणून नवीन वर्ग अवकाश 31-35 ऐवजी (31-0.5)- (35+0.5) म्हणजे 30.5 ते 35.5 त्याप्रमाणे वर्ग 36-40 ऐवजी 35.5-40.5.......... याप्रमाणे नवीन वर्ग 30.5-35.5, 35.5-40.5, 40.5-45.5, 45.5-50.5, 50.5-55.5, 55.5-60.5, 60.5-65.5, 65.5-70.5 आणि 70.5-75.5 यालाच सलग वर्ग म्हणतात.

या वर्गांचा वर्ग अवकाश 5 हाच राहतो. यालाच खरी वर्ग मर्यादा म्हणतात. म्हणजे 30.5-35.5 यामध्ये 30.5 खरी खालची वर्गमर्यादा व 35.5 ही वास्तव खरी वरची वर्गमर्यादा.

आता आपण नवीन आलेल्या विद्यार्थ्यांचे वजन या सारणीत घेऊ शकू का? कोणत्या वर्गात ? नक्कीच 35.5 या वजनाचा अंतर्भाव 35.5 ते 40.5 या वर्गात करता येईल आणि 50.54 चा समावेश 50.5 ते 55.5 या वर्गात करता येईल.

∴ नवीन वारंवारता सारणी खालीलप्रमाणे होईल.

वजन (कि.ग्रॅम)	विद्यार्थ्यांची संख्या	
30.5-35.5	10	
35.5-40.5	8	35.5 चा अंतर्भाव
40.5-45.5	15	
45.5-50.5	4	
50.5-55.5	3	50.54 चा अंतर्भाव
55.5-60.5	3	
60.5-65.5	4	
65.5-70.5	3	
70.5-75-5	2	
एकूण	50	

सूचना ः या ठिकाणी 30 -35,35-40,40-45...... ... असे वर्गही घेऊ शकलो असतो.

उदा. 24.1 : व्यक्तिंचा रोजचा रोजगार पुढे दिला आहे. त्याची वारंवारता सारणी तयार करा. वर्गांतर 10 चे वापरा.

110	184	129	141	105	134	136	176	155
145	150	160	160	152	201	159	203	146
177	139	105	140	190	158	203	108	129
118	112	169	140	185				

उकल ः येथे वर्ग विस्तार = 205 -105=100 म्हणून आपण 10 वर्गांतराचे 10 वर्ग करू.

दिलेल्या माहितीसाठी वारंवारता सारणी.

32 व्यक्तिंचा रोजचा रोजगार - वारंवारता सारणी.

रोजगार रू. मध्ये	ताळयाच्या खुणा	व्यक्तिंची संख्या किंवा वारंवारता
105-115	~~IIII~~	5
115-125	I	1
125-135	III	3
135-145	~~IIII~~	5
145-155	IIII	4
155-165	~~IIII~~	5
165-175	I	1
175-185	III	3
185-195	II	2
195-205	III	3
	एकूण	32

उदा. 24.2 : 30 विद्यार्थ्यांची सेमी मध्ये उंची दिली आहे.

161	151	153	165	167	154
162	163	170	165	157	156
153	160	160	170	161	167
154	151	152	156	157	160
161	160	163	167	168	158

(i)दिलेल्या माहितीची मांडणी 161-165,166-170 असे वर्ग घेऊन करा.

(ii) विद्यार्थ्यांच्या उंचीबद्दल तुम्ही काय निष्कर्ष काढाल?

उकल ः

(i)30 विद्यार्थ्यांच्या उंचीच्या वारंवारतेच्या वितरणाची सारणी

सेमीमध्ये	उंचीताळयाच्या	खुणावारंवारता
151-155	IIII II	7
156-160	~~IIII~~ IIII	9
161-165	~~IIII~~ III	8
166-170	~~IIII~~ I	6
	एकूण	30

(ii) 50 % पेक्षा जास्त विद्यार्थ्यांची म्हणजे 16 उंची 160 सेमीपेक्षा कमी आहे.

आपली प्रगती तपासा 24.2

(1) कच्ची माहिती आणि वर्गीकृत माहिती याचे प्रत्येकी एक उदाहरण द्या.

(2) इ. 9 वी तील 30 विद्यार्थीनींची उंची सेमीमध्ये दिली आहे.

140	140	160	139	153	146	151	150	150	154
148	158	151	160	150	149	148	140	148	153
140	139	150	152	149	142	152	140	146	148

वर्ग विस्तार काढा.

(3)प्राथमिक माहिती व दुय्यम माहिती यातील फरक लिहा.

(4)ऑलिंपियाड या परिक्षेल IX तील 30 विद्यार्थी बसले. त्यांनी मिळवलेले गुण दिले आहेत.

46	31	74	68	42	54	14	93	72	53
59	38	16	88	27	44	63	43	81	64
77	62	53	40	71	60	08	68	50	58

0-9, 10-19............... असे वर्ग घेऊन वारंवारता वितरण सारणी तयार करा. तसेच, 49 पेक्षा जास्त गुण मिळवलेल्या विद्यार्थ्यांची संख्या काढा.

(5) 250-270 हया वर्गांतराचे वर्ग घेऊन (270 अंतर्भूत नाही) समान वर्गांतर घेऊन वारंवारता सारणी तयार करा.

168	230	368	248	242	310	272	342
310	300	300	320	315	304	402	316
406	292	355	248	210	240	330	316
406	215	262	238				

(6) शाळेतील 40 शिक्षकांची वये (वर्षांत) दिली आहेत. वारंवारता सारणी पहा आणि प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

वय (वर्षांत)	शिक्षकांची संख्या
25-31	12
31-37	15
37-43	7
43-49	5
49-55	1
एकूण	40

(1) वर्ग अवकाश काय आहे?

(2) 37-43 या वर्गाची वरची वर्गमर्यादा काय आहे?

(3)49-55 या वर्गाची खालची वर्गमर्यादा काय आहे?

24.4 संचित वारंवारता सारणी

पुढील वारंवारता सारणी विचारात घ्या.

वजन (कि.ग्रॅम)मध्ये	विद्यार्थ्यांची संख्या
30-35	10
35-40	7
40-45	15
45-50	4
50-55	2
55-60	3
60-65	4
65-70	3
70-75	2
एकूण	50

पुढील प्रश्नांची उत्तरे देण्याचा प्रयत्न करा.

(1) किती विद्यार्थ्यांचे वजन 35 किग्रॅ. पेक्षा कमी आहे.

(2) किती विद्यार्थ्यांचे वजन 50 किग्रॅ. पेक्षा कमी आहे.

(3) किती विद्यार्थ्यांचे वजन 60 किग्रॅ. पेक्षा कमी आहे.

(4) किती विद्यार्थ्यांचे वजन 70 किग्रॅ. पेक्षा कमी आहे.

आता याची उत्तरे पाहू.

विद्यार्थ्यांची वजनाप्रमाणे संख्या

35 किग्र पेक्षा कमी : 10

40 किग्रॅ पेक्षा कमी : (10)+7=17

45 किग्रॅ पेक्षा कमी : (10+7)+15=32

50 किग्रॅ पेक्षा कमी : (10+7+15) +4=36

55 किग्रॅ पेक्षा कमी : (10+7+15+4) +2=38

60 किग्रॅ पेक्षा कमी : (10+7+15+4+2) +3=41

65 किग्रॅ पेक्षा कमी : (10+7+15+4+2+3) +4=45

70 किग्रॅ पेक्षा कमी : (10+7+15+4+2+3+4) +3=48

75 किग्रॅ पेक्षा कमी : (10+7+15+4+2+3+4+3) +2=50

वरील तक्त्यावरून प्रश्न +, 2,3,4 ची उत्तरे 10, 36, 41 , 48 आहेत.

10,17,32,36,38,41,45,48,50 ही त्याच्या वर्गाची संचित वारंवारता आहे. 70-75 या शेवटच्या वर्गाची संचित वारंवारता आहे. तेवढीच एकूण निरिक्षणे आहेत. (येथे एकूण विद्यार्थी)

वरील तक्त्यात आपण संचित वारंवारतेचा स्तंभ लिहू. त्यामुळे संचित वारंवारता वितरण सारणी किंवा फक्त संचित वारंवारता सारणी मिळते.

संचित वारंवारता वितरण सारणी

वजन (कि.ग्रॅ मध्ये)	विद्यार्थ्यांची संख्या वारंवारता	संचित वारंवारता
0-35	10	10
35-40	7	17
40-45	15	32
45-50	4	36
50-55	2	38
55-60	3	41
60-65	4	45
65-70	3	48
70-75	2	50
एकूण	50	

उदा. 24.3 वेगवेगळे उत्पन्न असलेल्या एकाच भागात राहणा-या व्यक्तिंची संख्या व उत्पन्न याची वारंवारता सारणी पहा. आणि त्या खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.

आठवडयाचे उत्पन्न	नोकरदारांची संख्या
0-1000	12
1000-2000	35
2000-3000	75
3000-4000	275
4000-5000	295
5000-6000	163
6000-7000	140
7000-8000	55
एकूण	1000

किती व्यक्तिंचा पगार (i) रु. 2000 (ii) रु. 5000 (iii) रु. 8000 पेक्षा कती आहे?

उकल : संचित वारंवारता सारणी पहा.

संचित वारंवारता सारणी

दर आठवड्याचे उत्पन्न	नोकरदारांची संख्या वारंवारता	संचित वारंवारता
0-1000	12	12
1000-2000	35	47
2000-3000	75	122
3000-4000	225	347
4000-5000	295	642
5000-6000	163	805
6000-7000	140	945
7000-8000	55	1000
एकूण	1000	

वरील सारणीवरून

(i) 2000 रु. पेक्षा कमी पगार 47 व्यक्ती

(ii) 500 रु. पेक्षा कमी पगार 642 व्यक्ती

(iii) 8000 रु. पेक्षा कमी पगार 1000 व्यक्ती

आपली प्रगती तपासा 24.3

1) पुढील प्रत्येक वारंवारता सारणीसाठी संचित वारंवारता सारणी तयार करा.

(i) वर्ग	वारंवारता
1-5	4
6-10	6
11-15	10
16-20	13
21-25	6
26-30	2

(ii) वर्ग	वारंवारता
0-10	3
10-20	10
20-30	24
30-40	32
40-50	9
50-60	7

2) पुढील माहितीवरून संचित वारंवारता वितरण सारणी तयार करा.

उंची सेमीमध्ये	110-120	120-130	130-140	140-150	150-160	एकूण
विद्यार्थ्यांची संख्या	14	30	60	42	14	160

150 सेमी पेक्षा कमी उंची असणारे विद्यार्थी किती?

4.5 सामग्रीचे आलेख पद्धतीने प्रतिरुपण

4.5.1 स्तंभालेख

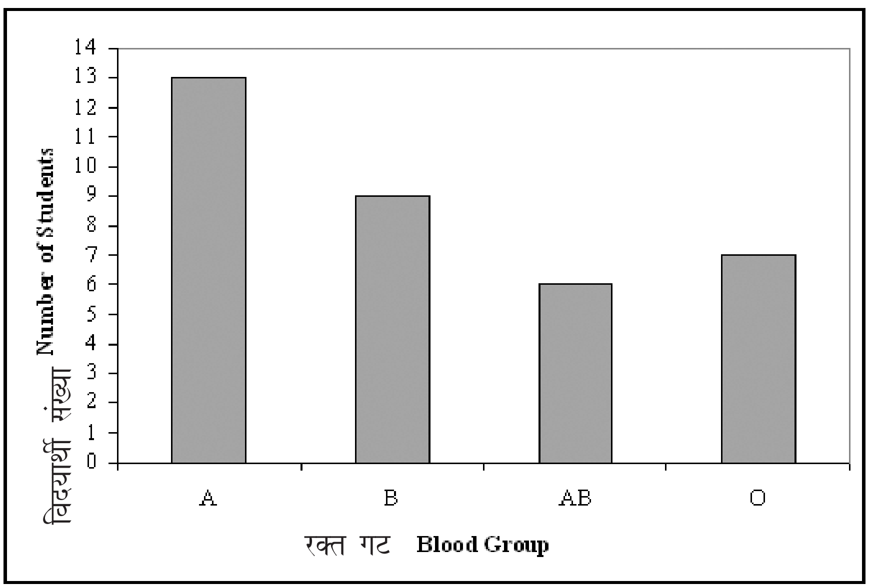
यापूर्वी आपण दिलेल्या माहितीची सारणीरुपात मांडणी केली. व्यक्तीगत गोष्टींची तुलना करण्यासाही अजून एक सुटसुटीत पद्धत आहे. ती आहे आलेख पद्धत दिलेल्या माहितीचे आलेख (स्तंभालेख) पद्धतीने प्रतिरुपण करता येते. उदा. 24.1 तक्ता विद्यार्थ्यांचे रक्तगट दर्शवतो.

वर्गातील 35 विद्यार्थ्यांचे रक्तगट

रक्तगट	विद्यार्थ्यांची संख्या
A	13
B	9
AB	6
O	7
एकूण	35

आकृती 24.1 मध्ये आलेखरुपात ही माहिती दाखवली आहे.

आकृती 24, विद्यार्थ्यांची संख्या, रक्तगट



आकृती 24.1

यालाच स्तंभालेख म्हणतात. समान रूंदी असलेले हे आयत आहेत. लगतच्या दोन स्तंभामध्ये समान अंतर आहे. हे अंतर आडव्या अक्षावर (x अक्षावर) दाखवले आहे.

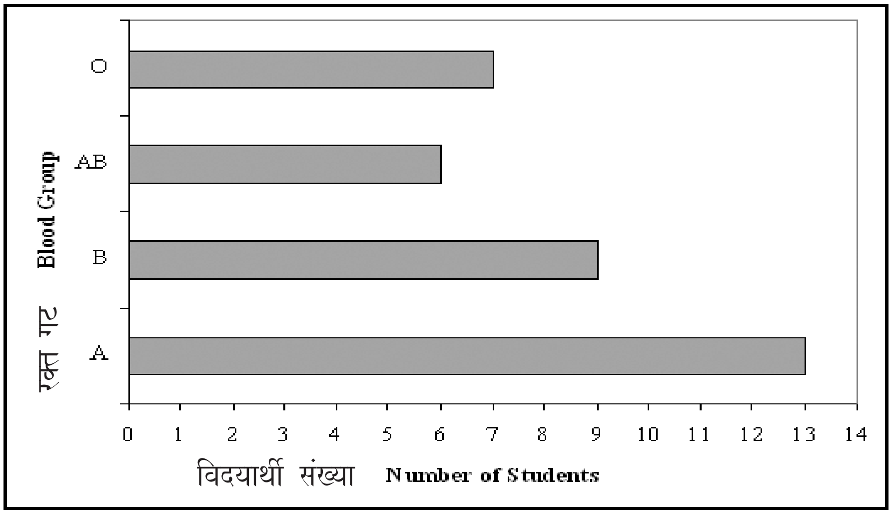
स्तंभाची उंची उभ्या अक्षावर (y अक्षावर)दाखवली आहे. त्यांच्या वारंवारतेशी ही उंची प्रमाणात आहे. (विद्यार्थी संख्या)

आयताच्या रूंदीवर आलेख अवलंबून नसतो. परंतु रूंदी समान ठेवल्याने आलेख आकर्षक दिसतो. 24.1 च्या आलेखावरून कोणकोणते निष्कर्ष काढू शकाल?

(i)A रक्तगट असणारे विद्यार्थी सर्वांत जास्त आहेत.

(ii) AB रक्तगट असणारे विद्यार्थी सर्वांत कमी आहेत. सर्वसाधारणपणे अर्थशास्त्रज्ञ, व्यावसायिक, डॉक्टरी क्षेत्राशी संबंधित शासकीय कचे-या स्तंभालेखाचा वापर करतात.

24.2 मध्ये आणखी एक प्रकारचा स्तंभालेख दाखवला आहे. y अक्षावर रक्तगट व x अक्षावर विद्यार्थी संख्या दाखवली आहे.



आकृती 24.2

24.1 व 24.2 मध्ये फारसा फरक नाही. व्यक्तिंच्या आवडीप्रमाणे उभा किंवा आडवा आलेख काढता येतो. सर्वसाधारणपणे उभा स्तंभालेख काढतात.

उदाहरण 24.3

2001-02 to 2005-06 पर्यंत ९वी तील विद्यार्थी संख्येचा स्तंभालेख दाखवला आहे तो पहा व पुढील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(i)आलेखामध्ये कोणत्या गोष्टीची माहिती दिली आहे?

(ii) कोणत्या वर्षात विद्यार्थी संख्या २५० आहे?

(iii) सत्य कि असत्य ते लिहा.

2001-02 पेक्षा 2002-03 मध्ये विद्यार्थी संख्या दुप्पट आहे.

उकल ः

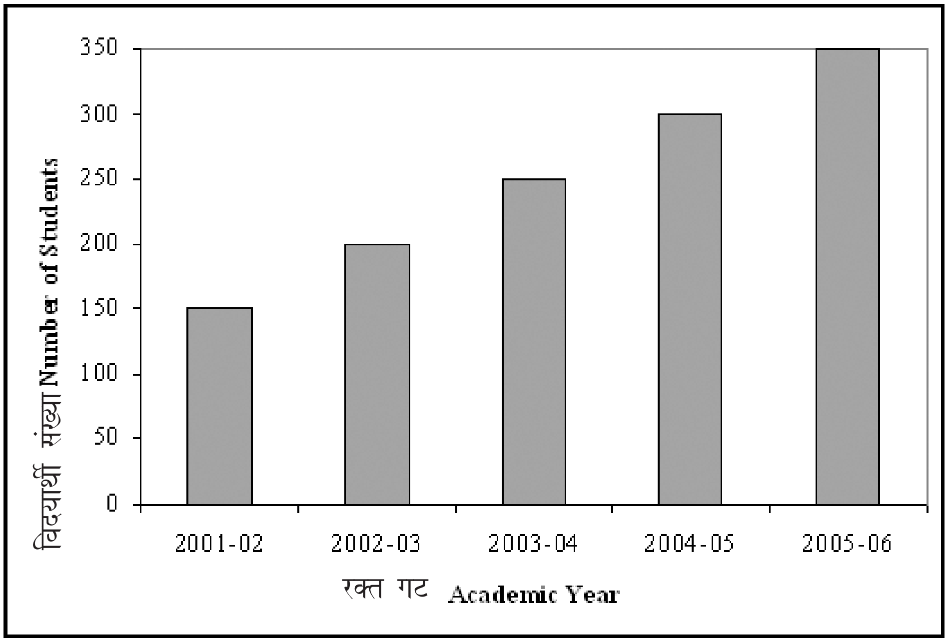
(i) इ. 9वी तील 2001-02 ते 2005-06 पर्यंतच्या विद्यार्थ्यांची प्रत्येक वर्षीची संख्या दर्शवतो.

(ii) 2003-04 मध्ये इ. 9 वीत विद्यार्थी संख्या 250 होती.

(iii) 2002-03 मध्ये 200

2001- 02 मध्ये 150 विद्यार्थी होते.

$$\frac{200}{150} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3} < 2.$$



आकृती 24.3

दिलेले विधान असत्य आहे .

उदा. 24.4 आ 24.4 सहा भाषांतील वर्तमान पत्राची वाटणी दर्शवते. (संख्या शतकात आहेत.) स्तंभालेख वाचा आणि उत्तरे लिहा.

(i) हिंदी , इंग्रजी व पंजाबी भाषेत एकूण किती आलेख 24.4 घेणे व्यक्ति वर्तमानपत्र वाचतात?

(ii) उर्दू,मराठी आणि तामीळ यांच्या एकत्रित संख्येपेक्षा हिंदी वर्तमानपत्र वाचणारे कितीने जास्त आहेत?

(iii) सर्वांत कमी कोणत्या भाषेतील वर्तमानपत्र वाचले जाते?

(iv) वेगवेगळया भाषेतील वर्तमानपत्र वाचणा-या संख्येचा चढता क्रम लावा.

उकल ः

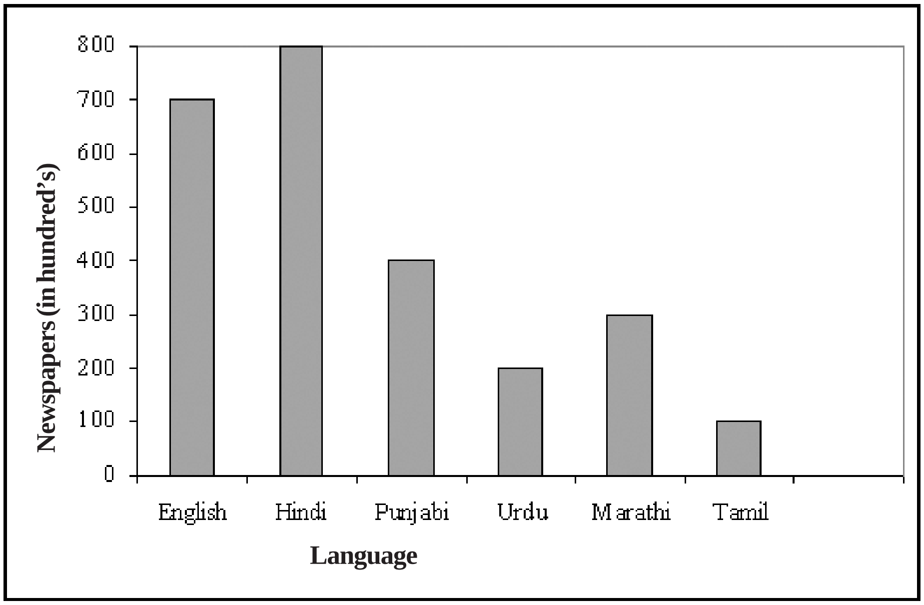
(i) हिंदी, इंग्रजी व पंजाबी वर्तमानपत्र वाचणा-यांची संख्या=
800+700+400= 1900

(ii) हिंदी वर्तमानपत्र वाचणारे (शेकडा)= 800
उर्दू, मराठी व तामीळ वर्तमानपत्र वाचणारे
200+300+100= 600
म्हणून फरक 800-600=200 (शतक)

(iii) तामीळ वर्तमानपत्र वाचणा-यांची संख्या सर्वात कमी आहे.

(iv) तामीळ, उर्दू,मराठी,पंजाबी,इंग्रजी,हिंदी.

स्तंभालेखाची रचना.



उदाहरणावरून आपण स्तंभालेखाची रचना समजावून घेऊ. उदा. 24.5

एका बॅंकेतून 2000 ते 2004 दरम्यान दिलेल्या कर्जाची सारणी दिली आहे. (कर्जाचे आकडे कोटीमध्ये आहेत.)

वर्ष	कर्ज (कोटीमध्ये)
2000	25
2001	30
2002	40
2003	55
2004	60

वरील माहितीचा स्तंभालेख काढण्यासाठी पुढील पाय-या अभ्यासा.

उकल :

पायरी 1 : आलेख कागद घ्या. त्यावर एकमेकींना लंब असणारे अक्ष काढा. आडव्या अक्षाला x अक्ष व उभ्या अक्षाला y अक्ष म्हणा.

पायरी 2 : x अक्षावर वर्ष लिहा व y अक्षावर कर्जाची रक्कम (कोटीमध्ये) लिहा.

पायरी 3: आडव्या अक्षावर समान रूंदी घ्या. लगतच्या दोन वर्षांमध्ये समान अंतर ठेवा.

पायरी 4ः दिलेल्या माहितीवरून y अक्षावर योग्य प्रमाणात घ्या. येथे आपण 1 सेमी=10 कोटी रूपये हे प्रमाण घेऊ.

पायरी 5 ः प्रत्येक माहितीसाठी स्तंभाची उंची काढू.

2000 : $\frac{1}{10} \times 25 = 2.5$ एकक (सेमी)

2001 : $\frac{1}{10} \times 30 = 3$ एकक

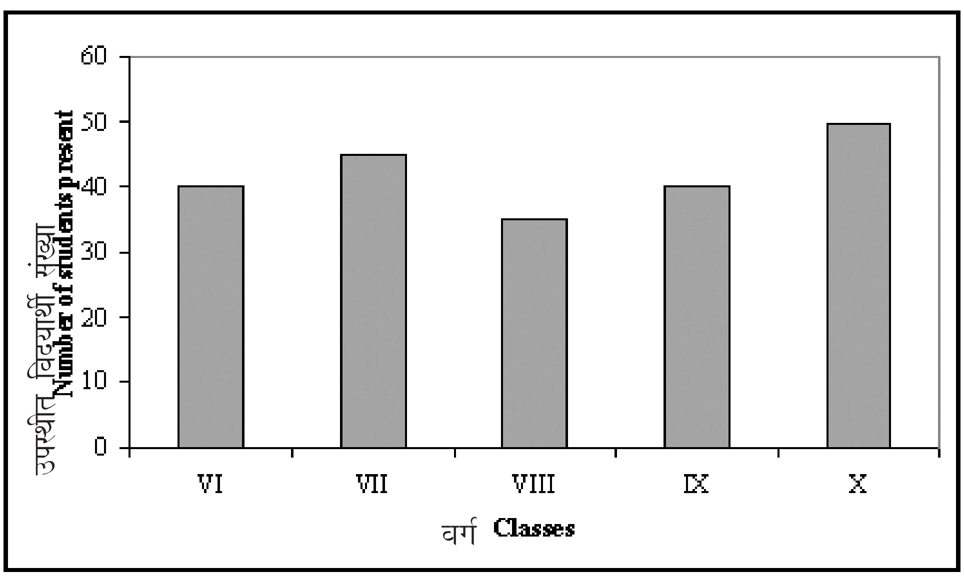
2002 : $\frac{1}{10} \times 40 = 4$ एकक

2003 : $\frac{1}{10} \times 55 = 5.5$ एकक

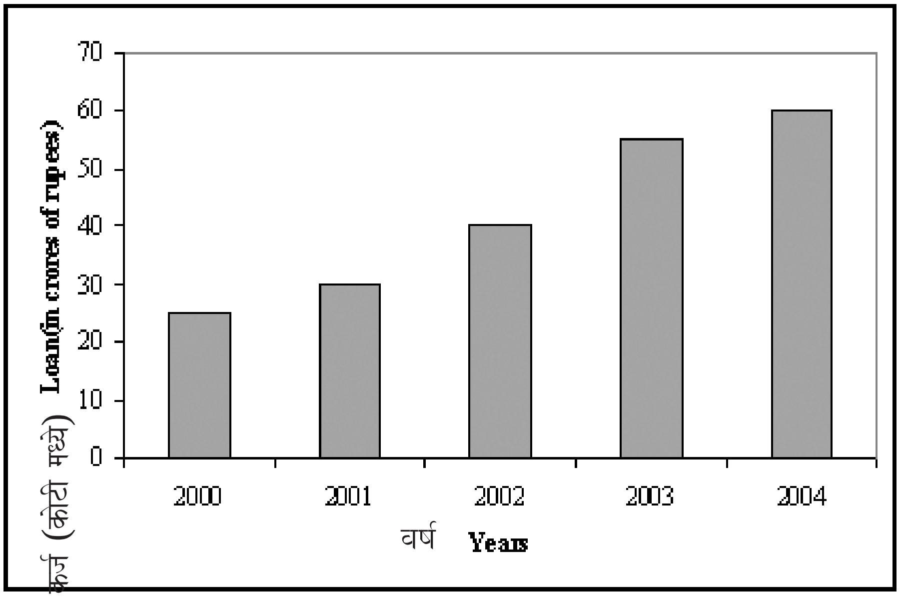
2004 : $\frac{1}{10} \times 60 = 6$ एकक

पायरी 6 ः पायरी 5 मध्ये मिळालेल्या उंचीचे आलेख कागदावर स्तंभ काढा. हे स्तंभ अनुक्रमाने त्यांच्या वर्षीचे असू द्यात. x अक्षावर वर्ष आहेत. त्याचा आलेख 24.5 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे येईल.

उदाहरण 24.6 . एका ठराविक दिवशी प्रत्येक इयत्तेत उपस्थित असलेल्या विद्यार्थ्यांची माहिती दिली आहे. त्याचा स्तंभालेख काढा.



आकृती 24.6

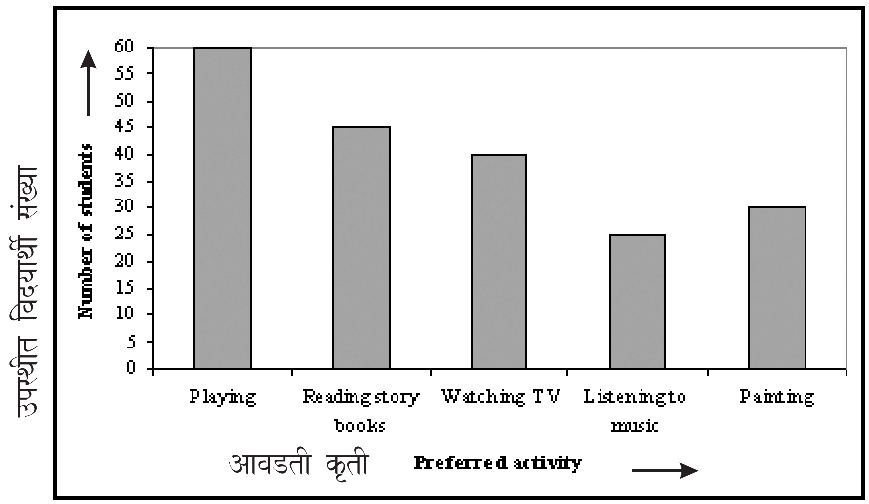


आकृती 24.5

वर्ग	6 वी	7 वी	8 वी	9 वी	10 वी
उपस्थित विद्यार्थी संख्या	40	45	35	40	50

उदा. 24.7 ः 200 विद्यार्थ्यांचे सर्वेक्षण करण्यात आले. प'त्येकाला आवडणा-या कोणत्या कला आहेत. याची माहिती गोळा केली. त्याची सारणी दिली आहे. त्याचा स्तंभालेख काढा.

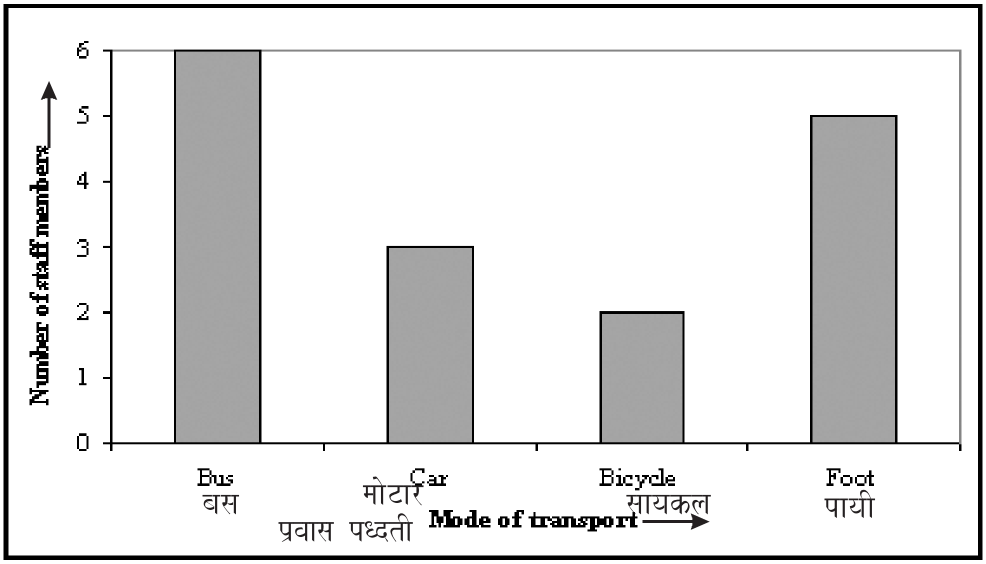
आवडती कृती	विद्यार्थी संख्या
खेळणे	60
गोष्टीची पुस्तके वाचणे	45
दूरदर्शन पाहणे	40
संगीत ऐकणे	25
चित्र काढणे	30



आकृती 24.7

आपली प्रगती तपासा 24.7

1. गाळलेल्या जागा भरा.
   - (i) संख्यात्मक माहितीचा स्तंभालेख म्हणजे .... रूंदीचा आयत होय.
   - (ii) स्तंभालेखामध्ये दोन स्तंभामध्ये .... जागा सोडली जाते.
   - (iii) स्तंभालेखामध्ये स्तंभाची उंची दिलेल्या वारंवारतेच्या .... असते.
2. पुढील स्तंभालेखात शिक्षक कोणत्या वाहनाचा वापर करून शाळेत येतात ते दर्शवले आहे.



आकृती 24.8

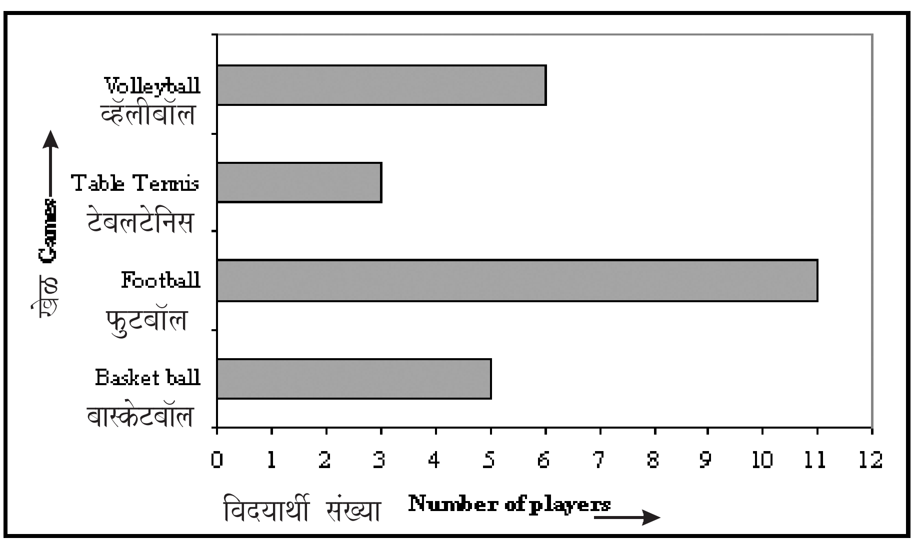
आलेखाच्या अभ्यास करून पुढील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(i)शाळेतील किती शिक्षक सायकलवरून येतात?

(ii) शाळेतील किती शिक्षक बसने येतात?

(iii)सर्वसामान्यपणे कोणत्या वाहनाने जास्त शिक्षक शाळेत येतात?

3. चार खेळातील विद्यार्थी संख्या आलेखात दर्शवली आहे. आलेखाचा अभ्यास करून प्रश्नांची उत्तरे लिहा.



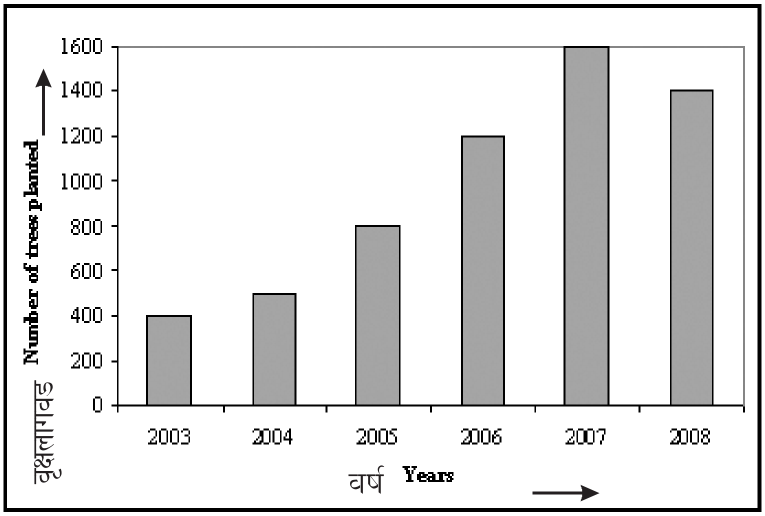
आकृती 24.9

(i) किती विद्यार्थी व्हॉलीबॉल खेळत आहेत?

(ii) सर्वात जास्त खेळाडू कोणता खेळ खेळत आहेत?

(iii) 3 खेळाडू कोणता खेळ खेळत आहेत?

4. वेगवेगळया वर्षात एका संस्थेने केलेल्या वृक्षलागवडीची माहिती या आलेखाचा अभ्यास करून पुढील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.



आकृती 24.10

(i) 2003 ते 2008 पर्यंत किती वृक्षांची लागवड केली?

(ii) सर्वात जास्त वृक्षलागवड कोणत्या वर्षी केली?

(iii) सर्वात कमी वृक्षलागवड कोणत्या वर्षी केली?

(iv) कोणत्या वर्षी त्याच्या पुढील वर्षापेक्षा कमी वृक्षारोपण केले गेले?

5. एका कंपनीमध्ये वेगवेगळया कारणासाठी केलेल्या खर्चाची (आकडे लाखात) वारंवारता सारणी दिली आहे. त्याचा स्तंभालेख काढा.

कारण	खर्च (लाखात रू.)
1. नोकरांचे पगार	200
2. प्रवास भत्ता	100
3. पाणी आणि वीज	50
4. भाडे	125
5. इतर	150

24.5.2 आयतालेख आणि वारंवारता बहुभुज

यापूर्वी दिलेली माहिती स्तंभालेखाच्या साहाय्याने दर्शवण्यास आपण शिकलो. आता सलग वर्ग असलेली वर्गीकृत माहिती आलेखाने कशी दर्शवायची ते पाहू.आयतालेखाच्या मदतीने सलग वर्ग असलेली वर्गीकृत माहिती दर्शवू. आयतालेखामध्ये सलग आयत असून त्यामध्ये जागा नसते.

(i) वर्गीकृत माहितीचे वर्ग आडव्या अक्षावर घेतात. (x अक्षावर)

(ii) प्रत्येक अक्षावर योग्य प्रमाण घेतात. y अक्षावर दिलेल्या माहितीची वारंवारता घेतात.

(iii) प्रत्येक वर्गासाठी त्या वर्गाची रूंदी म्हणजे पाया घेतात. उंची वारंवारता वरून ठरवतात. या आयताचे क्षेत्रफळ त्या वर्गाच्या वारंवारतेशी प्रमाणात असते. यासाठी आपण एक उदाहरण घेऊ.

उदा. 24.9 ः एका वर्गातील विद्यार्थ्यांना चाचणीमध्ये मिळालेले गुण दिले आहेत.

मिळालेले गुण	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
विद्यार्थी संख्या	1	3	1	6	4	5

या माहितीचा आयतालेख काढा.

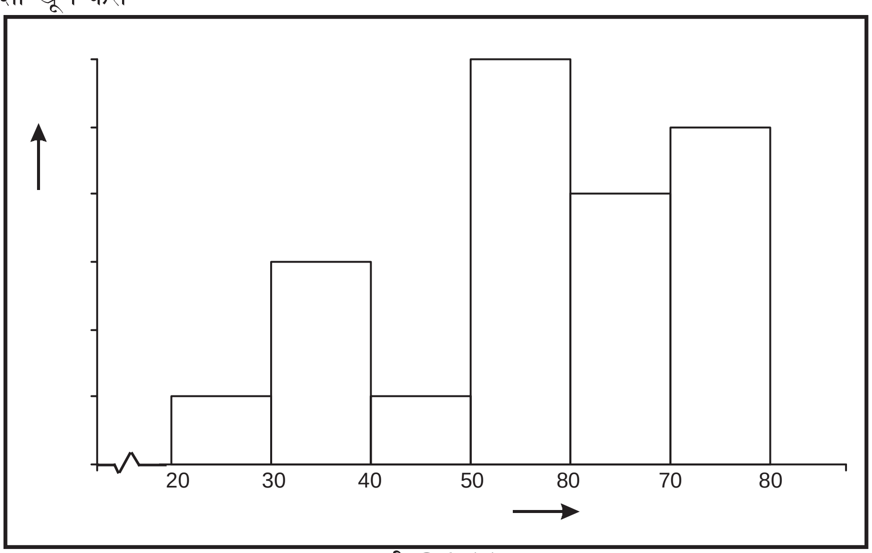
उकल ः आयतालेख काढण्याच्या पाय-या पाहू.

पायरी 1 ः आलेख कागदावर परस्परांना लंब x अक्ष व y अक्ष काढा.

पायरी 2 ः आडव्या (x अक्षावर) समान रूंदी असलेले वर्ग घ्या. 20-30, 30-40 (समान रूंदी 10 आहे).

पायरी 3 ः योग्य प्रमाण घेऊन उभ्या 'y' अक्षावर वर्गाची वारंवारता घ्या. (विद्यार्थी संख्या)

पायरी 4 ः दाखवल्याप्रमाणे आयत काढा. सुरूवात 20 पासून केल्याने x अक्ष आखूड करा.त्यासाठी ⟿ अशी खूण करा



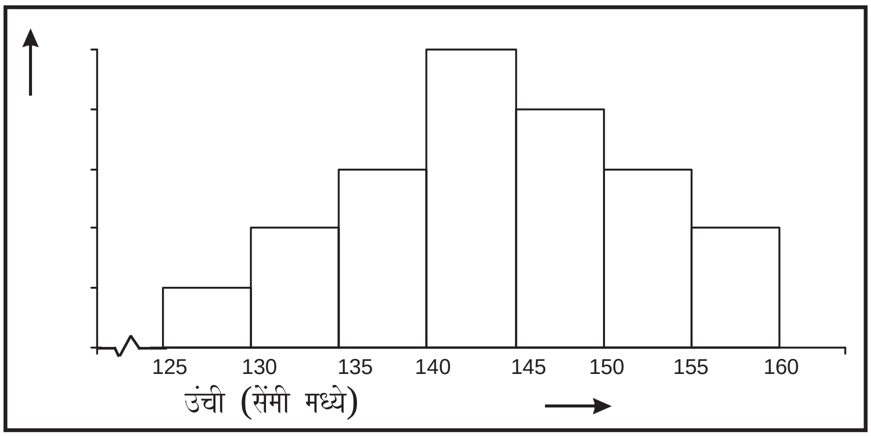
आकृती 24.11

आकृती 24.11 ,20 विद्यार्थ्यांचे गुण दाखवणारा आयतालेख दर्शवते .

उदा . 24.10 खाली दिलेल्या माहितीसाठी आयतालेख काढा .

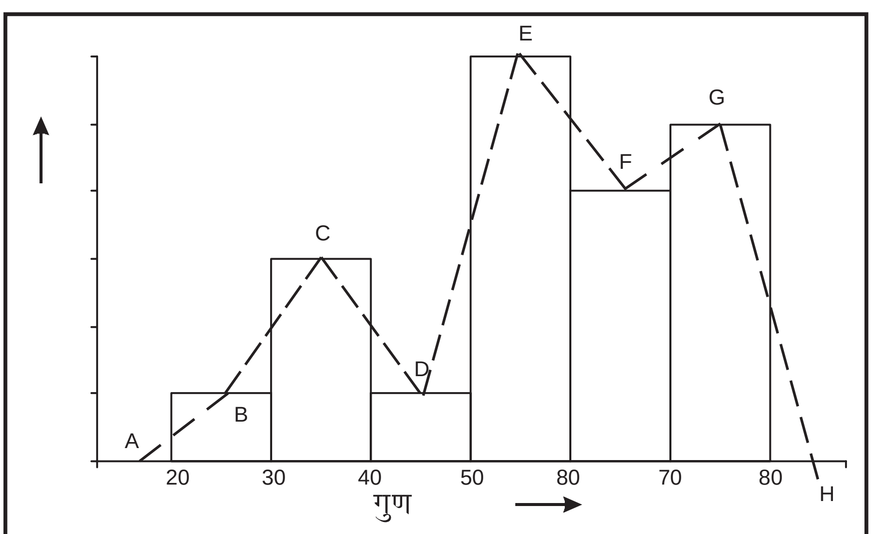
उंची (सेमी)	125-130	130-135	135-140	140-145	145-150	150-155	155-160
विद्यार्थी संख्या	1	2	3	5	4	3	2

उकल : दिलेल्या पाय-यांचा वापर करून या माहितीचा आयतालेख आकृती 24.12 मध्ये काढला आहे .



आकृती 24.12

दिलेली माहिती दर्शवण्यासाठी आणखी एका प्रकारे आलेख काढता येतो . याला वारंवारता बहुभुज म्हणतात . 24.13 मधील आयतालेख पहा-



आकृती 24.13

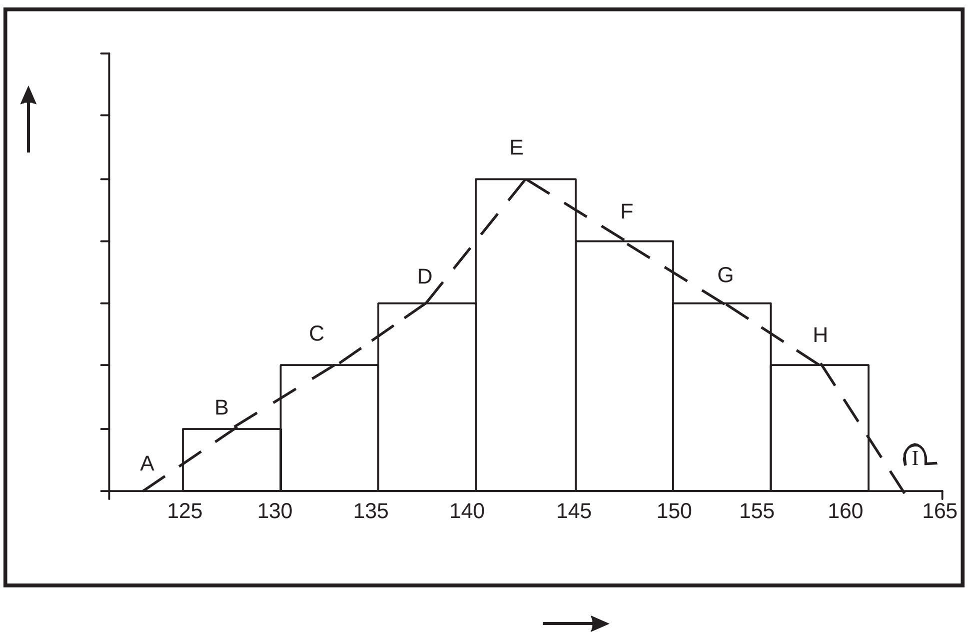
वंदू B,C,D,E,F आणि G हे लगतच्या आयतांच्या टोकांचे मध्यबिंदू घेतले. बिंदू B,C; C,D; D,E; E,F;आणि F,G जोडले.हे बिंदू ठिपक्यांच्या रेषाखंडांनी जोडले. वर्ग 10-20 चा मध्य A घ्या. वर्ग 80-90 चा मध्य H घ्या. A,B व G,H जोडा.

याप'माणे A,B,C,D,E,F,G आणि H हा वारंवारता बहुभुज तयार झाला.

सूचना ः पहिल्या व शेवटच्या वर्गाचा मध्यबिंदू अनुक्रमे त्याच्या अलिकडच्या व पलिकडच्या शून्य वारंवारतेशी जोडले असता बहुभुज पूर्ण होईल. यामुळे आयता लेखाचे क्षेत्रफळ व वारंवारता बहुभुजाचे क्षेत्रफळ समान होईल.

उदाः 24.11 :- 24.10 मध्ये दिलेल्या माहितीचा वारंवारता बहुभुज काढा.

उकल ः आकृती 24.12 मध्ये उदाहरण 24.10 चा आयतालेख काढला आहे. त्याच्या टोकाचे B,C,D,E,F, G आणि H हे बिंदू क्रमाने जोडले. A आणि I शुन्य वारंवारतेचे मध्यबिंदू घेऊन वारंवारता बहुभुज पूर्ण केला.



उदाः 24.12:- इ. 9 वीतील विद्यार्थ्यांचे गणितात 30 पैकी मिळालेले गुण दिले आहेत.

मिळालेले गुण	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
विद्यार्थी संख्या	5	8	6	7	4

या माहितीचा वारंवारता बहुभूज काढा.

उकल ः प्रथम या माहितीचा आयतालेख काढा.

टिपा

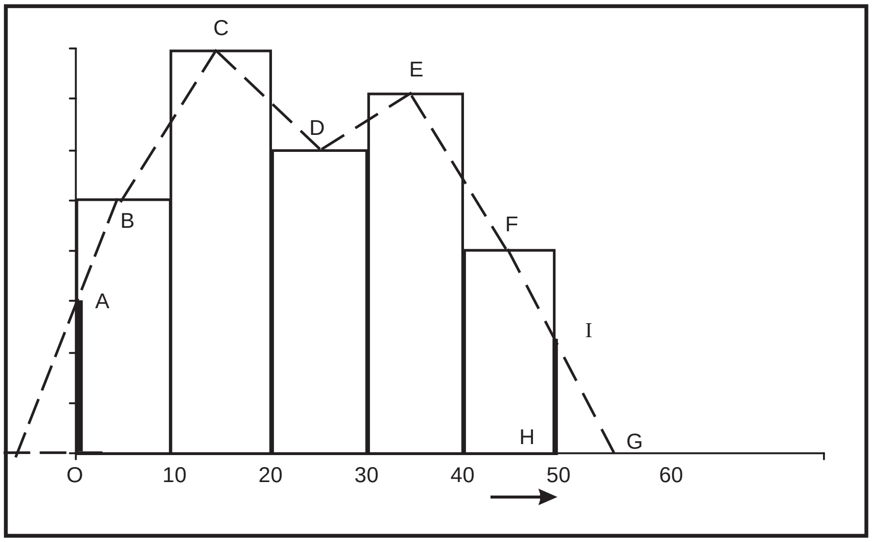


Fig. 24.15

बिंदू B,C,D,E आणि F स्थापन करा. येथे पहिला वर्ग 0-10 आहे म्हणून 0-10 पूर्वीच्या वर्गाचा मध्य काढा. यासाठी X अक्ष ऋण बाजूला वाढवा. हा मध्यबिंदू काल्पनिक वर्गाचा (-10) – 0 असेल.

हा रेषाखंड Y अक्षाला जेथे मिळतो त्याचा A हा मध्यबिंदू आहे. G हा 50-60 या वर्गाचा मध्यबिंदू आहे. (शेवटच्या वर्गानंतर) रेख FG शेवटच्या आयताला I बिंदूत छेदते. (आकृती 24.15) OABCDEFIH हा वारंवारता बहुभुज आहे.

सूचना : आपण O पूर्वी व G नंतर बिंदू का घेतले नाहीत? कारण गुण शुन्यापेक्षा कमी असू शकत नाही आणि 50 पेक्षा जास्त असू शकत नाही. आकृतीमध्ये दोन्ही टोकाकडील बाजू पूर्ण काढल्या नाहीत. उभ्या अक्षात 0 आणि 50 पर्यंत काढल्या आहेत.

वारंवारता बहुभुज आयतालेख न काढताही स्वतंत्रपणे काढता येतो. उदाहरण घेऊन कसा काढायचा ते पाहु. उदा. 24.13

24.9 मधील माहिती घेऊन त्याचा वारंवारता बहुभुज काढा. यासाठी आयतालेख काढू नका.

उकल : आयतालेख शिवाय वारंवारता बहुभुज काढण्यासाठी पुढील पाय-या वापरू.

पायरी 1 : आलेख कागदावर X अक्ष व Y अक्ष काढा.

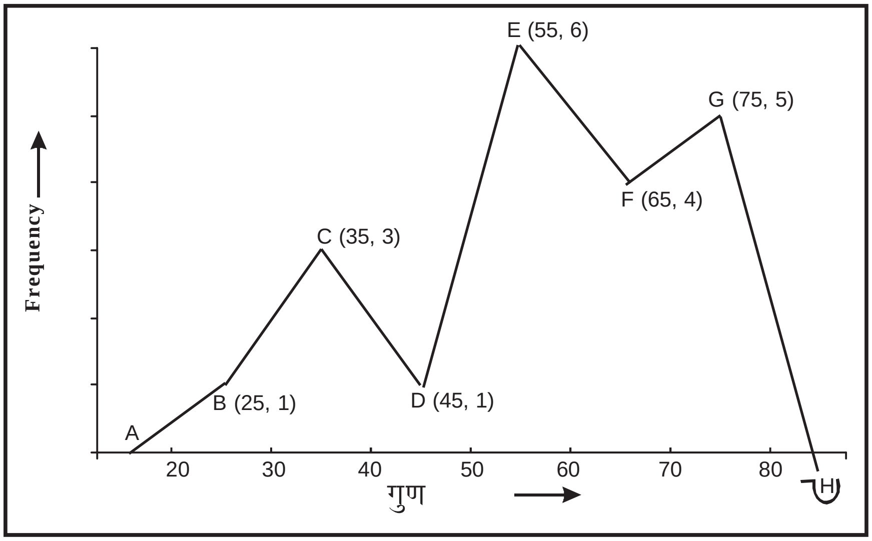
पायरी 2 : प्र्त्येक वर्गाचा वर्गमध्य काढा.

$\frac{20+30}{2}, \frac{30+40}{2}, \frac{40+50}{2}, \frac{50+60}{2}, \frac{60+70}{2}, \frac{70+80}{2}$ ते 25,35,45,55,65,75 आले.

पायरी 3 : B बिंदू (25,1), C (35,3), D (45,1), E (55,6), F (65,4), G (75,5) स्थापन करा. (वर्गमध्य, वारंवारता) ही क्रमित जोडी आहे.

पायरी 4 : बिंदू B,C,D,E,F,G जोडा आणि प्रथम सांगितल्याप्रमाणे वारंवारता बहुभुज पुर्ण करा.

आयतालेखाचे वाचन



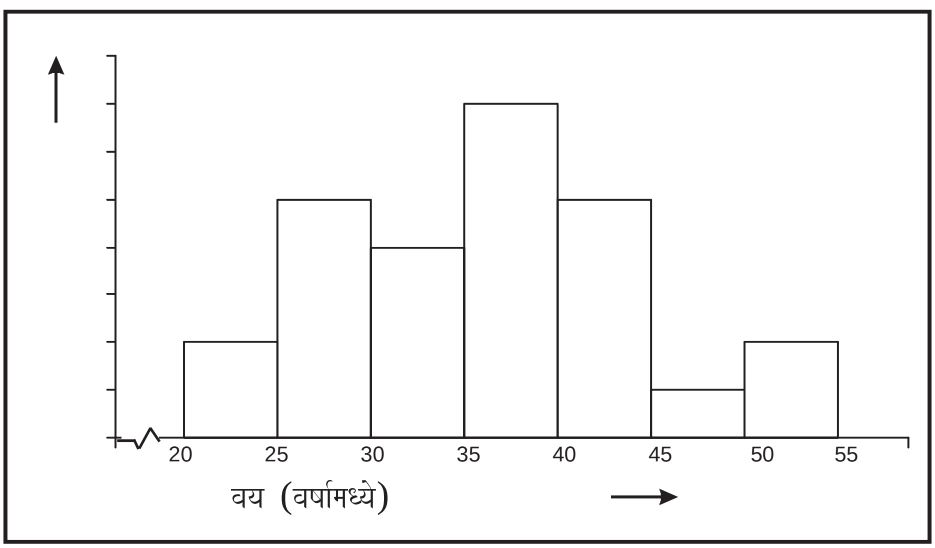
आकृती 24.16

पुढील उदाहरण पहा.

उदा : 24.14 : पुढील आयतालेख वाचून प्रश्नांची उत्तरे द्या.

प्रश्न :-

(1) शाळेतील तरूण आणि वयाने ज्येष्ठ असणाऱ्या शिक्षकांची प्रत्येकी संख्या किती ?



(2) कोणत्या वर्गात शिक्षकांची संख्या सर्वात जास्त आहे ?

(3) कोणत्या गटात शिक्षकांची संख्या 4 आहे ?

(4) कोणत्या दोन वयोगटात शिक्षकांची संख्या समान आहे.

उत्तरे :-

(1) शाळेतील तरूण व वयाने ज्येष्ठ असे एकूण 3+2 = 5 शिक्षक आहेत.

(2) 35-40 या वर्गात शिक्षकांची संख्या सर्वात जास्त आहे.

(3) 30-35 या गटात शिक्षकांची संख्या 4 आहे.

(4) 25-30 व 40-45 या गटात तसेच 50-55 व 20-25 या गटात शिक्षकांची संख्या समान आहे.

आपली प्रगती तपासा 24.5

१. गाळलेल्या जागा भरा.

(1) आयतालेखात वर्ग अवकाश .... अक्षावर घेतात.

(2) आयतालेखात वारंवारता .... अक्षावर घेतात.

(3) आयतालेखात आयतांचे क्षेत्रफळ त्यांच्या .... च्या अनुक्रमे प्रमाणात असते.

(4) वर्गाच्या .... चे प्रतिरूपण आयतालेखाच्या स्वरूपात असते.

2. 26 कामगारांचे रोजचे उत्पन्न दिले आहे.

रोजचे उत्पन्न रू.	150-200	200-250	250-300	300-350	350-400
कामगारांची संख्या	4	8	5	6	3

याचा आयतालेख काढा.

१. वरील उदा. 2 मधील माहितीच्या आधारे (a) आयतालेखाचा वापर करून
(b) आयतालेखा विषय वारंवारता बहुभुज काढा.

२. पुढील आयतालेखाचे निरीक्षण करून प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

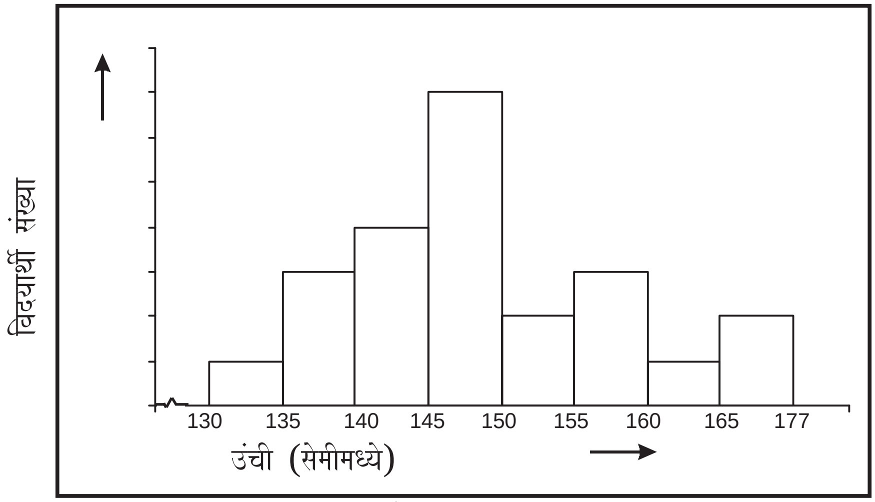
(i) आयतालेखात कोणती माहिती दिली आहे ?

(ii) कोणत्य वर्गात विद्यार्थ्यांची संख्या सर्वात जास्त आहे ?

(iii) 145 सेमी किंवा त्यापेक्षा जास्त उंची किती विद्यार्थ्यांची आहे ?

(iv) 140 सेमी पेक्षा कमी उंची असणारे विद्यार्थी किती ?

(v) 140 किंवा 140 पेक्षा जास्त पण 155 सेमी पेक्षा कमी उंची असणारे विद्यार्थी किती?



आकृती **24.18**

सारांश

- सांख्यिकी ही गणित विषयाची एक शाखा आहे. त्यामध्ये माहिती गोळा करणे, त्याची रचना करणे, विश्लेषण करणे व निर्वचन करणे याचा अंतर्भाव आहे.
- सांख्यिकी हा शब्द एकवचन व अनेकवचनात वापरतात.
- गोळा केलेली माहिती आहे तशी वापरली तर तिला कच्ची सामग्री म्हणतात.
- संशोधकाने स्वतःचे उद्दिष्ट समोर ठेऊन एखादी माहिती गोळा केली तर त्या माहितीला प्राथमिक माहिती म्हणतात.
- छापील माहिती किंवा इतरांनी गोळा केलेली माहिती वापरल्यास तिला दुय्यम माहिती म्हणतात.
- कच्ची सामग्री चढत्या किंवा उतरत्या क्रमाने मांडल्यास त्यास वर्गीकृत माहिती म्हणतात.
- जेव्हा वर्गीकृत माहिती वारंवारतेच्या स्वरूपात मांडली जाते तेव्हा तिला अवर्गीकृत सामग्रीची वारंवारता सारणी किंवा वारंवारता वितरण सारणी म्हणतात.
- दिलेली माहिती गट/ वर्ग यांच्या स्वरूपात मांडली जाते तेव्हा तिला वर्गीकृत मांडणी म्हणतात.
- लहानात लहान व मोठयात मोठया संख्या यातील फरकाला वर्ग विस्तार म्हणतात.
- वर्ग विस्तारावरून वर्गांची संख्या व वर्गअवकाश ठरवतात.
- 10-15 या वर्गातील 10 खालची वर्गमर्यादा व 15 ही वरची वर्गमर्यादा आहे.

- एखाद्या वर्गातील निरीक्षणांच्या संख्येस वारंवारता म्हणतात. वारंवारता व वर्ग दाखवणा–या तक्त्यास वारंवारता सारणी म्हणतात.
- कधी कधी वर्ग सलग करण्यासाठी ते बदलावे लागतात. यावेळी वर्ग मर्यादिला खरी वर्गमर्यादा म्हणतात.
- एखाद्या वर्गाची एकूण वारंवारता आणि त्याआधीच्या वर्गाची वारंवारता यांची बेरीज म्हणजे संचित वारंवारता होय.
- संचित वारंवारता दाखवणा–या सारणीस संचित वारंवारता सारणी म्हणतात.
- संख्यात्मक माहितीचा स्तंभालेख म्हणजे समान रूंदीचे आडवे किंवा उभे स्तंभ या स्तंभामध्ये समान अंतर असते.
- वर्गीकृत माहिती, सलग वर्ग असणा–या संख्यात्मक माहितीचा आयताकृती आलेख म्हणजे आयतालेख. आयता लेखातील आयतांचे क्षेत्रफळ त्यांच्या अनुक्रमित वारंवारतेच्या प्रमाणात असते.
- आयतालेखातील प्रत्येक आयताच्या टोकाचा मध्य घेऊन ओळीने बिंदू जोडून तयार झालेल्या आलेखाला वारंवारता बहुभुज म्हणतात. पहिल्या बिंदूच्या आधीचा मध्यबिंदू व शेवटच्या बिंदूनंतरचा मध्यबिंदू जोडून वारंवारता बहुभुज पूर्ण करतात.
- आयतालेखाशिवायही वारंवारता बहुभुज काढता येतो. यासाठी वर्गमध्य काढून त्यांची वारंवारता आलेखावर काढतात.

सत्रांत प्रश्न संग्रह ः

१. गाळलेल्या जागी योग्य शब्द / विधाने घालून वाक्य पूर्ण करा.

(i) दिलेली माहिती समान मापाच्या आटोपशीर वर्गात वारंवारतेसह मांडली जाते तेव्हा त्यास .... माहिती म्हणतात अशा सारणीस .... सारणी म्हणतात.

(ii) जेव्हा वर्ग सलग करण्यासाठी वर्गमर्यादा बदलतात तेव्हा त्यास .... वर्ग मर्यादा म्हणतात.

(iii) एकाच वर्गात असणा–या निरीक्षणांच्या संख्येस .... म्हणतात.

(iv) खालची वर्गमर्यादा व वरची वर्गमर्यादा यातील फरकास .... म्हणतात.

(v) एका वर्गाची वारंवारता व त्या आधीच्या वर्गाची वारंवारता यांच्या बेरजेस .... वारंवारता म्हणतात.

(vi) वर्गांतर म्हणजे .... वर्गमर्यादा व .... वर्गमर्यादा यातील फरक होय.

(vii) कच्ची माहिती चढत्या/ उतरत्या क्रमाने मांडल्यास यातील फरकाला .... म्हणतात.

2. 30 कुटुंबात प्रत्येक कुटुंबात असणा-या दूरदर्शन संचाची संख्या दिली आहे. याची वारंवारता सारणी तयार करा.

1,2,2,4,2,1,1,1,2,1,3,1,1,1,3

1,2,2,1,2,0,3,3,1,2,1,1,0,1,1

3. 50 कुटुंबाकडे असलेल्या दुचाकींची संख्या दिली आहे. त्याची वारंवारता वितरण सारणी तयार करा.

2,1,2,1,1,1,2,1,2,1,0,1,1,2,3,1,1,1,

2,2,1,1,3,1,1,2,1,0,1,2,1,2,1,1,4,1,

3,1,1,1,2,2,2,2,1,1,3,2,1,2

4 . नवीन वर्षाच्या शुभेच्छा कार्डांचे ग्रॅममध्ये वजन दिले आहे. त्याचे 5.5 – 7.5, 7.5 – 9.5 .... अशा वर्गात वितरण करून वारंवारता सारणी तयार करा.

10.4	6.3	8.7	7.3	8.8	9.1	6.7	11.1	14.0	12.2
11.3	9.4	8.6	7.1	8.4	10.0	9.1	8.8	10.3	10.2
7.3	8.6	9.7	10.9	13.6	9.8	8.9	9.2	10.8	9.4
6.2	8.8	9.4	9.9	10.1	11.4	11.8	11.2	10.1	8.3

5 .30 गाजरांची लांबी जवळच्या सेमीपर्यंत घेतली आहे. 10-12, 12-14 .... असे वर्गांतर घेऊन वारंवारता सारणी तयार करा.

15	21	20	10	18	18	16	18	20	20
18	16	13	15	15	16	13	14	14	16
12	15	17	12	14	15	13	11	14	17

6. 40 व्यक्तींचे वजन किग्रॅमध्ये दिले आहे.

वजन	व्यक्तिंची संख्या
40-45	4
45-50	5
50-55	10
55-60	7
60-65	6
65-70	8
एकूण	40

(i) 40-45, 45-50 चा वर्गमध्य काढा.

(ii) संचित वारंवारता सारणी तयार करा.

7. वर्गमध्य आणि त्या वर्गाची वारंवारता दिली आहे. त्यावरून वारंवारता सारणी व संचित वारंवारता सारणी तयार करा.

वर्गमध्य	5	15	25	35	45	55	65	75
वारंवारता	2	6	10	15	12	8	5	2

8. वारंवारता सारणी पहा त्यावरून प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

वजन	व्यक्तिंची संख्या
15-20	2
20-25	3
25-30	5
30-35	7
35-40	4
40-45	3
45-50	1
एकूण	25

(i) 15-20 या वर्गाची खालची वर्गमर्यादा लिहा.

(ii) 25-30 या वर्गाची वरची वर्गमर्यादा लिहा.

(iii) 35-40 या वर्गाचा वर्गमध्य लिहा.

(iv) वर्गांतर लिहा.

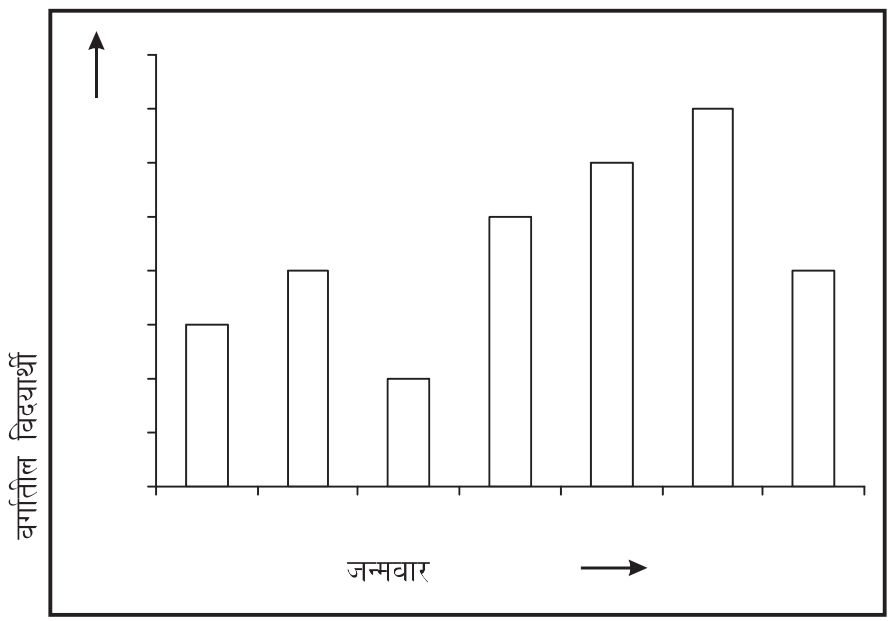
(v) संचित वारंवारता सारणी लिहा.

9. 50 विद्यार्थ्यांना मिळालेले गुण संचित वारंवारता सारणीत दिले आहेत. त्यावरून वारंवारता सारणी तयार करा.

गुण	विद्यार्थी संख्या
20 पेक्षा कमी	15
40 पेक्षा कमी	24
60 पेक्षा कमी	29
80 पेक्षा कमी	34
100 पेक्षा कमी	50

10. एका दुकानदाराची रोजची विक्री दिली आहे. त्याचा स्तंभालेख काढा.

दिवस	सोमवार	मंगळवार	बुधवार	गुरूवार	शुक्रवार	शनिवार
विक्री	16000	18000	17500	9000	85000	16500



आकृती 14.19

11. या स्तंभालेखाचे वाचन करून पुढील प्'श्नांची उत्तरे लिहा.

(i) या स्तंभालेखात कशाची माहिती दिली आहे?

(ii) कोणत्या दिवशी जास्त मुलांचा जन्म झाला ?

(iii) मंगळवारपेक्षा गुरूवारी किती जास्त मुलांचा जन्म झाला आहे ?

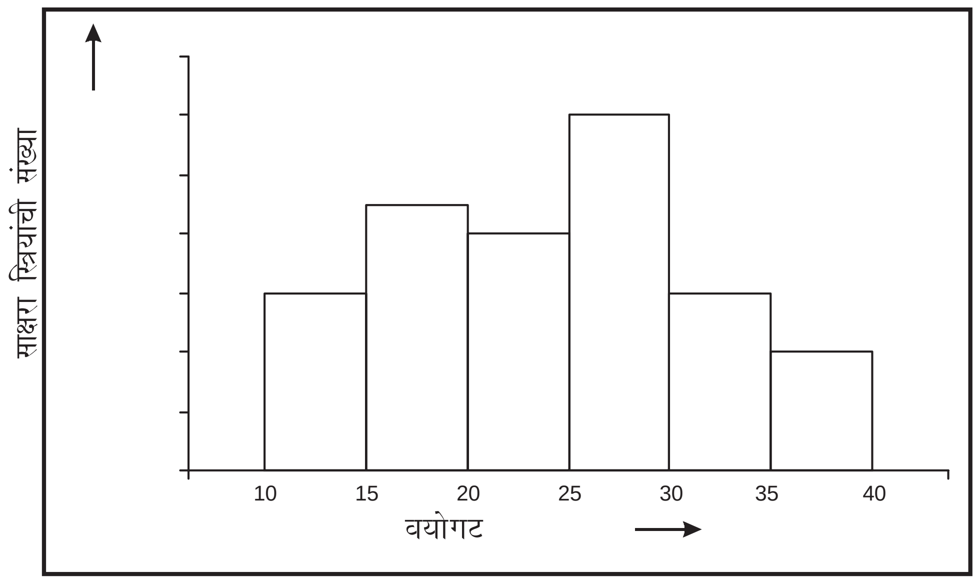
(iv) वर्गातील एकूण विद्यार्थ्यांची संख्या किती ?

12. 50 स्पर्धकांचे कोडे सोडवण्यास लागलेल्या वेळाची (मिनीटात) सारणी दिली आहे. त्याचा (i) आयतालेख (ii) वारंवारता बहुभुज काढा.

काल (मिनिटात)	स्पर्धकांची संख्या
20-25	8
25-30	10
30-35	9
35-40	12
40-45	6
45-50	5

13. उदाहरण 12 मध्ये दिलेल्या माहितीचा आयतालेख न काढता वारंवारता बहुभुज काढा.

14. एका शहरातील 10 वर्षे ते 40 वर्षे वयातील साक्षर स्त्रियांची माहिती आयतालेखात दिली आहे. त्यावरून पुढील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.



आकृती 24.20

(i) 10 ते 40 वर्षे वयांतील किती त्रिज्या साक्षर आहेत?

(ii) कोणत्या वयोगटातील स्त्रियांची साक्षरतेची संख्या सर्वात जास्त आहे ?

(iii) कोणत्या दोन वयोगटातील स्त्रियांची संख्या समान आहे?

(iv) सत्य की असत्य ते लिहा.

20 – 25 आणि 35-40 या वयोगटातील साक्षर स्त्रियांची बेरीज 25-30 वयोगटातील स्त्रियांच्या संख्येएवढी आहे.

15. योग्य पर्याय निवडा.

(i) 90-120, 120-150 यांच्या वर्गमध्याची बेरीज किती ?

(A) 210 (B) 220 (C) 240 (D) 270

(ii) 28, 17, 20, 16, 19,12, 30, 32,10 या सामग्रीचा वर्ग विस्तार किती ?

(A) 22 (B) 28 (C) 30 (D) 32

(iii) वारंवारता वितरणात वर्गमध्य 12 आणि वर्गांतर 6 आहे म्हणून त्या वर्गाची खालची वर्गमर्यादा .... आहे.

(A) 6 (B) 9 (C) 12 (D) 18

(iv) पहिल्या सलग पाच वर्गाची वर्गमर्यादा 5 आहे. पहिल्या वर्गाची खालची मर्यादा 10 असल्यास शेवटच्या वर्गाची वरची वर्गमर्यादा किती असेल.

(A) 15 (B) 20(C) 30 (D) 35

(v) वर्गमध्य 10,15,20 .... आहे. 15 वर्गमध्य असणारा वर्ग कोणता?

(A) 11.5 – 18.5 (B) 17.5 – 22.5 (C) 12.5 – 17.5 (D) 13.5-16.5

(vi) सलग वर्ग असणा–या सामग्रीचा वारंवारता बहुभुज काढताना वर्गाच्या वारंवारतेची संख्या आलेखावर काढतो त्याचा निर्देशक कोणता असतो ?

(A) वर्गाचा वर्गमध्य (B) वर्गाची खालची वर्गमर्यादा (C) वर्गाची वरची वर्गमर्यादा (D) पुढील वर्गाची वरची वर्ग मर्यादा

टिपा

आपली प्रगती तपासा - उत्तरे

24.1 (a) वर्गीकरण, मांडणी, निष्कर्ष (b) संख्यात्मक (c) प्राथमिक
(d) दुय्यम (e) सांख्यिकी माहितीचे
(2) प्राथमिक (3) दुय्यम

24.2 (2) 21 सेमी

गुण	विद्यार्थी संख्या
0-10	1
10-19	2
20-29	1
30-39	2
40-49	5
50-59	6
60-69	6
70-79	4
80-89	2
90-91	1
एकूण	30

वर्गांतर	वारंवारता
210-230	2
230-250	5
250-270	2
270-290	2
290-310	4
310-330	6
330-350	2
350-370	2
370-390	0
390-410	3
एकूण	25

19 विद्यार्थ्यांना 49 पेक्षा जास्त गुण मिळाले.

6. (a) 6 (b) 43 (c) 49

24.3

वर्ग	वारंवारता	संचित वारंवारता
1-5	4	4
6-10	6	10
11-15	10	20
16-20	13	33
21-25	6	39
26-30	2	41
एकूण	41	

वर्ग	वारंवारता	संचित वारंवारता
0-10	3	3
10-20	10	13
20-30	24	37
30-40	32	69
40-50	9	78
50-60	7	85
एकूण	85	

उंची (सेमी)	विद्यार्थी संख्या	संचित वारंवारता
110-120	14	14
120-130	30	44
130-140	60	104
140-150	42	146
150-160	14	160
एकूण	160	

140 विद्यार्थ्यांची उंची 150 सेमी पेक्षा कमी आहे.

24.4

(1) (i) समान (ii) सारखी (iii) प्रमाणात

(2) (i) 2 (ii) 6 (iii) वस

(3) (i) 6 (ii) फुटबॉल (iii) टेबलटेनिस

(4) (i) 5900 (ii) 2007 (iii) 2008

24.5

(1) (i) आडवा अक्ष (X अक्ष) (ii) उभा अक्ष (Y अक्ष)
(iii) वारंवारते (iv) सलग वर्गीकृत वारंवारता वितरणा

(4) (i) विद्यार्थ्यांची सेमी मध्ये उंची दिली आहे.
(ii) 145-150 (iii) 15 (iv) 4 (v) 13

सत्रात प्रश्नसंग्रह उत्तरे

1. (i) वर्गीकृत, वारंवारता (ii) खरी (iii) वारंवारता
(iv) वर्गांतर (v) संचित वारंवारता (vi) वरची, खालची
(vii) वर्गीकृत (viii) वर्ग विस्तार

2.

दूरदर्शन संचाची संख्या	कुटुंबाची संख्या
0	2
1	15
2	8
3	4
4	1
एकूण	30

दुचाकीची संख्या	कुटुंबाची संख्या
0	2
1	27
2	16
3	4
4	1
एकूण	50

वजन (ग्रॅममध्ये)	कार्डाची संख्या
5.5 – 7.5	6
7.5 – 9.5	15
9.5 – 11.5	15
11.5 – 13.5	2
13.5 – 15.5	2
एकूण	40

लांबी (सेमी)	गाजरांची संख्या
10-12	2
12-14	5
14-16	9
16-18	6
18-20	4
20-22	4
एकूण	30

वजन (किग्रॅ)	व्यक्तींची संख्या	संचित वारंवारता
40-45	4	4
45-50	5	9
50-55	10	19
55-60	7	26
60-65	6	32
65-70	8	40
एकूण	40	

वर्गांतर	वारंवारता	संचित वारंवारता
0-10	2	2
10-20	6	8
20-30	10	18
30-40	15	33
40-50	12	45
50-60	8	53
60-70	5	58
70-80	2	60
एकूण	60	

8. (i) 15 (ii) खालची वर्गमर्यादा 25 वरची वर्गमर्यादा 30

(iii) 37.5 (iv) 5

वर्ग	वारंवारता	संचित वारंवारता
15-20	2	2
20-25	3	5
25-30	5	10
30-35	7	17
35-40	4	21
40-45	3	24
45-50	1	25
एकूण	25	

गुण	वारंवारता (विद्यार्थी संख्या)
0-20	15
20-40	9
40-60	5
60-80	5
80-100	16

11. (i) वर्गातील विद्यार्थ्यांचा जन्म दिवस
    (ii) शनिवार (iii) 1 (iv) 31
14. (i) 2250 (ii) 25-30 (iii) 10-15 आणि 30-35
    (iv) सत्य
15. (C)
16. (A)
17. (B)
18. (D)
19. (C)
20. (A)

25

केंद्रीय प्रवृत्तीचे मापन

मागील प्रकरणात आपण असे पाहिले की दिलेली सामग्री (निरीक्षणे) काही प्रमाणात सारांश रूपात लिहिण्यासाठी वारंवारता सारणी तयार करतो. आपण दिलेली माहिती स्तंभालेख, आयतालेख, वारंवारता बहुभुज यांच्या स्वरूपात कशी मांडायची हे सुध्दा शिकतो. दिलेल्या माहितीची मांडणी संख्यात्मक पध्दतीने केल्यास त्या माहितीचे आणखी पैलू सापडतात. सरासरी हा त्यातीलच एक पैलू आहे. सरासरी किंवा मध्य दिलेल्या माहितीच्या एका संख्येभोवती एकवटलेला असतो. तो साधारणपणे दोन टोकांच्या संख्येच्या मध्यावर असतो म्हणून सरासरीला केंद्रीय प्रवृत्ती म्हणतात.

या प्रकरणात आपण

(I) अंकगणितीय सरासरी किंवा मध्य

(II) मध्यक

(III) बहुलक या काही केंद्रीय प्रवृत्तींचा अभ्यास करणार आहोत.

उद्दिष्टे :-

या प्रकरणात अभ्यास केल्यावर तुम्ही

- कच्चा, अवर्गीकृत, वर्गीकृत सामग्रीच्या मध्याची व्याख्या
- कच्चा, अवर्गीकृत, वर्गीकृत सामग्रीच्या मध्य साध्या आणि जवळपासच्या पध्दतीने काढणे.
- कच्चा/अवर्गीकृत सामग'ीच्या मध्यक व बहुलक यांची व्याख्या
- कच्चा/अवर्गीकृत सामग'ीच्या मध्यक व बहुलक काढणे या गोष्टी करू शकाल.

25.1 अंकगणितीय सरासरी किंवा मध्य :-

तुम्ही तुमच्या आजुबाजुला सरासरी वेग, सरासरी पाऊस, सरासरी उंची, सरासरी गुण असे शब्द ऐकले असतील. समजा विद्यार्थ्यांची सरासरी ऊंची 150सेमी आहे असे सांगितले तर त्याचा अर्थ वर्गातील

विद्यार्थ्यांची उंची 150 सेमीच्या जवळपास आहे. काहींची उंची 150 सेमी पेक्षा कमी किंवा जास्त किंवा तेवढीच असू शकेल.

25.1.1 कच्च्या सामग्रीचा मध्य (अंकगणितीय सरासरी)

कच्च्या सामग्रीचा मध्य काढण्यासाठी दिलेल्या सर्व निरीक्षणांची बेरीज करून त्या बेरजेला निरीक्षणांच्या संख्येने भागावे लागते. समजा निरीक्षणे $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_n$, आहेत.

$$\therefore \frac{x_1 + x_2 + x_3 \ldots\ldots\ldots x_n}{n}$$

साधारणपणे मध्य x असा दाखवला जातो.

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 \ldots\ldots\ldots x_n}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ (I)}$$

Σ या चिन्हाला 'सिग्मा' म्हणतात. हे ग्रीक भाषेतील अक्षर आहे. याचा उपयोग बेरीज दाखवण्यासाठी करतात. हे चिन्ह बेरीज थोडक्यात लिहिण्यासाठी वापरतात.

$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ मध्ये i हे चिन्ह बेरजेचा घात दाखवण्यासाठी वापरतात.

उदा. 25.1 : चार गव्हाच्या पोत्यांचे (किग्रॅ) मधील वजन 103, 105, 102, 104 आहे. तर पोत्याचे सरासरी वजन किती ?

उकल ः (मध्य) सरासरी वजन $x = \frac{103+105+102+104}{4}$

$$= \frac{414}{4} = 103.5 \text{ किग्रॅ.}$$

उदा. 25.2 :- एका शाळेत गेल्या पाच वर्षात प्रवेश घेतलेल्या विद्यार्थ्यांची संख्या 605, 710, 745, 835 आणि वाढ आहे. तर प्रवेश घेतलेल्या विद्यार्थ्यांची सरासरी किती ?

उकल ः प्रवेश घेतलेल्या विद्यार्थ्यांची सरासरी

$$= \frac{605+710+745+835+910}{5}$$

$$= \frac{3805}{5} = 761$$

उदा. 25.3 :- इयत्ता 9 वी तील 30 विद्यार्थ्यांना गणिताच्या चाचणीत मिळालेले गुण दिले आहेत. त्याची सरासरी काढा.

40	73	49	83	40	49	27	91	37	31
91	40	31	73	17	49	73	62	40	62
49	50	80	35	40	62	73	49	31	28

उकल ः निरीक्षणांची संख्या 30

$x_1 = 40, x_2 = 73 \dots \dots \dots \dots . x_{10} = 31$

$x_{11} = 91, x_{12} = 40 \dots \dots \dots . . x_{20} = 62$

$x_{21} = 49, x_{22} = 50 \dots \dots \dots . . x_{30} = 28$

सूत्रावरून $\overline{x} = \sum_{xi}^{30} x_i = \frac{40+73..............+28}{30} = \frac{1455}{30}$

$= 48.5$

उदा. **25.4:- 25.1** या उदाहरणातील माहितीवरून

$x_1 - x, x_2 - x, x_3 - x, x_4 - x,$ यांची बेरीज शून्य येते हे दाखवा. $x_1, x_2 \dots \dots \dots \dots . . x_4$ ही पोत्यांची वजने असून x ही सरासरी आहे.

उकल ः - $x_1 - x = 103 - 103.5 = -0.5$

$x_2 - x = 105 - 103.5 = 1.5$

$x_3 - x = 102 - 103.5 = -1.5$

$x_4 - x = 104 - 103.5 = 0.5$

$-0.5 + 1.5 + (-1.5) + 0.5 = 0$

उदा. 25.5 :- विभाग A मधील 30 विद्यार्थ्यांचे सरासरी गुण 48 असून विभाग B मधील 35 विद्यार्थ्यांचे सरासरी गुण 65 आहेत. तर इ. 10 वीतील 65 विद्यार्थ्यांचे सरासरी गुण किती ?

उकल : विभाग A मधील 30 विद्यार्थ्यांचे सरासरी गुण 48

∴ विभाग A मधील 30 विद्यार्थ्यांचे एकूण गुण 48 X 30 = 1440

विभाग B मधील 35 विद्यार्थ्यांचे सरासरी गुण 50

∴ विभाग B मधील 35 विद्यार्थ्यांचे एकूण गुण 50 X 35 = 1750

दोन्ही विभागातील विद्यार्थ्यांचे एकूण गुण 1440 + 1750 = 3190

∴ 65 विद्यार्थ्यांचे सरासरी गुण $\frac{3190}{65} = 49.1$ अंदाजे

उदा. 25.6 :- निरीक्षणांची सरासरी 40 आहे. नंतर असे लक्षात आले की एक निरीक्षण 82 ऐवजी 28 लिहिले गेले. तर खरी सरासरी काढा.

उकल : 6 निरीक्षणांची सरासरी 40

$\therefore$ 6 निरीक्षणांची एकूण बेरीज 40 X 6 = 240

82 ऐवजी 28 लिहिले म्हणजे खरी बेरीज 240-28+82 = 294

$\therefore$ खरी सरासरी $= \frac{294}{6} = 49$

आपली प्रगती तपासा 25.1

1. $x_1, x_2, \ldots \ldots . . x_n$ निरीक्षणांची सरासरी काढण्याचे सूत्र लिहा.
2. पहिल्या दहा नैसर्गिक संख्यांची सरासरी काढा.
3. आठवडयाच्या सहा दिवस एका किराणा दुकानात झालेली साखरेची विक्री दिली आहे. तर सरासरी विक्री काढा.

वार	सोमवार	मंगळवार	बुधवार	गुरूवार	शुक्रवार	शनिवार
किग्रॅमध्ये	74	121	40	82	70.5	103.5

4. दहा विद्यार्थिनींची सेमी मध्ये मोजलेली उंची दिली आहे. त्याची सरासरी काढा.
   142, 149, 135, 150, 128, 140, 149, 152, 138, 145
5. एका शहराचे सलग 12 दिवसांचे सेल्सिअसमध्ये तापमान दिले आहे. त्याची सरासरी काढा.

32.4	29.5	26.6	25.7	23.5	24.6
24.2	22.4	24.2	23.0	23.2	28.8

6. उदा. 2 ची निरीक्षणे घ्या. त्यामध्ये $x_1 - x, x_2 - x \ldots ..$ यांची बेरीज शून्य येते हे दाखवा.
7. 9 निरीक्षणांची सरासरी 35 आहे नंतर असे लक्षात आले की 81 ऐवजी 18 हे निरीक्षण नोंदवले तर निरीक्षणाची खरी सरासरी काढा.
8. 25 विद्यार्थ्यांनी मिळविलेल्या गुणांची सरासरी 35 असून 35 विद्यार्थ्यांनी मिळवलेल्या गुणांची सरासरी 25 आहे. तर सर्व विद्यार्थ्यांनी मिळवलेल्या गुणांची सरासरी काढा.

25.1.2. अवर्गीकृत माहितीची (सरासरी) मध्य

अवगीकृत माहितीचा मध्य कसा काढायचा ते एका उदाहरणावरून समजून घेऊ.

20 विद्यार्थ्यांना 15 पैकी मिळालेले गुण दिले आहेत.

12	10	5	8	15	5	2	8	10	5
10	12	12	2	5	2	8	10	5	10

ही कच्ची माहिती आहे. आपण $\frac{\Sigma x_i}{n}$ या सूत्रावरून मध्य काढता येईल. पण या कृतीला खूप वेळ लागेल. आपल्याला दिलेल्या माहितीची वारंवारता सारणी करून मध्य काढता येईल.

मध्य $\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\Sigma f_i}$

येथे f_i ही x_i ची वारंवारता आहे.

दिलेल्या माहितीची वारंवारता सारणी

गुण x_i,	विद्यार्थी संख्या f_i ,
2	4
5	5
8	3
10	5
12	2
15	1
	$\Sigma f_i = 20$

दिलेल्या माहितीची सरासरी काढण्यासाठी प्रथम $f_i\, x_i$ काढू. आणि $f_i\, x_i$ या स्तंभात लिहू. $\Sigma f_i x_i$ काढू.

गुण x_i,	विद्यार्थी संख्या	f_i ,
2	4	2 X 4 =8
5	5	5X5 = 25
8	3	8X3 = 24
10	5	10X 5 = 50
12	2	12 X2 = 24
15	1	15 X 1 = 15
	$\Sigma f_i = 20$	$\Sigma f_i x_i = 146$

मध्य $= \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{146}{20} = 7.3$

उदा. 25.7 : एका आठवडयाचा नोकरांचा पगार तक्त्यात दिला आहे. त्याची (सरासरी) मध्य काढा.

आठवडयाचा पगार	900	1000	1100	1200	1300	1100	1500
नोकरांची संख्या	12	13	14	13	14	11	5

उकल : सारणीमध्ये पहिला स्तंभ x_i, दुसरा स्तंभ f_i दर्शवतो. तिसरा स्तंभ $f_i\, x_i$ दर्शवतो. सारणी तयार करू.

आठवडयाचा पगार	नोकरांची संख्या f_i	$f_i\, x_i$
900	12	900X 12 = 10800
1000	13	1000 X 13 = 1300
1100	14	1100 X 14 = 15400
1200	13	1200 X 13 = 15600
1300	12	1300 X 12 = 15600
1400	11	1400 X 11 = 15400
1500	5	1500 X 5 = 7500
	$\Sigma f_i = 80$	$\Sigma f_i\, x_i$ = 93,300

सूत्र वापरू $x = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{93300}{80} = 1166.25$

जेव्हा $f_i x_i$ या किंमती मोठया असतात तेव्हा गुणाकार करणे किचकट व वेळखाऊ असते. त्यासाठी एक सोपी पध्दत अभ्यासू. येथे आपण a हा कोणताही स्थिरांक मानू.

$d_i = x_i - a$ याला विचलन म्हणतात. x_i चे पासूनचे विचलन काढू.

$$\therefore x_i = -a + d_i$$

आणि $f_i\, x_i = af_i + f_i\, d_i$

$$\sum_{i=1}^{n} f_i x_i = \sum_{i=1}^{n} af_i + \sum_{i=1}^{n} af_{i}di$$

$$\therefore \bar{x} = a + \frac{1}{N} \Sigma f_i d_i \text{ जेथे } \Sigma f_i = N$$

$$\bar{x} = a + \frac{1}{N} \Sigma f_i d_i \text{ कारण } \quad \text{......... III}$$

या पध्दतीला मानलेल्या मध्याची रीत म्हणतात. उदा. 29.7 मधील संख्या मोठया आहेत. त्यांचा मध्य मानलेल्या मध्याच्या पध्दतीने काढू.

मानलेला मध्य 1200 मानू.

आठवडयाचा पगार	नोकरांची संख्या f_i	विचलन $d_i = x_i - 1200$	$f_i d_i$
900	12	-300	-3600
1000	13	-200	-2600
1100	14	-100	-1400
1200	13	0	0
1300	12	100	+1200
1400	11	200	+2200
1500	5	300	+1500
	$\Sigma f_i = 80$		$\Sigma f_i d_i = -2700$

III सूत्र वापरून

मध्य $= a + \frac{1}{N} \Sigma f_i d_i$ $\qquad = 1200 - 33.75$

$= 1200 + \frac{1}{80} X - 2700$ $\qquad = 1166.25$

आठवडयाच्या पगाराचा मध्य 1166.25

दोन्ही पध्दतींनी मध्य सारखाच येतो.

उदा. 25.8 : खाली दिलेल्या माहितीचा मध्य 20.2 असल्यास K ची किंमत काढा.

X_i	10	15	20	25	30
f_i	**6**	**8**	**20**	**K**	**6**

उकल ः मध्य $= \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \dfrac{60+120+400+25K+180}{40+K}$

$$20.2 = \frac{760+25K}{40+K}$$

$$7600 + 250\text{ K} = 8080 = 202\text{ K}$$

$$\therefore \text{K} = 10$$

आपली प्रगती तपासा. 25.2

1. पुढील वितरणाचा मध्य काढा.

गुण	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
वारंवारता	1	3	5	9	14	18	16	9	3	2

2. पुढील प्रत्येकाचा मध्य काढा.

x	6	10	15	18	22	27	30
f	12	36	54	72	62	42	22

x	5	5.4	6.2	7.2	7.6	8.4	9.4
f	3	14	28	23	8	3	1

3. 70 कामगारांची किग्रॅममध्ये वजने दिली आहेत. त्याचा मध्य काढा.

वजन किग्रॅमध्ये	कामगारांची संख्या
60	10
61	8
62	14
63	16
64	15
65	7

4. खाली दिलेल्या माहितीचा मध्य 17.45 आहे तर P ची किंमत काढा.

x	15	16	17	18	19	20
f	3	8	10	P	5	4

25.1.3 वर्गीकृत माहितीचा मध्य

पुढील वर्गीकृत वारंवारता सारणी पहा.

रोजचा पगार	कामगारांची संख्या
150-160	5
160-170	8
170-180	15
180-190	10
190-200	2

वरील तक्त्यावरून असे समजते की 150-160 ‘. पगार मिळवणारे 5 कामगार आहेत. पण प्रत्येकाचा पगार किती हे आपल्याला माहित नाही.

मध्य काढण्यासाठी खालील गोष्टी गृहित धरू.

वारंवारता वर्गमध्याच्या भोवती असेल.

आता आपण असे म्हणू की 5 कामगारांना अंदाजे $\frac{150+160}{2}$ = 155 ‘. पगार मिळतो. 8 कामगारांना $\frac{160+170}{2}$ = 175 ‘. पगार मिळतो.

आता दिलेल्या माहितीचा मध्य पुढील प्रमाणे काढता येतो. सूत्र (I) चा वापर करू.

दैनंदिन पगार	कामगारांची संख्या	वर्गमध्य X_i	$f_i X_i$
150-160	5	155	775
160-170	8	165	1320
170-180	15	175	2625
180-190	10	185	850
190-200	2	195	390
	$\Sigma f_i = 40$		$\Sigma f_i X_i = 6960$

मध्य $= \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \dfrac{6960}{40} = 174$ $\therefore$ मध्य $= 174$

मध्य काढण्याच्या या पध्दतीला सरळ पध्दती म्हणतात. वगीकृत माहितीचा मध्य गृहित मध्य पध्दतीने काढू. गृहित मध्य 175 मानू.

दैनंदिन पगार	कामगारांची संख्या f_i	वर्गमध्य X_i	विचलन $d_i = x_i - 175$	$f_i d_i$
150-160	5	155	-20	-100
160-170	8	165	-10	-80
170-180	15	175	0	0
180-190	10	185	+10	100
190-200	2	195	+20	40
	$\Sigma f_i = 40$			$\Sigma f_i X_i = -40$

सूत्र III वापरून

मध्य $= a + \dfrac{1}{N} \Sigma f_i d_i$

$= 175 + \dfrac{1}{40} X - 40$

$= 175 - 1 = 174$

मध्य $= 174$

उदा. 25.9 : पुढील वारंवारता वितरणाचा मध्य (i) सरळ पध्दती (ii) गृहीत मध्य पध्दतीने काढा.

वर्ग	वारंवारता
20-40	9
40-60	11
60-80	14
80-100	6
100-120	8
120-140	15
140-160	12
एकूण	75

उकल ः (i) सरळ पध्दती

वर्ग	वारंवारता f_i	वर्गमध्य X_i	f_iX_i
20-40	9	30	270
40-60	11	50	550
60-80	14	70	980
80-100	6	90	540
100-120	8	110	880
120-140	15	130	1950
140-160	12	150	1800
	$\Sigma f_i = 75$		$\Sigma f_i X_i = 6970$

$\therefore$ मध्य $= \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \dfrac{6970}{75} = 92.93$

(ii) गृहीत मध्य पध्दती मध्य $a = 90$ मानू

वर्ग	वारंवारता f_i	वर्गमध्य X_i	विचलन $d_i = x_i - 90$	f_id_i
20-40	9	30	-60	-540
40-60	11	50	-40	-440
60-80	14	70	-20	-280
80-100	6	90	0	0
100-120	8	110	20	160
120-140	15	130	40	600
140-160	12	150	60	720

Mean $= a + \dfrac{1}{N}\Sigma f_i d_i = 90 + \dfrac{220}{75} = 92.93$

दोन्ही पध्दतींनी काढलेला मध्य समान आला. वरील सारणीमध्ये स्तंभ 4 मध्ये 20 चे गुणक आहेत. आपण त्या संख्यांना 20 ने भागले तर गणनासाठी लहान संख्या मिळतील.

लक्षात घ्या की 20 हा (वर्ग अवकाश) वर्गांतर आहे.

समजा $u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$ a हा गृहितमध्य आहे.

h हे वर्गांतर आहे.

आता आपण u_i ची किंमत नंतर $u_i f_i$ ची किंमत काढू आणि दिलेल्या सारणीचा मध्य काढू.

मध्य $= x = a + \left[\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right] X\, h$ ……………(IV)

25.9 या उदाहरणात दिलेल्या माहितीवरून मध्य काढू.

$a = 90, h = 20$

वर्ग	वारंवारता f_i	वर्गमध्य	विचलन $d_i = x_i - 90$	$u_i \frac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$
20-40	9	30	-60	-3	-27
40-60	11	50	-40	-2	-22
60-80	14	70	-20	-1	-14
80-100	6	90	+0	0	0
100-120	8	110	+20	1	8
120-140	15	130	+40	2	30
140-160	12	150	+60	3	36

सूत्र (IV) चा वापर करू

मध्य $= x = a + \left[\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right] X\, h$

$= 90 + \frac{11}{75} X\, 20$

$= 90 + \frac{220}{75} = 92.93$

विचलन पध्दतीने म्हणजेच (IV) सूत्राचा वापर करूनही दिलेल्या माहितीचा मध्य तोच येतो.

सरळ पध्दती, गृहीत मध्य पध्दती, विचलन पध्दतीने मध्य काढल्यास उत्तर तेच येते.

उदा. 25.10: पुढे दिलेल्या माहितीचा मध्य विचलन पध्दतीने काढा.

रोजचा पगार	150-160	160-170	170-180	180-190	190-200
नोकरांची संख्या	5	8	15	10	2

या उदाहरणाचा मध्य सरळ पध्दत, गृहित मध्य, पध्दतीने आपण काढला आहे. आता विचलन पध्दतीने या माहितीचा मध्य काढू.

उकल ः $a = 175 \quad h = 10$

रोजचा पगार	नोकरांची संख्या	वर्गमध्य f	विचलन $d_i = x_i - 90$	$u_i \frac{x_i - a}{h}$	$f_i u$
150-160	5	155	-20	**-2**	**-10**
160-170	8	165	-10	-1	-8
170-180	15	175	0	0	0
180-190	10	185	10	1	10
190-200	2	195	20	2	4

(IV) चे सूत्र वापरू

मध्य $= x = a + \left[\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right] X h$

$= 175 + \frac{-4}{40} X\, 10 \quad = 175 - 1 = 174$

सूचना : सरळ पध्दत, गृहीतमध्य पध्दत, विचलन पध्दत वापरून मध्य समान येतो.

आपली प्रगती तपासा. 25.3

1. गणिताच्या चाचणीत 100 विद्यार्थ्यांना मिळालेले गुण दिले आहेत.

गुण	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
विद्यार्थ्यांची संख्या	12	15	25	25	17	6

वरील माहितींचा मध्य सरळ पध्दतीने काढा.

2. खोक्यात ठेवलेल्या दिव्यांची संख्या दिली आहे. कोणत्याही पध्दतीने दिव्यांचा मध्य काढा.

दिव्यांची संख्या	50-52	52-54	54-56	56-58	58-60
खोक्यांची संख्या	15	100	126	10	30

3. एका शहरातील लोकांच्या आठवडयाच्या खर्चाची माहिती दिली आहे. विचलन पध्दतीने दिलेल्या माहितीचा मध्य काढा.

आठवडयाचा खर्च	140-150	150-160	160-170	170-180	180-190	190-200
आठवडयांची संख्या	5	8	20	9	6	4

4. दिलेल्या पध्दतीचा मध्य (i) गृहित मध्य पध्दती (ii) विचलन पध्दती वापरून काढा.

वर्ग	150-200	200-250	250-300	300-350	350-400
वारंवारता	48	32	35	20	10

मध्यक ः

एका ऑफीसमध्ये 5 नोकर आहेत. पर्यवेक्षक व 4 कामगार आहेत. कामगारांना 5000रू, 6500रू, 7500रू , 8000रू पगार आहे. पर्यवेक्षकाला 20000रू पगार आहे.

$$\text{मध्य} = \frac{5000+6500+7500+8000+20000}{5}$$

$$= \frac{47000}{5} = 9400$$

पाचपैकी चार व्यक्तिंना 8000 रू पेक्षा कमी पगार आहे. पगाराचा मध्य 9400रू आहे. 9400 ‘. एकाही व्यक्तिच्या पगाराशी जुळत नाही.

हा मध्य काढण्यातील दोष आहे. दिलेल्या माहितीच्या सर्वात कमी व सर्वात जास्त संख्येचा यावर परिणाम होतो. यासाठी केंद्रीय प्रवृत्तीचे दुसरे मापन पाहू. त्याला मध्यक म्हणतात.

दिलेली माहिती चढत्या किंवा उतरत्या क्रमाने मांडल्यास त्याचा मध्य म्हणजे मध्यक होय.

25.2.1. कच्च्या सामग्रीचा मध्यक

(i) दिलेली संख्यात्मक माहिती चढत्या किंवा उतरत्या क्रमाने मांडा.

(ii) जेव्हा दिलेली निरीक्षणे (n) विषम असतात तेव्हा मध्यकाची किंमत $\frac{n+1}{2}$ एवढी असते.

(iii) जेव्हा दिलेली निरीक्षणे सम असतात तेव्हा मध्यक हा $\frac{n}{2}$ आणि $\frac{n}{2} + 1$ यांचा मध्य असतो.

काही उदाहरणे घेऊन मध्यक समजून घेऊ.

उदा. 25.11 :- 15 कुत्र्यांची किग्रॅममधील वजने दिली आहेत.

9,26,10,22,36,13,20,20,10,21,25,16,12,14,16 याचा मध्यक काढा.

उकल : दिलेली माहिती चढत्या/ उतरत्या क्रमाने मांडू

9, 10,10, 12,13,14, 16, (19), 20,20, 21,22, 25, 36

$\uparrow$ मध्यक

निरीक्षणांची संख्या 15

म्हणून मध्यक = $\frac{15+1}{2}$ $= \mathbf{8}$ वी संख्या = 19 किग्रॅम

यावरून 50% कुत्र्यांचे वजन 19 किग्रॅम पेक्षा कमी आहे. 50% कुत्र्यांचे वजन 19 किग्रॅम पेक्षा जास्त आहे.

उदा. वास्केटवॉल स्पर्धेमध्ये मिळालेले गुण दिले आहेत.

16,1,06,26,14,4,13,8,9,23,47,9,7,8,17,28

दिलेल्या माहितीचा मध्यक काढा.

उकल : दिलेली निरीक्षणे 16

म्हणुन मध्यक $\frac{16}{2}$ आणि $\frac{16}{2} + \mathbf{1}$यांचा मध्य होय.

म्हणजेच 8 आणि 9 निरीक्षणांचा मध्य काढू.

ए ाथम दिलेली निरीक्षणे चढत्या क्रमाने लिहू.

1,4,6,7,8,8,9,9,13,14,16,17,23,26,28,47

$\frac{9+13}{2} = \mathbf{11} =$ मध्यक

येथे मध्यक 11 ही संख्या असे सांगते की 50% निरीक्षणे 11 पेक्षा कमी व 50% निरीक्षणे 11 पेक्षा मोठी आहेत.

अवर्गीकृत माहितीचा मध्यक

आपण यासाठी एक उदाहरण घेऊ

उदा. 25.13 दिलेल्या माहितीचा मध्यक काढा. 35 विद्यार्थ्यांचे चाचणीचे 15 पैकी गुण दिले आहेत.

मिळालेले गुण	3	5	6	11	15	14	13	7	12	10
विद्यार्थी संख्या	4	6	5	7	1	3	2	3	3	1

उकल : प्रथम गुण चढत्या क्रमाने मांडून पुढीलप्रमाणे सारणी तयार करा.

मिळालेले गुण	3	5	6	7	10	11	12	13	14	15
विद्यार्थी संख्या	4	6	5	3	1	7	3	2	3	1

येथे n = 35, 35 ही विषम संख्या आहे म्हणून

मध्यक $\frac{n+1}{2}$ वी संख्या $\therefore \frac{35+1}{2} = 18$ वी संख्या

18 वे निरीक्षण शोधण्यासाठी संचित वारंवारता सारणी करू.

मिळालेले गुण	विद्यार्थी संख्या	संचित वारंवारता
3	4	4
5	6	10
6	5	15
7	3	18
10	1	19
11	7	26
12	3	29
13	2	31
14	3	34
15	1	35

सारणीवरून 18 वे निरीक्षण 7 आहे. $\therefore$ मध्यक 7 आहे.

उदा. 25.14: पुढील माहितीचा मध्यक काढा.

वजन Kg मध्ये	**40**	**41**	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**48**
विद्यार्थी संख्या	**2**	**5**	**7**	**8**	**13**	**26**	**6**	**3**

उकल : n = 2+5+7+8+13+26+6+3 = 70

70 ही सम संख्या आहे.

$\therefore$ मध्यक $= \frac{70}{2}$ आणि $\frac{70}{2} + 1$या निरीक्षणांचा मध्य होय.

वजन Kg मध्ये	विद्यार्थ्यांची संख्यावारंवारता f_i	संचित वारंवारता
40	2	2
41	5	7
42	7	14
43	8	22
44	13	35
45	26	61
46	6	67
48	3	70

n ही सम संख्या आहे म्हणून

$$\text{मध्यक} = \frac{35 \text{ वे निरीक्षण} + 36 \text{ वे निरीक्षण}}{2}$$

$$= \frac{44+45}{2} = 44.5$$

आपली प्रगती तपासा 25.4

1. 10 स्पर्धामध्ये गटाने केलेले गोल दिले आहेत. त्यांचा मध्यक काढा.

1,0,3,2,4,5,2,4,4,2

2. 12 विद्यार्थ्यांची नैदानिक चाचणी घेतली. त्याचे 100 पैकी मिळालेले गुण दिले आहेत.

46,52,48,39,41,62,55,53,96,39,45,99 दिलेल्या माहितीचा मध्यक काढा.

3. फासा 100 वेळा फेकला आलेली निरीक्षणे दिली आहेत.

निरीक्षणे	1	2	3	4	5	6
वारंवारता	17	15	16	18	16	18

दिलेल्या माहितीचा मध्यक काढा.

4. दिलेल्या माहितीचा मध्यक काढा.

x_i	2	3	4	5	6	7
f_i	4	9	16	14	11	6

x_i	5	10	15	20	25	30	35	40
f_i	3	7	12	20	28	31	28	26

x_i	2.3	3	5.1	5.8	7.4	6.7	4.3
f_i	5	8	14	21	13	5	7

25.3 बहुलक

पुढील उदाहरण पाहा.

वेगवेगळया मापाचे शर्ट एका कारखान्यात तयार होतात. एका आठवडयात झालेल्या विक्रीची नोंद दिली आहे.

माप सेमीमध्ये	90	95	100	105	110	115
शर्टची संख्या	50	125	190	385	270	28

सारणीवरून असे दिसते की 105 सेमी मापाचे सर्वात जास्त शर्ट विकले. यापुढे कारखान्यात 105 सेमी मापाचे जास्त शर्ट तयार केले जातील. 105 हेच दिलेल्या माहितीचे बहुलक आहे.

बहुलक हेही केंद्रीय प्रवृत्तीचे मापन आहे. ज्या निरीक्षणाची वारंवारता सर्वात जास्त आहे. ते त्याचे बहुलक असते.

तयार कापडाचे व्यापारी, बूटांचे व्यापारी या मापनाचा उपयोग करतात. बाजारात कोणत्या मापाचे कपडे, बूट यांची जास्त विक्री होते त्यावरून उत्पादन ठरवले जाते.

25.3 कच्च्या माहितीवरून बहुलक

कच्च्या माहितीमध्ये फक्त निरीक्षणावरून बहुलक ओळखता येते. पुढील उदाहरण पहा.

उदा. **25.15 :- 12 स्पर्धामध्ये गटाने केलेले गोल पुढे दिले आहेत.**

1,2,2,3,1,2,2,4,5,3,3,4 याचे बहुलक काढा.

उकल ः दिलेल्या माहितीचे निरीक्षण केल्यास 2 ही वारंवारता सर्वात जास्त आहे.

म्हणून बहुलक 2 आहे.

उदा. **25.26:- दिलेल्या माहितीचे बहुलक काढा.**

9,6,8,9,10,7,12,15,22,15

उकल ः दिलेली माहिती चढत्या क्रमाने मांडू

6,7,8,9,9,10,12,15,15,22

9 व 15 यांची वारंवारता 2 आहे.

म्हणून 9,15 हे दोन्ही बहुलक आहेत.

(1) या प्रकरणात आपण एक वहुलक येणारी उदाहरणे घेऊ.

(2) दिलेल्या माहितीत प्रत्येक निरीक्षणाची वारवारंता समान असेल तर त्याला बहुलक नाही.

25.3.2.: अवर्गीकृत माहितीचे बहुलक

यासाठी आपण एक उदाहरण घेऊ.

उदा. **25.17 दिलेल्या माहितीचे बहुलक काढा.**

वजन **Kg** मध्ये	**40**	**41**	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**48**
विद्यार्थी संख्या	**2**	**6**	**8**	**9**	**10**	**22**	**13**	**5**

उकल ः तक्त्यावरून 22 विद्यार्थ्यांचे वजन 45 किग्रॅ आहे. म्हणून बहुलक 45 किंवा बहुलक वजन 45 किग्रॅ.

आपली प्रगती तपासा 25.5

1. दिलेल्या माहितीचे बहुलक काढा.

5,10,3,7,2,9,6,2,11,2

2. 15 कुटुंवातील दूरदर्शन संचांची संख्या दिली आहे. त्यावरून बहुलक काढा.

2,2,4,2,1,1,1,2,1,1,3,3,1,3,0

3. 100 वेळा फासा फेकला तर आलेल्या निरीक्षणावरून बहुलक काढा.

फासा	1	2	3	4	5	6
वारंवारत	15	16	16	15	17	20

4. 80 विद्यार्थ्यांचे 10 पैकी गणित विषयात मिळालेले गुण दिले आहेत. त्याचे बहुलक काढा.

मिळालेले गुण	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
विद्यार्थी संख्या	5	2	3	5	9	11	15	16	9	3	2

सारांश :-

- मध्य, मध्यक आणि बहुलक ही केंद्रीय प्रवृत्तीची मापने आहेत.
- कच्च्या माहितीचा मध्य (अंकगणितीय सरासरी) = $x = \frac{\sum_{x=1}^{n} x_i}{n}$

येथे x_1, x_2, x_3.......... ही निरीक्षणे आहेत.

- अवर्गीकृत सारणीचा मध्य $x = \frac{\sum_{x=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{x=1}^{n} f_i} = \frac{\Sigma f_i x_i}{N}$

f_i ही वारंवारता i या x_i निरीक्षणाची आहे.

- अवर्गीकृत वारंवारता सारणीचा मध्य $x = a + \frac{1}{N} \Sigma f_i d_i$

येथे $d_i = x_i - a$ हा गृहित मध्य आहे.

- वगीकृत माहितीचा मध्य

(i) वर्गीकृत माहितीचा मध्य काढण्यासाठी आपल्याला गृहित धरावे लागते की, कोणत्याही वर्गाची वारंवारता वर्गमध्य किंवा मध्यबिंदू भोवती असते.

(ii) सरळ पध्दत = $x = \frac{\sum_{x=1}^{n} f_i x_i}{\Sigma f_i}$

x_i हा वर्गमध्य आणि अनुक्रमे f_i वारंवारता असते.

(iii) गृहित मध्य पध्दत $= x = a + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i d_i$

a हा गृहीतमध्य आणि $d_i = x_i - a$

(iv) विचलन पध्दत $x = a + \left[\frac{\sum_{x_i=1}^{n} f_i u_i}{\sum_{x_i=1}^{n} f_i} \right] X h$

a हा गृहितमध्य $u_i = \frac{x_i - a}{h}$ h हे वर्गांतर होय.

- मध्यक हे केंद्रीय प्रवृत्तीचे मापन आहे. जेव्हा निरीक्षणे चढत्या/ उतरत्या क्रमाने मांडली जातात. तेंव्हा निरीक्षणाचा मध्य दर्शवला जातो.

- कच्च्या माहितीचे मध्यक

  जेव्हा निरीक्षणांची संख्या विषम असते तेव्हा मध्यक $= \frac{n+1}{2}$ वे निरीक्षण असते.

  जेव्हा निरीक्षणांची संख्या सम असते तेव्हा मध्यक हा $\frac{n}{2}$ आणि $\frac{n}{2} + 1$ यांच्या निरीक्षणांचा मध्य असतो.

- अवर्गीकृत माहितीचा मध्यक

  प्रथम निरीक्षणांची चढत्या/ उतरत्या क्रमाने मांडणी करावी. त्याची संचित वारंवारता सारणी तयार करावी. वरील गुणधर्माचा वापर करावा.

- निरीक्षणांची जास्तीत जास्त वारंवारता म्हणजे बहुलक होय.

सत्रात प्रश्नसंग्रह

1. पहिल्या पाच मूळ संख्यांचा मध्य काढा.
2. 5,7,9, x, 11 आणि 12 यांचा मध्य 9 आहे. तर x ची किंमत काढा.
3. वर्गातील नऊ विद्यार्थ्यांचे गुण दिले आहेत.

   52, 63, 36, 46, 38, 43, 52, 42, 43

(i) दिलेल्या गुणांचा मध्य काढा.

(ii) 75 गुण मिळालेल्या विद्यार्थ्याचे गुण मिळवल्यास मध्य काय येईल ?

4. 10 विद्यार्थ्यांच्या गुणांचा मध्य 70 आहे. विद्यार्थ्यांचे 6 व 4 चे गट केले. पहिल्या गटाचा मध्य 60 असेल तर दुसऱ्या गटाचा मध्य किती ?
5. जर $x_1 x_2 x_3 .... x_n$ या निरीक्षणांचा मध्य असेल तर $\sum_{x_i=1}^{n}(x_1 - x) = 0$ दाखवा.
6. 50 संख्या दिल्या आहेत. प्रत्येक संख्या 53 मधून वजा करा. त्या संख्यांचा मध्य -3.5 आहे. तर दिलेल्या संख्यांचा मध्य काढा.
7. दिलेल्या माहितीचा मध्य काढा.

x_i	5	9	13	17	22	25
f_i	3	5	12	8	7	5

x_i	16	18	28	22	24	26
f_i	1	3	5	7	5	4

8. पुढे दिलेल्या माहितीचा मध्य काढा.

वर्ग	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
वारंवारता	2	3	5	7	5	3

वर्ग	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700
वारंवारता	3	5	8	6	5	3

50 विद्यार्थ्यांचे वय (महिन्यात) दिले आहे. मध्य काढा.

वय	156-158	158-160	160-162	162-164	164-166	166-168
विद्यार्थ्यांची संख्या	2	4	8	16	14	6

9. पुढे दिलेल्या माहितीचा मध्यक काढा.

a) 5,12,16,18,20,25,10

b) 6,12,9,10,16,28,25,13, 15,17

c) 15,13,8,22,29,12,14,17,6

10. पुढील माहिती चढत्या क्रमाने मांडलेली आहे. याचा मध्यक 60 असल्यास x ची किंमत काढा.

11. दिलेल्या माहितीचा मध्यक काढा.

x_i	25	30	35	45	50	55	65	70	85
f_i	5	14	12	21	11	13	14	7	3

x_i	35	36	37	38	39	40	41	42
f_i	2	3	5	4	7	6	4	2

12. दिलेल्या माहितीचे बहुलक काढा.

(a) 8,5,2,5,3,5,3,1

(b) 19, 18, 17,16,17,15,14,15,17,9

13. ८० विजेच्या दिव्यांचे आयुष्य तासांमध्ये दिले आहे त्याचे बहुलक काढा.

आयुष्य (तासांमध्ये)	300	500	700	900	1100
दिव्यांची संख्या	10	12	20	27	11

14. जर दिलेल्या निरीक्षणांचा मध्य 7 आहे तर P ची किंमत काढा.

x_i	4	P	6	7	9	11
f_i	2	4	6	10	6	2

15. काही विशिष्ठ व्यक्तिंसाठी विमा कंपनीने गोळा केलेली निरीक्षणे दिली आहेत. त्याचा मध्य काढा.

वय (वर्षात)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
मरण पावलेल्या व्यक्तिंची संख्या	2	12	65	95	71	42	16	7

16. $x + 1, x + 4, x + 5, x + 8, x + 11$ या निरीक्षणांचा मध्य 10 आहे तर शेवटच्या तीन निरीक्षणांचा मध्य कोणता ?

17. जर दिलेल्या माहितीतील प'त्येक निरीक्षण 2 ने वाढवले तर त्यांचा मध्य ....

(A) तोच राहतो (B) मूळमध्याच्या दुप्पट होतो

(C) 2 ने कमी होतो (D) 2 ने वाढतो

18. 15,14,19,20,14,15,14,18,14,15,17,14,18 यांचा बहुलक .... आहे.

(A) 20 (B) 18 (C) 15 (D) 14

आपली प'गती तपासा – उत्तरे

25.1

1. $\sum_{x_i=1}^{n} x_i / n$ 2. 5.5 3. 86.33 किग्रॅम
4. 142.8 सेमी
5. 25.68^0C 7. 42 8. 29.17

25.2

1. 5.84 2. (i) 18.99 (ii) 6.57
3. 11.68 4. 10

25.3

1. 28.80 2. 55.19 3. 167.9 4. 244.66

25.4

1. 3 2. 50 3. 4 4. (a) 4 (b) 30 (c) 5.8

25.5

1. 2 2. 1 3. 6 4. 7

सत्रांत प्रश्न संग्रह उत्तरे

1. 5.6 2. 10 3. (i) 46 (ii) 48.9
4. 8.5 6. 56.5 7 (a) 15.775 (b) 21.75
8 (a) 42.6 (b) 396.67 (c) 163 महिने (अंदाजे)
9 (a) 16 (b) 14 (c) 14
10. 59 11.(a) 45 (b) 24 12.(a) 5 (b) 17
13. 900 14. 5 15. 39.86 वर्षे 16. (A)
17. (D) 18. (D)

26

संभाव्यतेची ओळख

आपण दैनंदिन जीवनात पुढील विधाने करतो.

(i) आज कदाचित पाऊस पडेल.

(ii) आज गाडी उशीरा असण्याची शक्यता आहे.

(iii) बँक चूक करू शकणार नाही.

(iv) पुढच्या सप्टेंबरमध्ये कडधान्याचे भाव वाढण्याची शक्यता आहे.

(v) तो स्पर्धा जिंकू शकेल असे मला वाटत नाही. इत्यादी

संभवतः, शक्यता, बहुतेक, संधी असे शब्द असे दर्शवतात की आपण ज्या घटनेबद्दल बोलत आहाते ती घडण्याची शक्यता कमी आहे.ती घटना घडेल किंवा घडणार नाही. संभाव्यता ही गणितातील महत्वाची शाखा आहे. ज्यामध्ये घटनांची अशक्यता / शक्यता दर्शवली जाते. 16 व्या शतकात या सिध्दांताची सुरूवात फासा टाकणे यापासून झाली. आता याचा उपयोग जीवशास्त्र, अर्थशास्त्र, जेनेटिक विज्ञान, भौतिक शास्त्र, समाज शास्त्र यामध्ये होतो.

उद्दिष्टे :

पाठाच्या अभ्यासानंतर खालील गोष्टी लक्षात येतील.

- यादृच्छिक प्रयोग याचा अर्थ समजेल.
- यादृच्छिक प'योगाची निष्पत्ती आणि घटना यातील फरक समजेल.
- घटना E च्या संभाव्यतेची व्याख्या करता येईल.
- जर P(E) दिले असेल तर P $(\overline{E})$ काढता येईल.
- संभाव्यता P(E) O $\leq$ P (E) 1 असते.
- संभाव्यतेची संकल्पना वापरून नाणे फेकले, फासा उडवला, पत्यांच्या कॅट मधून पत्ता काढला यावरील उदाहरणे सोडवता येतील

पूर्वज्ञान ः

अध्ययन करणा–या विद्यार्थ्याला पुढील गोष्टी माहित असाव्यात.

- नाण्याशी संबंधित गोष्टी छापा , काटा
- फासा, त्याचे पृष्ठभाग, पृष्ठभागावरील संख्या
- पत्ते, त्यातील 4 प्रकार. प्रत्येक प्रकारातील 13पत्ते, इस्पिक, चौकट, बदाम, किल्वर तसेच प्रत्येक प्रकारातील राजा,राणी, गुलाम इ.
- गुणोत्तर, अपूर्णांक, दशांश अपूर्णांक या संकल्पना

26.1 : यादृच्छिक प्रयोग आणि त्याची निष्पत्ती

पुढील घटना पहा.

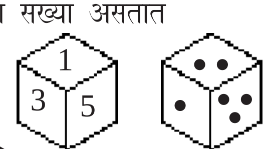
(1)समजा तुम्ही नाणे उडवले. आपल्याला माहित आहे की नाणे जमिनीवर पडल्यावर छापा किंवा काटा वर येईल.

जेव्हा आपण नाण्याबद्दल बोलतो तेव्हा ते सममित आहे असे आपण समजतो. एकाच बाजूवर ते सतत पडेल असे नाही.

(2) समजा आपण फासा उडवला. तर तो 1,2,3,4,5,6, यापैकी कोणत्यातरी एकाच पृष्ठावर पडेल.

समजा आपण काही बिया पेरल्या त्या चार आहेत. तीन दिवसानंतर निरीक्षण केले. रूजलेल्या बिया 1,2,3,4 किंवा 0 असतील.

फासा हा घन आहे. त्याला सहा पृष्ठभाग असतात. त्यावर 1 ते 6 टिंबे किंवा संख्या असतात



वरील घटनांमध्ये नाणे फेकणे, फासा उडवणे, बिया पेरणे, रूजलेल्या बियांचे निरीक्षण करणे ही सव उदाहरणे यादृच्छिक प्रयोगांची आहेत.

उदा. (1) मध्ये निष्पत्ती ही छापा आणि काटा असेल.

घटना (2) मध्ये 1,2,3,4,5, किंवा 6 ही निष्पत्ती असेल.

घटना (3) मध्ये 1,2,3,4 किंवा 0 ही निष्पत्ती असेल.

यादृच्छिक प्रयोगामध्ये नेहमी एकापेक्षा जास्त निष्पत्ती असतात. जेव्हा प्रयोग केला जातो तेव्हा सर्व निष्पत्तीं मधून एकच निष्पत्ती शक्य असते. परंतु प्रयोग केल्याशिवाय कोणती निष्पत्ती ते आपण सांगू शकत नाही. प्रयोग पुन्हा पुन्हा केला तर वेगळी निष्पत्ती येऊ शकते.

यादृच्छिक प्रयोगाची आणखी काही उदाहरणे ः

(1) पिशवीमध्ये वेगवेगळया रंगाचे चेंडू ठेवले आहेत. त्यापैकी कोणताही एक चेंडू न बघता काढणे.

(2) व्यवस्थित पिसलेल्या पत्यातून एक कार्ड काढणे. या प्रकरणात यादृच्छिक प्रयोगासाठी प्रयोग हा शब्द वापरू.

एका पत्त्याच्या कॅटमध्ये 52 पत्ते असतात. प्रत्येक प्रकारचे 13 पत्ते असतात. इस्पिक व किलवर काळया रंगाचे तर चौकट, बदाम लाल रंगाचे असतात. एक्का, राजा, राणी, गुलाम, 10,9, 8,7,6,5,4,3 आणि 2 असे 13 पत्ते असतात. राजा, राणी व गुलाम यांना चेहरे असलेली कार्डे म्हणतात.

आपली प्रगती तपासा ः 26.1 :

1. पुढील पैकी यादृच्छिक प्रयोग कोणता ?

(i) बहुपर्यायी प्रश्नांसाठी A,B,C,D हे पर्याय दिले आहेत. त्यापैकी फक्त एक पर्याय बरोबर आहे.

(ii) स्वतंत्र कार्डवर 1 ते 20 संख्या लिहिल्या त्यातून न बघता एक कार्ड निवडले.

(iii) उंचीवरून दगड टाकला

(iv) हरी आणि जॉन स्वतंत्रपणे 1,2,3 मधून संख्या निवडतात.

प्र.2 मधील यादृच्छिक प्रयोगाची निष्पत्ती लिहा.

26.2 : घटनांची संभाव्यता

समजा एक नाणे फेकले. दोन निष्पत्ती शक्य आहे. छापा (H) किंवा काटा (T). छापा आणि काटा यापैकी कोणतीही निष्पत्ती असण्याची शक्यता समान आहे. म्हणजेच H आणि T येण्याची शक्यता समान आहे.

त्याचप्रमाणे जेव्हा एखादा फासा फेकतो तेव्हा सहा पृष्ठभाग असल्याने 1,2,3,4,5 किंवा 6 पृष्ठभागा वर येऊ शकतात म्हणजेच 1,2,3,4,5,6 असा सहा निष्पत्ती येण्याची शक्यता समान आहे.

नाणे यादृच्छीक पाध्दतीने उडविणे म्हणजे छापा किंवा काटा यांना समान संधी असणे होय नाणे पडताना कोणताही पक्षपान किंवा अडथळा नाही.

आपण एखाद्या घटनेच्या संभाव्यतेची व्याख्या करण्यापूर्वी घटना म्हणजे काय ते समजून घेऊ. अपेक्षित निष्पत्तीच्या संचाला घटना म्हणतात. उदा. जेव्हा फासा फेकतो तेव्हा पृष्ठभागावर समसंख्या येणे याला घटना म्हणतात. या घटनेत 2,4,6 पृष्ठभागावर येणे ही निष्पत्ती आहे. कधी कधी एकच निष्पत्ती असणा–यास सुध्दा घटना म्हणतात. नाणे उडवणे यामध्ये नाणे छापा दाखवते किंवा नाणे काटा दाखवते.प्रत्येक वेळी ती घटना आहे. पहिल्यावेळी निष्पत्ती H आहे तर दुस–यावेळी T आहे. जर आपण घटनेसाठी E हे अक्षर मानले या घटनेत निष्पत्ती छापा आहे आणि F या घटनेसाठी निष्पत्ती काटा आहे. E व F यांना मूलभूत घटना म्हणतात. ज्या घटनेत फक्त एकच निष्पत्ती असते तिला एक घटकी घटना म्हणतात.

E या घटनेची संभाव्यता P (E) ची व्याख्या

$$P(E) = \frac{\text{घटनेच्या बाजूने होणारी संख्या}}{\text{एकूण शक्यता}}$$

निष्पत्ती समान आहे असे समजले तर वरील व्याख्या करता येते.

या प्रकरणार ज्या घटनांमध्ये समान निष्पत्ती आहे अशाच घटनांचा विचार करू.

संभाव्यता काढण्यासाठी पुढील उदाहरणांचा विचार करू.

उदा.ः 26.1 : एक नाणे उडवले तर (i) छापा (ii) काटा येण्याची संभाव्यता काढा.

उकल ः E ही छापा येण्याची घटना आहे.

शक्य असणा–या निष्पत्ती छापा (H), काटा (T)

शक्य निष्पत्ती 2

E या घटनेसाठी होणा–या निष्पत्तींची संख्या 1 फक्त छापा

$\therefore$ E ची संभाव्यता = P(E) = छापा मिळण्याची संभाव्यता

$$= \frac{\text{E च्या बाजूने होणारी घटना}}{\text{एकूण शक्यता}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

त्याचप्रमाणे F म्हणजे काटा मिळण्याची संभाव्यता $= \frac{1}{2}$

उदा.ः 26.2 : फासा एकदा उडवला तर पृष्ठभागावर 3 ही संख्या येण्याची संभाव्यता काढा.

उकल ः E ही 3 मिळण्याची शक्यता आहे.

प्रयोगाची शक्य असलेली निष्पत्ती = 1,2,3,4,5,6

एकूण शक्य निष्पतींची संख्या = 6

E या घटनेच्या बाजूने निष्पत्तीची संख्या =1

$\therefore$ P (E) = P (3) = $\frac{1}{2}$ = $\dfrac{\text{घटनेच्या बाजूने होणारी संख्या}}{\text{एकूण शक्यता}}$ = $\frac{1}{6}$

उदा.26.3: एक फासा एकदा उडवला. 3 शिवाय मिळणा-या संख्यांची संभाव्यता काढा.

उकल ः 3 शिवाय इतर संख्या मिळण्याची घटना F आहे असे समजा. म्हणजेच पृष्ठभागावर 1,2,4,5,6 या संख्या मिळणे.

शक्य असणा-या निष्पत्ती ः 1,2,3,4,5,6

शक्य असणा-या निष्पत्तींची संख्या ः 6

F या घटनेच्या बाजूने होणारी संख्या = 5 म्हणजेच 1,2,4,5,6

$\therefore$ P (F) = $\frac{5}{6}$

26.3 मधील F घटना 26.2 मधील E मध्ये नाही याचे उत्तर समान आहे.

उदा.26.4 : एका पिशवीत 2 लाल चेंडू , 3 निळे चेंडू आणि 4 काळे चेंडू आहेत. बॅगेतून एक चेंडू यादृच्छिक पध्दतीने काढला असता (i) लाल चेंडू (ii) निळा चेंडू (iii) काळा चेंडू (iv) निळा नसलेला चेंडू काढण्याची संभाव्यता काढा.

उकल ः E ही लाल चेंडू काढण्याची घटना आहे.

प्रयोगाच्या एकूण शक्यतांची निष्पत्ती संख्या = $\underset{\text{लाल}}{2} + \underset{\text{निळे}}{3} + \underset{\text{काळे}}{4} = 9$

E च्या बाजूने होणारी संख्या = 2

$\therefore$ P (लाल चेंडू) = P (E) = $\frac{2}{9}$

(ii) F ही घटना निळा चेंडू मिळण्याची मानू

$\therefore$ P (निळा चेंडू) = P (F) = $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

(iii) G ही घटना काळा चेंडू मिळण्याची आहे

$\therefore$ P (काळा चेंडू) = P (G) = $\frac{4}{9}$

(iv) H ही घटना निळा चेंडू न मिळण्याची आहे. येथे निळा चेंडू नाही म्हणजे लाल किंवा हिरवा चेंडू आहे.

H च्या बाजूने होणारी संख्या = 2+4 =6

$\therefore$ P (H) = $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

उदा. 26.5 : योग्य पिसलेल्या पत्याच्या कॅट मधून (i) लाल रंगाचा पत्ता (ii) काळया रंगाचा पत्ता मिळण्याची संभाव्यता काढा.

उकल ः E ही लाल रंगाचा पत्ता मिळण्याची निष्पत्ती आहे.

लाल रंगाचे पत्ते = 13 + 13 = 26 (चौकट व बदाम)

E या घटनेच्या बाजूने असणारी संख्या 26

एकूण पत्ते = 52

$\therefore$ P (E) = $\frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

(ii) F ही घटना काळा पत्ता मिळण्याची आहे.

काळया रंगाचे पत्ते = 13 + 13 = 16 (किलवर, इस्पिक)

एकूण पत्ते = 52

$\therefore$ P (F) = $\frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

उदा. 26.6: एक फासा एक वेळा उडवला. तर (i) 7 पेक्षा लहान संख्या मिळण्याची (ii) 7 पेक्षा मोठी संख्या मिळण्याची संभाव्यता काढा.

उकल ः समजा E ही घटना 7 पेक्षा कमी संख्या मिळण्याची आहे.

$\therefore$ E घटनेच्या बाजूने असणारी संख्या 6 (फासावर 7 पेक्षा लहान संख्या असतात)

$\therefore$ P (E) = $\frac{6}{6} = 1$

(ii) F ही घटना 7 पेक्षा मोठी संख्या मिळणारी आहे.

F च्या बाजूने मिळणारी संख्या = 0 (कोणत्याही पृष्ठभागावर 7 पेक्षा मोठी संख्या नाही.)

$\therefore$ P (F) = $\frac{0}{6} = 0$

टिपा

आपली प्रगती तपासा 26.2 :

1. एक फासा फेकला तर पृष्ठभागावर 5 येण्याची संभाव्यता काढा.

2. एक फासा एकदा फेकला (i) 7 संख्या येण्याची (ii) 5 पेक्षा लहान संख्या येण्याची संभाव्यताकाढा.

3. 52 पत्यांमधून एक पत्ता यादृच्छिक प्रयोगाने काढला तर तो राजा असण्याची संभाव्यता काढा.

4. 0 ते 20 मधील पूर्णांक शोधला तर तो पूर्णांक मूळ संख्या येण्याची संभाव्यता काढा.

5. एका पिशवीत 3 लाल आणि 3 पांढरे चेंडू आहेत. एक चेंडू न बघता काढला. तर (i) लाल चेंडू (ii) पांढरा चेंडू असण्याची संभाव्यता काढा.

6. 3 पुरूष आणि 4 स्त्रिया मुलाखतीसाठी आल्या. त्यापैकी एक व्यक्ती निवडायची आहे. तर (i) पुरूष (ii) स्त्री व्यक्ती निवडण्याची संभाव्यता काढा.

26.3 संभाव्यतेविषयी आणखी माहिती

संभाव्यतेचे आणखी काही मनोरंजक गुणधर्म अभ्यासू हे गुणधर्म उदाहरणांच्या मदतीने अभ्यासू.

निरीक्षण 26.6 या उदाहरणात

घटना E नक्की घडणार कारण फाशावर 7 पेक्षा लहान संख्या आहेत. अशा प्रकारचा नक्की घडणा–या घटनेला निश्चित घटना म्हणतात. या घटनेची संभाव्यता 1 आहे.

(b) F ही घटना घडणे शक्य नाही. कारण 7 पेक्षा मोठी संख्या फाशावर असू शकणार नाही. अशा घटनेला अशक्य घटना म्हणतात याची संभाव्यता शून्य असते.

(C) घटना E च्या संभाव्यतेच्या व्याख्येवरून P(E) 1 पेक्षा मोठी असू शकत नाही. कारण अंशातील संख्या छेदातील संख्येपेक्षा मोठी असू शकत नाही. छेदात सर्व शक्य निष्पत्तींची संख्या आहे.

(d) अंश व छेद नैसर्गिक संख्या आहेत म्हणून P (E) ऋण असणार नाही.

(*a*), (b), (c), (d) यांचा विचार केल्यास P (E) नेहमी 0 आणि 1 च्या दरम्यान असेल.

म्हणजेच $0 \leq P(E) \; 1$

निरीक्षण 2 : 26.1 मधील उदाहरणात दोन्ही घटनांमध्ये छापा (H) आणि काटा (T) हया एक घटकी घटना आहेत आणि

$$P(H) + P(T) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

त्याचप्रमाणे फासा उडवण्याच्या घटनेत एकघटनी घटना 1,2,3,4,5 आणि 6 तसेच

$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = \frac{1}{6} + \ + \ + \ + \ + \ = 1$

सर्व एक घटनी घटनांच्या संभाव्यतेची बेरीज 1 येते.

निरीक्षण 3 . 26.2 आणि 26.3 उदाहरणांवरून 3 मिळण्याची संभाव्यता + 3 शिवाय इतर संख्या मिळण्याची संभाव्यता = = = 1

म्हणजेच P (3) + P (3 नाही) = 1

किंवा P (E) + P (E नाही) = 1 .... (1)

त्याचप्रमाणे 26.1 उदाहरणात

P (छापा मिळणे) = P (E) = $\frac{1}{2}$

P (काटा मिळणे) = P (F) = $\frac{1}{2}$

$\therefore$ P (E) + P (F) = $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

म्हणजेच P(E) + P (E नाही) = 1 (काटा मिळणे म्हणजे छापा नाही) .... (2)

1 आणि 2 वरून कोणत्याही E घटनेसाठी

P (E) + P (E नाही) =1

किंवा P (E) + P (E) =1 (E नाही यासाठी E)

F या घटनेला E या घटनेची पूरक घटना म्हणतात किंवा E आणि E या पूरक घटना आहेत.

सामान्यतः E या घटनेसाठी

P(E) + P (E) = 1

उदा. 26.7 : जर P (E) = $\frac{2}{7}$ तर E नाही या घटनेची संभाव्यता काढा.

उकल : P (E) + P (E नाही) = 1

$\therefore$ $\frac{2}{7}$ + P (E नाही) = 1

$\therefore$ P (E) = 1 - =

उदा. **26.8 : एक फासा फेकल्यावर पृष्ठभागावर 5 न येण्याच्या घटनेची संभाव्यता काढा.**

उकल : 5 ही संख्या येण्याची घटना E मानू.

P (E नाही) हे काढायचे आहे. म्हणजेच P (E) काढायचे आहे.

आता P (E) = $\frac{1}{6}$

$\therefore$ P (E) = $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

उदा. **26.9 :** उत्तम पिसलेल्या **52** पत्त्यांमधून **1** पत्ता काढला. तर हा पत्ता चेहरा असणारा पत्ता असण्याची संभाव्यता काढा.

उकल : शक्य असणा–या सर्व निष्पत्ती = 52

E या घटनेच्या अनुकूल असणारी संख्या 3 X 4 = 12

(राजा, राणी, गुलाम चारही प्रकारात)

$\therefore$ P (चेहरा कार्ड) $= \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$

उदा. **26.10:** एक नाणे दोनदा फेकले. प्रत्येक वेळी छापा मिळण्याच्या घटनेची संभाव्यता काढा.

उकल : छापा साठी H व काटा यासाठी T मानू.

या घटनेतील सर्व शक्य असणा–या निष्पत्ती HH, HT, TH, TT

HH म्हणजे दोन्ही नाण्यांवर छापा

HT म्हणजे (पहिला) एक छापा व (दुसरा) एक काटा

TH म्हणजे पहिला काटा, दुसरा छापा

TT म्हणजे दोन्ही काटा

म्हणून शक्य असणा–या सर्व निष्पत्ती = 4

समजा E ही घटना प्'त्येक वेळी छापा असण्याची आहे म्हणजेच दोन्ही नाण्यांवर HH आले पाहिजे.

$\therefore$ P (HH) $= \frac{1}{4}$

उदा. **26.11: 100** चांगल्या रिंगाबरोबर **10** काहीतरी कमतरता **(defective)** रिंगा मिसळल्या आहेत नुसते पाहून चांगली आणि कमतरता असणारी रिंग ओळखता येत नाही. या गठ्ठयातून यादृच्छिक पध्दतीने एक रिंग काढली. तर चांगली रिंग मिळण्याची संभाव्यता काढा.

उकल : शक्य असणा–या सर्व निष्पत्ती = 10 + 100 = 110

E या घटनेच्या बाजूने असणारी संख्या (चांगली रिंग) = 100

$\therefore\ P(E) = \frac{100}{110} = \frac{10}{11}$

उदा. 26.12: दोन फासे उडवले. त्यातील एक काळा तर दुसरा निळा आहे. सर्व शक्यतांची निष्पत्ती लिहा. दोन्ही फाशांवर समान संख्या येण्याची संभाव्यता काढा.

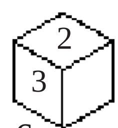
उकल ः सर्व शक्य निष्पत्ती खाली दिल्या आहेत. कंसातील पहिली 16 संख्या काळया फाशावरील तर दुसरी संख्या निळया फाशावरील आहे.

एकूण शक्यतांची निष्पत्ती = 36

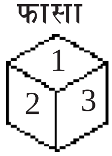
E या घटनेशी अनुकूल संख्या = 6

(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)

$\therefore\ P(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$



	1	2	3	4	5	6
	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
काळा	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
फासा	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6



आपली प्रगती तपासा 26.3

1. योग्य शब्द वापररून विधाने पूर्ण करा.

(a) कोणत्याही घटनेची संभाव्यता नेहमी .... पेक्षा मोठी किंवा समान व .... पेक्षा लहान किंवा समान असते.

(b) जी घटना निश्चितपणे घडते तिची संभाव्यता .... असते. अशा घटनेला .... घटना म्हणतात.

(c) जी घटना निश्चितपणे घडू शकत नाही अशा घटनेची संभाव्यता .... असते. अशा घटनेला .... म्हणतात

(d) दोन पूरक घटनांच्या संभाव्यतेची बेरीज .... असते.

(e) एक घटनी घटनांच्या संभाव्यतेची बेरीज .... असते.

2. एक फासा फेकला तर (a) सम संख्या मिळणे (b) विषम संख्या मिळणे (c) मूळ संख्या मिळण्याची संभाव्यता काढा.

3. प्रश्न क्र. 2 मध्ये P (समसंख्या) + P (विषमसंख्या) = 1 याचा पडताळा घ्या.

4. एक फासा एकदा उडवला तर

(i) 4 पेक्षा लहान संख्या मिळणे (ii) 4 किंवा 4 पेक्षा मोठी संख्या मिळणे.

(iii) संयुक्त संख्या मिळणे (iv) संयुक्त संख्या नाही या घटनांची संभाव्यता काढा.

5. जर $P(E) = 0.88$ तर $P(\overline{E})$ किती?

6. जर $P(E) = 0$ तर $P(\overline{E}) = ?$

7. उत्तम पिसलेल्या 52 पत्त्यातून एक पत्ता काढला. तर

(i) लाल कार्ड मिळणे (ii) काळे कार्ड मिळणे

(iii) लाल राणी मिळणे (iv) काळा एक्का मिळणे

(v) इस्पिकचा गुलाम मिळणे (vi) किलवरचा राजा मिळणे

(vii) चेहरा नसलेला पत्ता मिळणे (viii) चौकटचा गुलाम न मिळणे

याची संभाव्यता काढा.

8. एका पिशवीत 15 पांढरे आणि 12 निळया रंगाचे चेंडू आहेत. यादृच्छिक प्रयोगाने एक चेंडू काढला. तर (i) निळया रंगाचा चेंडू नाही (ii) पांढ-या रंगाचा चेंडू नाही या घटनांची संभाव्यता काढा.

9. एका पिशवीत 3 लाल, 4 हिरव्या, 2 निळया गोटया आहेत. एक गोष्टी यादृच्छिक पध्दतीने उचलली तर (i) हिरवी नाही (ii) लाल नाही (iii) निळी नाही या घटनांची संभाव्यता काढा.

10. दोन निरनिराळी नाणी एकाच वेळी उडवली. मिळणा-या सर्व शक्यतांची निष्पत्ती लिहा. एकावर छापा व दुस-यावर काटा मिळण्याची संभाव्यता काढा.

11. उदा. 10 मध्ये दोन्ही नाण्यांवर काटा मिळण्याची संभाव्यता काढा.

12. दोन फासे उडवले आणि पृष्ठभागावर येणा-या संख्यांची नोंद केली तर दोन्ही संख्यांची बेरीज (i) 7 (ii) 8 (iii) 10 (iv) 12 येण्याची संभाव्यता काढा.

13. सारख्या 92 चांगल्या खेळण्यांमध्ये 8 कमतरता असलेली खेळणी मिसळली. या गटातून यादृच्छिक पध्दतीने एक खेळणे काढले तर कमतरता असणारे खेळणे असण्याची संभाव्यता काढा.

सारांश ः

- ज्या प्रयोगात एकापेक्षा जास्त निष्पत्ती असतात आणि प्रयोग करण्यापूर्वी ज्याची निष्पत्ती निश्चितपणे सांगता येत नाही अशा प्रयोगाला यादृच्छिक प्रयोग म्हणतात.
- घटनेमध्ये एक किंवा त्यापेक्षा जास्त निष्पत्ती असतात.
- ज्या घटनेत फक्त एकच निष्पत्ती असते अशा घटनेला एकघटकी घटना म्हणतात.
- E या घटनेच्या संभाव्यतेची व्याख्या

  $$P(E) = \frac{E \text{ या घटनेस अनुकूल होणारी संख्या}}{\text{एकूण शक्यता}}$$

  जेव्हा शक्यता समान असतात
- $0 \leq P(E)\ 1$
- जर $P(E) = 0$ तर E ला अशक्य घटना म्हणतात.

  तर $P(E) = 1$ तर E ला निश्चित घटना म्हणतात.
- एक घटकी घटनांच्या संभाव्यतेची वेरीज 1 असते.
- $P(\overline{E}) + P(\overline{E}) = 1$ येथे E व E या पूरक घटना आहेत.

सत्रांत प्रश्नसंग्रह

1. पुढील पैकी सत्य किंवा असत्य विधाने ओळखा.

   (i) घटनेची संभाव्यता 1.01 असू शकते.

   (ii) जर $P(E) = 0.08$ तर $P(\overline{E}) = 0.02$

   (iii) अशक्य घटनेची संभाव्यता 1 असते.

   (iv) E या घटनेसाठी $0 \leq P(E)\ 1$

   (v) $P(\overline{E}) = 1 + P(E)$

2. 52 पिसलेल्या पत्त्यातून एक पत्ता काढला. तर तो पत्ता लाल रंगाचा चेहरा पत्ता असण्याची संभाव्यता काढा.
3. दोन नाणी एकाच वेळी उडवली. कमीत कमी एक छापा मिळण्याची संभाव्यता काढा. [सूचना ः P (कमीत कमी एक छापा = 1-P (छापा नाही)]
4. एक फासा दोन वेळा उडवला आणि त्यावर येणा-या संख्यांची नोंद केली. तर त्या दोन संख्यांची बेरीज (i) 12 पेक्षा मोठी (ii) 12 पेक्षा कमी (iii) 11 पेक्षा मोठी (iv) 2 पेक्षा मोठी येण्याची संभाव्यता काढा.
5. वरील प्रश्नामध्ये दोन संख्यांचा गुणाकार 120 येण्याची संभाव्यता काढा.
6. वरील प्रश्न 4 मध्ये दोन संख्यांची वजाबाकी 2 येण्याची संभाव्यता काढा.
7. एका पिशवीत 15 लाल चेंडू व काही हिरवे चेंडू आहेत. जर हिरवा चेंडू मिळण्याची संभाव्यता $\frac{1}{6}$ असेल तर हिरवे चेंडू किती असतील ?

योग्य पर्याय निवडा

8. पुढीलपैकी एखाद्या घटनेची कोणती सभाव्यता नसेल.

   (A) $\frac{2}{3}$ (B) -101 (C) 12% (D) 0.3

9. एकदा फासा उडवल्यावर संभाव्यतेची बेरीज 2 येईल.

   (A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{1}{18}$ (C) $\frac{1}{36}$ (D) $\frac{35}{36}$

10. दोन नाणी एकाच वेळी उडवली तर एक छापा आणि एक काटा मिळण्याची संभाव्यता कोणती?

   (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$

आपली प्रगती तपासाची उत्तरे

(1) (i), (ii) आणि (iii)

(2) (i) A,B,C,D

(ii) 1,2,3………… 20

(iv) (1,1), (1,2), (1,3),(2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)

26.2

(1) $\frac{1}{6}$ (2) (i) 0 (ii) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{1}{13}$ (4) $\frac{8}{19}$ (5) (i) $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{5}{8}$ (6) (i) $\frac{3}{7}$

(ii) $\frac{4}{7}$

26.3

(1) (a) 0,1 (b) 1, निश्चित घटना (c) 0, अशक्य घटना (d) 1 (e)1

(2) (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{2}$

(4) (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{3}$ (iv) $\frac{2}{3}$

(5) 0.12 6. 1

(7) (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{26}$ (iv) $\frac{1}{26}$ (v) $\frac{1}{52}$ (vi) $\frac{1}{52}$ (vii) $\frac{10}{13}$ (viii) $\frac{51}{52}$

(8) (i) $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{2}{5}$

(9) (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{2}{3}$ (iii) $\frac{7}{9}$

(10) HH, HT, TH, TT, $\frac{1}{2}$

(11) $\frac{1}{4}$

(12) (i) $\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{5}{36}$ (iii) $\frac{1}{9}$ (iv) $\frac{1}{12}$ (v) $\frac{1}{36}$

(13) $\frac{2}{25}$

सत्रांत प्रश्नसंग्रह – उत्तरे

(1) (i) F असत्य (ii) T सत्य (iii) F असत्य (iv) T सत्य (v) F असत्य

(2) $\frac{3}{26}$ (3) $\frac{3}{4}$ (4) (i) 0 (ii) 1 (iii) $\frac{1}{36}$ (iv) 1

(5) $\frac{1}{9}$ (6) $\frac{2}{9}$ (7) 3 8. (B) 9. (C) 10 (C)

माध्यमिक अभ्यासक्रम

विषय ः गणित

गुण ः २५ वेळ ः ४५ मिनिटे

सूचना ः

1) सर्व प्रश्नांची उत्तरे स्वतंत्र उत्तर पत्रिकेवर लिहा.

2) तुमच्या उत्तर पत्रिकेवर पुढील माहिति लिहा.

- पूर्ण नाव
- दाखल क्रमांक **(Enrolment Number)**
- विषय
- सराव कार्य ज्या प्रकरणावर आहे, ती प्रकरणे
- पूर्ण पत्ता

3) तुम्ही केलेले सराव कार्य तुमच्या अभ्यास केंद्रावरील विषय ‘ शिक्षकांकडून तपासून घ्या आणि त्यांच्याकडून तुमच्या तयारीची निश्चित माहिती मिळवा.

तुमचे सराव कार्य, राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षण संस्थेकडे पाठवू नका.

1. दिलेल्या सामग्रीमध्ये एखादी संख्या जितक्या वेळा येते. या बाबीला .... असे म्हणतात. 1

(A) त्या संख्येची वारंवारता

(B) त्या संयेची संचित वारंवारता

(C) वर्गांतर

(D) बदल

2. खालील संचित वारंवारता कोष्टकात 40–50 या वर्गाची वारंवारता .... आहे. 1

वर्ग	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
संचित वारंवारता	15	45	70	80	100	110

(A) 80 (B) 25 (C) 10 (D) 20

3. 12, 16, 15 आणि 17 यांचा मध्य 1

(A) 14.5 (B) 15 (C) 15.5 (D) 17

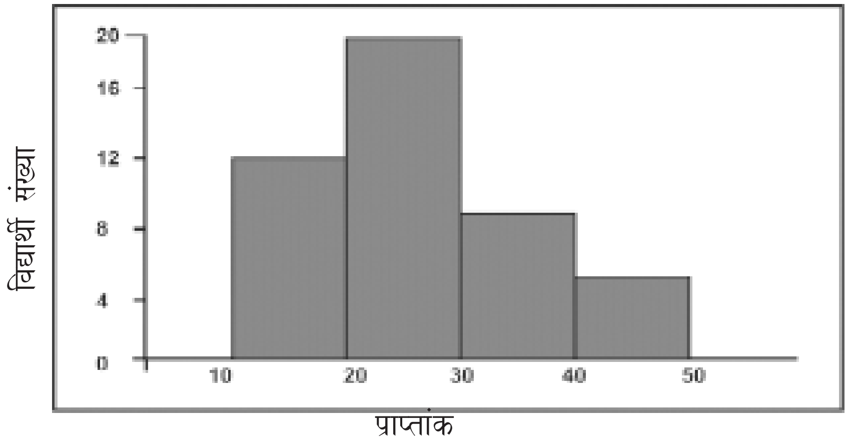
4. सामग्रीतील प्रत्येक घटकाची किंमत 5 ने वाढविली, तर सामग्रीचा अंकगणिती मध्य 1
   (A) बदलणार नाही. (B) 5 ने वाढेल (C) मूळच्या मध्याच्या 5 पट होईल.
   (D) 5 ने कमी होईल.
5. 8, 9, 16, 15, 11, 13, 12, 14, 10 या साम्रगीचा मध्यक = ...1
   (A) 10 (B) 11.5 (C) 12 (D) 12.5
6. फाशांची जोडी एकाच वेळी टाकली असता मिळणाऱ्या सर्व संभाव्यता (नमुना अवकाश) लिहा.2
7. दोन नाणी एकाच वेळी टाकली असता कमी कमी एक छापा मिळण्याची शक्यता सांगा.2
8. एक फासा टाकला असता मूळ संख्या मिळण्याची शक्यता सांगा. 2
9. खालील चढत्या क्रमाने मांडलेल्या सामग्रीचा मध्यक 32 आहे. तर a ची किंमत काढा.
   12, 14, 15, 27, a + 2, a + 3, 35, 36, 40, 49 2
10. दिलेल्या साम्रगीचा बहुलक 12 आहे. तर x ची किंमत काढा. 2
    15, 16, 19, 12, 13, 16, 12, 12, 12, 16, x
11. 125 विद्यार्थ्यांना रोज खाऊसाठी दिल्या जाणाऱ्या पैशांचे वारंवाररिता वितरण पुढीलप्रमाणे आहे. ही सामगी दर्शविण्यासाठी आयतालेख काढा. 4

खाऊसाठी रोज दिले जाणारे पैसे	विद्यार्थी संख्या
10-20	20
20-30	30
30-40	25
40-50	35
50-60	15

टिपा

किंवा (फक्त दृष्टी अक्षम विद्यार्थ्यांसाठी)

11. आयतालेख वाचून त्यावर आधारित प्रश्नांची उत्तरे सांगा. 4



i) किती विद्यार्थ्यांनी 20 ते 40 या दरम्यान गुण मिळविले.

ii) किती विद्यार्थ्यांनी 20 पेक्षा कमी गुण मिळविले.

12. दिलेल्या सामग्रीचा मध्य 35 आहे. जर सामग्रीची बेरीज 25 असेल तर x_1 आणि x_2 च्या किंमती काढा.

वर्गांतर	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70
वारंवारता	1	x_1	5	7	x_2	3	1

प्रश्नपत्रिका स्वरूप
विषय ः गणित
माध्यमिक अभ्यासक्रम

गुण ः 85 **वेळ ः 21/2 तास**

1) उद्दिष्टानुसार वर्गीकरण ः

अ. क्र.	उद्दिष्ट	गुण	गुणांची %
1	ज्ञान	25	अंदाजे 30%
2	आकलन	42	अंदाजे 50%
3	उपयोजन	10	अंदाजे 11%
4	कौशल्य	08	अंदाजे 09%

2) प्रश्न प्रकारानुसार वर्गीकरण ः

अ. क्र.	प्रश्नप्रकार	प्रश्नसंख्या	गुण	लागणारा वेळ (मिनीटामध्ये)
1	दीर्घोत्तरी	3	18	$10\times 3=30$
2	लघुत्तरी	8	32	$8\times 6=48$
3	लघुत्तरी	(2 गुणांसाठी)	10	20 $3\times 10=30$
4	लघुत्तरी	(1 गुणांसाठी)	15	15 $2\times 15=30$
	एकूण	36	85	138 मिनीटे

3) अभ्यासक्रमानुसार वर्गीकरण ः

अ. क्र.	विभाग	गुण
1	बीजगणित	20
2	व्यावसायिक गणित	08
3	भूमिती	25
4	महत्वमापन	10
5	त्रिकोणमिती	10
6	संख्याशास्त्र	12
	एकूण	85

नमुना प्रश्नपत्रिका

विषय ः गणित (211)

माध्यमिक अभ्यासक्रम

गुण ः 85 **वेळ ः 2 1/2 तास**

सूचना ः

1) प्रश्न क्र 1 ते 10 हे बहुपर्यायी प्रश्न आहे. प्रत्येक प्रश्नास एक गुण आहे. प्रत्येक प्रश्नास A, B, C आणि D असे चार पर्याय दिलेले आहे. त्यापैकी एकच पर्याय बरोबर आहे. आपणास योग्य तो पर्याय निवडावयाचा आहे. पर्यायापैकी A, B, C आणि D यापैकी योग्य तो पर्याय निवडून ते अक्षर प्रश्नापुढे दाखविलेल्या चौकोनात लिहा.
2) प्रश्न क्र. 11 ते 15 हे अतिलघुत्तरी प्रश्न आहेत. प्रत्येक प्रश्नास एक गुण आहे. येथे उत्तर जरूरीप्रमाणे एका शब्दात, संख्येत किंवा एका वाक्यात द्यावयाचे आहे.
3) प्रश्न क्र. 16 ते 25 या प्रश्नास प्रत्येकी 2 गुण आहेत.
4) प्रश्न क्र. 26 ते 33 या प्रश्नास प्रत्येकी 4 गुण आहेत.
5) प्रश्न क्र. 34 ते 36 या प्रश्नास प्रत्येकी 6 गुण आहेत.
6) सर्व प्रश्नांची उत्तरे लिहिणे आवश्यक आहे.

1) मूळसंख्यांचे घात वापरून 1260 ही संख्या .... अशी लिहितात.

(A) $2^2 \times 3 \times 5^2$ (B) $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$ (C) $2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$ (D) $2^2 \times 3 \times 5 \times 7^2$

2) $(2x - 3)$ आणि $(2x + 3)$ यांचा गुणाकार .... आहे.

(A) $2x^2 - 3$ (B) $4x^2 - 3$ (C) $4x^2 - 9$ (D) $4x^2 + 9$

3) 0.35% ही किंमत दशांशचिन्हे वापरून .... अशी लिहितात.

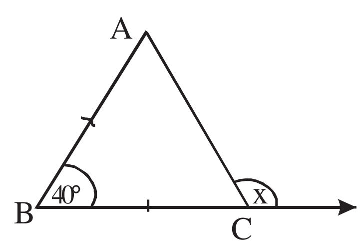
(A) 0.35 (B) 0.035 (C) 0.0035 (D) 3.5

4) 1080 चा 15% म्हणजे ....

(A) 161.20 (B) 162 (C) 322.40 (D) 3224

5) आकृती 1 मध्ये ΔABC मध्ये $AB = AC$ आणि $\angle B = 40°$ $x =$ ....

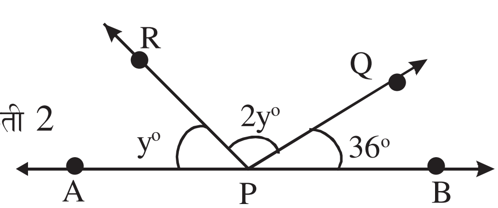
(A) 110°
(B) 120°
(C) 140°
(D) 70°



आकृती 1

6) आकृती 2 मध्ये $\angle BPQ = 36°$ $y =$ ....

आकृती 2



(A) 36° (B) 72° (C) 46° (D) 48° ☐

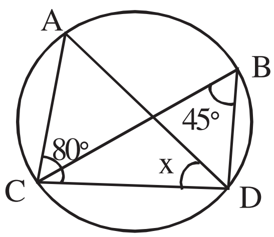
7) आकृती 3 मध्ये, ACD = 80° आणि ∠CBD = 45° ∴x = ...

(A) 50°

(B) 55°

(C) 35°

(D) 135°



आकृती 3

8) tan 1° . tan 89° ची किंमत . . . . ☐

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) 1 (D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

9) जर $\sin\theta = \frac{a}{b}$ तर $\cos\theta =$ .... ☐

(A) $\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$ (B) $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$ (C) $\frac{b}{\sqrt{b^2 - a^2}}$ (D) $\frac{b}{a}$

10) दिलेल्या सामग्रीमध्ये एका वर्गाचा वर्गमध्य 10 असून त्याचे वर्गांतर 5 आहे. तर वर्गाची खालची मर्यादा ☐

(A) 5 (B) 7.5 (C) 10 (D) 12.5

11) आकृती 4 मध्ये, ☐

DE || BC, BC = 6cm, DE = 4.5cm,

AE = 3cm तर AC ची लांबी काढा.

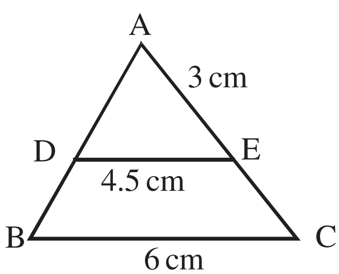


Fig. 4

12) आकृती 5 मध्ये,

O केंद‘ असलेल्या वर्तुळाची त्रिज्या 1.5cm आहे.

रेख PT ही या वर्तुळाला P बिंदूमध्ये स्पर्शिका आहे.

तर रेख OT ची लांबी काढा.

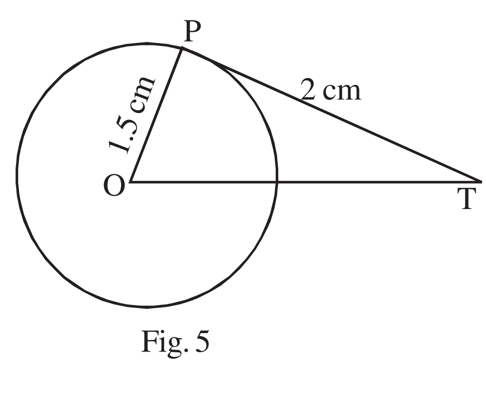


Fig. 5

13) एका समलंब चौकोनाच्या समलंब चौकोनाच्या समांतर बाजूंची लांबी अनुक्रमे 20cm आणि 16cm आहे. त्यांच्यामधील अंतर 6cm आहे. तर समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ काढा.

14)एका वृत्तचितीची त्रिज्या 1.4m आणि उंची 10m आहे. तर वृत्तचितीचे घनफळ काढा.

15)2, 1, 5, 7, 1 या सामग्रीचा मध्यक काढा.

16)एका अंकगणित श्रेढीचे 5 वे पद 14 आणि 12 वे पद 35 आहे. तर श्रेढीचे पहिले पद आणि साधारण फरक काढा.

17)$(x^2 - 5x + 6)$ आणि $(x^2 - 2x + 12)$ या बहुपदींचा म.सा.वि $(x - 3)$ आहे. या बहुपदींचा ल.सा.वि. काढा.

18)Rs. 2250 मुद्दलाचे 3 दराने 4 वर्षात जेवढे व्याज मिळते तेवढेच व्याज Rs. 2700 मुद्दलावर 4 दराने मिळण्यासाठी किती कालावधी लागेल?

19) आकृती 6 मध्ये,
ΔABC च्या बाजू वाढविल्याने
वाह्यकोन 1¸ 2¸ 3 तयार झाले आहेत.
सिद्ध करा की $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360°$

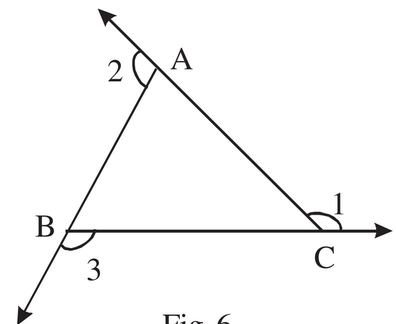


Fig. 6

20) आकृती 7 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे
AB आणि CD हे रेषाखंड
परस्परांना O या बिंदूमध्ये दुभागतात.
सिद्ध करा की, CA = BD

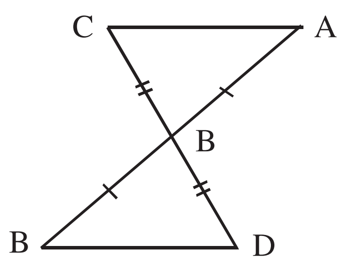


Fig. 7

21) आकृती 8 मध्ये,
ΔABC आणि ΔDBC हे BC या एकाच पायावर उभे असून
रेषा l आणि रेषा m या समांतर रेषांच्या जोडीत बद्ध आहेत.
$A(\Delta ABC) = 18cm^2$ रेख $DL \perp m$ जेव्हा BC = 4.5 cm
असेल तेव्हा DL ची लांबी किती असेल, ते काढा.

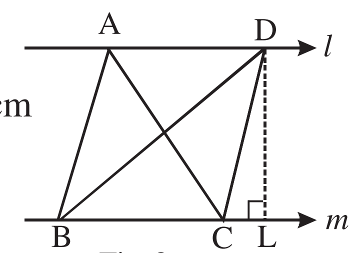


Fig. 8

22) 15m त्रिज्या असलेली वर्तुळाकृती बाग आहे या बागेला आतील बाजूने 2m रुंदीचा रस्ता केला आहे. रस्त्याचे क्षेत्रफळ काढा.

23) एका चेंडूचे पृष्ठफळ $616cm^2$ आहे. त्या चेंडूची त्रिज्या काढा.

24) किंमत काढा. cos 43° . cot 79° – sin 47 . tan 11°

25) 6m उंचीच्या एका खांबाची सावली $2\sqrt{3}$ m पडते. तर सूर्याचा उन्नतकोन काढा.

26) जर a + b = 7 आणि ab = 12 तर, $a^3 + b^3$ ची किंमत काढा.

27) एका दोन अंकी नैसर्गिक संख्येतील अंकांचा गुणाकार 12 आहे. या संख्येत 36 मिळविल्यास अंकांची अदलाबदल होते. तर ती संख्या काढा.

28) एका मोबाईलची रोखीची किंमत Rs.3880 आहे. परंतु तो हप्त्यावर घेतल्यास Rs.840 रोख देऊन उरलेली रक्कम तीन समान मासिक हप्त्यात फेडावी लागते. व्याजदर 16% असल्यास मासिक हप्त्याची रक्कम काढा.

29) आकृति 9 मध्ये, ΔABC ची परिमिती 27 cm आहे.
ΔABC मध्ये काढलेले आंतरवर्तुळ बाजू AB, BC आणि CA यांना अनुक्रमे P, Q आणि R बिंदूत स्पर्श करते.
जर PA = 4 cm, QB = 5 cm तर QC ची लांबी काढा.

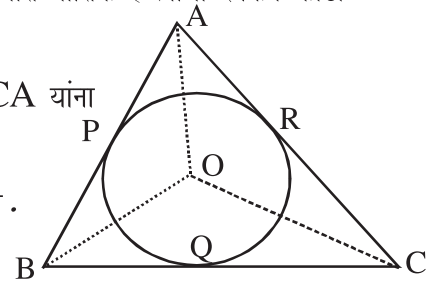


Fig. 9

30) ΔPQR असा काढा की PQ = 5cm, QR = 4.2 cm मध्यगा RS = 3.8cm

31) एका शंकूचा पाया 21 cm आणि घनफळ 12936 cm^3 आहे. तर शंकूचे एकूण पृष्ठफळ काढा.

32) 80m उंचीच्या इमारतीवरून इमारतींच्या विरुद्ध दिशेला असणाऱ्या दोन गाड्यांकडे पाहताना अवनतकोन अनुक्रमे 45° व 30° चा होतो तर त्या दोन गाड्यांमधील अंतर काढा.
($\sqrt{3}$ = 1.73 ही किंमत घ्या.)

33) झाडाच्या 70 पानांच्या लांबी मोजली व कोष्टकात भरली.

लांबी (mm मध्ये)	110-120	120-130	130-140	140-150	150-160	160-170
पानांची संख्या	10	12	20	15	08	05

पानांची लांबीचा मध्य काढा.

34) एका व्यापाराने Rs. 2100 ला टेबल व खुर्ची विकली त्यामुळे त्याला खुर्चीवर 25% आणि टेबलावर 10% नफा मिळाला. जर त्याने याच वस्तू Rs. 2130 ला विकल्या असत्या, तर त्याला खुर्चीवर 10% आणि टेबलावर 25% नफा मिळाला असता. तर खुर्ची व टेबल यांची प्रत्येकी किंमत काढा.

35) काटकोन त्रिकोणामध्ये कर्णावर काढलेल्या चौरसाचे क्षेत्रफळ हे इतर दोन बाजूंवर काढलेल्या चौरसांच्या क्षेत्रफळांच्या बेरजेइतके असते, हे सिद्ध करा.

36) एका विमानाची आसनक्षमता 120 आहे. गेल्या 100 उड्डाणांमध्ये विमानात किती प'वासी होते, याचे कोष्टक खाली दिले आहे.

प्रवासी संख्या	वारंवारता
100-104	15
104-108	18
108-112	34
112-116	16
116-120	17

वरील माहितीवरून प्रवासी संख्येचा मध्य काढा.

गुणदान योजना

1) (B) 2) (C) 3) (C) 4) (B) 5) (A) 6) (D) 7) (B) 8) (C) 9) (A) 10) B

11) 4cm 12) 2.5cm 13) 108 cm^2 14) 61.6m^3 15) 2

16) a + 4d = 14, a + 11d = 35 1

पहिली वहुपदी × दुसरी वहुपदी

मसावी

$\therefore d = 3$ आणि $a = 2$ 1

17) लसावी = ... 1/2

$= \frac{(x^2-5x+6)(x^2-7x+12)}{(x-3)}$ 1/2

$= \frac{(x-3)(x+2)(x-4)(x-3)}{(x-3)}$ 1/2

$= (x + 2)(x - 4)(x - 3)$

$= (x + 2)(x^2 - 7x + 12)$

$= x^3 - 9x^2 + 26x - 24$ 1/2

18) मुद्दल = रू 2250, दर = 3 मुदत = 4 वर्षे, व्याज = ?

$\therefore$ व्याज $I = \frac{PRT}{100}$

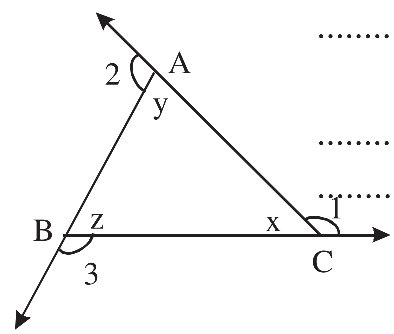
$= \frac{2250 \times 3 \times 4}{100}$

= रू 270 .... 1/2

मुद्दल = रू 2700, दर = 4, मुदत = ? व्याज = रू 270

$\therefore$ व्याज $= 270 = \frac{2700 \times 4 \times x}{100}$ 1/2

$= \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$ वर्षे 1



19) i) $\angle 1 + \angle x = 180$

ii) $\angle 2 + \angle y = 180°$

iii) $\angle 3 + \angle z = 180°$ 1

$\Rightarrow (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3) + (\angle x + \angle y + \angle z) = 540°$ 1/2

$\Rightarrow (\angle x + \angle y + \angle z) = 180°$

$\therefore (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3) = 360°$ 1/2

20) ΔBDO आणि ΔACO मध्ये,

OB = OA

OD = OC

$\angle BOD = \angle AOC$ (परस्परविरुद्ध कोन) 1

$\therefore \Delta BDO \cong \Delta ACO$ 1/2

$\therefore BD = CA$ (एकरूप त्रिकोणाच्या संगत वाजू) 1/2

21) ΔABC आणि ΔDBC हे BC या एकाच पायावर उभे असून रेषा l आणि रेषा m या समांतर रेषांच्या जोडीत बद्ध आहेत.

$\therefore A(\Delta ABC) = A(\Delta DBC) = 18cm^2$ 1

$\therefore A(\Delta DBC) = \frac{1}{2} \times 4.5 \times DL = 18\ cm^2$

$\therefore \Rightarrow DL = \frac{18 \times 2}{4.5}$

$= 8\ cm$ 1

22) रस्त्याची बाह्य त्रिज्या = 15 m

रस्त्याची आंतरत्रिज्या = 13 m 1/2

$\therefore$रस्त्याचे क्षेत्रफळ = $\frac{22}{7}\ (15^2 - 13^2)m^2$ 1

$= 176m^2$ 1/2

23) चेंडूचे पृष्ठफळ = $4\pi r^2$

$\therefore\ 616 \quad = 4 \times \pi \times r^2$ 1/2

$\therefore\ \frac{616 \text{ X } 7}{88} = r^2$ 1/2

$\therefore 49 = r^2$ 1

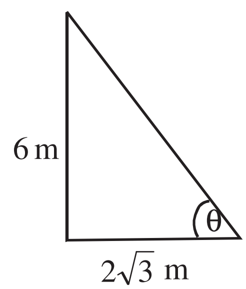
$r \quad = 7cm$

24) $\sin 47° = \sin (90 - 43)° = \cos 43°$

$\cos 43° = \cot (90 - 11)° = \tan 11°$ 1

$\therefore$किंमत घालून

$\therefore \cos 43°\ .\ \tan 11° - \cos 43°\ .\ \tan 11° = 0$ 1



25) सूर्याचा उन्नतकोन θ आहे, असे मानू,

$\therefore \tan\theta = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \tan 60°$ 1

$\therefore\ \theta = 60°$ 1

26) a + b = 7, ab = 12

किंमती घालून,

$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\ (a + b)$ 11/2

$\therefore (7)^3 = a^3 + b^3 + 3 \times 12 \times 7$

$\therefore 343 = (a^3 + b^3) + 252$

$\therefore 343 - 251 = a^3 + b^3$ 1 1/2

$\therefore a^3 + b^3 = 91$ 1

27) दशकस्थानचा अंक x आणि एककस्थानचा अंक y आहे.

असे मानू

$\therefore xy = 12 \Rightarrow y = \frac{12}{x}$ 1

$\therefore 10x + y + 36 = 10y + x \Rightarrow x - y = -4$ 1

$\therefore x - \frac{12}{x} = -4 \Rightarrow x^2 + 4x - 12 = 0$ 1

$\therefore x = 2$ किंवा -6 .... 1/2

$\therefore x = 2$ (-6 ही किंमत अग्राह्य)

$\therefore y = 6$

$\therefore$ ती संख्या = 26 .... 1/2

28) रोखीची किंमत = रू 3880

सुरवातीची रक्कम = रू 840

मासिक हप्ता = रू x आहे, असे मानू 1

$\therefore$ दिलेले व्याज = रू $(3x - 3040)$

हप्त्याची रक्कम = रू

पहिला महिना = रू 3040

दुसरा महिना = रू $(3040 - x)$ 1

तिसरा महिना = रू $(3040 - 2x)$

एका महिन्यासाठी हप्त्याची रक्कम = रू $(9120 - 3x)$ 1/2

व्याजदर = 16%

$\therefore (9120 - 3x) \times \frac{16}{100} \times \frac{1}{12} = (3x - 3040)$

$\Rightarrow x \Rightarrow$‘ 1040 1

$\therefore$ मासिक हप्ता = Rs. 1040 .... 1/2

29) AP आणि AR या एकाच विंदूतून काढलेल्या स्पर्शिका आहेत.

AP = AR = 4cm 1

त्याचप्रमाणे,

BP = BQ = 5cm 1/2

CQ = CR = x आहे असे मानू 1/2

$\therefore (4 \times 2 + 5 \times 2 + 2 \times x) = 27$ cm 1

$\Rightarrow x = 4.5$cm 1

$\Rightarrow QC = 4.5$cm

30) 1) PQ = 5 cm काढा.

2) रेख PQ ही S विंदूत दुभागा

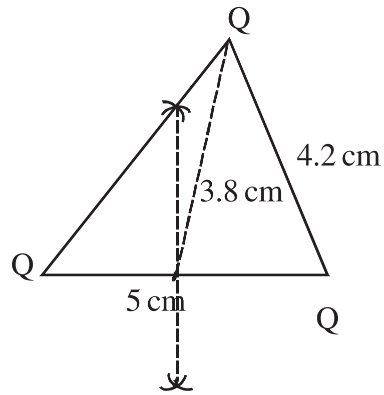
3) केंद्र विंदू S आणि त्रिज्या 3.8 cm व केंद्रविंदू Q आणि त्रिज्या 4.2cm घेऊन वर्तुळे काढा. छेदविंदूला R नाव द्या.

अचूक पायऱ्या 1

अचूक रचना 3

4) PR आणि QR साधा

PQR हा इष्ट त्रिकोण होय.



31) शंकूची उंची h आणि

तिरकस उंची l आहे, असे मानू

शंकूचे घनफळ = $\frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h$ 1

$\therefore 12936 = \times \ \times (21)^2 \times h$ 1/2

$\therefore h \Rightarrow 28$ cm 1

आता $l^2 = 28^2 + 21^2$

$= 35^2$

$l = 35$ 1

शंकूचे एकूण पृष्ठफळ = $\frac{22}{7} \times 21\ (35 + 231)\text{cm}^2$

$= 3696\text{cm}^2$ 1/2

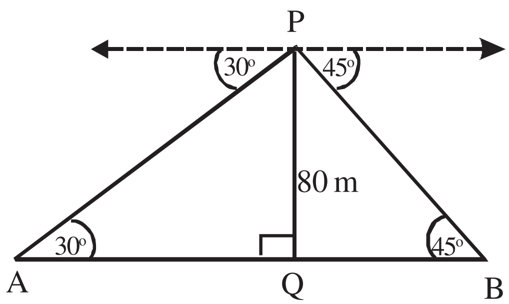
32) $\frac{PQ}{QB} = \tan 45°$ 1

$\Rightarrow PQ = QB = 80$m 1

$\frac{PQ}{AQ} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow AQ = 80\sqrt{3}$ m 1

$\therefore AB = 80\ (1 + \sqrt{3})$ m

$= 218.4$ m 1



33) वर्गमध्य काढणे

115, 125, 135, 145, 155, 165

विंदूस्थापन करणे व आलेख काढणे.

(115, 10), (125, 12), (135, 20),

(145, 15), (155, 8), (165, 5)

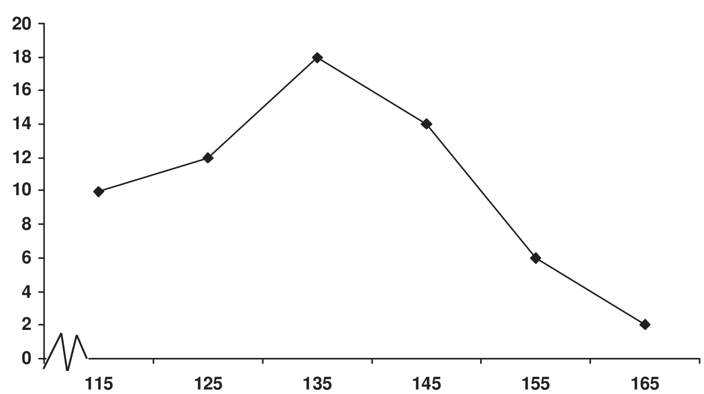
34) खुर्चीची किंमत रू x आणि टेबलाची किंमत रू y

आहे असे मानू

$\therefore \frac{5x}{4} + \frac{11}{10}\ y = 2100$

आणि $\frac{11x}{10} + \frac{5y}{4} = 2130$ 3

दोन्ही समीकरणे सोडवून



$x =$ रू 800, $y =$ रू1000

$\therefore$खुर्चीची किंमत = रू 800

$\therefore$टेबलाची किंमत = रू 1000 3

35) अचूक पक्ष, साध्य, आकृती व रचना 2

अचूक सिद्धता 4

36)

वर्गमध्य (x_1)	102	106	110	144	118	
f_1	15	18	34	16	17	$\Sigma fi = 100$
$d_1 = x_1 - 110$	-8	-4	0	4	8	
$f_1 \ d_1$	-120	-72	0	64	136	$\Sigma f_1 d_1 = 8$

$\Sigma f_1 d_1 = (-120) + (-72) + 0 + 64 + 136$ 4

$= 8$

$\therefore$मध्य $= a + \frac{\Sigma f_1 d_1}{\Sigma fi}$

$= 110 + \frac{8}{100}$

$= 110 . 08$ 2