માધ્યમિક અભ્યાસક્રમ

211 - ગણિત

પુસ્તક - 1

અભ્યાસક્રમ સહયોજક
નિરજ પ્રતાપ સિંઘ

ભાષાંતર સહયોજક
ડૉ. રાજેશ કુમાર

રાષ્ટ્રીય મુક્ત વિદ્યાલયી શિક્ષણ સંસ્થાન
(એમ.એચ.આર.ડી, ભારત સરકાર હેઠળની એક સ્વાયત સંસ્થા)
એ - 24-25, ઈન્સ્ટિટ્યુશનલ, એરીયા સેક્ટર - 62 નોઈડા -201309 (ઉ.પ્ર)
વેબસાઈટ : www.nios.ac.in, ટોલ ફ્રી નં. 18001809393

(કોપી)

સચિવ, રાષ્ટ્રીય મુક્ત વિદ્યાલયી શિક્ષણ સંસ્થાન, એ-૨૪-૨૫, ઈન્સ્ટિટ્યૂશનલ એરિયા નેશનલ હાઈવે ૨૪, સેક્ટર-૬૨, નોઈડા-૨૦૧૩૦૯ દ્વારા પ્રકાશિત અને મુદ્રિત

સલાહકાર સમિતિ

ડૉ.સિતાંશુ એસ.જેના
અધ્યક્ષ
રાષ્ટ્રીય મુક્ત વિદ્યાલયી શિક્ષણ સંસ્થાન

ડૉ.કુલદીપ અગ્રવાલ
નિયામક (શૈક્ષણિક)
રાષ્ટ્રીય મુક્ત વિદ્યાલયી શિક્ષણ સંસ્થાન

કુમારી ગોપા બિસવાસ
સંયુક્ત નિયામક (શૈક્ષણિક)
રાષ્ટ્રીય મુક્ત વિદ્યાલયી શિક્ષણ સંસ્થાન

અભ્યાસક્રમ સમિતિ

અધ્યક્ષ
પ્રો. મોહન લાલ
સચિવ, દેવ કોલેજ મેનેજિંગ કમિટી,
ઈ-182, ન્યુ રાજેન્દ્ર નગર, નવી દિલ્હી, પિન-110060

શ્રી જી.ડી. ઢાલ
રીડર (નિવૃત), એન.સી.ઇ.આર.ટી.,
કે-171, *એલઆઈસી કોલોની,*
પશ્ચિમ વિહાર, નવી દિલ્હી, પિન-110087

શ્રી. જે.સી. નીજાહવન
ઉપ આચાર્યશ્રી (નિવૃત),
સર્વોદય વિદ્યાલય, સી બ્લોક,

પ્રો. રામવતર
પ્રોફેસર (નિવૃત્ત), એન.સી.ઇ.આર.ટી.,
533, *સેક્ટર* 7, *અર્બન એસ્ટેટ,*
ગુડગાંવ, હરિયાણા, પિન-122001

શ્રી. પી.કે. ગર્ગ
નિવૃત. આચાર્યશ્રી-રામજસ શાળા,
169, *પુન્ડ્રીક વિહાર, સરસ્વતી વિહાર,*
નવી દિલ્હી, પિન-110034

શ્રી. મહેન્દ્ર શંકર
લેક્ચરર (નિવૃત), સિલેકશન ગ્રેડ, NCERT.,
ડીપી-203, *મૌર્ય વિદેશી થાણું,પ્રિતમપુર,*
નવી દિલ્હી, પિન-110088

શ્રી. ઈશ્વર ચંદ્ર
રીડર (નિવૃત), NCERT,
એચ. નં.-WZ 1427D, *નંગલ રાયા,*
નવી દિલ્હી, પિન-110046

શ્રી સુવેન્ધુ શેખર દાસ
સહાયક નિયામક (શૈક્ષણિક),
નેશનલ ઈન્સ્ટિટ્યૂટ ઓફ ઓપન સ્કૂલ,
એ-24/25, *સંસ્થાકીય વિસ્તાર, સેક્ટર* 62,
નોઈડા, પિન-201309

શ્રી નીરાજ પ્રતાપ સિંઘ
સિનિયર એક્ઝિક્યુટિવ ઓફિસર (ગણિત),
નેશનલ ઈન્સ્ટિટ્યૂટ ઓફ ઓપન સ્કૂલ,
એ-24/25, *સંસ્થાકીય વિસ્તાર, સેક્ટર* 62,
નોઈડા, પિન-201309

પાઠ લેખકો અને સમીક્ષકો

શ્રી પી.કે. ગર્ગ
નિવૃત આચાર્યશ્રી-રમજસ શાળા,
169, *પુન્દ્રીક વિહાર, સરસ્વતી વિહાર,*
નવી દિલ્હી

અધ્યાપક રામવતર
પ્રોફેસર (નિવૃત્ત), NCERT,
533, *સેક્ટર* 7, *અર્બન એસ્ટેટ,*
ગુડગાંવ, હરિયાણા, પિન-122001

શ્રી. મહેન્દ્ર શંકર
લેક્ચરર (નિવૃત), સિલેકશન ગ્રેડ,
NCERT, *ડીપી*-203, *મૌર્ય વિદેશી થાણું,*
પ્રિતમપુરા, નવી દિલ્હી, પિન-110088

સંપાદકો

પ્રો. મોહન લાલ
સચિવ દેવ કોલેજ મેનેજીંગ
સમિતિ, ઈ 182, *નવી રાજેન્દ્ર નગર,*
નવી દિલ્હી, પિન-110060

શ્રી જે.સી. નીજવાહન
ઉપ આચાર્યશ્રી (નિવૃત),
સર્વોદય વિદ્યાલય, સી બ્લોક,
સરસ્વતિ વિહાર, નવી દિલ્હી, પિન-110087

ડૉ. રાજપાલ સિંઘ
લેક્ચરર ગણિત,
રાજકીય પ્રતિભા વિકાસ વિદ્યાલય,
18, *મૈત્રી એપા., પ્રતાપનગર*
નવી દિલ્હી, પિન-110092

ડૉ. આઈ.કે. બાંસલ
પ્રોફેસર અને વડા (નિવૃત્ત), NCERT
પ્રાથમિક શિક્ષણ વિભાગ,
129, *પોકેટ સી* -13, *સેક્ટર* -3, *રોહીણી,*
નવી દિલ્હી, પિન-110085

ડૉ કે.કે. વશિષ્ઠા
પ્રોફેસર (નિવૃત્ત), NCERT
15/107 *વિભાગ,* HIG *ડુપ્લેક્સ, વસુંધરા,*
ગજીયાબાદ, ઉત્તર પ્રદેશ, પિન-201012

ડૉ કે.એમ. ગુપ્તા
પ્રોફેસર (નિવૃત્ત), NCERT
15/107, *આશિર્વાદ, સી* 29, *સુલતાનપુર*
કોલોની, નવી દિલ્હી, પિન-110030

શ્રી જી.ડી.ઢાલ
રીડર (નિવૃત), એન.સી.ઇ.આર.ટી.,
કે-171, *એલઆઈસી કોલોની,*
પશ્ચિમ વિહાર, નવી દિલ્હી, પિન-110087

શ્રી સુવેન્ધુ શેખર દાસ
સહાયક નિયામક (શૈક્ષણિક),
નેશનલ ઈન્સ્ટિટ્યૂટ ઓફ ઓપન સ્કૂલ,
એ-24/25, *સંસ્થાકીય વિસ્તાર, સેક્ટર* 62,
નોઈડા, પિન-201309

શ્રી નીરજ પ્રતાપ સિંઘ
સિનિયર એક્ઝિક્યુટિવ ઓફિસર (ગણિત),
નેશનલ ઈન્સ્ટિટ્યૂટ ઓફ ઓપન સ્કૂલ,
એ-24/25, *સંસ્થાકીય વિસ્તાર, સેક્ટર* 62,
નોઈડા, પિન-201309

ગ્રાફિક્સ આર્ટિસ્ટ

શ્રી મહેશ શર્મા
ગ્રાફિક્સ આર્ટિસ્ટ
રાષ્ટ્રીય મુક્ત વિદ્યાલયી શિક્ષણ સંસ્થાન,
નોઈડા

ગ્રાફિક અને ડેટા સિસ્ટમ દ્વારા ટાઈપસેટીંગ લેસર

અધ્યક્ષશ્રીનો સંદેશ

પ્રિય અભ્યેતા / વિદ્યાર્થી

સતત પરિવર્તિત થતા જતા જન-સમાજની જરૂરીયાતો કેટલાંક જૂથોની સમય સાથે પરિવર્તિત થવાની પધ્ધતિ અને આવડતને પરિપૂર્ણ કરવા માટે જરૂરી અપેક્ષાઓ અનુસાર બદલાય તે અનિવાર્ય બાબત ગણાય. શિક્ષણએ પરિવર્તન માટેનું એક અદકું ઓજાર છે. યોગ્ય સમયનું અને યથાયોગ્ય શિક્ષણ જ સમાજની મહત્વાકાંક્ષાઓની આપૂર્તિ કરવા ઉપરાંત નવીન સમસ્યાઓનો સામનો કરવા તેમજ તે માટે જોઈતી હિંમત કેળવવા સારૂ વ્યાવહારિક પરિવર્તનની આવશ્યકતા હોય છે. અવાર નવાર તેમજ તબકકાવાર રીતે પાઠયક્રમોમાં જરૂરી ફેરફારો દ્વારા અસરકારક રીતે આવું સઘળું પરિવર્તન કરી શકાય. કોઈ પણ જડ (અપરિવર્તન શીલ) પાઠયક્રમ આવો કોઈજ હેતુ પાર પાડી શકે નહી. કારણ કે તે આવી કોઈ વૈયક્તિક અથવા સામાજિક (સામૂહિક) જરૂરીયાતને પોષાતો હોતો નથી.

એકમાત્ર ઉકત હેતુસર સમગ્ર રાષ્ટ્રના કેળવણીકારોએ સમયાન્તરે એકઠા થઈને આવા પરિવર્તન માટે જરૂરી ચર્ચા-વિચારણાઓ કરવી જોઈએ. આથી જ એક ચર્ચા-વિચારણાની ફલશ્રુતિ રૂપે રાષ્ટ્રીય પાઠયક્રમ માળખા (NCF 2005) ની રચના કરવામાં આવી છે. તેણે વિવિધ કક્ષાઓ જેવી કે પાયાની પ્રાથમિક, માધ્યમિક તેમજ ઉચ્ચ માધ્યમિક શિક્ષણ સંદર્ભે વિષદ ચર્ચા- વિચારણાઓને અંતે એક ભૂમિકા તૈયાર કરી છે.

ઉકત તમામ -રાષ્ટ્રીય તથા સામાજિક બાબતોને ધ્યાનમાં રાખી ને અમે તાજેતરમાં માધ્યમિક કક્ષાનો પાઠયક્રમ અદ્યતન તેમજ જરૂરીયાત અનુસારનો બની રહે એ રીતે સુધાર્યો છે આમ તો અભ્યાસ સામગ્રીનું ઉત્પાદન એ NIOS કાર્યક્રમો મુકત વિદ્યાલયી કે દૂરવર્તી શિક્ષણનો એક સર્વાંગી તથા અતિઆવશ્યક ભાગ ગણાય. એ ન્યાયે અમે ખાસ કાળજી રાખીને આ અભ્યાસ સામગ્રી તમારા જેવા ઉપયોગ કર્તા (અભ્યેતાઓ) માટે તે મૈત્રીપૂર્ણ, રસપ્રદ તથા અતિઆવશ્યક બની રહે તે માટે પૂરતો પ્રયાસ કર્યો છે.

આ સંદર્ભે અત્રેઆ અભ્યાસ સામગ્રીને રસપ્રદ તથા તમારી જરૂરીયાત મુજબની બનાવવામાં મદદકર્તા તમામ વિખ્યાત વિતજનોનો આભાર માનું છું. આશા રાખું કે તમને પણ તે અસરકારક તેમજ તન્મય કરી દેનાર બની રહેશે.

રાષ્ટ્રીય મુકત વિદ્યાલયી શિક્ષણ સંસ્થાન વતી અત્રે હું આપ સર્વે ને અત્યંત ઉજજવળ તેમજ સફળ ભાવી માટે શુભકામનાઓ પાઠવુ છું.

ડો. એસ. એસ. જેના
અધ્યક્ષશ્રી, NIOS

નિયામકશ્રીની નોંધ

પ્રિય અભ્યેતાઓ / વિદ્યાર્થીઓ

રાષ્ટ્રીય મૂક્ત વિદ્યાલયી સંસ્થાન (NIOS) *નો એ હંમેશનો પ્રયત્ન છે કે તે તમને અવાર નવાર નવો તેમજ તમારી જરૂરીયાતને પહોંચી વળે તેવો અભ્યાસક્રમ આપે. હવે અમે માધ્યામિક કક્ષાના તમામ વિષયોના અભ્યાસક્રમ સુધારી રહયા છીએ. આ સંદર્ભે તમને નવો અભ્યાસક્રમ આપવાના હેતુસર અમે CBSE (સેંટ્રલ બોર્ડ ઓફ સ્કૂલ એજયુકેશન)તેમજ વિવિધ રાજયોના માધ્યમિક શિક્ષણ બોર્ડ સાથે જુદા જુદા વિષયો સંદર્ભે મસલતો યોજી છે. રાષ્ટ્રીય અભ્યાસક્રમનું માળખું શૈક્ષણિક સંશોધન અને તાલીમ માટેની રાષ્ટ્રીય સંસ્થાને આધારે ઘડાય છે. આમ વ્યાપક અને તુલનાત્મક અભ્યાસ બાદ અમે જીવનને સુસંગત તેમજ સરળ એવાં અભ્યાસક્રમ ઘડીએ છીએ. રાષ્ટ્રના જાણીતા શિક્ષણવીદો / કેળવણીકારોને સાથે લઈને તેમના માર્ગદર્શન અંતર્ગત અમે અભ્યાક્રમોને સુધારીને અદ્યતન બનાવતા રહીએ છીએ.*

આ ઉપંરાત અમે શૈક્ષણિક-અભ્યાસક્રમ સાગ્રી પર પણ નજર રાખતા હોઈએ છીએ. અમે એમાંની જૂનીપૂરાણી તથા નકામી થઈ ગયેલી માહિતી રદ કરીને તેની જગ્યાએ નવીન તથા સુસંગત બાબતો તેમાં ઉમેરીને આ અભ્યાસક્રમને આકર્ષક તેમજ અસરકારક બનાવતા રહીએ છીએ. ભારતીય સંસ્કૃતિ અને વારસાનો વિષય વાસ્તવમાં રસપ્રદ અને આનંદદાયક છે જેનાથી તમને નવાં નવાં ક્ષેત્રોમાં આપણા દેશના પ્રદાનનો ખ્યાલ આવશે.

મને આશા છે કે અત્રે તમારા માટે ઘડાઈ રહેલ આ અભ્યાસ સામગ્રી સાચેજ રસપ્રદ અને નવું જાણવાની ઉત્કંઠાવાળી બની રહેશે. આ સંદર્ભે તમારા કોઈપણ સૂચન આવકાર્ય છે.

મારા તરફથી આપ સર્વને સુખી એન સફળભાવીની અભ્યર્થના.

(ડૉ.કુલદિપ અગ્રવાલ)

નિયામક શૈક્ષણિક

આપની સાથે બે બોલ

પ્રિય વાંચક,

1 નંબરની પુસ્તિકામાં તમે બીજ ગણિત અને ધંધાકીય ગણિત વિશે શિખ્યા. આ પુસ્તકમાં તમે ચાર ભાગ ભૂમિતી, મિશ્રણ...... અને આંકડાશાસ્ત્ર વિશે માહિતગાર થશો.

ભૂમિતી વિશેના અંકમાં, તમે પાયાની બાબતો જેવી કે બિંદુ, રેખા, ખૂણા વગેરે અંગે શીખશો. જેથી તમે ભૂમિતીની આકૃત્તિઓ જે આપણી વચ્ચે છે તેને અલગ પાડી શકશો. તમે તે થકી એક સરખી આકૃત્તિઓ અને અલગ આકૃતિનો તફાવત જાણી શકશો. કેટલાંક પાયાના પ્રમેય પણ પસંદ કરેલા પ્રકરણમાં આપવામાં આવ્યા છે. આ પ્રમેય તમને તમારી તર્ક શક્તિ વધારવામાં મદદરૂપ થશે.

મિશ્રણ અંગેના અંકમાં આપણી રોજિંદી ક્રિયાઓ સાથે જોડાયેલા ઉદાહરણ આપવાનો પ્રયત્ન કર્યો છે. જો તમે આ અંકનો અભ્યાસ કરશો. તમે એક લંબચોરસ બગીચાને બંધ કરવા જોઈતો વાયર, તમારા ઘરની ફરતે દિવાલ કરવા માટે વપરાતું અંદાજીત ચણતર, તમારા ચાર ઘરની દિવાલનું ક્ષેત્રફળ, તમારા ઘરને રંગકામ કરવા માટે થતો ખર્ચ, એક પાણીની ટાંકીની ક્ષમતા વગેરેને ગણવા માટે સક્ષમ થઈ શકશો.

આપણે ઘણી વખત એવા પ્રશ્નો જોઈએ છે જેવા કે પીલ્લરની ઉંચાઈ, વિરુદ્ધ નદીના કિનારા પરથી દેખાતા લેમ્પ પોસ્ટની ઉંચાઈ, એક પર્વતની ટોચ કે જે કોઈ પણ મેદાન કે બીજી ઉંચી જગ્યાએથી જોઈ શકાતી હોય. Trignometric *અંગેના એકની મદદથી તમે આ બધા જ પ્રશ્નોના ઉત્તર ખૂણાઓના સૂત્રો,* Depression *અને* Trignometric *પ્રમાણથી આપી શકશો.*

ખૂબ જ મોટા પ્રમાણમાં આપેલી માહિતીનો અસરકારક રીતે ઉપયોગ કેવી રીતે કરવો તે અંગે તમે આંકડાશાસ્ત્રના અંકમાંથી શીખી શકશો. તમે આ અંકની મદદથી માહિતીને સ્તંભ આલેખમાં કેવી રીતે દર્શાવી શકાય તે શીખી શકશો અને તેના પરથી તેનો સાર પણ શીખી શકશો.

બધા જ અંકમાં વધારે ઉદાહરણ આપીને વધુ સારી રીતે સમજ પડે તેવો પ્રયત્ન કરવામાં આવ્યો છે. તો તમને કોઈપણ સમસ્યા થાય તો, મહેરબાની કરી મને તે વિશે લખવામાં કોઈ ક્ષોભ અનુભવશો નહીં. તમારી સલાહ આવકાર્ય છે.

તમારા ઉજ્જવળ ભવિષ્ય માટે શુભકામનાઓ.

અભ્યાસ સામગ્રીના ઉપયોગની રીત

તમારે નોંધ લેવી કે NIOS *માં પ્રવેશ લીધા બાદ તમે એક એવી પ્રક્રિયામાં પ્રવેશ કર્યો છે કે જે સામાન્ય શાળા શિક્ષક કરતાં ખૂબ જ અલગ છે.*

હવે તમે સ્વ અભ્યાસી છો :

સામાન્ય રીતે શાળાઓમાં હંમેશા વર્ગ લેવા માટે, તમારી શંકાઓ દૂર કરવા માટે તેમજ તમને માર્ગદર્શન અને હિંમત પૂરી પાડવા માટે શિક્ષક હોય છે. ત્યાં તમે ચોક્કસ પણે તમારા સમૂહ સાથે ચર્ચા કરીને, લાયબ્રેરીમાં જઈને, પુનરાવર્તન કરીને, અન્ય સાંસ્કૃતિક કાર્યક્રમોમાં ભાગ લઈને, બીજા ટી.વી., રેડિયો કાર્યક્રમો જોઈને વગેરે આ બધુ જ તમને અભ્યાસમાં મદદરૂપ થાય છે.

જ્યારે, NIOS *માં કોઈ શિક્ષક ઉપલબ્ધ નથી. તમારે જાતે જ અભ્યાસ કરવો પડે છે. એનો મતલબ એ થાય છે કે અહીં તમે સ્વ. અભ્યાસી બની જાઓ છો. એક સ્વ. અભ્યાસીની જવાબદારીઓ અન્ય સામાન્ય અભ્યાસી કરતાં ઘણી જ વધારે હોય છે કે જે શિક્ષક ઉપર નિર્ભર છે. પણ સાથે જ સ્વઅભ્યાસી હોવું ઘણું જ પડકાર રૂપ છે.*

અહીં તમે એક જ તમારા અભ્યાસ માટે જવાબદાર છો. તેનો મતલબ કે તમારે તમારા અભ્યાસનું આયોજન મતે જ કરવું પડે છે. નિયમિત ભણવું પડે છે અને જાતે જ તમારું લક્ષ્ય ધ્યાનમાં રાખી પ્રોત્સાહિત રહેવું પડે છે.

તમારા અભ્યાસના સાહિત્યની સમજણ :

NIOS *તમને અભ્યાસનું સાહિત્યનું પૂરુ પાડીને તમારી મદદ કરે છે.જેનો એક ભાગ અત્યારે તમારા હાથમાં છે. અને તેને અભ્યાસનું સાહિત્ય કહીએ છી કારણ કે આ સાહિત્ય તમે તમારી શાળામાં ભણી ગયેલા પાઠ્ય પુસ્તકો કરતા ખૂબ જ અલગ છે. અહીં પાઠ્યપુસ્તક અને શિક્ષક બંને સાથે મુકવામાં આવે છે. તમારે અહીં તેના સંપર્કો અને એકમો એવી રીતે શોધવા પડશે કે જાણે તમને વર્ગખંડમાં ભણાવવમાં આવતું હોય. અહીં તમને પુરતા ઉદાહરણ આપવામાં આવશે જે તમને તમારા અભ્યાસમાં મદદરૂપ થશે અને તેની સારી રીતે સમજી શકશો.*

આજ કારણ છે કે તમને તે બોજરૂપ લાગશે પણ ચાલો તમને વધુ ડરાવતા નથી. તમે કેટલોક વિભાગ તમારા પ્રકરણમાં જોઈ શકશો. ચાલો તેનો હેતુ સમજીએ.

પરિચય :

હેતુઓ : *અહી તમે કેટલાંક હેતુઓની યાદી જોઈ શકશો, કે જે તમે પ્રકરણ સમજ્યા પછી સમજી શકશો. અહીં તમે ચકાસી શકશો કે તમે આ હાંસલ કર્યું છે કે કેમ કારણ કે આ માપી શકાય તેવી રીતે પૂરુ પાડવામાં આવ્યું છે.*

તમારી પ્રગતિ જાણો : *દરેક પ્રકરણ પૂર્ણ થયા બાદ તમે આ વિભાગ જોઈ શકશો. તેમાં હેતુઓ, ખૂબ જ ટૂંકા જવાબો, ટૂંકા જવાબો અને લાંબાં પ્રશ્નોનો સમાવેશ થાય છે. આ તમને તમે પ્રકરણ ભણ્યા છો કે કેમ તેમાં મદદરૂપ થશે. તમે આ પ્રશ્નોની ચાવી પ્રકરણના અંતમાં જાણી શકશો. જો તમે બધા જ જવાબો આપવામાં સફળ રહેશો તો તમે આગળ વધી શકશો નહિંતર તમારે આ વિભાગ ફરીથી વાંચવો જોઈએ.*

તમે શું શીખ્યા : *અહીં તમે પાઠમાં આવેલ મુખ્ય હેતુઓનો સારાંશ વધુ સંક્ષેપમાં અને પુનરાવર્તન માટે લઈ શકશો.*

સત્રાંત સ્વાધ્યાય : *અહીં આપવામાં આવેલા ટૂંકા જવાબો અને લાંબાં પ્રશ્નોના ઉત્તર તમને તમારો અભ્યાસ વધારે સારો કરવામાં મદદ કરશે અને પરીક્ષા અંગે વધારે મહેનત કરવાની તક પૂરી પાડશે.*

જવાબો : *અહીં આપવામાં આવેલ "તમારી પ્રગતિ ચકાસો અને સત્રાંત સ્વાધ્યાય" દરેક પ્રશ્નોના અંતે આપવામાં આવે છે. અઘરા પ્રશ્નો વખતે તમને કેટલાક સંકેત પણ આપવામાં આવેલ છે.*

પુસ્તકો અને અન્ય સાહિત્ય સિવાય, તમે આદર્શ પ્રશ્નપત્ર, જૂના પાછળના વર્ષોમાં પૂછાયેલા પ્રશ્નપત્ર વગેરે પણ મેળવી શકો છો, જે તમને તમારી પરીક્ષા માટે ખૂબ જ ઉપયોગી નિવડશે.

રૂબરૂ વાતચીતનો કાર્યક્રમ :

કેટલાક અગત્યના વર્ગો અને કેન્દ્રો દ્વારા પૂરા પાડવામાં આવશે. છતાં પણ ધ્યાન દોરવું કે તે વર્ગો સામાન્ય શાળામાં ભણાવવામાં આવે છે તેવા કે તેના ઉદ્દેશથી નથી. અહીં આ વર્ગો દ્વારા તમને એક તક આપવામાં આવે છે, તમારા સંદેહ દૂર કરવા, તમારા પ્રશ્નો હલ કરવા અને તમને પૂરતુ માર્ગદર્શન પૂરુ પાડવા, તેમજ પુસ્તકો અંગેની સલાહ આપવા. જેથી વર્ગમાં તૈયારી સાથે જાઓ કે તમે તેનો મહત્તમ લાભ લઈ શકો.

ગાણિતિક પ્રવૃત્તિઓ :

તમારા શિક્ષા કેન્દ્ર પર તમને એક તક આપવામાં આવશે. જેમાં તમે કેટલીક ગાણિતિક પ્રવૃત્તિો કરશો. તમારા સારા શિક્ષણ માટે કે જે પ્રાયોગિક મોં એન.આઈ.ઓ.એસ. દ્વારા પુરુ પાડવામાં આવ્યું છે.

--- : -

એન.આઈ.ઓ.એસ. દ્વારા કેટલાંક ઓડિયો અને વિડીયો કાર્યક્રમ વિકસિત કર્યા છે કે જે તમારા માટે ખૂબ જ રસપ્રદ છે અને તમને તમારા અભ્યાસમાં પણ મદદરૂપ થશે. તમે તેની નકલ તમારા કેન્દ્ર પાસેથી લઈ શકશો.

તમારા અભ્યાસનું આયોજન

અહીં, ચાલો તમને તમારા અભ્યાલનું આયોજન કરવા કેટલીક સલાહ આપીશ.

સૌ પ્રથમ, તમારે સમજવું પડશે કે સખત મહેનતનો કોઈ વિકલ્પ નથી. "જેટલી વધુ મહેનત તેટલી વધુ સફળતા" સફળતા માટે કોઈ ટૂંકો રસ્તો નથી. જો તમને કોઈ દ્વારા બાંહેધરી આપવામાં આવી હોય પાસ થવ ા માટે તો તે તદ્દન નકામું છે કારણ કે અહીં પરીક્ષામાં ખૂબ જ કડક ચકાસણી કરવામાં આવે છે. જો તમે તેમાંથી પસાર થઈ પણ જાઓ, તેનો કોઈ ફાયદો અભ્યાસમાં થશે નહીં. સફળ થવા માટે પ્રામાણિક રસ્તો અપનાવીએ અને અભ્યાસનો મહત્તમ લાભ તમારા જીવનમાં ઉતારો. ભાગવું જરૂરી છે.

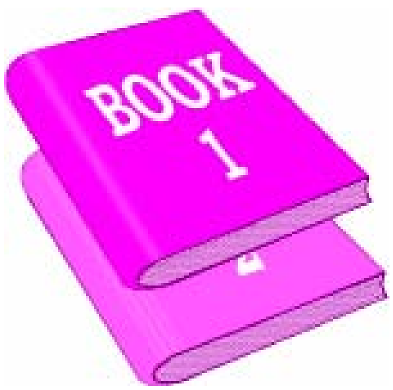
હવે, તમારે સમજવું ખૂબ જ આવશ્યક છે કે એન.આઈ.ઓ.એસ. તમને ઘણી સ્વતંત્રતા અને તમારા અભ્યાસમાં પૂરી પાડે છે. ઉદાહરણ તરીકે, બધા જ વિષયોની પરીક્ષા એક સાથે લેવી જરૂરી નથી. જેથી સૌ પ્રથમ તમારી પાસે જે સયમ છે તેમાં વિચારો અને નક્કી કરો કે તમારે બધા જ વિષયોનો અભ્યાસ એકસાથે કરવો છે કે તમારે બધા જ વિષયોનો અભ્યાસ એકસાથે કરવો છે કે તમારી ઈચ્છા એક પછી એક વિષયને ભણવાની છએ. બધા જ વિષયોને એકસાથે ભેગા કરવાથી તમે એવી સ્થિતિમાં મુકાઈ જશો કે તમે કોઈ પણ એક વિષય પર પૂરતું ધ્યાન કેન્દ્રીત કરી શકશો નહિં.

અભ્યાસનાં સમય નક્કી કરી રાખો. સાંજ, સવાર કે દિવસ જે સમય તમારી માટે વધુ અનૂકુળ હોય તેનું સમયપત્રક બનાવી દો તમે નક્કી કરેલા વિષયને તેમાંથી પૂરતો સમય ફાળવો અને બને તેટલું સમયપત્રકને અનુસરવાનો પ્રયત્ન કરો. જ્યારે તમે અભ્યાસ કરતા હોવ, તમને જરૂરી લાગતી બાબતો નીચે લીટી દોરો. તમે એન.આઈ.ઓ.એસ. ના સાહિત્યનો અભ્યાસ કરી શકો. વધારામાં જો જતમારી પાસે સમય હોય તો અન્ય પુસ્તક પણ વાંચી શકો. છતાંપણ તમારા હેતુથી આ સાહિત્ય પૂરતું છે. તમે જે વિષય તૈયાર કરો છો તેની એક કોપી તમારી પાસે રાખો. તમને સમજમાં જ આવી હોય તેવી બાબતો લખી રાખો. આ અંગેની ચર્ચા તમારા માતા-પિતા, મિત્રો શિક્ષકો સાથે કેન્દ્ર પર કરી શકો.

તમારા અંકમાં આવેલ સાહિત્યમાંથી પ્રશ્નોને હલ કરો અને તેનું પુનરાવર્તન કરો. આ તમને ફક્ત અભ્યાસમાં જ નહીં તમારી પરીક્ષાના પુનરાવર્તનમાં પણ મદદરૂપ થશે. તમારે પાછળના વર્ષોના પ્રશ્નપત્રો અને અન્ય આદર્શ પ્રશ્નપત્રો પણ હલ કરવા જોઈએ. તમારા જવાબો તમારા માતા-પિતા અને મિત્રોને બતાવો અને તેની ચર્ચા કરો.

આ માર્ગદર્શન તમને મદદરૂપ થશે. કેટલીક બીજી યુક્તિઓ પણ તમને તમારા અભ્યાસમાં મદરૂપ થશે. મને ખાતરી છે તમે તારા અભ્યાસમાં સફળ રહેશો.

અભ્યાસક્રમ સૂચિ



પુસ્તક - 1

પુસ્તક - 2

વિષયસૂચિ

માપાંકની (મોડ્યુલસનું) વિસ્તૃત સમજ

મોડ્યુલ 1 : બીજગણિત

અભ્યાસનો સમય : 55 કલાક **ગુણ : 20**

નિરીક્ષણ અને અભિગમ : *બીજગણિતએ અંકગણિતનું એક વિશેષ રૂપ છે. અહિં આપણે નજાણતા સાથે કાર્ય કરીશું જ્યારે બીજગણિતમાં જાણતા સાથે કાર્ય કરતા. આ નહિ જાણતા તે કોઈ આંકડા હશે. તમે જાણો છો કે આંકડાઓનો અભ્યાસ પ્રાકૃત્તિક સંખ્યાઓથી શરૂ થાય છે. પ્રાકૃત્તિક સંખ્યાઓને અપૂર્ણાંક સંખ્યા સુધી પ્રસારવામાં આવે છે. આપેલા એકમમાં કોઈ લંબાઈને માપવા માટે અપૂર્ણાંક સંખ્યાને વાસ્તવિક સંખ્યા સુધી વિસ્તૃતીકરણ કરવામાં આવે છે. ઘાત અને ઘાતાંકનો હેતુ વારંવાર ગુણાકારને સાહ્ય રૂપમાં દર્શાવવામાં મદદ કરે છે.*

બીજગણિતીય પદાવલી અને બહુપદીઓને દર્શાવવામાં નજાણીતાના ચાર મૂળભૂત સિદ્ધાંતોની મદદ લેવાય છે. બે બીજગણિતીય પદાવલી અથવા બહુપદીઓ સમીકરણ બનાવે છે.

આપમે રોજિંદા જીવનની સમસ્યાઓ સુરેખ અને દ્વિઘાત સમીકરણના અભ્યાસ વડે હલ કરી શકીએ છીએ.

સમાંતરશ્રેણીએ વિશીષ્ટ પ્રકારની આંકડાકીય ગોઠવણ છે. રોજિંદા દિવસ-થી-દિવસની જીંદગીમાં અભ્યાસ કરનાર સમાંતરશ્રેણીને ઊંડાણપૂર્વક શીખી શકે છે.

1.1 આંકડા રીત (નંબર સીસ્ટમ)

પ્રાકૃતિક સંખ્યા, પૂર્ણાંકો અને અપૂર્ણાંકો, વર્ગમૂળવાળી સંખ્યાનો પુનરાવર્તન.

પૂર્ણાંક, અપૂર્ણાંક, વર્ગમૂળ અને વાસ્તવિક સંખ્યાનો વર્તુળનો અભ્યાસ.

સંમેય અને અસંમેય સંખ્યાનો અભ્યાસ.

સંખ્યા રેખા પર $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ *અને* $\sqrt{5}$ *ને દર્શાવવાનો અભ્યાસ.*

1.2 ઘાત અને ઘાતાંક

ઘાત સ્વરૂપો, ઘાતનો અર્થ, ઘાતનો નિયમ, ઘાતના નિયમોનો ઉપયોગ. ઘાતાંકનો અર્થ, ઘાતાંકના નિયમ, ઘાતાંક નો સાદો સ્વરૂપ, ઘાતાંક પર ક્રિયા, છેદની કરણ કરવી જેનું સ્વરૂપ $\frac{1}{a+b\sqrt{x}}$ *અને* $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ *જ્યાં* x,y *પ્રાકૃત્તિલ સંખ્યા છે.* a,b *પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.*

1.3 બીજગણિતીય પદાવલી અને બહુપદીઓ.

બહુપદી, બહુપદીના સહગુણક અને ઘાતાંક તથા બહુપદીના પ્રકારો વિશે અવયવ, બીજ, શૂન્ય.

1.4 વિશિષ્ટ ગુણાકાર અને અવયવીકરણ

વિશીષ્ટ ગુણાકાર $(a \pm b)^2$, $(a + b)(a - b)$, $(a \pm b)^3$, $(a + x)(b + x)$.

આ ગણતરીનો આંકડાઓ પર ઉપયોગ.

બહુપદીનું અવયવીકરણ,

$a^2 - b^2$, $a^3 \pm b^3$ *અવયવીકરણ.*

બહુપદી $ax^2 + bx + c$ $(a ^1 0)$ *નું અવયવીકરણ* H.C.F *અને* L.C.M *અપૂર્ણાંક બહુપદી.*

1.5 સુરેખ સમીકરણ

એક ચલ અને દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ, એક ચલ સુરેખ સમીકરણનો ઉકેલ, દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનો ગ્રાફ, દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણના કૂટ પ્રશ્નોનો ઉકેલ.

1.6 દ્વિઘાત સમીકરણ

દ્વિઘાત સમીકરણનું પ્રમાણિત સ્વરૂપ

: $ax^2 + bx + c = 0$, $a ^1 0$.

$ax^2 + bx + c = 0$, $a ^1 0$ *નો ઉકેલ (1) અવ્યવીકરણ વડે (2) દ્વિઘાત સૂત્ર વડે.*

દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉપયોગ વ્યાવહારિક પ્રશ્નોના ઉકેલ માટે

1.7 સમાંતર શ્રેણી

સમાંતર શ્રેણી વિશીષ્ટ પ્રકારના આંકડાઓની ગોઠવણી છે. n^{th} પદ અને n પદોનો સરવાળો.

મોડ્યુલ 2 : વ્યાપારીક (કોમર્શીયલ) ગણિત

અભ્યાસ સમય : 25 કલાક **ગુણ : 08**

નિરીક્ષણ અને અભિગમ : *માધ્યમિક વિભાગના અભ્યાસ પછી કેટલાક લોકો બેંક, બીઝનેસ હાઉસ, વીમા કંપની, સેલ્સ ટેક્ષ, આવક વેરો વગેરેમાં કામ કરે છે. કેટલાક બીઝનેસ કે ફેક્ટરીમાં જોડાય છે. કેટલાક આગળ અભ્યાસ માટે જાય છે. બધા ને નાણાંકીય ગણિતની જરૂર પડે છે. કોઈ પણ પરિસ્થિતિમાં દરેક નાગરીકને વ્યાજ, રોકાણ, ખરીદ વગેરે જેવી મુશ્કેલી, પરિસ્થિતિ સાથે વ્યવહાર કરવો પડે છે. આ માટે આ મોડ્યુલ વિકસાવ્યું છે.*

આ મોડ્યુલમાં ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ, હપ્તા પદ્ધતિ અને વ્યાજનું ચઢવુ કે ઉતરવુ ના જ્ઞાન વિશે સમજ મેળવેલ છે.

2.1 ટકાવારી અને તેનો ઉપયોગ

ટકાવારીનો હેતુ, ટકાવારીની સરખામણી, ટકાવારીનો ઉપયોગ :-

(1) નફો અને ખોટ

(2) સાદુ વ્યાજ

(3) ડિસ્કાઉન્ટ (એકજ)

(4) ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ (3 વર્ષ સુધી)

2.2 હપ્તા ખરીદી

હપ્તાથી ખરીદવું, હપ્તામાં વ્યાજ ગણવું (6 હપ્તા સુધી)

મોડ્યુલ 3 : ભૂમિતી

અભ્યાસ સમય : 75 કલાક **ગુણ : 25**

નિરીક્ષણ અને અભિગમ : *આપણી આજુબાજુ જોતા આપણને ખૂણો, ધાર, ટેબલનો ઉપરનો ભાગ, વર્તુળાકાર વસ્તુઓ, જેવી કે બંગડી, રીંગ અને તે જ રીતે જુદી જુદી નેગેટિવ માથી લીધેલ સરખા ફોટાઓ ભૂમિતીથી દર્શાવી શકાય.*

અભ્યાસ કરતાની આતુરતાનો સંતોષવા અને તેને જ્ઞાન આપવા ના હેતુથી રેખા અને ખૂણો, એકરૂપ અને સમરૂપ ત્રિકોણો અને વર્તુળ જેવા પાઠ ઉમેરવામાં આવ્યા છે. કેટલાક પરીણામો તાર્કિક રીતે, તો કેટલાક પ્રયોગોથી સાબીત કરી શકાય. અલગ અલગ જાતના ચતુષ્કોણો ચતુષ્કોણ પાઠમાં આપેલ છે.

અભ્યાસ કર્તાને ભૂમિતીની આકૃતિ રચવાની પણ શીખ આપેલ છે. સુરેખ સમીકરણ ને ગ્રાફ પર દર્શાવવા માટે યામ ભૂમિતી પણ સામેલ કરેલ છે.

3.1 રેખાઓ અને ખૂણાઓ

સામાન્ય ભૂમિતીના માળખામાં રહેલ બીંદુ, રેખા, સમતલ, સમાંતર રેખાઓ અને છેદતી રેખાઓ, અભિલંબ, બે કે તેથી વધુ રેખાઓનો રેખા પર કોઈ કિરણ ઉભુ હોય તો બે ખૂણાઓ બને જેનો સરવાળો 180 થાય.

જો બે રેખાઓ પરસ્પર છેદે તો અભકોણ (V.O.) સરખા થાય.

અભિલંબ બે સમાંતર રેખાને છેદે તો યુગ્મ કોણો સરખા થાય.

જો અભિલંબ સમાંતર રેખાઓને છેદે તો

(ઓ) અનુકોણ સરખા થાય.

(1) એકજ બાજુના અંતઃકોણોનો સરવાળો 180 થાય.

જો અભિલંબ એવી રીતે છેદે કે બે રેખાઓમાં

(અ) અનુકોણ સરખા થાય તો રેખાઓ સમાંતર હોય.

(1) એક જ બાજુના અંતઃકોણનો સરવાળો 180 થાય તો બે રેખાઓ સમાંતર થાય.

ત્રિકોણના ત્રણ ખૂણાનો સરવાળો 180 થાય.

બાહ્યકોનું માપ બે અંતઃ વિરુદ્ધ ખોણોના સરવાળા જેટલું તાય.

તે બિંદુનું સમીકરણ કે જે (1) આપેલા બે બિંદુથી (2) બે છેદતી રેખાઓથી સરખા અંતરે હોય.

3.2 ત્રિકોણની એકરૂપતા

રોજિંદા જિંદગીના ઉદાહરણ પરથી એકરૂપતાનો ખ્યાલ.

બે ત્રિકોણ એકરૂપતા માટે કકક, SSS, SAS, ASA, RNS

★ *સરખી બાજુના સામેના ખૂણા સરખા હોય છે.*

★ *સરખા ખૂણાની સામસામેની બાજુઓ સરખી હોય છે.*

★ *જો બે બાજુઓ સરખી ન હોય તો મોટી બાજુની સામેના ખૂણો મોટો હોય.*

ત્રિકોમમાં સૌથી મોટી બાજુ સૌથી મોટા ખૂણાની સામે હોય.

ત્રિકોણના કોઈ બે ખૂમાનો સરવાળો ત્રીજા ખૂણાથી હંમેશા મોટો હોય.

3.3 કોનકરંટ (છેદતી) રેખાઓ.

- *છેદતી રેખાઓ બે કરતાં વધારે એકજ બીંદુમાં નો હેતુ*
- *ખૂણાનો દ્વિભાજક*
- *બાજુઓનો લંબ દ્વિભાકજ*
- *એક જ બીંદુમાંથી પસાર થતા ગણલંબ*
- *એક જ બીદુમાંથી પસાર થતી મધ્યગા તે બીંદુ મધ્યગાને* 2:1 *માં વિભાજે.*

3.4 ચતુષ્કોણો

ચતુષ્કોણોના પ્રકાર વિશિષ્ટ ચતુષ્કોણોની લાક્ષણિકતાઓ જેવા કે સમદ્વિ બાજુ ચતુષ્કોણ, સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણ, ચોરસ વગેરે.

ત્રિકોણમાં બે બાજુના મધ્યબિંદુનો જોડતી રેખાખંડનું માપ ત્રીજી બાજુથી અડધુ હોય અને તે ત્રીજી બાજુને સમાંતર હોય છે.

એક બાજુના મધ્યબિંદુથી દોરેલ રેખા જો બીજી બાજુને સમાંતર હોય તો તે ત્રીજી બાજુને દુભાગે છે.

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો કર્ણ ચતુષ્કોણના બે સરખા ત્રિકોણમાં વિભાજે છે.

બે સમાંતર રેખાઓ વચ્ચે અને સમાન પાયા પર ચતુષ્કોણો હોય તો તે ચતુષ્કોણો ના ક્ષેત્રફળ સરખા થાય.

ત્રિકોણમાં પણ ઉપર પ્રમાણે હોય તો ક્ષેત્રફળ સરખા થાય.

બે ત્રિકોણના પાયા સરખા હોય અને ક્ષેત્રફળ પણ સરખા હોય તો તેમના લંબનું માપ સરખું હોય છે.

3.5 ત્રિકોણોની સમરૂપતા

સમરૂપ આકૃતિઓ, ભૂમિતીમાં સમરૂપતાનો હેતુ. સમપ્રમાણ પ્રમેય અને તેનો ઉલટ પ્રમેય.

જો એક રેખા ત્રિકોણની એક બાજુને સમાંતર દોરવામાં આવે તો તે બીજી બે બાજુઓને સમપ્રમાણમાં વિભાજે છે.

સમરૂપતા માટે ખૂખૂખૂ, બાબાબા અને બાખૂબા જો ત્રિકોણના કોઈ એક શિરોબિંદુથી કર્ણ પર લંબ દોરવામાં આવે તો બનતા બે ત્રિકોણો સમરૂપ હોય અને તે મૂળ ત્રિકોણને પણ સમરૂપ થાય.

ખૂણાનો અંતઃ દ્વિભાજક સામેની બાજુને એવા પ્રમાણમાં વિભાગે કે જે તે ખૂણાને સમાવતી બાજુઓના પ્રમાણ જેટલુ થાય.

ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળનો પ્રમાણ બાજુઓના વર્ગના પ્રમાણ જેટલુ હોય.

કાટકોણ ત્રિકોણમાં કર્ણનો વર્ગ બીજી બે બાજુઓના વર્ગોના સરવાળા જેટલુ હોય. (પાઈથાગોરસ)

જો ત્રિકોણમાં એક બાજુનો વર્ગ બીજી બે બાજુના વર્ગોનો સરવાળા જેટલો થાય તો તે કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

3.6 વર્તુળો

વર્તુળોની વ્યાખ્યા, સબંધિત હેતુઓ, સમકેન્દ્રીત વર્તુળો.

એકરૂપ વર્તુળો :

બે વર્તુળો એકરૂપ થવા માટે તેમની ત્રિજ્યા સરખી હોવી જોઈએ.

બે ચાપ સરખા થવા માટે તે ચાપ વડે વર્તુળના કેન્દ્ર પર સરખો ખૂણો અંતરાય.

જો બે જીવા સરખી હોય તો તેનાથી બનતા ચાપ પણ સરખા હોય છે.

એકરૂપ ચાપ કેન્દ્ર પર એકરૂપ ખૂણો આંતરે, તે જ રીતે જો ખૂણો સરખો હોય તો તે ચાપ એકરૂપ થાય છે.

કેન્દ્રથી જીવા પર દોરેલ લંબ જીવાને દુભાગે.

કોઈ રેખા કેન્દ્રથી દોરતા જો તે જીવાને દુભાગે તો તે રેખા જીવાને લંબ હોય છે.

ત્રણ અસમરેખા બિંદુઓમાંથી એક અને એકજ વર્તુળ પસાર થાય .

એકરૂપ જીવા કેન્દ્રથી સરખા અંતરે હોય છે.

3.7 વર્તુળમાં ખૂણાઓ અને ચક્રિય ચતુષ્કોણ

ચાપ વડે કેન્દ્ર પર બનતો ખૂણો તે જ ચાપ વડે વર્તુળ પર બનતા ખૂણાથી બમણો થાય.

અર્ધ વર્તુળમાં ખૂણો કાટખૂણો હોય.

જો જીવા અલગ અલગ બિંદુએ સરખા ખૂણા બનાવે તો તે ચારેય બિંદુ વર્તુળ પર હોય.

ચક્રિય ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણાઓનો સરવાળો 180^0 *થાય.*

જો સામસામેના ખૂણાનો સરવાળો 180 હોય તો તે ચતુષ્કોણને ચક્રિય કહેવાય.

3.8 છેદિકા, સ્પર્શક અને તેમના ગુણધર્મો

રેખા અને વર્તુળના છેદ બિંદુ, સ્પર્શ બિંદુ વર્તુળ પર દોરેલ સ્પર્શકને ત્રિજ્યા સ્પર્શબિંદુ આગળ લંબ છે.

બાહ્યબિંદુથી દોરેલ બે સ્પર્શકોના માપ સરખા થાય.

જો બે જીવા AB અને CD, P માં છેદે તો.

$PA \times PB = PC \times PD$

જો PAB છેદિકા હોય અને PT સ્પર્શક હોય તો $PA \times PB = PT^2$

3.9 રચના

આપેલ પ્રમાણમાં રેખાખંડના ભાગ પાડવા.

ત્રિકોણના આપેલા માપ વડે ત્રિકોણ રચવો.

(અ) ત્રિકોણ રચવો : બાબાબા, બાખૂબા, ખૂબાખૂ, કાકબા.

(બ) પરીમીતિ અને પાયાનો ખૂણો.

(ક) પાયો, બે બાજુનો સરવાળો અને પાયાનો ખૂણો.

સમરૂપ ત્રિકોણ રચવુ

વર્તુળ પર આપેલ બિંદુથી સ્પર્શક રચવું.

(અ) બાહ્યબિંદુ

(બ) વર્તુળ પર બિંદુ, કેન્દ્રનો ઉપયોગ કરી.

3.10 યામ ભૂમિતી

બે બિંદુ વચ્ચેનું અંતર, એક્સન સૂત્ર, ત્રિકોણમાં મધ્ય કેન્દ્રના માપ.

મોડ્યુલ 4 : મેનસ્યુરેશન

અભ્યાસ સમય : 25 કલાક **ગુણ : 10**

નિરીક્ષણ અને અભિગમ :

રોંજીદા જીવનમાં આવતા નીચેના પ્રશ્નોનો જવાબ

આપી શકાય તે માટેનો પ્રયત્ન છે.

લંબચોરસની ફરતે વાયર લગાવવા માટે કેટલો વાયર જોઈએ. લંબચોરસની ફરતે રસ્તો બનાવવા માટે કેટલો ખર્ચ આવે .

રૂમના ચાર દિવાલોનું ક્ષેત્રફળ કેટલું થાય. ટેબલનો ઉપરનો ભાગ બનાવવા માટે કેટલું લાકડું જોઈએ.

સમતલ સપાટીના ક્ષેત્રફળનો અભ્યાસ પ્રથમ પાઠમાં છે.

બીજા પાઠમાં પૃષ્ઠફળ,ઘનફળનો અભ્યાસ આવરી લેવામાં આવેલ છે.

4.1 સમતલ આકૃત્તિઓનું ક્ષેત્રફળ

ચોરસ, લંબચોરસ, ત્રિકોણ,ચતૃષ્કોણોની પરીમિતી અને ક્ષેત્રફળ

હિરોના સુત્રવડે ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ.

રસ્તાનું ક્ષેત્રફળ. વર્તુળનું પરીઘ અને ક્ષેત્રફળ. સેક્ટરનું ક્ષેત્રફળ અને પરિમીતી.વર્તુળાકાર રસ્તાનું ક્ષેત્રફળ.

4.2 ધનનું પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ

બધાજ ઘન પદાર્થો જેવા કે નળાકાર, શંકુ વગેરેનું પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ.

(બે ઘન સાથે લેવા નહીં)

મોડ્યુલ : 5 ત્રિકોણમીતી

અભ્યાસ સમય : 25 કલાક **માર્કસ : 10**

નિરીક્ષણ અને અભિગમ :

અવકાશમાં અવકાશીય પદાર્થોની સ્થિતિ અને રસ્તો જાણવા માટે બાજુ કે ખુણો જે જાણતા હોય તે લઈ બીજું શોધવું પડે છે. આના ઉકેલ માટે ઘણા બધાજ એન્જીનિયરો અને સર્વેયરો લાગેલ છે. આ પરિસ્થિતિને પહોંચિ વળવા માટે અહિંયા આ મોડ્યુલમાં પ્રયત્ન કરેલ છે. જે ત્રિકોણમીતીય રેશીઓ વડે શોધી શકાય. અભ્યાસકર્તાને એકત્રિકોણ મીતીય રેશીઓ વડે બીજ શોધતા આવડશે.

અભ્યાસકર્તા ઉંચાઈ, લંબાઈ જેવા એકમો શોધી શકે. તે મિનારાની ઉંચાઈ, ઘરની ઉંચાઈ , લાઈટ હાઉસની ઉંચાઈ વગેરે શોધતા શીખે . નદીની પહોળા, અવકાશીય પદાર્થોનું અંતર કાપતા શીખે. અભ્યાસકર્તા અવરોધ કોણ અને ઉત્સેધકોણ વચ્ચેનો તફાવત સમજે અને તેને જીવનમાં લગાવી શકે.

5.1ત્રિકોણમીતી ની પરીકલ્પના :

કાટકોણ ત્રિકોણનો ત્રિકોણ મિતીય વિધયો.

ત્રિકોણમીતીય વિધયો વચ્ચે સંબંધ

ત્રિકોણ મીતીય સૂત્રો

$\sin^2 q + \cos^2 q = 1$, $\sec^2 q = 1 + \tan^2 q$, $\mathrm{cosec}^2 q = 1 + \cot^2 q$

ત્રિકોણ મિતીય વિધાનો અને સૂત્રો પર દાખલાઓ.

5.2 ત્રિકોણમીતીય વિધયો વિશિષ્ટ ખૂણાઓ માટે :-

ત્રિકોણમીતીય વિધયો 30,45,60,0 અને 90.

અંતર અને ઉંચાઈના દાખલા ગણવા માટે આ માપ દંડોનો ઉપયોગ.

મોડયુલ 6 : આંકડાશાસ્ત્ર

અભ્યાસ સમય : 35 કલાક **માર્કસ :12**

નિરિક્ષણ અને અભિગમ :

જૂના જમાનાથી દુકાનદાર, ઘર માલિકો જેવા લોકો તેમના ખર્ચ અને આવકનો નોંધ ચોપડો રાખતા. આ હિસાબી પદ્ધતિને સરળ બનાવવાના હેતુથી આંકડા શાસ્ત્રને અભ્યાસમાં આવરી લેવામાં આવે છે. જે માહિતી અને તેની રજૂઆત પાઠમાં આવરી લેવામાં આવેલ છે.

કોઈ કોઈ વાર આપણને સરેરાશ, મધ્યસ્થ, વગેરે જેવી માહિતીની જરૂર પડે છે તેના માટે ‘મધ્યસ્થા સ્થિતિમાનનું

માપન' પાઠ આવરી લેવામાં આવ્યો છે. આ માપનની હદ અને તેની લાક્ષણીકતાઓ પણ શીખવેલ છે.

' આજે વરસાદ પડશે', ' ભારત અંગ્રજો વિરૂદ્ધની મેચ જીતશે' આ વાક્ય ચાંસ (અચોક્કસ) છે.

અભ્યાસ કરતા સંભાવના, સિક્કાને ઉછાડવો, પત્તાઓમાંથી એક પતુ ખેચવું, ડાઈસ ફેકવું જેવી સંભાવનાની ગણતરીની જ્ઞાન લઈ શકે તેવા એકમો આવરી લેવામાં આવેલ છે.

6.1 માહિતી અને તેની રજૂઆત :-

આંકડા શાસ્ત્રની માહિતી આંકડા શાસ્ત્ર અને આંકડાકીય માહિતી પ્રાથમિક અને માધ્યમિક માહિતી સામૂહિક અને અસામૂહિક માહિતી મધ્યબિંદુ, વર્ગ, અધ : , ઉર્ધ્વ,સાચો વર્ગ,અધઃસીમા,ઉર્ધ્વસીમા,આવૃત્તિ,આવૃત્તિ વિતરણ, સંચય આવૃત્તિ,

સંચય આવૃત્તિ કોઠો. માહિતીની રજૂઆત બારગ્રાફ,હિસ્યેગ્રામ, આવૃત્તિ બહુકોણ.

6.2 મધ્યસ્થ સ્થિતિ માનનું માપન :

માહિતીનો મધ્યક અને મધ્યસ્થ, મોડ અને મધ્યસ્થ વર્ગોવાળી માહિતીનું .

6.3 સંભાવનાની પ્રાથમિક માહિતી :

સંભાવવાની સ્વભાવિક થવાની માપની રીત સિક્કો ઉછાળવો, ડાઈનાખવી,કાળ પસંદ કરવો વગેરે પર દાખલાઓ.

વિકાસમાપનની યોજના

વિકાસમાપનની રીત	સમય	માર્ક્સ
વાર્ષિક પરીક્ષા	**2.30 કલાક**	**85**
પ્રેકટિકલ	**1.30 કલાક**	**15**
1) લેબોરેટરી માં આપેલ હેંડબુક માંથી કોઈ એક પ્રવૃત્તિ અભ્યાસકર્તાને આપવી. અભ્યાસકર્તાને તે પ્રવૃત્તિ કરવી અને સમજાવવી 10 માર્ક્સ	જાતે	
2) પ્રશ્નોત્તરી પ્રવૃત્તિ પર આધારીત 5 માર્ક્સ		

1

સંખ્યા સંહતિઓ

પ્રાચીન સમયથી મનુષ્ય તેની માલમિલકત, વસ્તુઓ, ઝવેરાત, પશુઓ, વૃક્ષો, ઘેટાં - બકરાં વગેરેની ગણતરી કરવા નીચેના જેવી પદ્ધતિઓ દ્વારા પ્રયત્ન કરતો આવ્યો છે.

- જમીન કે પત્થર પર કાપા કરીને
- જ્યારે તે દરેક ઉપયોગી વસ્તુ બહાર લઈ જતો અથવા લાવતો ત્યારે દરેક વસ્તુમાટે પત્થરોનો સંગ્રહ કરતો.

આ પ્રમાણે ગણતરીનું કોઈપણ સાત ન હોવા છતાં તેની માલમિલકતની ગણતરી માટેનો આ રસ્તો હતો. સંસ્કૃતિના ઈતિહાસમાં ઘણી મહાન શોધોમાંથી એક શોધ સંખ્યાની ઉત્પત્તિ છે. જ્યારે કેટલા? અને કેટલું? જેવા પ્રશ્નોનો કોઈ ઉકેલ ન હતો અને સંખ્યાના સાતની ગેરહાજરીમાં કેટલો ગુંચવાડો થતો હશે તેની કલ્પના તમે કરી શકો છો. શૂન્ય સહિતની સંખ્યા સંહતિ અને તેમના સરવાળાની શોધે નીચેના જેવા પ્રશ્નોના ઉકેલ આપવામાં લોકોને મદદ કરી.

(1) ટોપલીમાં કેટલાં સફરજન છે?

(2) સભાને સંબોધન કરવા માટે કેલા વકતાઓને આમંત્રિત કર્યા છે?

(3) ટેબલ ઉપર કેટલાં રમકડાં છે?

(4) ખેતરમાંથી ઘઉંની કેટલી ગુણો (બોરી)ની ઉપજ થઈ?

આ પ્રકારની અને બીજી ઘણી રિસ્થિતિઓના ઉત્તર માટે સંખઅયાઓ અને તેમના પરની ક્રિયાઓનો ઉપયોગ થાય છે. આ સંખ્યા સંહતિ ને તેના વિસ્તારની અભ્યાસક્મમાં જરૂરિયાત દર્શાવે છે. આ પ્રકરણમાં આપણે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ, પૂર્ણ સંખ્યાઓ અને પૂર્ણાંકોની ટૂંકમાં તેની સમીક્ષા રજૂ કરીશું પછી આપણે સંમેય અને અસંમેય સંખ્યાઓ વિશે તમને વિગતવાર રજૂઆત કરાવીશું વાસ્તવિક સંખ્યાઓથી ચર્ચા કર્યા પછી આપણે આ પ્રકરણને પૂર્ણ કરીશું.

હેતુઓ

આ પાઠનો અભ્યાસ કર્યા પછી તમે....

- પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓથી વાસ્તવિક (સંમેય - અસંમેય) સંખ્યાઓ સુધી સંખ્યા સંહતિના વિસ્તાર અંગે

ઉદાહરણ આપી શકશો.

- વિવિધ પ્રકારની સંખ્યાઓ ઓળખી શકશો.
- સંમેય સંખ્યાને સાંત કે અનંત પુનરાવૃત્તિ દશાંશ સ્વરૂપે વ્યક્ત કરી શકશો અને તેનાથી ઉલટી પ્રક્રિયા પણ કરી શકશો.
- આપેલ બે સંમેય સંખ્યાઓની વચ્ચેની સમંય સંખ્યા દર્શાવી શકશો.
- સંખ્યારેખા પર સંમેય સંખ્યાનું નિરૂપણ કરી શકશો.
- અસંમેય સંખ્યાના ઉદાહરણો આપી શકશો.
- સંખ્યા રેખા ર .. દર્શાવી શકશો. $\sqrt{૨}, \sqrt{૩}, \sqrt{૫}$ દર્શાવી શકશો.
- આવેલ કોઈપણ બે સંખઅયાઓ વચ્ચેની અસંમેય સંખ્યાઓ શોધી શકશો.
- આપેલ દશાંશ સ્થળ સુધી સંમેય કે અસંમેય સંખ્યાઓનું આસન્ન મૂલ્ય નક્કી કરી શકશો.
- વાસ્તવિક સંખ્યાઓ (સંમેય અને અસંમેય સંખ્યાઓ) પર ચાર મૂળભૂત પ્રક્રિયાઓ સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકાર કરી શકશો.

1.1 અપેક્ષિત પૂર્વજ્ઞાન

ગણતરીની સંખ્યાઓ અને તેમનો રોજિંદા જીવનમાં ઉપયોગનું પાયાનું જ્ઞાન

1.2 પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓષ પૂર્ણ સંખ્યાઓ અને પૂર્ણાંક સંખઅયાઓનું પૂનરાવલોકન.

1.2.1 પ્રાકૃતિક સંખ્યા

યાદ કરો કે ગણતરીની સંખ્યાઓ 1, 2, 3... એ પ્રાકૃતિક સંખ્યા સંહતિનું સ્રૂપ છે. આ સંખ્યાઓનો આપણે રોજિંદા જીવનમાં ઉપયોગ કરીએ છીએ.

યાદ કરો કે સૌથી મોટી પ્રાકૃતિક સંખ્યા નથી કારણ કે કોઈપણ પ્રાકૃતિક સંખ્યામાં 1 ઉમેરવાથી તેના કરતાં મોટી પ્રાકૃતિક સંખ્યા મળે છે જેને તે પછીની સંખ્યા કહેવાય છે.

આપણે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ રની (ગાણિતિક) ચાર મૂળભૂત પ્રક્રિયાઓ વિશે શીખી ગયા છીએ ઉદાહરણ તરીકે.

$4 + 2 = 6$, પુનઃ પ્રાકૃતિક સંખ્યા.

$6 + 21 = 27$, પુનઃ પ્રાકૃતિક સંખ્યા

$22 - 6 = 16$, પુનઃ પ્રાકૃતિક સંખ્યા

$2 - 6$ એ પ્રાકૃતિક સંખ્યામાં વ્યાખ્યાયિતનથી તે જ રીતે

$4 \times 3 = 12$, પુનઃ પ્રાકૃતિક સંખ્યા

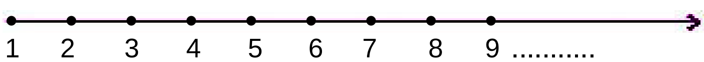
$12 \times 3 = 36$, પુનઃ પ્રાકૃતિક સંખ્યા

$\frac{12}{2} = 6$ એ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે. પરંતુ $\frac{6}{4}$ એ પ્રાકૃતિક સંખ્યામાં વ્યાખ્યાયિત નથી. આ પ્રમાણે આપણે કહી શકીએ કે

i) a) પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો અને ગુણાકાર પુનઃ પ્રાકૃતિક સંખઅયા બને છે (પ્રાકૃતિક સંખ્યામાં મળે છે.) પરંતુ

b) બે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓની બાદબાકી અને ભાગાકાર પુનઃ પ્રાકૃતિક સંખ્યામાં મળે અથવા ન પણ મળે.

ii) પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓને નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે સંખ્યારેખા પર દર્શાવી શકાય.



iii) બે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો અને ગુણાકા ગમે તે ક્મમાં કરવામાં આવે તો પણ પરિણામ હંમેશાં સરખુંજ આવે છે. આ બાબત પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓની બાદબાકી અને ભાગાકાર માટે લાગુ પડતી નથી.

1.2.2 પૂર્ણ સંખ્યાઓ

(1) કોઈપણ પ્રાકૃતિક સંખ્યાને તેજ સંખ્યામાંથી બાદકરવામાં આવે ત્યારે કઈ (પ્રાકૃતિક) સંખ્યા બાકી રહેશે તે આપણે કહી શકતા નથી. આ મુશ્કેલી દૂર કરવા માટે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓને 0 વડે વિસ્ત કરવામાં આવી જે પૂર્ણ સંખ્યા સંહતિ તરીકે ઓળખાય છે.

આ પ્રમાણે પૂર્ણ સંખ્યાઓ

$0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots$

પુનઃ અગાઉની માહુક સૌથી મોટી કોઈ પૂર્ણ સંખઅયા નથી.

(2) શૂન્ય સંખ્યાને નીચેના ગુણધર્મો છે.

$$a + 0 = a = 0 + a$$

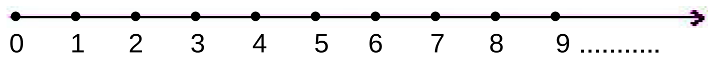
$a - 0 = a$ પરંતુ $(0 - a)$ વ્યાખ્યાયિત નથી.

$$a \times 0 = 0 = 0 \times a$$

કોઈપણ સંખ્યાનો શૂન્ય વડે ભાગાકાર (શક્ય નથી.) વ્યાખ્યાયિત નથી.

(3) (બાદબાકી અને ભાગાકારની મર્યાદા સાથે) જેવી રીતે પ્રાકૃતિક સંખઅયાઓ પર ચાર મૂળભૂત પ્રક્રિયાઓ કરી સકાય છે તેમ પૂર્ણ સંખ્યાઓ પર પણ ચાર મૂળભૂત પ્રક્રિયાઓ કરી શકાય છે.

(4) પૂર્ણ સંખઅયાઓને પણ નીચે પ્રમાણે સંખ્યા રેખા પર દર્શાવી શકાય.



1.2.3 પૂર્ણાંકો

પ્રાકૃતિક સંખઅયાઓ અને પૂર્ણ સંખઅયાઓ સાથે ક્રિયાઓ કરતાં આપણે જોયું કે એક સંખ્યામાંથી બીજી સંખ્યા બાદ કરવાનું હંમેશને માટે શક્ય બનતું નથી . દા.ત. $(2-3)$, $(3-7)$, $(9-20)$ વગેરે આ બધાનો (ઉકેલ) પ્રાકૃતિક સંખ્યા સંહતિ અને પૂર્ણ સંખ્યા સંહતિમાં શક્ય નથી. આમ આ પ્રકારની બાદબાક શક્ય બનાવે તેવી સંખ્યાઓનું અન્ય વિવરણ જરૂરી છે.

આમ પૂર્ણ સંખઅયાઓને -1 (ત્રણ એખ), -2 (ઋણ બે) અને તે પ્રમાણે આગળની સંખ્યાઓ જેવી સંખ્યાઓ દ્વારા વિસ્તૃત એવી રીતે કરીએ કે

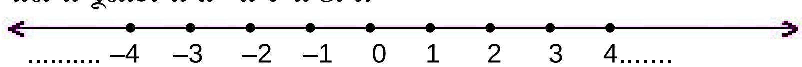
$$1+(-1)=0,\ 2+(-2)=0,\ 3+(-3)=0\ldots,\ 99+(-99)=0,\ \ldots$$

આ પ્રમાણે પૂર્ણ સંખઅયાઓને આપણે બીજા પ્રકારની સંખ્યા સંહતિ દ્વારા વિસ્તૃત કરી જેને પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ કહેવાય છે તેથી પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ નીચે પ્રમાણે છે.

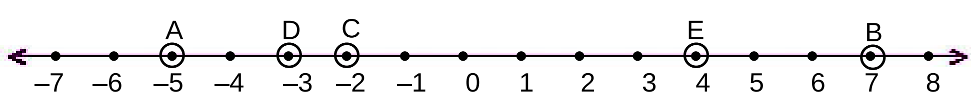
$$\ldots,\ -7,\ -6,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ \ldots$$

1.2.4 સંખ્યારેખા પર પૂર્ણાંકોનું નિરૂપણ

પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ દર્શાવવા માટે આપણે સંખ્યારેખાને 0 (શૂન્ય ની ડાબી બાજુ વિસ્તારીએ છીએ અને તેના પર -1, -2, -3, -4, ... 1 અને -1, 2 અને -2, 3 અને -3 , 4 અને -4, વગેરેને એવી રીતે દર્શાવીએ છીએ કે તે શૂન્યથી સરખા અંતરે અને શૂન્યની વિરૂદ્ધ દિશામાં હોય આ પ્રમાણે આવલી પાસે નીચે પ્રમાણેની પૂર્ણાંકોની સંખ્યા રેખા હોય.



હવે આપણે પૂર્ણાંકોને સરળતાથી સંખ્યારેખા પર દર્શાવી શકીશું. ઉદાહરણ તરીકે આપણે $-5, 7, -2, -3, 4$ ને સંખઅયારેખા પર દર્શાવીએ આકૃતિમાં બિંદુઓ A, B, C, D, E અનુક્રમે $-5, 7, -2, -3$ અને 4 દર્શાવે છે.



આપણે ધ્યાનમાં લઈ કે જો પૂર્ણાંક $a>B$ હોય, તો a હંમેશાં bની જમણીબાજુ હોય અથવા ઉલટ - સુલટ, ઉદાહરણ તરીકે ઉપરની આકૃતિમાં $7>4$, તેથી B એ E ની જમણી બાજુ આવેલું છે. તેજ રીતે $-2>-5$, તેથી C (-2) એ A (-5) ની જમણી બાજુ આવેલું છે. તેથી ઉલટું જ્યારે 4>7 ત્યારે 4 એ 7ની ડાબીબાજુ આવેલું છે. આકૃતિમાં બભાન્યા પ્રમાણે E એ B ની ડાબી બાજુ છે.

બે પૂર્ણાંક a અને b માં વધારે મોટો અથવા વધારે નાનો પૂર્ણાંક શોધવા માટે આપણે નીચેના નિયમને અનુસરીએ.

(1) A >B, જો બી ની જમણીબાજુ એ હોય તો ..

(2) A <B, જો બી ની ડાબીબાજુ એ હોય તો ..

ઉદાહરણ 1.1: નીચેનામાંથી પ્રાકૃતિક સંખઅયાઓ, પૂર્ણ સંખ્યાઓ અને પૂર્ણાંકો ઓળખો.

$15, 22, -6, 7, -13, 0, 12, -12, 13, -31$

ઉકેલ: પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ $7, 12, 13, 15$ અને22

પૂર્ણસંખ્યાઓ $0, 7, 12, 13, 15$ અને22

પૂર્ણાંકો $-31, -13, -12, -6, 0, 7, 12, 13, 15$ અને 22

ઉદાહરણ 1.2: નીચેનામાંથી કઈ સંખઅયાઓ

(i) પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ કે (ii) પૂર્ણ સંખ્યાઓ નથી તે ઓળખી બતાવો.

$-17, 15, 23, -6, -4, 0, 16, 18, 22, 31$

ઉકેલ : i) $-17, -6, -4, 0$ એ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ નથી.

36
37

ii) $-17, -6, -4$ પૂર્ણ સંખ્યાઓ નથી.

ઉપરના ઉદાહરણ પરથી આપણે કહી શકીએ કે

i) બધી જ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ પૂર્ણ સંખ્યાઓ અને વળી પૂર્ણાંકો પણ હોય છે પણ તેનું પ્રતિય સાચુ નથી.

ii) પૂર્ણ સંખ્યાઓ પૂર્ણાંકો પણ હોય છે.

તમે અગાઉના વર્ગોમાં પૂર્ણાંક પરની ચાર મૂળભૂત ક્રિયાઓ શીખી ગયા છો અહીં તેમનું પુનરાવર્તન કર્યા સિવાય આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ લઈશું અને તેમને અહીં દર્શાવીશું.

ઉદાહરણ 1.3: નીચેનાનું સાદું રૂપ આપો અને પરિણામ પૂર્ણાંકમાં આવે છે કેમ તે જણાવો.

$12 \times 4, 7 \div 3, 18 \div 3, 36 \div 7, 14 \times 2, 18 \div 36, 13 \times (-3)$

ઉકેલ : $12 \times 4 = 48$ એ પૂર્ણાંક છે.

$7 \div 3 =$ એ પૂર્ણાંક નથી.

$18 \div 3 = 6$ એ પૂર્ણાંક છે.

$36 \div 7 =$ એ પૂર્ણાંક નથી.

$14 \times 2 = 28$ એ પૂર્ણાંક છે.

$18 \div 36 =$ એ પૂર્ણાંક નથી.

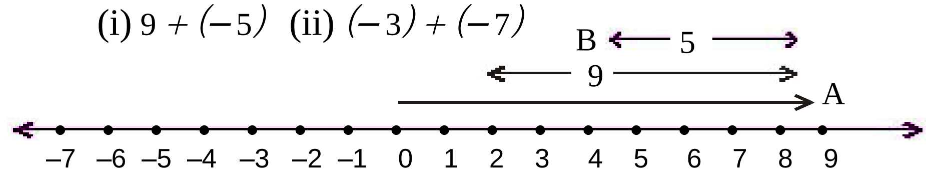
$13 \times (-3) = -39$ એ પૂર્ણાંક છે.

ઉદાહરણ 1.4:

સંખ્યારેખાનો ઉફયોગ કરીને નીચેના પૂર્ણાંકોનો સરવાળો કરો.

(i) $9 + (-5)$ (ii) $(-3) + (-7)$

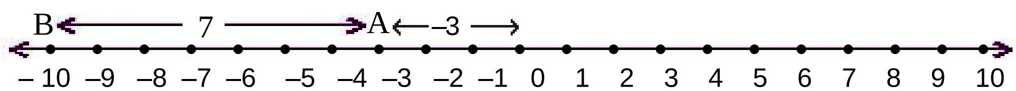
ઉકેલ:



બિંદુ a સંખ્યારેખા પર 9 દર્શાવે છે. a એ 5 એકમ ડાબી બાજુ ખસતાં આપણો B બિંદુએ પહોંચીએ છીએ જે 4 દર્શાવે છે.

$\therefore\ 9 + (-5) = 4$

(ii)



0 (શૂન્ય) થી શરૂ કરીને 3 એમક (શૂન્યથી) ડાબી બાજુ જતાં આપણે A બિંદુએ પહોંચીએ છીએ. A બિંદુથી 7 એકમ ડાબી બાજુ જતાં આપણે B બિંદુએ પહોંચીએ છીએ જે (-10) દર્શાવે છે.

$\therefore\ (-3) + (-7) = -10$

1.3 સંમેય સંખ્યાઓ

જ્યારે પૂર્ણાંક A ને શૂન્ય સિવાયના પૂર્ણાંક B વડે ભાગતાં ઉદ્‌ભવતી પરિસ્થિતિને ધ્યાનમાં લો. તેનાથી નીચેની પરિસ્થિતિ પેદા થાય છે.

(i) જ્યારે 'a' એ 'b' નો અવયવી હોય.

ધારોકે a = mb, *જ્યાં* am *એ પ્રાકૃતિક સંખઅયા અથવા પૂર્ણાંક છે.* $\therefore$ $= m$

(ii) જ્યારે 'a' એ 'b' નો અવયવી ન હોય.

આ પરિસ્થિતિમાં $\frac{a}{b}$ એ પૂર્ણાંક નથી તેથી તે નવા પ્રકારની સંખ્યા છે. આ પ્રકારની સંખ્યા સંમેય સંખ્યા કહેવાય છે.

આ પ્રમાણે જે સંખ્યાને $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય જ્યાં **p** અને **q** પૂર્ણાંકોએ અને $q = 0$ એ સંમેય સંખ્યા કહેવાય છે.

આ પ્રમાણે એ બધી સંમેય સંખ્યાઓ છે.

1.3.1 ધન અને ઋણ સંમેય સંખ્યાઓ

(i) સંમેય સંખ્યા $\frac{p}{q}$ માં જો **p** અને **q** બંને ધન પૂર્ણાંક હોય અથવા બંને ઋણ પૂર્ણાંક હોય, તો $\frac{p}{q}$ ધન સંમેય સંખ્યા કહેવાય.

આમ $\frac{૩}{૪}, \frac{૫}{૬}, \frac{-૩}{-૨}, \frac{-૮}{-૬}, \frac{-૧૨}{-૫૭}$ આ બધી ધન સંમેય સંખ્યાઓ છે.

$\frac{-p}{q} = \frac{p}{-q}, \left(\frac{p}{q}\right), \frac{p}{q}$ and $\frac{p(-p)}{q(-q)} = \frac{p}{q}, \frac{p}{q} = \frac{(-p)}{(-q)} = \frac{-p}{q},$

(ii) જો **p** અને **q** બંને જુદા જુદા ચિહ્નવાળા (નિશાનીવાળા) હોય, તો ઋણ સંમેય સંખ્યા (કહેવાય) છે.

આમ $\frac{-7}{2}, \frac{6}{-5}, \frac{-12}{4}, \frac{16}{-3}$ આ બધી ધન સંમેય સંખ્યાઓ છે.

1.3.2 સંમેય સંખ્યાનું પ્રમાણિત સ્વરૂપ

આપણે જાણીએ છીએ કે સ્વરૂપની બધી સંખ્યાઓ સંમેય સંખઅયાઓ છે. જ્યાં **p** અને **q** ને ધન પૂર્ણાંકો છે.

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે

ઉપરનાં દરેક ઉદાહરણમાં આપણે છેદ **q** ને ધન બનાવ્યો છે. સંમેય સંખ્યા $\frac{p}{q}$ જ્યાં **p** અને **q** પૂર્ણાંકો અને $q=0$ અને **q** એ ધન (અથવા ધન કરેલ છે.) તેમજ **p** અને **q** પરસ્પર અવિભાજ્ય છે. (એટલે કે તેમાં 1 અથવા -1 સિવાયનો કોઈ સામાન્ય અવયવ નથી) એને પ્રમાણિત સ્વરૂપ કહેવાય છે.

સંમેય સંખ્યાનું પ્રમાણિત સ્વરૂપ છે તેજ રીતે $\frac{-5}{6}$ અને એ પ્રમાણિત સ્વરૂપની સંમેય સંખ્યાઓ છે.

નોંધ : સંમેય સંખ્યાના પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં સંમેય સંખ્યા એના અતિસંક્ષિપ્તરૂપમાં (હોવી જોઈએ) હોય એવો ઉલ્લેખ થયો છે.

ઉદાહરણ તરીકે સંમેય સંખ્યા ને પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં (અથવા અતિસંક્ષિપ્ત સ્વરૂપમાં) $\frac{2}{3}$ તરીકે લખી શકાય.

તેજ રીતે $\frac{25}{-35}$ ને પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં (અથવા અતિસંક્ષિપ્ત સ્વરૂપમાં) $\frac{-5}{7}$ (અંશ અને છેદ બંને માંથી 5 કાઢી લેતાં) લખી શકાય.

કેટલાંક અગત્યનાં પરિણામો

(i) દરેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા એ સંમેય સંખ્યાછે પરંતુ તેના પ્રતિય હંમેશાં સત્ય નથી.

(ii) દરેક પૂર્ણ સંખ્યા અને પૂર્ણાંક સંમેય સંખ્યા છે પરંતુ તેનું પ્રતિય હંમેશાં સત્ય નથી.

ઉદાહરણ 1.5: નીચેનામાંથી કઈ સંખ્યાઓ સંમેય છે અને કઈ નથી?

ઉકેલ:

(i) -2 ને $\frac{-2}{1}$ તરીકે દર્શાવી શકાય જે સ્વરૂપમાં છે જ્યાં $q \neq 0$ તેથી -2 એ સંમેય સંખ્યા છે.

(ii) એ સંમેય સંખ્યા છે કારણ કે તે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં છે જ્યાં $q \neq 0$

(iii) -17 એ સંમેય સંખ્યા છે કારણ કે એ સ્વરૂપમાં છે.

(iv) તેજ રીતે $\frac{15}{7}, \frac{18}{5}$ and $\frac{-7}{6}$ એ બધી તેમના અતિસંક્ષિપ્ત સ્વરૂપમાં ઉપરોક્ત દલીલો પ્રમાણે સંમેય સંખ્યાઓ છે.

ઉદાહરણ 1.6: *નીચેના સંમેય સંખ્યાઓને તેમના અતિસંક્ષિપ્ત રૂપમાં લખો.*

ઉકેલ:

(i)

એ સંમેય સંખ્યા $\frac{-24}{192}$ નું અતિસંક્ષિપ્ત સ્વરૂપ છે.

(ii)

$\frac{2\times 2}{3\times 2}$, $\frac{2\times 4}{3\times 4} = \frac{8}{12}$ એ સંમેય સંખ્યા $\frac{12}{168}$ નું અતિસંક્ષિપ્ત સ્વરૂપ છે. $\frac{2\times 8}{3\times 8} = \frac{16}{24}$

(iii) $\frac{-21}{49} = \frac{-3\times 7}{7\times 7} = \frac{-3}{7}$

એ સંમેય સંખ્યા નું અતિસંક્ષિપ્ત સ્વરૂપ છે.

1.4 સંમેય સંખ્યાનું સમાન સ્વરૂપ

આપેલ સંમેય સંખ્યાના અંશ અને છેદને એક સરખી સંખ્યા વડે ગુણી અથવા ભાગી સંમેય સંખ્યાને સમાન સ્વરૂપમાં લખી શકાય છે.

ઉદાહરણ તરીકે :

$\therefore \frac{4}{6}, \quad \frac{8}{12}, \quad \frac{16}{24}$ વગેરે સંમેય સંખ્યા $\frac{2}{3}$ નાં સમાન સ્વરૂપો છે.

તેજ રીતે

$$\frac{3}{8}=\frac{6}{16}=\frac{21}{56}=\frac{27}{72}=\ldots$$

અને $\frac{4}{7}=\frac{8}{14}=\frac{12}{21}=\frac{28}{49}=\ldots$ *એ સંમેય સંખ્યાઓ* $\frac{3}{8}$ and $\frac{4}{7}$ *નાં અનુક્રમે સમાન સ્વરૂપો છે.*

ઉદાહરણ 1.7: *નીચેની સંમેય સંખ્યાઓનાં પાંચ સમાન સ્વરૂપો લખો.*

(i) $\frac{3}{17}$ (ii) $\frac{-5}{9}$

ઉકેલ:

(i)

$$\frac{3\times 8}{17\times 8}=\frac{24}{136},\ \frac{3}{17}\times\frac{7}{7}=\frac{21}{119}$$

તેથી *નાં પાંચ સમાન સ્વરૂપો* $\frac{6}{34},\frac{12}{68},\frac{-9}{-51},\frac{24}{136},\frac{21}{119}$ *છે.*

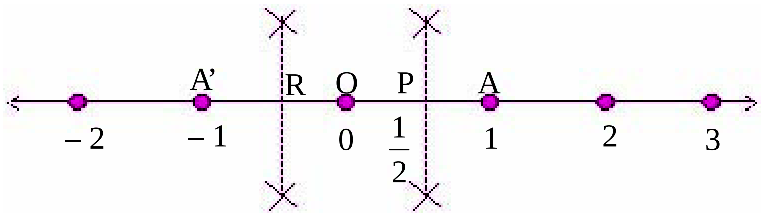
(ii) *વિભાગ* (i) *ની માફક (વિભાગ* (1) *મુજબ)* *નાં પાંચ સમાન સ્વરૂપો*

છે.

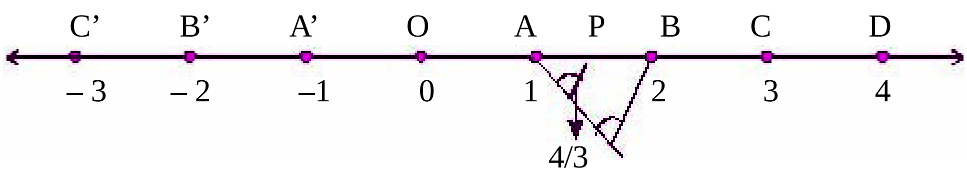
1.5 સંખ્યારેખા પર સંમેય સંખ્યાઓ

પૂર્ણાંક સંખ્યાઓને સંખ્યારેખા પર કેવી રીતે નિરૂપણ કરવું તે આપણે જાણીએ છીએ. ચાલો આપણે તે સંખ્યારેખા પર દર્શાવવાનો પ્રયત્ન કરીએ. સંમેય સંખ્યા $\frac{1}{2}$ *એ ઘન છે અને તેને શૂન્ય* (0)*ની જમણી બાજુ દર્શાવી શકાશે.*

$0 < \frac{1}{2} < 1$, તેથી $\frac{1}{2}$ એ 0 અને 1 ની વચ્ચે આવેલ છે. OA અંતરના બે સરખા ભાગ પાડો. OA ને P બિંદુએ દુભાગવાથી આ ક્ય બની શકે, P એ $\frac{1}{2}$.બતાવે છે તેવી જ રીતે Q કે જે OA નું મધ્યબિંદુ છે તે સંમેયસંખ્યા $-\frac{1}{2}$. બતાવે છે (દર્શાવે છે.



તેજ રીતે સંખ્યારેખા પર $\frac{4}{3}$ ને નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય.



$1 < \frac{4}{3} < 2$, તેથી $\frac{4}{3}$ એ 1 અને 2 ની વચ્ચે આવેલી અંતર AB ને ત્રણ સરખા ભાગમાં વિભાજિત કરો તેમાંનો એક ભાગ AP લો.

હવે $\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3} = OA + AP = OP$ બિંદુ P એ સંખ્યારેખા પર $\frac{4}{3}$ દર્શાવે છે.

1.6 સંમેય સંખ્યાઓની સરખામણી

બે સંમેય સંખ્યાઓની સરખામણી કરવા માટે આપણે નીચેનામાંથી કોઈપણ એક પદ્ધતિને અનુસરીએ છીએ.

(i) બે સંમેય સંખ્યાઓની સરખામણી કરવી હોય, તો બંને સંખ્યાના છેદ સરખા તો (કરો) તેમના અંશની સરખામણી કરો. જે સંખ્યાનો અંશ મોટો તે સંમેય સંખ્યા મોટી છે.

આ પ્રમાણે કે જેમનો સરખો છેદ ધન 17 છે એવી બે સંમેય સંખ્યાઓ $\frac{5}{17}$ and $\frac{9}{17}$ માટે

$\frac{9}{17} > \frac{5}{17}$ કારણકે $9 > 5$

$\therefore \frac{9}{17} > \frac{5}{17}$

(ii) જો બે સંખ્યાઓના છેદ જુદાજુદા હોય, તો તેમનું સમાન સ્વરૂપ લઈને બંને છેદ સરખા કરો પછી પરિણામે મળતીસંખ્યાના અંશની સરખામણી કરો, જે સંખ્યાનો અંશ મોટો છે તે સંમેય સંખ્યા મોટી છે.

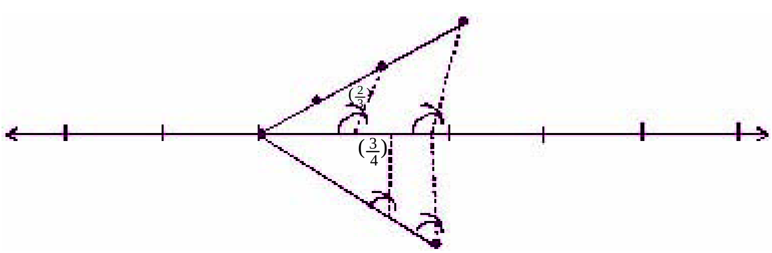
ઉદાહરણ તરીકે $\frac{3}{7}$ and $\frac{6}{11}$ બે સંમેય સંખ્યાની સરખામણી કરવા માટે પ્રથમ નીચે પ્રમાણેની રીત મુજબ બંનેના છેદ સરખા કરીએ છીએ.

$$\frac{3\times11}{7\times11}=\frac{33}{77} \text{ and } \frac{9\times7}{11\times7}=\frac{42}{77}$$

$42 > 33$, તેથી

(iii) બે સંમેય સંખ્યાઓને સંખ્યારેખા પર દર્શાવીને આપણે જોઈએ છીએ કે એક સંમેય સંખ્યાની જમણીબાજુ આવેલી બીજી સંમેય સંખ્યા મોટી હોય છે.

ઉદાહરણ તરીકે $\frac{2}{3}$ and $\frac{3}{4}$ લો. આપણે આ સંખ્યાઓને સંખ્યારેખા પર નીચે પ્રમાણે નિરૂપણ કરીએ.



$0<\frac{2}{3}<1$ અને $0<\frac{3}{4}<1$. અનોઅર્થ એથયોકે $\frac{2}{3}$ અને $\frac{3}{4}$ બંને સંખ્યાઓ 0 અને 1 ની વચ્ચે આવેલી છે.

રેખાના સરખા ભાગ કરવાની પદ્ધતિથી A બિંદુ $\frac{2}{3}$ અને B બિંદુ $\frac{3}{4}$ દર્શાવે છે બિંદુ A એ બિંદુ B ની જમણી બાજુ છે.

$\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$ અથવા $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$

$\frac{2}{3}$ અને $\frac{3}{4}$ માંથી $\frac{3}{4}$ એ મોટી સંખ્યા છે.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 1.1

1. નીચેનામાંથી (1) પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ (2) પૂર્ણ સંખ્યાઓ

   $4, \frac{-3}{4}, \frac{5}{6}, -36, \frac{12}{7}, \frac{3}{-8}, \frac{15}{7}, -6$

2. નીચેનામાંથી (1) પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ (2) પૂર્ણ સંખ્યાઓ (3) પૂર્ણાંકો (4) સંમેય સંખ્યાઓ ન હોય તે ઓળખી બતાવો.

3. નીચેની સંમેય સંખ્યાઓના છેદ સરખા કરીને સાદુંરૂપ આપો અને દરેક ઉદાહરણમાં પરિણામ પ્રાકૃતિક સંખ્યા, પૂર્ણ સંખ્યા, પૂર્ણાંકો કે સંમેય સંખ્યા છે તે જણાવો.

   (i) $3+\frac{7}{3}$ (ii) $-3+\frac{10}{4}$ (iii) $-8-13$ (iv) $12-12$

   (v) $\frac{9}{2}-\frac{1}{2}$ (vi) $2\times\frac{5}{7}$ (vii) $8\div 3$

$\frac{2}{5}, \frac{7}{4}, \frac{3}{4}, 16, \frac{-13}{27}, -15, 0, \frac{5}{17}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{3}$

4. સંખ્યારેખાનો ઉપયોગ કરીને નીચેની સંખ્યાઓનો સરવાળો કરો.

   (1) $9 + (-7)$ (2) $(-5) + (-3)$ (3) $(-3) + (4)$

5. નીચેનામાંથી કઈ સંમેય સંખ્યાઓ તેના અતિસંક્ષિપ્ત સ્વરૂપમાં છે?

   $\frac{8}{12}, \frac{5}{7}, \frac{-3}{12}, \frac{-6}{7}, \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{27}}, \frac{15}{24}$

6. નીચેની સંમેય સંખ્યાઓમાંથી કઈ સંખ્યાઓ પૂર્ણાંકો છે?

   $-10, \frac{15}{5}, \frac{-5}{15}, \frac{13}{5}, \frac{27}{9}, \frac{7\times 3}{14}, \frac{-6}{-2}$

7. આપેલી સંમેય સંખ્યા ત્રણ સમાન સંમેય સંખ્યાઓ લખો.

   $\frac{2}{5}, \frac{-5}{6}, \frac{17}{3}$

8. નીચેની સંમેય સંખ્યાઓનું સંખ્યા રેખાપર નિરૂપણ કરો.

9. નીચેની સંમેય સંખ્યાઓની નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે સરખામણી કરો.

(1) સંમેય સંખ્યાઓને સમાન સ્વરૂપમાં પરિવર્તન કરીને

(2) સંખ્યા રેખાનો ઉપયોગ કરીને

(a) $\frac{2}{3}$ અને $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{3}{5}$ અને $\frac{7}{9}$ (c) $\frac{-2}{3}$ અને $\frac{-1}{2}$

(d) $\frac{3}{7}$ અને $\frac{5}{11}$ (e) $\frac{-7}{6}$ અને $\frac{3}{2}$

1.7 સંમેય સંખ્યાની ચાર મૂળભૂત પ્રક્રિયાઓ

1.7.1 સંમેય સંખઅયાઓનો સરવાળો

(અ) સંમેય સંખઅયાઓ , $\frac{r}{q}$ વિશે વિચારો

$$\frac{p}{q}+\frac{r}{q}=\frac{p+r}{q}$$

ઉદાહરણ તરીકે

(બ) બે સંમેય સંખ્યાઓ $\frac{p}{q}$ અને $\frac{r}{s}$. વિશે વિચારો

$$\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{ps}{qs}+\frac{rq}{sq}=\frac{ps+rq}{qs}$$

ઉદાહરણ તરીકે,

(i) $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}=\frac{3\times3+4\times2}{4\times3}=\frac{9+8}{12}=\frac{17}{12}$

(ii) $-\frac{4}{5}+\frac{7}{8}=\frac{-4\times8+5\times7}{5\times8}=\frac{35-32}{40}=\frac{3}{40}$

ઉપરનાં બંને ઉદાહરણો પરથી આપણે નીચેના સર્વ સામાન્ય નિયમો તારવી શકીએ.

(અ) જેના છેદ સરખા છે એવી બે સંમેય સંખ્યાઓનો સરવાળો એવી સંમેય સંખઅયા છે જેનો છેદ તેનો તેજ છે અને અંશ બે સંમેય સંખ્યાના અંશોનો સરવાળો છે.

(બ) જેના છેદ (સરખાનથી) જુદા જુદા છે એવી બે સંમેય સંખ્યાઓનો સરવાળો એળી સંમેય સંખ્યા છે જેનો છેદ બે સંય સંખ્યાના છેદોના ગુણાકાર જેટોલ અને અંશ પ્રથમ સંમેય સંખ્યાના અંશ અને બીજી સંમેય સંખ્યાના છેદનો ગુણાકાર અને બીજી સંખ્યાનો અંશ અને પ્રથમ સંખ્યાના છેદના ગુણાકારના સરવાળા બરાબર હોય છે આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ 1.8: *નીચેની સંમેય સંખ્યાઓનો સરવાળો કરો.*

(i) $\frac{2}{7}$ અને $\frac{6}{7}$ (ii) $\frac{4}{17}$ અને $\frac{-3}{17}$ (iii) $-\frac{5}{11}$ અને $\frac{-3}{11}$

ઉકેલ: (i) $\frac{2}{7}+\frac{6}{7}=\frac{2+6}{7}=\frac{8}{7}$

$$\therefore \frac{2}{7}+\frac{6}{7}=\frac{8}{7}$$

(ii) $\frac{4}{17}+\frac{(-3)}{17}=\frac{4+(-3)}{17}=\frac{4-3}{17}=\frac{1}{17}$

$$\therefore \frac{4}{17}+\frac{(-3)}{17}=\frac{1}{17}$$

(iii) $\left(-\frac{5}{11}\right)+\left(\frac{-3}{11}\right)=\frac{(-5)+(-3)}{11}=\frac{-5-3}{11}=\frac{-8}{11}$

$$\therefore \left(-\frac{5}{11}\right)+\left(-\frac{3}{11}\right)=-\frac{8}{11}$$

ઉદાહરણ 1.9: *નીચેની દરેક સંમેય સંખઅયાઓનો સરવાળો કરો.*

(i) $\frac{3}{4}$ અને $\frac{1}{7}$ (ii) $\frac{2}{7}$ અને $\frac{3}{5}$ (iii) $\frac{5}{9}$ અને $-\frac{4}{15}$

ઉકેલ: $\frac{3}{4}+\frac{1}{7}$ આપેલું છે.

$$=\frac{3\times7}{4\times7}+\frac{1\times4}{7\times4} \qquad \text{અથવા}\left[\frac{3\times7+4\times1}{4\times7}=\frac{21+4}{28}=\frac{25}{28}\right]$$

$$=\frac{21}{28}+\frac{4}{28}=\frac{21+4}{28}$$

$$=\frac{25}{28}$$

$$\therefore \frac{3}{4}+\frac{1}{7}=\frac{25}{28}$$

(ii) $\frac{2}{7}+\frac{3}{5}$

$$=\frac{2\times 5}{7\times 5}+\frac{3\times 7}{5\times 7} \quad \text{અથવા} \left[\frac{2\times 5+3\times 7}{35}=\frac{10+21}{35}=\frac{31}{35}\right]$$

$$=\frac{10}{35}+\frac{21}{35}$$

$$=\frac{10+21}{35}=\frac{31}{35}$$

$$\therefore \frac{2}{7}+\frac{3}{5}=\frac{31}{35}$$

ઉકેલ : (i) $\frac{7}{4}-\frac{1}{4}=\frac{7-1}{4}=\frac{6}{4}=\frac{2\times 3}{2\times 2}=\frac{3}{2}$

(ii) $\frac{3}{5}-\frac{2}{12}=\frac{3\times 12}{5\times 12}-\frac{2\times 5}{12\times 5}$

$$=\frac{36}{60}-\frac{10}{60}=\frac{36-10}{60}$$

$$=\frac{26}{60}=\frac{13\times 2}{30\times 2}=\frac{13}{30}$$

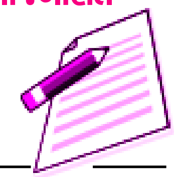
1.7.3સંમેય સંખ્યાના ગુણાકાર અને ભાગાકાર

(1) બે સંમેય સંખ્યાઓ $\left(\frac{p}{q}\right)$ અને $\left(\frac{r}{s}\right)$ (જ્યા $q\neq 0$ અને) નો ગુણાકાર સંમેય સંખ્યા છે (જ્યા $qs\neq 0$)

$=$

(2) બે સંમેય સંખ્યાઓ , (જ્યા $q\neq 0, s\neq 0$) નો ભાગાકાર સંમેય સંખ્યા છે (જ્યાં $qr\neq 0$)

બીજા શબ્દોમાં



નોંધ

અથવા (પ્રથમ સંમેય સંખ્યા) × (બીજી સંમેય સંખ્યાની વ્યસ્ત સંખ્યા) આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 1.11: નીચેની સંમેય સંખ્યાઓનો ગુણાકાર કરો.

(i) $\frac{3}{7}$ અને $\frac{2}{9}$ (ii) $\frac{5}{6}$ અને $\left(\frac{-2}{19}\right)$ (iii) $\frac{7}{13}$ અને $\left(\frac{-2}{-5}\right)$

ઉકેલ: (1) $\frac{3}{7}\times\frac{2}{9}=\frac{3\times2}{7\times9}=\frac{3\times2}{7\times3\times3}=\frac{2}{21}$

$$\therefore\left(\frac{3}{7}\right)\times\left(\frac{2}{9}\right)=\frac{2}{21}$$

(2) $\frac{5}{6}\times\left(\frac{-2}{19}\right)=\frac{5\times(-2)}{6\times19}$

$$=-\frac{2\times5}{2\times3\times19}=-\frac{5}{57}$$

$$\therefore\left(\frac{5}{6}\right)\times\left(-\frac{2}{19}\right)=-\frac{5}{57}$$

(3) $\frac{7}{13}\times\left(\frac{-2}{-5}\right)=\left(\frac{7}{13}\right)\left(\frac{-(-2)}{5}\right)$

$$=\frac{7}{13}\times\frac{2}{5}=\frac{7\times2}{13\times5}=\frac{14}{65}$$

$$\therefore\left(\frac{7}{13}\right)\times\left(\frac{-2}{-5}\right)=\frac{14}{65}$$

ઉદાહરણ 1.12: નીચેનાનું સાદુંરૂપ આપો.

(i) $\left(\frac{3}{4}\right)\div\left(\frac{7}{12}\right)$ (ii) $\frac{9}{16}\div\left(-\frac{105}{12}\right)$ (iii) $\left(\frac{87}{27}\right)\div\left(\frac{29}{18}\right)$

ઉકેલ : (1) $\left(\frac{3}{4}\right)\div\left(\frac{7}{12}\right)$

$$=\left(\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{12}{7}\right) \qquad \left[\frac{7}{12} \text{ નું વ્યસ્ત } \frac{12}{7} \text{ છે.}\right]$$

$$=\frac{3\times12}{4\times7}=\frac{3\times3\times4}{7\times4}=\frac{9}{7}$$

$$\therefore\left(\frac{3}{4}\right)\div\left(\frac{7}{12}\right)=\frac{9}{7}$$

(2) $\left(\frac{9}{16}\right)\div\left(\frac{-105}{2}\right)$

$$\left(\frac{9}{16}\right)\times\left(\frac{2}{-105}\right) \qquad \left[\frac{-105}{2} \text{ નું વ્યસ્ત } \frac{2}{-105} \text{ છે.}\right]$$

$$=-\frac{9\times2}{2\times8\times3\times35}=-\frac{3\times3\times2}{2\times8\times3\times35}$$

$$=\frac{-3}{8\times35}=\frac{-3}{280}$$

$$\therefore\left(\frac{9}{16}\right)\div\left(\frac{-105}{2}\right)=\frac{-3}{280}$$

(3) $\left(\frac{87}{27}\right)\div\left(\frac{29}{18}\right)$

$$=\left(\frac{87}{27}\right)\times\left(\frac{18}{29}\right)=\frac{87}{27}\times\frac{18}{29}=\frac{29\times3\times2\times9}{9\times3\times29}=\frac{2}{1}$$

$$\therefore\left(\frac{87}{27}\right)\div\left(\frac{29}{18}\right)=\frac{2}{1}$$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 1.2

1. નીચેની સંમેય સંખ્યાઓનો સરવાળો કરો.

(i) $\frac{3}{7}, \frac{6}{7}$ (ii) $\frac{2}{15}, -\frac{6}{15}$ (iii) $\frac{3}{20}, \frac{-7}{-20}$ (iv) $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}$

2. નીચેની સંમેય સંખ્યાઓનો સરવાળો કરો.

(i) $\frac{3}{2}, \frac{5}{3}$ (ii) $\frac{17}{7}, \frac{5}{9}$ (iii) $\frac{2}{5}, \frac{-5}{7}$

3. સુચના પ્રમાણે પ્રક્રિયા કરો.

4. બાદબાકી કરો.

(i) $\frac{7}{15}$ માંથી $\frac{13}{15}$ (ii) $\frac{7}{3}$ માંથી $-\frac{5}{3}$ (iii) $\frac{3}{7}$ માંથી $\frac{9}{24}$

$(i)\ \left(\left(\frac{2}{3}+\frac{7}{8}\right)+\frac{-5}{12}\right)+\frac{3}{16} \quad \left(\frac{7}{8}\times\frac{8}{25}\right)\div\frac{7}{15}$ $(ii)\ \left[\left(\frac{7}{2}+\frac{3}{4}\right)\div\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{5}\right)\right] \quad \left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{5}\times\frac{3}{5}\right)\times 21$

5. સાદુરૂપ આપો.

(i) $\left(3\frac{1}{5}+\frac{7}{5}-2\frac{1}{6}\right)$ (ii) $\frac{1}{2}+\frac{13}{4}-6\frac{3}{4}$

6. નીચેનાનો ગુણાકાર કરો.

(i) $\frac{2}{11}$ ને $\frac{5}{6}$ વડે (ii) $-\frac{3}{11}$ ને $\frac{-33}{35}$ વડે (iii) $\frac{-11}{3}$ ને $\frac{-27}{77}$ વડે

7. ભાગાકર કરો.

(i) $\frac{1}{2}$ ને $\frac{1}{4}$ વડે (ii) $\frac{-7}{4}$ ને $\frac{-4}{5}$ વડે (iii) $\frac{35}{33}$ ને $\frac{-7}{22}$ વડે

8. નીચેનાનું સાદુરૂપ આપો.

9. $\frac{16}{7}$ અને $\frac{-3}{14}$ ના સરવાળાને તેમના તફાવત (બાદબાકી) વડે ભાગો.

10. એક સંખ્યાને $\frac{13}{3}$ વડે ગુણતાં પરિણામ $\frac{39}{12}$. મળે છે તો તે સંખઅયા શોધો.

1.8 સંમેય સંખ્યાની દશાંશ અભિવ્યક્તિ

તમે એક પૂર્ણાંક સંખ્યાનો બીજા પૂર્ણાંક સંખ્યા વડે ભાગાકાર થી અને તેના પરિણામને દશાંશમાં અભિવ્યક્ત કરવાની રીતથી પરિચિત છો. સંમેય સંખ્યાને દશાંશ સ્વરૂપમાં અભિવ્યક્ત કરવાની પ્રક્રિયા એ દશાંશ ચિહનનો ઉપયોગ કરીને પુનરાવર્તી ભાગાકરની પ્રક્રિયા કરવાની છે.

આપણે કેટલાંક ઉદાહરણોનો અભઅયાસ કરીએ.

ઉદાહારણ 1.13: *નીચેનામાંથી દરેકને દશાંશ સંખ્યામાં અભિવ્યક્ત કરો.*

(i) $\frac{12}{5}$ (ii) $\frac{-27}{25}$ (iii) $\frac{13}{16}$

ઉકેલ: *(1) ભાગાકારની લાંબી પ્રક્રિયા કરીને આપણો ઉત્તર મેળવીએ.*

તેથી , $\frac{12}{5} = 2.4$

(2)

$$\begin{array}{r} -1.08 \\ 25\overline{)-27.00} \\ \underline{-25} \\ 200 \\ \underline{200} \\ 000 \end{array}$$

તેથી , $\frac{-27}{25} = 1.08$

(3)

$$\begin{array}{r} 0.8125 \\ 16\overline{)13.0000} \\ \underline{128} \\ 20 \\ \underline{16} \\ 40 \\ \underline{32} \\ 80 \\ \underline{80} \\ 00 \end{array}$$

તેથી , $\frac{13}{16} = 0.8125$

ઉપરનાં ઉદાહરણો પરથી જોઈ શકાય છે કે જ્યારે શેષ શૂન્ય થાય ત્યારે પરિણામે મળતી દશાંશ સંખ્યામાં દશાંશ સ્થલોની એક નિશ્ચિત સંખ્યા મળે એવા એક ચોક્કસ સોપાને ભાગાકારની પ્રક્રિયા પૂર્ણ થાય છે. આ પ્રકારના દશાંશ સાન્ત દશાંશ તરીકે ઓળખાય છે.

નોંધ: ધ્યાનમાં લો કે ઉપરના ભાગાકારમાં સંમેય સંખ્યાના છેદને 2 અથવા 3 અથવા બંને મુખ્ય અવયવો હતા. વૈકલ્પિત રીતે આપણે $\frac{12}{5}$ ને $\frac{12\times 2}{5\times 2} = \frac{24}{10} = 2.4$ તરીકે દર્શાવી શકયા હોત અને બીજાઓને પણ એ રીતે દર્શાવી શકયા હોત આપણે બીજા ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 1.14: નીચેની દરેકની દશાંશ અભિવ્યક્તિ લખો.

(a) $\frac{7}{3}$ (b) $\frac{2}{7}$ (c) $\frac{5}{11}$

ઉકેલ: (1)

$$\begin{array}{r} 2.33 \\ 3\overline{)7.00} \\ \underline{6} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 1 \end{array}$$

અહીં શેષ ૧નું પુનરાર્તન થાય છે. પરિણામે મળતો દશાંશ સાત દશાંશ નથી.

$\frac{7}{3} = 2.333...$ અથવા $2.\bar{3}$

(2)

$$\begin{array}{r} 0.285714285714 \\ 7\overline{)2.000000000000} \\ \underline{14} \\ 60 \\ \underline{56} \\ 40 \\ \underline{35} \\ 50 \\ \underline{49} \\ 10 \\ \underline{7} \\ 30 \\ \underline{28} \\ 20 \\ \underline{14} \\ 60 \\ \underline{56} \\ 40 \\ \underline{35} \\ 50 \end{array}$$

અહીં શેષ 4 થાય છે ત્યારે થઈ અંકોનું પુનરાવર્તન શરૂ થાય છે.

$\frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$

(3)

$$\begin{array}{r} 0.4545 \\ 11\overline{)5.0000} \\ \underline{44} \\ 60 \\ \underline{55} \\ 50 \\ \underline{44} \\ 60 \\ \underline{55} \\ 5 \end{array}$$

અહીં પુન: જ્યારે શેષ 5 થાય છે ત્યારે 5 અંક પછી તેનું પુનરાવર્તન થાય છે.

$\therefore \frac{5}{11} = 0.\overline{45}$

ઉપરના ઉદાહરણો પરથી કહી શકાય કે છેદને 2 અથવા 5 સિવાયનો અવયવો હોય, તો દશાંશ અભિવ્યક્તિ પુનરાવર્તિત થાય છે. આ પ્રકારના (આવા) દશાંશને અનંત પુનરાવૃત્ત દશાંશ કહેવાય છે.

આ પ્રમાણે આપણે ઉદાહરણ 1.13 અને 1.4માં જોઈએ છીએ કે સંમેય સંખ્યાની દશાંશમાં અભિવ્યક્તિ નીચે મુજબ છે.

(1) સાન્ત દશાંશ (ચોક્કસ સોપાનો પછી શેષ શૂન્ય થાય છે.

(2) અનંત આવૃત્ત દશાંશ (ભાગાકારનો ક્યારે પણ અંત નહીં આવે.

સંમેય સંખ્યા સાન્ત દશાંશ અથવા અનંત પુનરાવૃત્ત દશાંશ હોય છે.

1.8 સંમેય સંખ્યાની દશાંશ સ્વરૂપવાળી સંમેય સંખઅયાઓને p/q સ્વરૂપમાં દર્શાવવી.

આપણે તેને ઉદાહરણો દ્વારા સ્પષ્ટ કરીએ (સમજાવીએ)

ઉદાહરણ1.15: (1) 0.48 અને (2) 0.1357 ને $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

ઉકેલ : (1) $0.48 = \frac{48}{100} = \frac{12}{25}$

(2) $0.1375 = \frac{1375}{10000} = \frac{55}{400} = \frac{11}{80}$

ઉદાહરણ 1.16: (1) 0.666... (2) 0.374374...ને $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

ઉકેલ : (1) ધારો કે $x = 0.666\ldots$ (A)

$$10\,x = 6.666\ldots \quad \text{(B)}$$

$$\text{B} - \text{A} = 9\,x = 6$$ અથવા

(2) ધારણો કે $x = 0.374374374\ldots.$ (A)

$$1000\,x = 374.374374374\ldots. \text{(B)}$$

$$\text{(B)} - \text{(A)} = 999\,x = 374$$

અથવા $= \dfrac{374}{999}$

$$\therefore 0.374374374\ldots = \frac{374}{999}$$

ઉપરનું ઉદાહરણ દર્શાવે છે કે સાન્તદશાંશ કે અનંત આવૃત્તિ દશાંશ સંમેય સંખ્યા દર્શાવે છે.

$x = \dfrac{2}{3}$

નોંધ: $0.374374374\ldots$ ના જેવા અનંત આવૃત્તિ દશાંશ $0.\overline{374}$. ની જેમ લખાય છે. 374 ઉપર લીટીથી અંકિત કરેલા અંકોનો સમૂહ ફરી ફરી પુનરાવૃત્ત થાય છે. એમ દર્શાવે છે.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 1.3

1. નીચેની સંમેય સંખ્યાઓને દશાંશ સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

   (i) $\dfrac{31}{80}$ (ii) $\dfrac{12}{25}$ (iii) $\dfrac{12}{8}$ (iv) $\dfrac{75}{12}$ (v) $\dfrac{91}{63}$

2. નીચેની સંખ્યાઓને દશાંશ સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

   (i) $\dfrac{2}{3}$ (ii) $\dfrac{5}{7}$ (iii) $\dfrac{25}{11}$

3. નીચેના દશાંશોને $\dfrac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

   (a) (i) 2.3 (ii) -3.12 (iii) -0.715 (iv) 8.146

   (b) (i) $0.\overline{333}$ (ii) $3.\overline{42}$ (iii) $-0.315315315\ldots$

1.9 બે સંમેય સંખ્યાઓની વચ્ચેની સંમેય સંખ્યાઓ

આપેલ બે સંમેય સંખ્યાઓની વચ્ચેની સંમેય સંખ્યા શોધવી શક્ય છે? આની ચકાસણી કરવા માટે નીચેના ઉદાહરણ જુઓ.

ઉદાહરણ 1.17: $\frac{3}{4}$ and $\frac{6}{5}$ ની વચ્ચેની સંમેય સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ: આપણે $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{6}{5}\right)$ સંખ્યા શોધવાનો પ્રયત્ન કરીએ $=\frac{1}{2}\left(\frac{15+24}{20}\right)=\frac{39}{40}$

હવે $\frac{3}{4}=\frac{3\times10}{4\times10}=\frac{30}{40}$

અને $\frac{6}{5}=\frac{6\times8}{5\times8}=\frac{48}{40}$

દેખીતી રીતે $\frac{30}{40}<\frac{39}{40}<\frac{48}{40}$

એટલે $\frac{39}{40}$ એ સંમેય સંખ્યાઓ $\frac{3}{4}$ and $\frac{6}{5}$ ની વચ્ચેની સંખ્યા છે.

નોંધ : $\frac{3}{4}=0.75,\ \frac{39}{40}=0.975$ and $\frac{6}{5}=1.2$

$\therefore 0.75<0.975<1.2$

અથવા

તેથી આ ઉદાહરણ નીચેની બે પૈકી કોઈપણ એક રીતે થઈ શકે.

(1) દરેક સંમેય સંખ્યાને સમાન છેદવાળી સંખ્યામાં દર્શાવી તેમની સરાસરી લેવી.

(2) બંને સંખ્યાઓને દશાંશમાં અભિવ્યક્ત કરી તેમની સરાસરી લઈને.

હવે પ્રશ્ન એ થાય છે કે આવેલી બે સંમેય સંખ્યાઓ વચ્ચે કેટલી સંમેય સંખ્યાઓ શોધી શકાય? નીચેના ઉદાહરણો જુઓ.

ઉદાહરણ 1.18: $\frac{1}{2}$ and $\frac{3}{4}$ વચ્ચેની ત્રણ સંમેય સંખઅયાઓ શોધો.

$$\frac{1}{2}=\frac{1\times 8}{2\times 8}=\frac{8}{16}$$

અને $$\frac{3}{4}=\frac{3\times 4}{4\times 4}=\frac{12}{16}$$

$$\frac{8}{16}<\frac{9}{16}<\frac{10}{16}<\frac{11}{16}<\frac{12}{16}$$ હોવાથી

આપણે 5 સંમેય સંખ્યાઓ શોધવા શક્તિપાત બન્યા છીએ.

$\frac{9}{16}, \frac{10}{16}, \frac{11}{16}$ એ $\frac{1}{2}$ અને $\frac{3}{4}$ વચ્ચેની (સંમેય સંખ્યાઓ) છે. વાસ્તવમાં આપેલ બે સખ્યાઓની વચ્ચે આપણે કોઈપણ સંમેય સંખ્યા (જોઈએ તેટલી સંમેય સંખઅયાઓ) શોધી શકીએ.

પુન: (ફરીથી)

$$\frac{1}{2}=\frac{50}{2\times 50}=\frac{50}{100}$$

$$\frac{3}{4}=\frac{3\times 25}{4\times 25}=\frac{75}{100}$$

$$\frac{50}{100}<\frac{51}{100}<\frac{52}{100}<\frac{53}{100}<.....<\frac{72}{100}<\frac{73}{100}<\frac{74}{100}<\frac{75}{100}<....$$ (પ્રેસ)

હોવાથી ઉત્તર (1) માં દર્શાવ્યા મુજબ આપણે $\frac{1}{2}$ and $\frac{3}{4}$ વચ્ચે 24 સંમેય સંખ્યાઓ શોધવા શક્તિમાન બન્યા છીએ. (24 સંમેય સંખ્યાઓ શોધી શક્યા છીએ.)

ઉપરના ઉદાહરણો પરથી સ્પષ્ટ થાય છે કે કોઈપણ બે સંમેય સંખ્યાઓની વચ્ચે અસંખ્ય (અમર્યાદ) સંમેય સંખ્યાઓ શોધી શકાય.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 1.4

1. નીચેની સંમેય સંખ્યાઓની વચ્ચેની સંમેય સંખઅયા શોધો.

   (i) $\frac{3}{4}$ અને $\frac{4}{3}$ (ii) 5 અને 6 (iii) $-\frac{3}{4}$ અને $\frac{1}{3}$

2. નીચેની સંમેય સંખ્યાઓ વ્યચેની બે સંમેય સંખ્યાઓ શોધો.

(i) $-\frac{2}{3}$ અને $\frac{1}{2}$ (ii) $-\frac{2}{3}$ અને $-\frac{1}{4}$

3. નીચેની સંમેય સંખ્યાઓની વચ્ચે પાંચ સંમેય સંખઅયાઓ શોધો.

(1) 0.27 અને 0.30 (2) 7.31 અને 7.35

(3) 20.75 અને 26.80 (4) 1.001 અને 1.002

1.10 અસંમેય સંખ્યાઓ

આપણે જોયું કે સંમેય સંખઅયાની અભિવ્યક્તિ સાન્ત અથવા તો અનંત પુનરાવૃત્ત હોય છે. (હવે પ્રશ્ન એ થાય છે કે) એવા કોઈ દશાંશ કે જે સાન્ત કે અનંત પુનરાવૃત્ત નથી? ઉદાહરણ તરીકે નીચેનો દશાંશ તપાસે. 0.10 100 1000 10000 1....... (1)

તમે જોઈ શકો છો કે આ દશાંશને કોઈ ચોક્કસ તરાહ છે. અને અનિશ્ચિત (અચોક્કસ) સથાન સુધી લખી શકાય છે, અને તેમાં અંકોનો કોઈ સમૂહ પુનરાવૃત્ત થતો નથી આમ આ અનંત અનાવૃત દશાંશનું ઉદાહરણ છે.

તેના જેવો જ દશાંશ નીચે આપેલ છે.

0.1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13..... (2)

(1) અને (2) માં તમે નવા અંકોનો સમૂહ લખી શકશો?

(1) માં ત્યાર પછીના છ અંકે 00000010000001 ...... અને

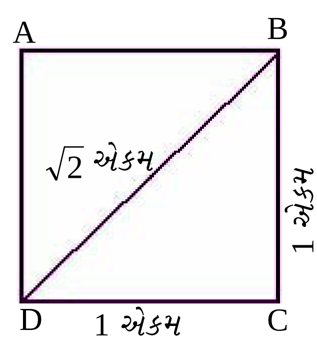
(2) મા 14 15 16 ....

(1) અને (2) દર્શાવેલા આવા દસાંશ ઉદાહરણો અસંમેય સંખ્યાઓ દર્શાવે છે.

આમ દશાંશ અભિવ્યક્તિ જે સાન્તનથી કે અનંત પુનરાવૃત્ત નથી તે અસંમેય સંખ્યા દર્શાવે છે.

1.11 સંમેય સંખ્યાઓની અપર્યાપ્તતા

બધીજ લંબાઈ આપણે સંમેયસંખ્યાની મદદથી (સંમેય સંખ્યામાં માપી શકીએ? આપણે બધાંજ વજન સંમેય સંખ્યાની મદદથી (સંમેય સંખ્યામાં) માપી શકીએ? (આ માટે)
નીચેની પરિસ્થિતિનો અભ્યાસ કરો.



જેની દરેક બાજુ 1 એકમ હોય તેવા ABCD ચોરસ વિશે વિચાર સ્વાભાવિકરીતે વિકર્ણ BD ની લંબાઈ $\sqrt{2}$ એખમ થશે.

એ સાબિત કરી શકાશે કે $\sqrt{2}$ એ સંમેય સંખ્યા નથી કારણ કે

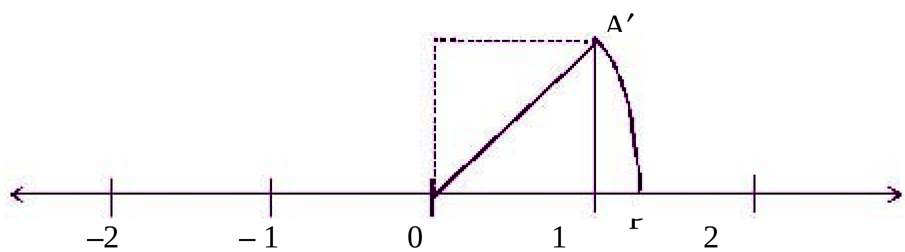
એવી કોઈ સંમેય સંખ્યા નથી જેનો વર્ગ 2 થાય. (આ વિગતની) સાબિતી આ પાઠમાં કક્ષા બહારની છે.

આપણે તારવીએ કે આપેલ એકમ લંબાઈના દરેક રેખાખંડની લંબાઈ સંમેય સંખ્યામાં આપણે ચોક્કસ રીતે માપી શકીએ નહિ આમ સંમેય સંખ્યાઓ આપેલ નિશ્ચિ એકમમાં બધી લંબાઈ માપવા અપર્યાપ્ત છે. (પર્યાપ્ત નથી - પૂરતા નથી.) આ અપર્યાપ્તતાને લીધે સંમેય સંખ્યા સંહતિના અસંમેયસંખ્યા (જે સંમેય નથી) સંહતિ સુધીના વિસ્તરણની આવશ્યકતા ઉભી થઈ (આ અપર્યાપ્તતાને લીધે સંમેય સંખ્યા સંહતિના એવા વિસ્તરણની આવશ્યકતા ઉભી થઈ કે જે સંહતિમાં સંમેય અને અસંમેય સંખ્યાઓનો સમાવેશ થતો હોય.)

વળી આપણે જોયું કે સંખ્યારેખા પર દરેક સંમેય સંખ્યાને સંગત એક બિંદુ હોય છે. આ વિધાના પ્રતિયવિધાન વિશે વિચારો.

સંખ્યા રેખા ર આવેલ દરેક બિંદુ શું હંમેશાં કોઈ સંમેય સંખ્યા સાથે સુસંગત હશે? આ પ્રશ્નનો ઉત્તર પણ 'ના' છે. આના સ્પષ્ટીકરણ માટે આપણે નીચેનું ઉદાહરણ લઈએ. (જે નીચેના ઉદાહરણ રથી સ્પષ્ટ થશે.)

આ સંખ્યારેખા પર O,A,B,C,D બિંદુઓ લો જે અનુક્રમે 0 (શૂન્ય), 1, 2, -1 અને -2 સંમેય સંખ્યાઓ દર્શાવે. A બિંદુએ AS'1 OA એવી રીતે દોરો કે $AA^1 = 1$ એકમ.



$\therefore OA' = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ એકમ 0 ને કેન્દ્ર લઈ OA^1 જેટલી ત્રિજ્યા લઈ રેખાને P બિંદુમાં છેદતો ચાપ દોરીએ તો P બિંદુ $\sqrt{2}$ દર્શાવે. $\sqrt{2}$ અસંમેય સંખ્યા છે તેથી આપણે એવા નિર્ણય પર આવીએ કે સંખ્યારેખા પર P બિંદુ જેવા બિંદુઓ છે જે સંમેય સંખ્યા દર્શાવતા નથી. તેવી જ રીતે આપણે બતાવી શકીએ કે $\sqrt{3},\ 2\sqrt{3},\ 5\sqrt{2}$ વગેરે જેવાં બિંદુઓ (સંખ્યારેખા પર) હોય છે જે સંમેય સંખ્યાઓ દર્શાવતા નથી. તેથી સંમેય સંખ્યાઓને સંગત બિંદુઓ ધરાવતી સંખ્યારેખા માં ખાલી જગા હોય છે. તેથી સંખ્યારેખામાં સંમેય અને અસંમેય બંને સંખ્યાઓને સંગત બિંદુઓ હોય છે.

આમ આપણે સંમેય સંખ્યા સંહતિને તેમાં અસંમેય સંખ્યાઓનો સમાવેશ થાય તે રીતે વિસ્તારી છે.

જે સંખ્યા સંહતિમાં સંમેય અને અસંમેય સંખ્યાઓનો સમાવેશ થાય છે તેને વાસ્તવિક સંખ્યા સંહતિ કહે છે.

નોંધ

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 1.5

1. નીચેની સંખ્યાઓને પ્રથમ ત્રણ દશાંશ સ્થળ સુધી દશાંશમાં દર્શાવો.

$\sqrt{2}, \ \sqrt{3}, \ \sqrt{5}$

2. નીચેની સંખ્યાઓને વાસ્તવિક સંખ્યારેખા પર દર્શાવો.

(i) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (ii) $1+\sqrt{2}$ (iii) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

1.12 આપેલી બે સંખઅયાઓ વચ્ચેની અસંમેય સંખ્યા શોધવી.

ઉદાહરણોની મદદથી આપેલી બે સંખ્યાઓની વચ્ચેની અસંમેય સંખ્યા શોધવાની રીત સ્પષ્ટ કરીએ.

ઉદાહરણ 1.19: 2 અને 3 ની વચ્ચેની અસંમેય સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ: $\sqrt{2\times 3}$ સંખ્યા વિશે વિચારો

આપણે જાણીએ છીએ કે $\sqrt{6}$ નું લગભગ મૂલ્ય 2.45 છે.

તે 2 અને 3ની વચ્ચે આપેલ છે. અને તે અસંમેય સંખઅયા છે.

ઉદાહરણ1.20: $\sqrt{3}$ અને 2 વચ્ચે આવેલી અસંમેય સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : $\dfrac{\sqrt{3}+2}{2}$ વિશે વિચારો

$$=1+\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 1+\frac{1.732}{2}=1.866$$

$\therefore$ $\approx$ 1.84 એ $(=1.732)$ અને 2ની વચ્ચે આવેલી છે.

$\therefore$ જરૂરી એસંમેય સંખઅયા છે.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 1.6

1. નીચે આપેલ સંખ્યાઓની જોડ વચ્ચેની અસંમેય સંખ્યા શોધો.

(1) 2 અને 4 (2) $\sqrt{3}$ અને 3 (3) $\sqrt{2}$ અને $\sqrt{3}$

2. 1 અને 2 વચ્ચેની અસંમેય સંખ્યા તમે દર્શાવી શકશો?

1.13 આપેલ દશાંશ સ્થળ સુધી સંખ્યાઓનું આસત્ત મૂલ્ય (અંદાજિત કિંમત) નક્કી કરવું.

ઘણીવાર વાસ્તવિક સંખ્યાઓનું અંદાજી મૂલ્ય નિશ્ચિત દશાંશ સ્થળ સુધી લખવાનું અનુકૂળ રહે છે. ઉદાહરણ દ્વારા સ્પષ્ટ કરીએ.

ઉદાહરણ1.21: ત્રણ દશાંશ સ્થળ સુધી લગગ અંદાજિત મૂલ્ય મેળવી સંખ્યા 2.31832ને અભિવ્યક્ત કરો.

ઉકેલ: દશાંશ બિંદુ પછીનું ત્રીજી સ્થાન જોઈએ આ કિસ્સામાં તે 8 છે જે 5 કરતાં વધારે છે તેથી 2.71832ની બે દશાંશ સ્થળ સુધીની અંદાજિત કિંમત 2.72 છે.

ઉદાહરણ1.22: 12.78962નું ત્રણ દશાંશ સ્થળ સુધી અંદાજિત કિંમત મેળવો.

ઉકેલ: દશાંશ બિંદુ પછીનું ચોથું સ્થાન 6 છે (જે 5 કરતાં વધારે છે) તેથી આપણે 12.78962ની ત્રણ દશાંશ સ્થળ સુધી સાચી અંદાજિત કિંમત મેળવવા ત્રીજા સ્થાનમાં 1 ઉમેરીએ જે 12.70 છે.

આમ આપણે જોઈએ છીએકે સંખ્યાનું અમુક દશાંશ સ્થલ સુધી અંદાજિત મૂલ્ય મેળવવાના આપણે સંખ્યાના દશાંશ ભાગમાં પછીનો અંક જોઈએ છીએ અને પછી નીચે પ્રમાણે આળ વધીએ છીએ.

(1) જો અંક 5 કરતાં નાનો હોય, તો આપણે તેને જતો કરીને તેના સિવાયનો ઉત્તર આપીએ છીએ.

(2) જો અંક 5 કે તેથી વધુ હોય તો જરૂરી (ઈચ્છિત) દશાંશ સ્થળ સુધીની જરૂરી (અંદાજિત) સંખ્યા મેળવવા તેના આગલા અંકમાં 1 ઉમેરીએ છીએ।

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 1.7

1. નીચેની સંખ્યાઓની ત્રણ દશાંશ સ્થળ સુધીની અંદાજિત કિંમત લખો.

(1) 0.77777 (2) 7.3259 (3) 1.0118

(4) 3.1428 (5) 1.1413

સારાંશ

- *પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ, પૂર્ણસંખ્યાઓ અને પૂર્ણાંકો સાથેની ચાર મૂળભૂત ક્રિયાઓ યાદ કરો.*
- *ઉપરનું (સંખ્યાઓનું) સંખ્યા રેખા પર નિરૂપણ*
- *પૂર્ણાંકોનું સંમેય સંખ્યા સુધીનું વિસ્તરણ સંમેય સંખ્યાએ એવી સંખ્યા છે જેને ... સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય છે જ્યાં .. અને .. પૂર્ણાંકો છે અને .....*
- *જ્યારે .. ધન હોય (.. ને ધન બનાવવામાં આવે અને .. અને .. માં કોઈ સામાન્ય અવયવ ન હોય. ત્યારે સંમેય સંખ્યા તેના પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં અથવા અતિસંક્ષિપ્ત સ્વરૂપમાં છે એમ કહેવાય.*
- *જો બે સંમેય સંખ્યાઓના પ્રમાણિત સ્રૂપ સરખાં હોય તો તે બે સંખઅયાઓ સમાન સ્વરૂપની સંમેય સંખ્યાઓ છે એમ કહેવાય.*
- *સંમેય સંખ્યાઓનું સંખ્યા રેખા પર નિરૂપણ થઈ શકે.*
- *સંમેય સંખ્યાને સંગત સંખ્યા રેખાપર અનન્ય બિંદુ હોય.*
- *સંમેય સંખ્યાઓની સરખામણી નીચેની રીતે થઈ શકે.*
  - *દરેક સંમેય સંખ્યાને સામાન્ય છેદવાળી સંખ્યામાં દર્શાવી અંશોની સરખામણી કરવી.*
  - *જ્યારે સંખ્યા રેખાપર નિરૂપણ થાય ત્યારે મોટી સંમેય સંખ્યા બીજી (અન્ય) સંખ્યાની જમણી બાજુ હોય.*
- *જેવી રીતે પૂર્ણાંકો પર ચાર મૂળભૂત પ્રક્રિયાઓ થઈ શકે છે. તેવીજ રીતે સંમેય સંખ્યાઓ ર ચાર મૂળભૂત પ્રક્રિયાઓ થઈ શકે છે.*
- *દશાંશ સ્વરૂપે અભિવ્યક્ત થતી સંમેય સંખ્યા સાન્ત અથવા અનંત પુનરાવૃત્ત (આવૃત્ત) દશાંશ હોય છે.*
- *બે સંમેય સંખ્યાઓની વચ્ચે અનંત સંમેય સંખ્યાઓ હોય છે.*
- *સંખ્યા રેખા ર સંમેય સંખ્યાને દર્શાતાં બિંદુઓ સિવાયના બિંદુઓ પણ હોય છે. આ સંમેય સંખ્યા સંહતિની અર્યાપ્તતા દર્શાવે છે.*
- *સંમેય સંખ્યા સંહતિને વાસ્તવિક સંખ્યા સુધી વિસ્તારવામાં આવી છે.*
- *સંમેય અને અસંમેય ભેગા મળીને વાસ્તવિક સંખ્યા સંહતિ રચે છે.*
- *આવેલી બે સંખ્યાઓની વચ્ચે આપણે હંમેશા અસંમેય સંખ્યા શોધી શકીએ છીએ.*
- *અસંમેય સંખ્યાનું દશાંશ સ્વરૂપ સાન્ત કે અનંત પુનરાવૃત્ત નથી.*
- *આપણે સંમેય અથવા અસંમેય સંખ્યાનું આવેલ દશાંશ સ્તલ સુધી આસત્તમૂલ્ય (અંદાજીત મૂલ્ય) શોધી શકીએ છીએ.*

સત્રાંત સ્વાધ્યાયે

1. નીચેનામાંથી અલગ તારવો.

   (1) પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ

   (2) પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ ન હોય તેવા પૂર્ણાંકો

   (3) પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ ન હોય તેવી સંમેય સંખ્યાઓ

   (4) અસંમેય સંખ્યાઓ,

   $$-3, 17, \frac{6}{7}, \frac{-3}{8}, 0, -32, \frac{3}{14}, \frac{11}{6}, \sqrt{2}, 2+\sqrt{3}$$

2. નીચેના પૂર્ણાંકોને સંમેય સંખ્યા સ્વરૂપમાં લખો.

   (1) -14 (2) 13 (3) 0 (4) 2

   (5) 1 (6) -1 (7) -25

3. નીચેની સંમેય સંખ્યાઓને અતિસંક્ષિપ્ત રૂપમાં દર્શાવો.

   $$\frac{6}{8}, \frac{14}{21}, \frac{-17}{153}, \frac{13}{273}$$

   (i) $\frac{11}{80}$ (ii) $\frac{8}{25}$ (iii) $\frac{14}{8}$ (iv) $\frac{15}{6}$ (v) $\frac{98}{35}$

4. નીચેની સંમેય સંખ્યાઓને દશાંશ સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

   (vi) $\frac{15}{7}$ (vii) $-\frac{7}{6}$ (viii) $\frac{115}{11}$ (ix) $-\frac{17}{13}$ (x) $\frac{126}{36}$

5. નીચેની દશાંશ અભિવ્યક્તિને $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં ફેરવો.

   (1) 2.4 (2) -0.32 (3) 8.14 (4) $3.\overline{24}$

   (5) 0.415415415...

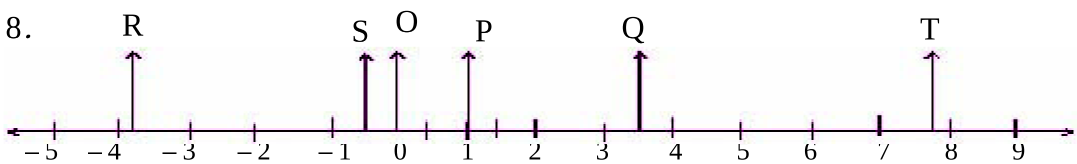
6. નીચેની સંમેય સંખ્યાઓની વચ્ચેની સંમેય સંખ્યા શોધો.

   (i) $\frac{3}{4}$ and $\frac{7}{8}$ (ii) -2 and -3 (iii) $-\frac{4}{5}$ and $\frac{1}{3}$

7. નીચેની સંમેય સંખ્યાઓની વચ્ચેની ત્રણ સંમેય સંખ્યાઓ શોધો.

(1) $\frac{3}{4}$ અને $\frac{-3}{4}$ (2) 0.27 અને 0.28 (3) 1.32 અને 1.34

8.



ઉપરની આકૃત્તિમાં સંખ્યારેખા પરનાં બિંદુઓ O, P, Q, R, S,T ને સંગત સંમેય સંખ્યાઓ લખો.

9. નીચેની સંમેય સંખ્યાઓનો સરવાળો કરો.

(i) $\frac{3}{5}, \frac{-7}{5}$ (ii) $-\frac{7}{9}, \frac{5}{9}$ (iii) $\frac{3}{5}, \frac{7}{3}$ (iv) $\frac{9}{5}, \frac{2}{3}$ (v) $\frac{18}{7}, -\frac{7}{6}$

10. નીચેની સંમેય સંખ્યાઓના ગુણાકા શોધો.

11. નીચેની સંખ્યાઓની જોડના વચ્ચેની અસંમેય સંખ્યાશોધો.

(1) 1 અને3 (2) અને 3 (3) $\sqrt{2}$ અને $\sqrt{5}$ (4) $-\sqrt{2}$ અને $\sqrt{2}$

12. 2 અને 7 સંખ્યાની વચ્ચે કેટલી સંમેય અને અસંમેય સંખ્યાઓ આવેલી છે?

13. નીચેની સંખ્યા અને 2 દશાંશ સ્થળ સુધી ચોક્કસ અંદાજિત કિંમત શોધો.

(1) 0.338 (2) 3.924 (3) 3.14159 (4) 3.1428

14. નીચેની સંખ્યાઓની 3 દશાંશ સ્થળ સુધી ચોક્કસ અંદાજિત કિંમત શોધો.

(1) $\frac{3}{4}$ (2) $2+\sqrt{2}$ (3) 1.7326 (4) 0.9999...

15. નીચેની સંખ્યાઓનું સાદુંરૂપ અસંમેય સંખ્યામાં આપો. પ્રથમ દાખલો ગણીને આપેલ છે.

(1) $12\sqrt{3}+5\sqrt{3}-7\sqrt{3}=\sqrt{3}[12+5-7]=10\sqrt{3}$

(2) $3\sqrt{2}-2\sqrt{8}+7\sqrt{2}$

(3) $3\sqrt{2}\times 2\sqrt{3}\times 5\sqrt{6}$

(4) $[(\sqrt{8}\times 3\sqrt{2})\times 6\sqrt{2}]\div 36\sqrt{2}$

તમારી પ્રગતિ ચકાસોના ઉત્તરો

1.1

1. પૂર્ણાંકો: 4, −36, −6

   સંમેય સંખ્યાઓ: $4,\frac{-3}{4},\frac{5}{6},-36,\frac{12}{7},\frac{-3}{8},\frac{15}{7},-6$

2. (1)

   (2) $-\frac{7}{4},-\frac{3}{7},-15,\frac{5}{17},-\frac{3}{4},-\frac{4}{3}$

   (3) $-\frac{7}{4},-\frac{3}{7},\frac{5}{17},-\frac{3}{4},-\frac{4}{3}$

   (4) બધી જ સંખ્યાઓ સંમેય સંખ્યાઓ છે.

$-\frac{7}{4},-\frac{3}{7},-15,0,3,\frac{5}{17},-\frac{3}{4},$ (1) $\frac{164}{33}$, સંમેય (2) $-\frac{1}{2}$, સંમેય (3) −21, પૂર્ણાંક અને સંમેય

(4) 0 (શૂન્ય) પૂર્ણ સંખઅયા, પૂર્ણાંક અને સંમેય (4) 4, પ્રાકૃતિક સંખ્યા, પૂર્ણ સંખ્યા, પૂર્ણાંક સંખઅયા અને સંમેય સંખ્યા (5) $\frac{10}{7}$,સંમેય (6) $\frac{8}{3}$, સંમેય

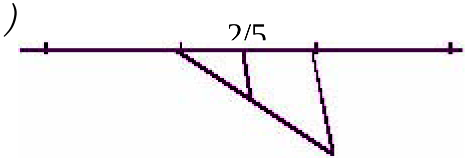
4. (1) 2 (2) −8 (3) 1

5. $\frac{5}{7},\frac{-6}{7},\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$

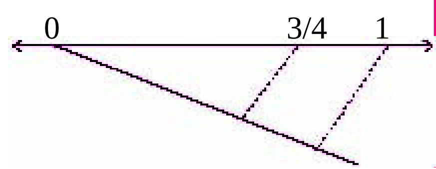
6. $-10,\frac{15}{5},\frac{27}{9},\frac{-6}{-2}$

7. (1) $\frac{2}{5}=\frac{4}{10}=\frac{6}{15}=\frac{8}{20}$ (2) $-\frac{5}{6}=-\frac{10}{12}=-\frac{15}{18}=-\frac{20}{24}$ (3) $\frac{17}{3}=\frac{34}{6}=\frac{51}{9}=\frac{68}{12}$

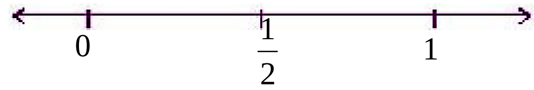
8. (1)



(2)



(3)



9. (અ) $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$ (બ) $\frac{7}{9} > \frac{3}{5}$ (ક) $\frac{-1}{2} > \frac{-2}{3}$ (ડ) (ઈ) $\frac{3}{2} > -\frac{7}{6}$

1.2

1. (1) $\frac{9}{7}$ (2) $-\frac{4}{15}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{1}{2}$

2. (1) $\frac{19}{6}$ (2) $\frac{188}{63}$ (3) $-\frac{11}{35}$

3. (1) $-\frac{53}{48}$ (2) $\frac{149}{60}$

4. (1) $\frac{2}{5}$ (2) -4 (3) $\frac{-3}{56}$

5. (1) (2) -1

6. (1) $\frac{5}{33}$ (2) $\frac{9}{35}$ (3) $\frac{9}{7}$

7. (1) 2 (2) $\frac{35}{16}$ (3) $-\frac{10}{3}$

8. (1) $\frac{1}{5}$ (2) 7

9. $\frac{29}{35}$

10. $\frac{3}{4}$

1.3

1. (1) 0.3875 (2) 0.48 (3) 1.5 (4) 6.25 (5) $1.\overline{4}$

2. (1) $0.\overline{6}$ (2) $0.\overline{714285}$ (3) $2.\overline{27}$

3. (અ) (1) $\frac{23}{10}$ (2) $-\frac{78}{25}$ (3) $-\frac{143}{200}$ (4) $\frac{4073}{500}$

(બ) (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{113}{33}$ (3) $-\frac{35}{111}$

1.4

1. (1) $\frac{25}{24}$ (2) 5.5 (3) $\frac{-5}{24}$

2. (1) 0.2 અને 0.3 (2) −0.30, −0.35

3. (1) 0.271, 0.275, 0, 281, 0.285, 0.291

(2) 7.315, 7.320 7.325, 7.330, 7.331

(3) 21.75, 22.75, 23.75, 24.75, 25.75

(4) 1.0011, 1.0012, 1.0013, 1.0014, 1.0015

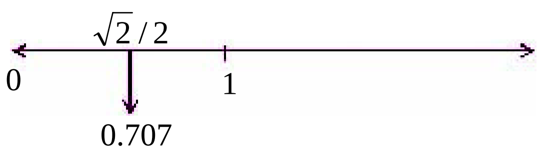
આના જેવા બીજા ઉત્તરો પણ હોઈ શકે.

$\sqrt{5}$

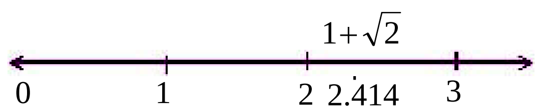
1.5

1. 1.414, 1.732, 2.236

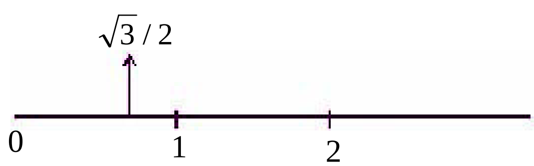
2. (1)



(2)



(3)



1.6

1. (1) (2) $\sqrt{3}+1$ (3) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

2. અનંત ઘણી

1.0001, 1.0002, ..., 1.0010, 1.0011,....., 1.0020, 1.0021, ...

1.7

1. (1) 0.778 (2) 7.326 (3) 1.012 (4) 3.143 (5) 1.141

સત્રાંત સ્વાધ્યાયના જવાબો

1. પ્રાકૃતિક 17,

પ્રાકૃત્રિક ન હોય તેવા પૂર્ણાંકો , −3, 0, −32

પ્રાકૃત્રિક ન હોય તેવી સંમેય સંખ્યાઓ $-3, \frac{6}{7}, \frac{-3}{8}, 0, -32, \frac{3}{14}, \frac{11}{6}$

સંમેય ન હોય તેવી અસંમેય સંખ્યાઓ $\sqrt{2}$, $2+\sqrt{3}$

2. (1) $-\frac{14}{1}$ (2) $\frac{13}{1}$ (3) $\frac{0}{1}$ (4) $\frac{2}{1}$

(5) $\frac{1}{1}$ (6) $\frac{-1}{1}$ (7)

3.

4. (1) 0.1375 (2) 0.32 (3) 1.75 (4) 2.5 (5) 2.8

(6) 2.142857 (7) $-1.\overline{166}$ (8) $10.\overline{45}$ (9) $-1.\overline{307692}$ (10) 3.5

5. (1) $\frac{12}{5}$ (2) $\frac{-8}{25}$ (3) (4) $\frac{107}{33}$ (5) $\frac{415}{999}$

6. (1) $\frac{13}{16}$ (2) −2.5 (3) 0 (શૂન્ય)

7. (1) 0.50, 0.25, 0.00 (2) 0.271, 0.274, 0.277

(3) 1.325. 1.33, 1.335

8. (1) R: −3.8 (2) S: −0.5 (3) O: 0.00 (4) P: 1

(5) Q: 3.5 (6) T: 7.6

9. (1) $-\frac{4}{5}$ (2) $-\frac{2}{9}$ (3) $\frac{44}{15}$ (4) $\frac{37}{15}$ (5) $\frac{59}{42}$

10. (1) $\frac{7}{5}$ (2) $\frac{38}{15}$ (3) -6

11. (1) $\sqrt{3}$ (2) $1+\sqrt{3}$ (3) $\sqrt{3}$ (4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

12. અનંત સંખ્યા

13. (1) 0.34 (2) 3.92 (3) 3.14 (4) 3.14

14. (1) 0.75 (2) 3.414 (3) 1.733 (4) 1.000

15. (1) $6\sqrt{2}$ (2) 180 (3) 2

2

ઘાતકી અને કરણી

બે તેથી વધુ વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર કેવી રીતે કરવો તે તમે અગાઉના પાઠમાં શીખી ગયા છો. તમે નીચેની (વિગતોને) સરળતાથી લખી શકશો.

$4 \times 4 \times 4 = 64, 11 \times 11 \times 11 \times 11 = 14641$ and

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$

(હવે) જ્યારે 13 *નો* 15 *વખત ગુણાકાર કરવાની પરિસ્થિતિમાં વિચાર કરો. તે લખવાનું કેટલું મુશ્કેલ છે ?*

$13 \times 13 \times 13 \times$................15 *વખત*

આ પ્રકરણમાં આપણો આ મુશ્કેલીનું નિવારણ ઘાતાંક સંકેત પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરીને આપણે તેનો અર્થ સમજીશું, ઘાતાંકના નિયમો લખીશું અને સાબિત કરીશું. આપણે ઘાતાંકના નિયમો કેવી રીતે વાપરવા તે શીખીશું. વાસ્તવિક સંખ્યાઓને મૂળ પૂર્ણાંકના ઘાતના ગુણાકાર સ્વરૂપે અભિવ્યક્ત કરીશું.

આ પ્રકરણના પછીના વિભાગમાં આપણે $a^{1/q}$ *સંખ્યાનો અર્થ* qth *નું* a *મૂળ તરીકે આપીશું. અમે તેમને કરણી, ઘાતાંક, મૂલાધાર વગેરેનો પરીચય કરાવીશું. ફરીથી આપણે કરણીના નિયમોની ચર્ચા કરીશુ અને કરણીનું સૌથી સાદું (લઘુત્તમ) સ્વરૂપ શોધીશું. આપણે કરણીનો સંમેયકારક અવઅવ અને આપેલ કરણીમાં છેદનો સંમેયકારક અવયવ શબ્દનો અર્થ શીખીશું.*

હેતુઓ

આ પાઠનો અભ્યસ કર્યા પછી તમે......

- *પુનરાવર્તિત ગુણાકારને ઘાતાંક સંકેત પદ્ધતિમાં અને ઘાતાંકને પુનરાવર્તિત ગુણાકાર સ્વરૂપે લખી શકાશો.*
- *ઘાતાંક સંકેત પદ્ધતિમાં લખેલી સંખ્યાઓ આધાર અને ઘાતાંક ઓળખી શકશો.*
- *પ્રાકૃત્તિક સંખ્યાને મૂળ પૂર્ણાંકના ઘાતના ગુણાકાર સ્વરૂપે અભિવ્યક્તિ કરી શકશે.*
- *ઘાતાંકના નિયમો જણાવી શકશો.*
- a^0, a^{-m} *અને* $a^{\frac{p}{q}}$ *નો અર્થ સમજાવી શકશો.*
- *ઘાતાંકના નિયમોનો ઉપયોગ કરીને ઘાતાંકમાં સમાયેલ અભિવ્યક્તિઓનો ઉપયોગ કરી શકાશો.*

- આપેલ અસંમેય સંખ્યાઓના ગણમાંથી કરણીને ઓળખી શકશો.
- કરણીના મૂલ્યાંક અને મૂલધાર ઓળખી શકશો.
- કરણીના નિયમો જણાવી શકશો.
- આપેલ કરણીને સરળતમ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકશો.
- સમરૂપ અને વિષમરૂપ કરણીનું વર્ગીકરણ કરી શકશો.
- જુદાજુદા ઘાત વાળી કરણીને એક જ ઘાતની કરણીમાં ફેરવી શકશો.
- કરણી ઉપરની ચાર મૂળભૂત પ્રક્રિયાઓ કરી શકશો.
- આપેલ કરણીને ચડતા ઉતરકા ક્રમમાં ગોઠવી શકાશે.
- આપણે કરણીનો સંકોચકારક અવયવ શોધી શકશો.
- $\frac{1}{a+b\sqrt{x}}$ અને $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$, સ્વરૂપની કરણીના છેદનું સંક્ષેપકરણ કરી શકાશે. (જ્યાં x અને y પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ અને a અને b પૂર્ણાંક છે.)
- કરણીવાળી અભિવ્યક્તિઓનું સાદું રૂપ આપી શકાશે.

અપેક્ષિત પૂર્વજ્ઞાન

- પ્રારંભિક સંખ્યાઓ.
- સંખ્યાઓ પરની ચાર મૂળભૂત પ્રક્રિયો.
- સંમેય સંખ્યાઓ.
- સંખ્યાઓમાં ક્રમિકતાનો સંબંધ

1.1 ઘાતાંક સંકેત પદ્ધતિ

નીચેના ગુણાકાર (વિશે) વિચારો.

(i) 7×7 (ii) $3 \times 3 \times 3$ (iii) $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6$

(1) માં બે વખત લઈને ગુણાકાર કરેલ છે તેથી તેને 7^2 એમ લખાય.

(2) માં 3 ને ત્રણ વખત લઈને તેમનો ગુણાકાર કરેલ છે તેથી તેને 3^3 એમ લખાય,

(3) 6 ને પાંચ વખત લઈ તેમનો ગુણાકાર કરવામાં આવ્યો છે તેથી તેને 6 એમ લખાય.

7^2 ને સાતનો બે ઘાત અથવા સાતનો વર્ગ એમ વંચાય અહીં સાતને આધાર અને 2 ને ઘાતાંક કહેવાય છે.

તેજ રીતે 3^3 ને ત્રણનો ત્રણ ઘાત અથવા ત્રણનો ઘન એમ વંચાય.

તેજ રીતે 6^5 ને છ નો પાંચઘાત (પંચઘાત) એમ વંચાય.

ઉપરનાં ઉદાહરણ પરથી આપણે કહીએ કે

સંખ્યાના તેજ સંખ્યાવડે વધારે વખતના ગુણાકારને લખવા માટેની સંકેત પદ્ધતિને ઘાતાંક સંકેત પદ્ધતિ અથવા ઘાતાંક સ્વરૂપ કહેવાય છે.

આમ, $5 \times 5 \times \ldots\ldots 20$ વખત $= 5^{20}$ અને $(-7) \times (-7) \ldots .$ 10 વખત $= (17)^{10}$

5^{20} માં 5 એ પાયો અને 20 એ ઘાતાંક છે.

$(-7)^{10}$ માં -7 એ પાયો અને10 એ ઘાતાંક છે.

તે જ રીતે સંમેય સંખ્યાને તેજ સંખ્યાવડે કેટલી વખત ગુણાકારના ચોક્કસ લેખન માટે ઘાતાંક સંકેત પદ્ધતિનો ઉપયોગ થઈ શકે છે. (કરી શકાય છે.)

આ પ્રમાણે, $\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \ldots\ldots .16$ અને $= \left(\frac{3}{5}\right)^{16}$

અને $\left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right) \times \ldots\ldots\ldots$ 10 અને $= \left(-\frac{1}{3}\right)^{10}$

સામાન્યતઃ જો a કોઈ સંમેય સંખ્યા હોય, તો axaxax........ m વખત $= a^m$; a ને આધાર અને m ને ઘાતાંક કહેવાય છે.

ઉપરની ચર્ચાને સ્પષ્ટ કરવા માટે કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ....

ઉદાહરણ : 2.1 નીચેના દરેકનું મૂલ્યાંકન કરો :

(i) $\left(\frac{2}{7}\right)^3$ (ii) $\left(-\frac{3}{5}\right)^4$

ઉકેલ : (i) $\left(\frac{2}{7}\right)^3 = \frac{2}{7} \times \frac{2}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{(2)^3}{(7)^3} = \frac{8}{343}$

(ii) $\left(-\frac{3}{5}\right)^4 = \left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{(-3)^4}{(5)^5} = \frac{81}{625}$

ઉદાહરણ : 2.2 નીચેના દરેકને ઘાતાંકમાં દર્શાવો.

(i) $(-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5)$

(ii) $\left(\frac{3}{11}\right) \times \left(\frac{3}{11}\right) \times \left(\frac{3}{11}\right) \times \left(\frac{3}{11}\right)$

ઉકેલ: (i) $(-5)\times(-5)\times(-5)\times(-5)\times(-5)\times(-5)\times(-5)=(-5)^7$

(ii) $\left(\frac{3}{11}\right)\times\left(\frac{3}{11}\right)\times\left(\frac{3}{11}\right)\times\left(\frac{3}{11}\right)=\left(\frac{3}{11}\right)^4$

ઉદાહરણ : 2.3 નીચેના દરેકને ઘાતાંક સંકેત પદ્ધતિમાં દર્શાવો અને દરેક કિસ્સામાં આધાર અને ઘાતાંક લખો.

(i) 4096 (ii) $\frac{125}{729}$ (iii) -512

ઉકેલ : (i) $4096 = 4\times4\times4\times4\times4\times4$

$= (4)^6$

અહીં પાયો $=4$ *અને ઘાતાંક* $=$ *છે.*

બીજી રીતે $4096 = (2)^{12}$

પાયો $=2$, *ઘાતાંક* $=12$

(ii) $\frac{125}{729} = \frac{5}{9}\times\frac{5}{9}\times\frac{5}{9} = \left(\frac{5}{9}\right)^3$

અહીં પાયો $=\left(\frac{5}{9}\right)$ *અને ઘાતાંક* $=3$

(iii) $512 = 2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2 = 2^9$

અહીં પાયો $=2$ *અને ઘાતાંક* $=9$

ઉદાહરણ : 2.4 નીચેનાનું સાદુ રૂપ આપો.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^3\times\left(\frac{4}{3}\right)^4$$

ઉકેલ : $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2} = \frac{3^3}{2^3}$

તે જ રીતે $\left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{4^4}{3^4}$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^3\times\left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{3^3}{2^3}\times\frac{4^4}{3^4}$$

$$= \frac{3^3}{8} \times \frac{16 \times 16}{3^4} = \frac{32}{3}$$

ઉદાહરણ : 2.5 નીચેના દરેકનો વ્યસ્ત શોધો અને તેમને ઘાતાંકના સ્વરૂપમાં લખો.

(i) 3^5 (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ (iii) $\left(-\frac{5}{6}\right)^9$

(i) $3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

$= 243$

3^5 **ની વ્યસ્ત** $\frac{1}{243} = \left(\frac{1}{3}\right)^5$

નોંધ : આપણે જાણીએ છીએ કે 3 સિવાય લખી શકાય.

3^5 *ની વ્યસ્ત સંખ્યા* $\left(\frac{1}{3}\right)^5$ *છે એમ વિવરણ કર્યા સિવાય લખી શકાય.*

(ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ *ની વ્યસ્ત સંખ્યા* $\left(\frac{4}{3}\right)^2$ *છે. (કારણ કે* $\frac{3}{4}$ *ની વ્યસ્ત* $\frac{4}{3}$ *છે.)*

(iii) $\left(-\frac{5}{6}\right)^9$ *ની વ્યસ્ત સંખ્યા* $\left(\frac{-6}{5}\right)^9$ *છે. (કારણ કે* $-\frac{5}{6}$ *ની વ્યસ્ત* $\frac{-6}{5}$ *છે.)*

ઉપરના ઉદાહરણ પરથી આપણે કહી શકીએ કે જો   એ કોઈ શૂન્ય સિવાયની સંમેય સંખ્યા હોય અને

m *એ કોઈ ધનપૂર્ણાંક હોય, તો* $\left(\frac{p}{q}\right)^m$ *ની વ્યસ્ત સંખ્યા* $\left(\frac{q}{p}\right)^m$ *છે.*

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 2.1

1. *નીચેના દરેકને ઘાતાંક સ્વરૂપમાં દર્શાવો.*

(i) $(-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7)$

(ii) $\left(\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right) \times \ldots$ 10 *વખત*

(iii) $\left(-\frac{5}{7}\right)\times\left(-\frac{5}{7}\right)\times\ldots$ 20 વખત

2. નીચેના દરેકનો પાયો અને ઘાતાંક દર્શાવો. (લખો)

(i) $(-3)^5$ (ii) $(7)^4$ (iii) $\left(-\frac{2}{11}\right)^8$

3. નીચેના દરેકનું મૂલ્યાંકન કરો. (નીચેના દરેકની કિંમત શોધો.)

(i) $\left(\frac{3}{7}\right)^4$ (ii) $\left(\frac{-2}{9}\right)^4$ (iii) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$

4. નીચેનાનું સાદુ રૂપ આપો.

(i) $\left(\frac{7}{3}\right)^5\times\left(\frac{3}{7}\right)^6$

(ii) $\left(-\frac{5}{6}\right)^2\div\left(-\frac{3}{5}\right)^2$

5. નીચેના દરેકનો વ્યસ્ત શોધો.

(i) 3^5 (ii) $(-7)^4$ (iii) $\left(-\frac{3}{5}\right)^4$

2.2 અવિભાજ્ય અવયવીકરણ

યાદ કરો કે કોઈ પણ (સંયુક્ત) વિભાજ્ય સંખ્યાને બે અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણાકાર તરીકે અભિવ્યક્ત કરી શકાય. આપણે વિભાજ્ય સંખ્યાઓ 72,760 અને 7623 લઈએ.

(i) $72 = 2\times2\times2\times3\times3$

$= 2^3\times3^2$

(ii) $760 = 2\times2\times2\times5\times19$

$= 2^3\times5^1\times19^1$

(iii) $7623 = 3\times3\times7\times11\times11$

$= 3^2\times7^1\times11^2$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 72 \\ 2 & 36 \\ 2 & 18 \\ 3 & 9 \\ & 3 \end{array}\qquad \begin{array}{r|l} 3 & 7623 \\ 3 & 2541 \\ 7 & 847 \\ 11 & 121 \\ & 11 \end{array}\qquad \begin{array}{r|l} 2 & 760 \\ 2 & 380 \\ 2 & 190 \\ 5 & 95 \\ & 19 \end{array}$$

યાદ કરો કે 1 સિવાયની કોઈપણ પ્રાકૃત્તિક સંખ્યા અનન્ય રીતે અવયવોના ક્રમને અવગણીને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ઘાતાંકોના ગુણનફળ તરીકે અભિવ્યક્ત કરી શકાય.

આપણે કેટલાક ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 2.6 : 24300 ને ઘાતાંકીય સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

ઉકેલ : $24300 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$

:- $24300 = 2^2 \times 3^5 \times 5^2$

ઉદાહરણ 2.7 : 98784 ને ઘાતાંકિય સ્વરૂપમાં જણાવો.

ઉકેલ :

2	98784
2	49392
2	24696
2	12348
2	6174
3	3087
3	1029
7	343
7	49
	7

$\therefore\ 98784 = 2^5 \times 3^2 \times 7^3$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 2.2

1. *નીચેનાની મૂળ સંખ્યાના ઘાતના ગુણાકાર સ્વરૂપે દર્શાવો.*

   (i) 429 (ii) 648 (iii) 1512

2. *નીચેના દરેકને ઘાતાંક સ્વરૂપે દર્શાવો.*

   (i) 729 (ii) 512 (iii) 2592

   (iv) $\frac{1331}{4096}$ (v) $-\frac{243}{32}$

2.3 ઘાતાંકના નિયમો.

નીચેનાનો અભ્યાસ કરો.

(i) $3^2 \times 3^3 = (3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3) = (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)$

$= 3^5 = 3^{2+3}$

(ii) $(-7)^2 \times (-7)^4 = [(-7) \times (-7)] \times [(-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7)]$

$= [(-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7)]$

$= (-7)^6 = (-7)^{2+4}$

(iii) $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \left(\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}\right)$

$= \left(\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}\right)$

$= \left(\frac{3}{4}\right)^7 = \left(\frac{3}{4}\right)^{3+4}$

(iv) $a^3 \times a^4 = (a \times a \times a) \times (a \times a \times a \times a) = a^7 = a^{3+4}$

ઉપરનાં ઉદાહરણો પરથી આપણે જોઈએ છીએ કે

નિયમ 1 : *જો a કોઈ સંમેય સંખ્યા હોય અને m અને n બે ઘન પૂર્ણાંક હોય , તો*

$a^m \times a^n = a^{m+n}$

ઉદાહરણ 2.8 : $\left(-\frac{3}{2}\right)^3 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^5$ *ની કિંમત શોધો.*

અત્રે $= -\frac{3}{2}$, $m = 3$ અને $n = 5$.

$\therefore \left(-\frac{3}{2}\right)^3 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^5 = \left(-\frac{3}{2}\right)^{3+5} = \left(-\frac{3}{2}\right)^8 = \frac{6561}{256}$

ઉદાહરણ 2.9 : $\left(\frac{7}{4}\right)^2 \times \left(\frac{7}{4}\right)^3$ **ની કિંમત શોધો.**

ઉકેલ : આગળની માફક

$$\left(\frac{7}{4}\right)^2 \times \left(\frac{7}{4}\right)^3 = \left(\frac{7}{4}\right)^{2+3} = \left(\frac{7}{4}\right)^5 = \frac{16807}{1024}$$

હવે નીચેનાનો અભ્યાસ કરો.

(i) $7^5 \div 7^3 = \dfrac{7^5}{7^3} = \dfrac{7\times7\times7\times7\times7}{7\times7\times7} = 7\times7 = 7^2 = 7^{5-3}$

(ii) $(-3)^7 \div (-3)^4 = \dfrac{(-3)^7}{(-3)^4} = \dfrac{(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)}{(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)}$

$$= (-3)(-3)(-3) = (-3)^3 = (-3)^{7-4}$$

ઉપર પ્રમાણે આપણે માનીએ છીએ કે

નિયમ - 2 જો n **કોઈ શૂન્યેતર સંખ્યા હોય,** m **અને** n **ઘનપૂર્ણાંક હોય. (જ્યાં** $m > n$**), તો**

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

ઉદાહરણ 2.10 : .

ઉકેલ : $\left(\dfrac{35}{25}\right)^{16} \div \left(\dfrac{35}{25}\right)^{13}$

$$= \left(\frac{35}{25}\right)^{16-13} = \left(\frac{35}{25}\right)^{3} = \left(\frac{7}{5}\right)^{3} = \frac{343}{125}$$

નિયમ : 2, *માં* $m < n$ $n > m$,

તો,

નિયમ : જો a **કોઈ શૂન્યેતર સંખ્યા હોય,** m **અને** n **ઘનપૂર્ણાંક હોય તથા** m< n **અથવા** n > m

હોય તો $a^m \div a^n = \dfrac{1}{a^{m-n}}$

ઉદાહરણ 2.11 : $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{6} \div \left(\dfrac{3}{7}\right)^{9}$

અહીં $a = \dfrac{3}{7}$, $m = 6$ *અને* $n = 9$.

$$\therefore\ \left(\frac{3}{7}\right)^{6} \div \left(\frac{3}{7}\right)^{9} = \left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{1}{9-6}}$$

$$= \frac{7^3}{3^3} = \frac{343}{27}$$

નીચેનાનો અભ્યાસ કરો.

(i) $\left(3^3\right)^2 = 3^3 \times 3^3 = 3^{3+3} = 3^6 = 3^{3\times 2}$

(ii) $\left[\left(\frac{3}{7}\right)^2\right]^5 = \left(\frac{3}{7}\right)^2 \times \left(\frac{3}{7}\right)^2 \times \left(\frac{3}{7}\right)^2 \times \left(\frac{3}{7}\right)^2 \times \left(\frac{3}{7}\right)^2$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{2+2+2+2+2} = \left(\frac{3}{7}\right)^{10} = \left(\frac{3}{7}\right)^{2\times 5}$$

ઉપરના બે ઉદાહરણો પરથી આપણે નીચે પ્રમાણે તારવણી કરી શકીએ.

નિયમ : 4 જો a કોઈ સંમેય સંખ્યા હોય, m અને n ઘનપૂર્ણાંક હોય તો

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$$

આપણે એક ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ : 2.12 $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^2\right]^3$ **ની કિંમત શોધો.**

ઉકેલ : $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^2\right]^3 = \left[\frac{2}{5}\right]^{2\times 3} = \left(\frac{2}{5}\right)^6 = \frac{64}{15625}$

2.3.1 શૂન્યઘાતાંક

યાદ કરો કે $a^m \div a^n = a^{m-n}$, *(જો $m > n$)*

$$= \frac{1}{a^{n-m}},\ (\text{જો } n > m)$$

જ્યારે $(m = n)$ હોય ત્યારે આ વિગતને વિચારીએ.

$$\therefore\ a^m \div a^m = a^{m-m}$$

$$\Rightarrow \frac{a^m}{a^m} = a^0$$

$$\Rightarrow 1 = a^0$$

આમ આપણને એક અગત્યનો બીજો નિયમ પ્રાપ્ત થશે.

નિયમ-5 : જો a શૂન્ય સિવાયની કોઈ સંખ્યા હોય, તો $a^0 = 1$

ઉદાહરણ 2.13 : નીચેનાની કિંમત શોધો.

(i) $\left(\frac{2}{7}\right)^0$ (ii) $\left(\frac{-3}{4}\right)^0$

ઉકેલ : (i) $a^0 = 1$, *આ નિયમનો ઉપયોગ કરીએ તો* $\left(\frac{2}{7}\right)^0 = 1$

(ii) *ફરીથી* $a^0 = 1$, *ઉપયોગ કરીને,* $\left(\frac{-3}{4}\right)^0 = 1$ *મળે.*

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 2.3

1. *સાદુંરૂપ આપો અને પરિણામને ઘાતાંક સ્વરૂપે દર્શાવો.*

(i) $(7)^2 \times (7)^3$ (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$ (iii) $\left(-\frac{7}{8}\right)^1 \times \left(-\frac{7}{8}\right)^2 \times \left(-\frac{7}{8}\right)^3$

2. *સાદુંરૂપ આપો અને પરિણામને ઘાતાંક સ્વરૂપે દર્શાવો.*

(i) $(-7)^9 \div (-7)^7$ (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^8 \div \left(\frac{3}{4}\right)^2$ (iii) $\left(\frac{-7}{3}\right)^{18} \div \left(\frac{-7}{3}\right)^3$

3. *સાદુંરૂપ આપો અને પરિણામને ઘાતાંક સ્વરૂપે દર્શાવો.*

(i) $(2^6)^3$ (ii) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^3\right]^2$ (iii) $\left[\left(-\frac{5}{9}\right)^3\right]^5$

(iv) $\left(\frac{11}{3}\right)^5 \times \left(\frac{15}{7}\right)^0$ (v) $\left(-\frac{7}{11}\right)^0 \times \left(-\frac{7}{11}\right)^3$

4. *નીચેનાં પૈકી ક્યાં વિધાન સાચાં છે ?*

(i) $7^3 \times 7^3 = 7^6$ (ii) $\left(\frac{3}{11}\right)^5 \times \left(\frac{3}{11}\right)^2 = \left(\frac{3}{11}\right)^7$

(iii) $\left[\left(\frac{4}{9}\right)^5\right]^4 = \left(\frac{4}{9}\right)^9$ (iv) $\left[\left(\frac{3}{19}\right)^6\right]^2 = \left(\frac{3}{19}\right)^8$

(v) $\left(\frac{3}{11}\right)^0 = 0$ (vi) $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{9}{4}$

(vii) $\left(\frac{8}{15}\right)^5 \times \left(\frac{7}{6}\right)^0 = \left(\frac{8}{15}\right)^5$

2.4 ઘાતાંક તરીકે ઋણ પૂર્ણાંક

1. આપણે જાણીએ છીએ કે 5 નો વ્યસ્ત $\frac{1}{5}$ છે. આપણે તેને 5^{-1} તરીકે લખીએ છીએ અને 5 નો (-1) ઘાત એમ વાંચીએ છીએ.

2. (-7) નો વ્યસ્ત $-\frac{1}{7}$ છે. આપણે તેને $(-7)^{-1}$ ઘાત એમ લખીએ છીએ અને (-7) નો (-1) ઘાત એમ વંચાય.

3. 5^2 નો વ્યસ્ત $\frac{1}{5^2}$ છે. આપણે તેને 5^{-2} એમ લખીએ છીએ અને (5) નો (-2) ઘાત એમ વાંચીએ છીએ.

   ઉપરોક્ત પરથી ફલીત થાય છે કે જો a કોઈ શૂન્યેતર સંમેય સંખ્યા હોય અને m કોઈ પૂર્ણાંક હોય, તે a^m નો વ્યસ્ત $\frac{1}{m}$ ને a^{-m} એમ લખાય અને a નો (-m) ઘાત એમ વંચાય.

$$\boxed{\therefore\ \frac{1}{a^m} = a^{-m}}$$

આપણે એક ઉદાહરણ વિશે વિચારીએ.

ઉદાહરણ 2.4 : નીચેના દરેકને ધન પૂર્ણાંક સાથે (ધન ઘાતાંકમાં ફેરવી) ફરીથી લખો.

(i) $\left(\frac{3}{8}\right)^{-2}$ (ii) $\left(-\frac{4}{7}\right)^{-7}$

ઉકેલ :

$$\text{(i)}\ \left(\frac{3}{8}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{8}\right)^{2}} = \frac{1}{\frac{3^2}{8^2}} = \frac{8^2}{3^2} = \left(\frac{8}{3}\right)^{2}$$

$$\text{(ii)}\ \left(-\frac{4}{7}\right)^{-7} = \frac{1}{\left(-\frac{4}{7}\right)^{7}} = \frac{7^7}{(-4)^7} = \left(-\frac{7}{4}\right)^{7}$$

ઉપરના ઉદાહરણ પરથી આપણને નીચેનું પરિણામ મળે છે.

જો $\frac{p}{q}$ કોઈ શૂન્યેતર સંખ્યા હોય અને m કોઈ ઘન પૂર્ણાંક હોય, તો $\left(\frac{p}{q}\right)^{-m} = \frac{q^m}{p^m} = \left(\frac{q}{p}\right)^{m}$.

2.5 પૂર્ણાંક ઘાતાંકો માટે ઘાતાંકોના નિયમ.

ઋણ પૂર્ણાંકોને શૂન્યેતર સંમેય સંખ્યાના ઘાતાંક તરીકે અર્થ નિશ્ચિત કર્યા બાદ આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે ઘાતાંકોના નિયમો ઋણ ઘાતાંકને પણ લાગુ પડે છે.

$$\text{(i)}\ \left(\frac{3}{5}\right)^{-4} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{3} = \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^{4}} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{3} = \frac{3}{5}^{3-4}$$

$$\text{(ii)}\ \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^{2}} \times \frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^{3}} = \frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^{2+3}} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2-3}$$

$$\text{(iii)}\ \left(-\frac{3}{4}\right)^{-3} \div \left(-\frac{3}{4}\right)^{-7} = \frac{1}{\left(-\frac{3}{4}\right)^{3}} \div \frac{1}{\left(-\frac{3}{4}\right)^{7}} = \frac{1}{\left(-\frac{3}{4}\right)^{3}} \times \left(-\frac{3}{4}\right)^{7} = \left(-\frac{3}{4}\right)^{7-3}$$

$$\text{(iv)}\ \left(\left(\frac{2}{7}\right)^{-2}\right)^{3} = \left[\left(\frac{7}{2}\right)^{2}\right]^{3} = \left(\frac{7}{2}\right)^{6} = \left(\frac{2}{7}\right)^{-6} = \left(\frac{2}{7}\right)^{-2\times 3}$$

ઉપરોક્ત ઉદાહરણો પરથી આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે નિયમો 1 થી 5 ઋણ ઘાતાંકોને પણ સરખા લાગુ પડે છે.

જો a અને b શૂન્યેતર સંમેય સંખ્યાઓ હોય, અને m અને n કોઈ પૂર્ણાંક હોય, તો

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$
2. $a^m \div a^n = a^{m-n}$ if $m > n$

   $= a^{n-m}$ if $n > m$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$
4. $(a \times b)^m = a^m \times b^m$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 2.4

1. $\left(\frac{-3}{7}\right)^{-2}$ સંમેય સંખ્યા તરીકે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

2. સંમેય સંખ્યાના ઘાત તરીકે ધન ઘનાંક સ્વરૂપે અભિવ્યક્ત કરો.

   (i) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-4}$ (ii) $12^5 \times 12^{-3}$ (iii) $\left[\left(\frac{3}{13}\right)^{-3}\right]^{4}$

3. સંમેય સંખ્યાના ઘાત તરીકે ઋણ ઘનાંક સ્વરૂપે અભિવ્યક્ત કરો.

   (i) $\left(\frac{3}{7}\right)^{4}$ (ii) $\left[(7)^2\right]^5$ (iii) $\left[\left(-\frac{3}{4}\right)^{2}\right]^{5}$

4. સાદુ રૂપ આપો.

   (i) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{7}$ (ii) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^{4}$ (iii) $\left(-\frac{7}{5}\right)^{-4} \div \left(-\frac{7}{5}\right)^{-7}$

5. નીચેના પૈકી કયા વિધાન સાચા છે ?

   (i) $a^{-m} \times a^n = a^{-m-n}$

   (ii) $(a^{-m})^n = a^{-mn}$

   (iii) $a^m \times b^m = (ab)^m$

   (iv) $a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

(v) $a^{-m} \times a^{o} = a^{m}$

2.6 $a^{p/q}$ નો અર્થ.

આપણે જાણીએ છીએ કે m અને n ની તમામ પૂર્ણાંક કિંમત માટે.

$$a^{m} \times a^{n} = a^{m+n}$$

જો a ધન સંમેય સંખ્યા હોય અને q પ્રાકૃત્તિક સંખ્યા હોય, તો

$a^{1/q}$, ની વ્યાખ્યા કરવા માટેની પદ્ધતિ કઈ ?

ને q વારના ગુણાકાર વિશે વિચારો.

અર્થાત્, $a^{\frac{1}{q}} \times a^{\frac{1}{q}} \times a^{\frac{1}{q}} \ldots\ldots\ldots \times a^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{1}{q}+\frac{1}{q}+\frac{1}{q}+\ldots\ldots q \text{ વખત}}$

q વાર

$$= a^{\frac{q}{q}} = a$$

બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો $a^{\frac{1}{q}}$ નો q ઘાત $= a$ અથવા

બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો $a^{\frac{1}{q}}$ એ a નું q મૂળ છે અને તે $\sqrt[q]{a}$ એમ લખાય.

ઉદાહરણ તરકે,

$$7^{\frac{1}{4}} \times 7^{\frac{1}{4}} \times 7^{\frac{1}{4}} \times 7^{\frac{1}{4}} = 7^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = 7^{\frac{4}{4}} = 7^{1} = 7$$

અથવા $7^{\frac{1}{4}}$ એ 7 ચતુર્થ મૂળ છે. અને તે $\sqrt[4]{7}$, આમ લખાય.

હવે આપણે a ના સંમેયઘાતની વ્યાખ્યા કરીએ.

જો a ધન વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, q પૂર્ણાંક હોય અને a પ્રાકૃત્તિક સંખ્યા હોય, તો $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^{p}}$

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે

$$a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} \ldots\ldots\ldots \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\ldots\ldots q \text{ વખત}} = a^{\frac{p}{q}.q} = a^{p}$$

q વખત

$$\therefore a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^{p}}$$

$a^{p/q}$ એ a^q નું q મૂળ છે.

આમ, $7^{\frac{2}{3}}$ એ 7^2 નું ઘનમૂળ છે.

નોંધ : (આપણે જોઈએ છીએ કે ઘાતાંક સંમેય સંખ્યા હોય, તો તેનો અંશ ઘાતાંક દર્શાવે છે અને તેનો છેદ મૂળ દર્શાવે છે. એટલે $7^{\frac{2}{3}}$ એ 7^2 નું ઘનમૂળ કહેવાય.)

(i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(ii) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

(iii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iv) $(ab)^m = a^m b^m$

(v) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

ઉપરના નિયમો ચકાસવા માટે કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 2.15 નીચેનામું મુલ્ય શોધો.

(i) $(625)^{\frac{1}{4}}$ (ii) $(243)^{\frac{2}{5}}$ (iii) $\left(\frac{16}{81}\right)^{-3/4}$

ઉકેલ :

(i) $(625)^{\frac{1}{4}} = (5\times5\times5\times5)^{\frac{1}{4}} = \left(5^4\right)^{\frac{1}{4}} = 5^{4\times\frac{1}{4}} = 5$

(ii) $(243)^{\frac{2}{5}} = (3\times3\times3\times3\times3)^{\frac{2}{5}} = \left(3^5\right)^{\frac{2}{5}} = 3^{5\times\frac{2}{5}} = 3^2 = 9$

(iii) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{-3}{4}} = \left(\frac{2\times2\times2\times2}{3\times3\times3\times3}\right)^{\frac{-3}{4}}$

$$= \left[\left(\frac{2}{3}\right)^4\right]^{\frac{-3}{4}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4\times\left(\frac{-3}{4}\right)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$$

તમારી પ્રગતિ ચકાશો 2.5

1. *નીચેના દરેકનું સાદુરૂપ આપો.*

(i) $(16)^{3/4}$ (ii) $\left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}$

2. નીચેના દરેકનું સાદુરૂપ આપો,

(i) $(625)^{-\frac{1}{4}} \div (25)^{-\frac{1}{2}}$

(ii) $\left(\frac{7}{8}\right)^{-\frac{1}{4}} \times \left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{3}{4}}$

(iii) $\left(\frac{13}{16}\right)^{-\frac{3}{4}} \times \left(\frac{13}{16}\right)^{\frac{1}{4}} \times \left(\frac{13}{16}\right)^{\frac{3}{2}}$

2.7 કરણી

તમે પાઠ 1 માં શીખ ગયા કે, $\sqrt{૨}$, $\sqrt{૩}$, $\sqrt{૫}$..... અસંમેય સંખ્યાઓ છે હવે આપણે વિશિષ્ટ પ્રકાની અસંમેય સંખ્યાઓ જે કરણી કહેવાય છે તે વિશે શીખીશું.

વ્યાખ્યા :

કરણી $\sqrt[n]{x}$,પ્રકાની ઘન અસંમેય સંખ્યા છે, જ્યાં x એ ઘન સંમેય સંખ્યા છે અને x નું n મૂળ ચોક્કસ રીતે શોધી શકતું નથી. આ રીતે કરણીની વ્યાખ્યા કરવામાં આવી છે. જે $\sqrt[n]{x}$ એ -

(અ) અસંમેય સંખ્યા હોય

(બ) ઘન સંમેય સંખ્યાનું મૂળ હોય છે.

તો અને તો જ $\sqrt[n]{x}$ એ કરણી છે.

2.7.1 કેટલાક પારિવારિક શબ્દો :

$\sqrt[n]{x}$ કરણીમાં સંકેત $\sqrt{\ }$ કરણી ચિહ્ન કહેવાય છે. મૂલ્યાંક 'n' કરણઈ ઘાત કહેવાય છે અને 'x' ને મૂલાધાર કહેવાય છે.

નોંધ : 1. જ્યારે કરણીનો ઘાત દર્શાવ્યો ન હોય, ત્યારે તે 2 લેવામાં આવે છે.દા.તા. $\sqrt{7}$ નો કરણી ઘાત 2 છે $(\sqrt{7} = \sqrt[2]{7})$ 2 છે.

2. $\sqrt[3]{8}$ એ કરણી નથી કારણ કે તેની કિંમત (તેનુ મુલ્ય) 2 નક્કી કરી શકાય છે જે સંમેય છે.

3. $\sqrt{2+\sqrt{2}}$,એ અસંમેય સંખ્યા છે છતાં કરણીપરથી કારણ કે તે અસંમેય સંખ્યાનું વર્ગમૂળ છે.

2.8 શુદ્ધ અને મિશ્ર કરણી

1. કરણી કે જેનો એક અવયવ માત્ર સંમેય સંખ્યા 1 હોય દાખલા તરીકે, $\sqrt[5]{16}$ અને $\sqrt[3]{50}$ એ શુદ્ધ કરણી છે.

2. કરણી કે જેનો અસંમેય અવયવ સાથે 1 સિવાયનો સંમેય અવયવ હોય, તેને મિશ્ર કરણી કહે છે.

   દાખલા તરીકે $2\sqrt{3}$ અન $3\sqrt[3]{7}$ મિશ્ર કરણી છે.

2.9 કરણીનો ક્રમ

કરણી $5\sqrt[3]{4}$, માં 5 ને કરણીનો સહ ગુણાંક કહેવામાં આવે છે. 3 એ કરણીનો મૂલાંક અને 4 એ મૂલાધાર છે.

આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 2.16 : નીચેનામાંથી કઈ (સંખ્યાને) કરણી છે ?

(i) $\sqrt{49}$ (ii) $\sqrt{96}$ (iii) $\sqrt[3]{81}$ (iv) $\sqrt[3]{256}$

ઉકેલ : (i) $\sqrt{49} = 7$, જે સંમેય સંખ્યા છે.

$\therefore$ $\sqrt{49}$ એ કરણી નથી.

(ii) $\sqrt{96} = \sqrt{4\times4\times6} = 4\sqrt{6}$

$\therefore$ $\sqrt{96}$ જે અસંમેય સંખ્યા છે.

$\sqrt{96}$ એ કરણી છે.

(iii) $\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3\times3\times3\times3} = 3\sqrt[3]{3}$, જે અસંમેય સંખ્યા છે.

$\therefore$ $\sqrt[3]{81}$ એ કરણી છે.

(iv) $\sqrt[3]{256} = \sqrt[3]{4\times4\times4\times4} = 4\sqrt[3]{4}$ જે અસંમેય સંખ્યા છે.

$\sqrt[3]{256}$ એ કરણી છે.

$\therefore$ (ii), (iii) અને (iv) કરણીઓ છે.

ઉદાહરણ : નીચેની દરેક કરણીનો મૂલાંક અને મૂલધાર ઓળખવો.

(i) $\sqrt[5]{117}$ (ii) $\sqrt{162}$ (iii) $\sqrt[4]{213}$ (iv) $\sqrt[4]{214}$

ઉકેલ :1. મૂલાંક 5 અને મૂલાધાર 117

2. મૂલાંક 2 અને મૂલાધાર 162

3. મૂલાંક 4 અને મૂલાધાર 213

4. મૂલાંક 4 અને મૂલાધાર 241

ઉદાહરણ 2.18 નીચેનામાંથી શુદ્ધ અને મિશ્ર કરણી ઓળખાવો.

(i) $\sqrt{42}$ (ii) $4\sqrt[3]{18}$ (iii) $2\sqrt[4]{98}$

ઉકેલ : *(1)* $\sqrt{42}$ *એ શુદ્ધ કરણી છે.*

(2) $4\sqrt[3]{18}$ *મિશ્ર કરણી છે.*

(3) $2\sqrt[4]{98}$ *એ મિશ્ર કરણી છે.*

2.10 કરણીનો નિયમો :

કરણીના (સાબિતી સિવાયના) નીચે પ્રમાણે છે.

(i) $\left[\sqrt[n]{a}\right]^n = a$

(ii) $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

(iii) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

જ્યાં a અને b ઘન સંમેય સંખ્યાઓ છે અને n એ ઘન પૂર્ણાંક છે.

આથી સમજ માટે કેટલાંક ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ : 2.19 કરણીના નિયમોનો ઉપયોગ કરીને નીચેના પૈકી કઈ કરણી છે અને કઈ નથી તે શોધો.

(i) $\sqrt{5}\times\sqrt{80}$ (ii) $2\sqrt{15}\div4\sqrt{10}$

(iii) $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{16}$ (iÃk) $\sqrt{32}\div\sqrt{27}$

ઉકેલ : (i) $\sqrt{5}\times\sqrt{80} = \sqrt{5\times80} = \sqrt{400} = 20\cdot$

જે સંમેય સંખ્યા છે.

\ $\sqrt{5}\times\sqrt{80}$ એ કરણી નથી.

(ii) $2\sqrt{15}\div4\sqrt{10}=\dfrac{2\sqrt{15}}{4\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{15}}{2\sqrt{10}}$

$=\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{2\times2\times10}}=\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{40}}=\sqrt{\dfrac{3}{8}}$, જે અસંમેય સંખ્યા છે.

\ $2\sqrt{15}\div4\sqrt{10}$ એ કરણી છે.

(iii) $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{64}=4\Rightarrow$ એ કરણી નથી. (કારણ કે અસંમેય છે.)

(iv) $\sqrt{32}\div\sqrt{27}=\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{27}}=\sqrt{\dfrac{32}{27}}$, જે અસંમેય સંખ્યા છે.

\ $\sqrt{32}\div\sqrt{27}$ એ કરણી છે.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 2.6

1. નીચેના દરેક માટે મૂલાંક અને મૂલાધાર લખો.

   (i) $\sqrt[4]{64}$ (ii) $\sqrt[6]{343}$ (iii) $\sqrt{119}$

2. નીચેના પૈકી કઈ કરણી છે તે જણાવો.

   (i) $\sqrt[3]{64}$ (ii) $\sqrt[4]{625}$ (iii) $\sqrt[6]{216}$

   (iv) $\sqrt{5}\times\sqrt{45}$ (v) $3\sqrt{2}\times5\sqrt{6}$

3. નીચેનામાંથી શુદ્ધ અને મિશ્ર કરણી ઓળખાવો.

   (i) $\sqrt{32}$ (ii) $2\sqrt[3]{12}$ (iii) $13\sqrt[3]{91}$ (iv) $\sqrt{35}$

2.11 કરણીના નિયમો :

યાદ કરો કે કરણી અપૂર્ણાંક ઘાતાંકવાળી સંખ્યાઓ તરીકે અભિવ્યક્ત કરી શકાય છે (દર્શાવી શકાય છે.) અગાઉ આ પાઠમાં શીખેલા ઘાતાંકના નિયમો પણ તેમને લાગુ પડે છે. આપણે આ નિયમોને ફરીથી યાદ કરીએ.

(i) $\sqrt[n]{x}\,.\,\sqrt[n]{y}=\sqrt[n]{xy}$ અથવા $x^{\frac{1}{n}}.y^{\frac{1}{n}}=(xy)^{\frac{1}{n}}$

(ii) $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$ અથવા $\dfrac{x^{\frac{1}{n}}}{y^{\frac{1}{n}}} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{1}{n}}$

(iii) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}$ અથવા $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{1}{mn}} = \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}$

(iv) $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ અથવા $\left(x^m\right)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{m}{n}}$

(v) $\sqrt[n]{x^p} = \sqrt[mn]{x^{pn}}$ અથવા $\left(x^p\right)^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{p}{m}} = x^{\frac{pn}{mn}} = \left(x^{pn}\right)^{\frac{1}{mn}}$

અહીં x અને y ધનપૂર્ણાંક સંખ્યાઓ છે અને $m, n,$ અને p એ ધન પૂર્ણાંકો છે.

આપણે આ નિયમોનો ઉદાહરણ દ્વારા સ્પષ્ટ કરીએ.

(i) $\sqrt[3]{3}\ \sqrt[3]{8} = 3^{\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{1}{3}} = (24)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{3\times 8}$

(ii) $\dfrac{(5)^{\frac{1}{3}}}{(9)^{\frac{1}{3}}} = \left(\dfrac{5}{9}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{5}{9}}$

(iii) $\sqrt[3]{\sqrt[2]{7}} = \sqrt[3]{7^{\frac{1}{2}}} = \left(7^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{7} = \sqrt[2\times 3]{7} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{7}}$

(iv) $\sqrt[5]{4^3} = \left(4^3\right)^{\frac{1}{5}} = 4^{\frac{3}{5}} = 4^{\frac{9}{15}} = \sqrt[15]{4^9} = \sqrt[3\times 5]{4^{3\times 3}}$

આમ આપણે જોઈએ છીએ કે કરણીના ન્યમોની ચકાસણી થઈ જાય છે.

અગત્યના મુદ્દા :

કરણીનો ઘાત કરણીના મૂલાંક અને મૂલાધારના મૂલાંકને એક સરખી ધનપૂર્ણાંક સંખ્યા વડે ગુણવાથી બદલી શકાય છે,

$\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{4}$

અને $\sqrt[4]{3} = \sqrt[8]{3^2} = \sqrt[8]{9}$

2.12 સમરૂપ (અથવા સમાન) કરણી.

બે કરણીઓને તેમના સહગુણાંકોને ધ્યાનમાં લીધા સિવાય જો તેમને સમાન અસંમેય અવયવમાં પરિવર્તન કરી શકાય (ફેરવી શકાય) તો તે બે કરણી સમરૂપ અથવા સમાન છે એમ કહેવાય.

દાખલા તરીકે, $3\sqrt{5}$ *અને* $7\sqrt{5}$ *સમરૂપ કરણી છે. ફરીથી વિચારો* $\sqrt{75}=5\sqrt{3}$ *અને* $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ *હવે* $\sqrt{75}$ *અને* $\sqrt{12}$ *ને* $5\sqrt{3}$ *અને* $2\sqrt{3}$ *ની જેમ દર્શાવ્યા છે આમ તેઓ સમરૂપ કરણી છે.*

2.13 કરણીનું સરળતમ (અથવા સંક્ષિપ્ત) સ્વરૂપ :

કરણી એના સરળતમ સ્વરૂપમાં છએ તેમ કહેવાય, જો તે

અ. કરણીનો મૂલાંક શક્ય તેટલો લઘુત્તમ હોય,

બ. કરણી ચિહ્ન નીચે કોઈ અપૂર્ણાંક ન હોય,

ક. a^n *સ્વરૂપનો કોઈ અવયવ ન હોય જ્યાં* a *ધનપૂર્ણાંક હોય અને* n *મૂલકના કરણી ચિહ્નની નીચે હોય,*

ઉદાહરણ તરીકે , $\sqrt[3]{\dfrac{125}{18}}=\sqrt[3]{\dfrac{125\times 12}{18\times 12}}=\dfrac{5}{6}\sqrt[3]{12}$

ઉદાહરણ 2.10 નીચેના દરેકને અતિસંક્ષિપ્તરૂપની શુદ્ધ કરણીમાં દર્શાવો.

(i) $2\sqrt{7}$ (ii) $4\sqrt[4]{7}$ (iii) $\dfrac{3}{4}\sqrt{32}$

ઉકેલ :

(i) $2\sqrt{7}=\sqrt{2^2\times 7}=\sqrt{4\times 7}=\sqrt{28}$, *જે શુધ્ધ કરણી છે.*

(ii) $4\sqrt[4]{7}=\sqrt[4]{4^4\times 7}=\sqrt[4]{256\times 7}=\sqrt[4]{1792}$, *જે શુધ્ધ કરણી છે.*

(iii) $\dfrac{3}{4}\sqrt{32}=\sqrt{32\times\dfrac{9}{16}}=\sqrt{18}$, *જે શુધ્ધ કરણી છે.*

ઉદાહરણ 2.12 નીચેનાની અતિસંક્ષિપ્તરૂપની મિશ્ર કરણીમાં ફેરવો.

(i) $\sqrt{128}$ (ii) $\sqrt[6]{320}$ (iii) $\sqrt[3]{250}$

ઉકેલ :

(i) $\sqrt{128}=\sqrt{64\times 2}=8\sqrt{2}$, *જે મિશ્ર કરણી છે.*

(ii) $\sqrt[6]{320}=6\sqrt{2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 5}$

$= \sqrt[6]{2^6 \times 5} = 2\sqrt[6]{5}$, જે મિશ્ર કરણી છે.

(iii) $\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{5\times5\times5\times2} = 5\sqrt[3]{2}$, જે મિશ્ર કરણી છે.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 2.7

1. નીચેના પૈકી કઈ જોડી સમરૂપ કરણીની છે તે જણાવો.

   (i) $\sqrt{8}, \sqrt{32}$ (ii) $5\sqrt{3}, 6\sqrt{18}$ (iii) $\sqrt{20}, \sqrt{125}$

2. શુદ્ધ કરણી તરીકે દર્શાવો.

   (i) $7\sqrt{3}$ (ii) $3\sqrt[3]{16}$ (iii) $\frac{5}{8}\sqrt{24}$

3. અતિસંક્ષિપ્ત રૂપમાં મિશ્ર કરણી તરીકે દર્શાવો.

   (i) $\sqrt[3]{250}$ (ii) $\sqrt[3]{243}$ (iii) $\sqrt[4]{512}$

2.14 કરણી પરથી ચાર મૂળભૂત પ્રક્રિયાઓ

2.14.1 કરણીના સરવાળા અને બાદબાકી સંમેય સંખ્યાના સરવાળા અને બાદબાકીની જેમજ કરણીના સરવાળા અને બાદબાકી થઈ શકે છે.

ઉહારણ તરીકે, $5\sqrt{3}+17\sqrt{3}=(5+17)\sqrt{3}=22\sqrt{3}$

અને $12\sqrt{5}-7\sqrt{5}=[12-7]\sqrt{5}=5\sqrt{5}$

કરણીના સરવાળા અને બાદબાકી માટે આપણે પ્રથમ તેમને સમરૂપ કરણીમાં ફેરવીએ છીએ અને પછી પ્રક્રિયાઓ કરીએ છીએ.

ઉદાહરણ તરીકે i) $\sqrt{50}+\sqrt{288}$

$= \sqrt{5\times5\times2}+\sqrt{12\times12\times2}$

$= 5\sqrt{2}+12\sqrt{2}=\sqrt{2}(5+12)=17\sqrt{2}$

ii) $\sqrt{98}-\sqrt{18}$

$= \sqrt{7\times7\times2}-\sqrt{3\times3\times2}$

$= 7\sqrt{2}-3\sqrt{2}=(7-3)\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

ઉદાહરણ 2.22: *નીચેના દરેકનું સાદુરૂપ આપો.*

(i) $4\sqrt{6}+2\sqrt{54}$

(ii) $45\sqrt{6}-3\sqrt{216}$

ઉકેલ : (i) $4\sqrt{6}+2\sqrt{54}$

$= 4\sqrt{6}+2\sqrt{3\times3\times6}$

$= 4\sqrt{6}+6\sqrt{6}=10\sqrt{6}$

(ii) $45\sqrt{6}-3\sqrt{216}$

$= 45\sqrt{6}-3\sqrt{6\times6\times6}$

$= 45\sqrt{6}-18\sqrt{6}$

$= 27\sqrt{6}$

ઉદાહરણ 2.23: *સાબિત કરો કે-*

$$24\sqrt{45}-16\sqrt{20}+\sqrt{245}-47\sqrt{5}=0$$

ઉકેલ : $24\sqrt{45}-16\sqrt{20}+\sqrt{245}-47\sqrt{5}$

$= 24\sqrt{3\times3\times5}-16\sqrt{2\times2\times5}+\sqrt{7\times7\times5}-47\sqrt{5}$

$= 72\sqrt{5}-32\sqrt{5}+7\sqrt{5}-47\sqrt{5}$

$= \sqrt{5}[72-32+7-47]$

$= \sqrt{5}\times0=0=$ R.H.S

ઉદાહરણ 2.24: *સાદુરૂપ આપો :* $2\sqrt[3]{16000}+8\sqrt[3]{128}-3\sqrt[3]{54}+\sqrt[4]{32}$

ઉકેલ : $2\sqrt[3]{16000}=2\sqrt[3]{10\times10\times10\times8\times2}=2\times10\times2\sqrt[3]{2}=40\sqrt[3]{2}$

$8\sqrt[3]{128}=8\sqrt[3]{4\times4\times4\times2}=32\sqrt[3]{2}$

$3\sqrt[3]{54}=3\sqrt[3]{3\times3\times3\times2}=9\sqrt[3]{2}$

$$\sqrt[4]{32} = 2\sqrt[4]{2}$$

જરૂરી પદાવલિ (અભિવ્યક્ત)

$$= 40\sqrt[3]{2} + 32\sqrt[3]{2} - 9\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[4]{2}$$
$$= (40 + 32 - 9)\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[4]{2}$$
$$= 63\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[4]{2}$$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 2.8

નીચેનાનું સાદુરૂપ આપો.

1. $\sqrt{175} + \sqrt{112}$
2. $\sqrt{32} + \sqrt{200} + \sqrt{128}$
3. $3\sqrt{50} + 4\sqrt{18}$
4. $\sqrt{108} - \sqrt{75}$
5. $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} - 8\sqrt[3]{3}$
6. $6\sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{16} + 4\sqrt[3]{128}$
7. $12\sqrt{18} + 6\sqrt{20} - 6\sqrt{147} + 3\sqrt{50} + 8\sqrt{45}$

2.14.2 કરણીમાં ગુણાકાર અને ભાગાકાર

બે કરણી જો એક સરખા ક્રાતની હોય, તો તેમનો ગુણાકાર અને ભાગાકાર થઈ શકે. આપણે જાણઈએ છીએ કે કરણીનો ઘાત મૂલક અને મૂલાધઆર ના ઘાતને એક સરખી ઘન સંખ્યા વડે ગુણીને કે ભફાગીને બદલી શકાય છે. ગુણાકાર કે ભાગાકાર કરતા રહેલા આપણએ તેમને સરખઆ ઘાતવાળી કરણીમાં બદલીએ છીએ.

આપણે કેટલાંક ઉહારહણ જોઈએ.

$\sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{3 \times 2} = \sqrt{6}$ $\left[\sqrt{3}\right.$ અને $\sqrt{2}$ બંને સરખા ઘાતવાળ 1 કરણી છે.$\left.\right]$

$$\sqrt{12} \div \sqrt{2} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}$$

ગુણાકાર કરીએ $\sqrt{3}$ X $\sqrt[3]{2}$

$$\sqrt{3} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}$$

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{4}$$

$$\therefore \sqrt{3} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{27} \times \sqrt[6]{4} = \sqrt[6]{108}$$

ભાગાકાર કરતાં $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[6]{27}}{\sqrt[6]{4}} = \sqrt[6]{\dfrac{27}{4}}$

ચાલો આપણે એક ઉદાહરણ વિશે વિચારીએ :

ઉદાહરણ 2.25: (i) *ગુણાકાર કરો :* $5\sqrt[3]{16}$ *અને* $11\sqrt[3]{40}$.

(ii) *ભાગાકાર કરો :* $15\sqrt[3]{13}$ *હ્વઅ* $6\sqrt[6]{5}$.

ઉકેલ : (i) $5\sqrt[3]{16} \times 11\sqrt[3]{40}$

$$= 5 \times 11 \times \sqrt[3]{2 \times 2 \times 2 \times 2} \times \sqrt[3]{2 \times 2 \times 2 \times 5}$$

$$= 55 \times 2 \times 2\sqrt[3]{2}\ \sqrt[3]{5}$$

$$= 220\sqrt[3]{10}$$

(ii) $\dfrac{15\sqrt[3]{13}}{6\sqrt[6]{5}} = \dfrac{5}{2} . \dfrac{\sqrt[6]{13^2}}{\sqrt[6]{5}} = \dfrac{5}{2}\sqrt[6]{\dfrac{169}{5}}$

ઉદાહરણ 2.26: *સાદુરૂપ આપો અને પરિણામને સરળત્તમ સ્વરૂપમાં દર્શાવો.*

$$2\sqrt{50} \times \sqrt{32} \times 2\sqrt{72}$$

ઉકેલ : $2\sqrt{50} = 2\sqrt{5 \times 5 \times 2} = 10\sqrt{2}$

$$\sqrt{32} = \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = 4\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{72} = 2 \times 6\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$$

:- આપેલ પદાવલી

$$= 10\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} \times 12\sqrt{2}$$

$$= 960\sqrt{2}$$

2.15 કરણીની સરખામણી

બે કરણીની સરખામણી કરવા માટે પ્રથમ બંને કરણીઓને સમાન ઘાતવાળી કરણીમાં ફેરવો પછી સહ ગુણાંકો સાથેના મૂલાધારોને સરખાવો. આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 2.27: $\sqrt{\frac{1}{4}}$ કે $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ માંથી કઈ (કરણી) મોટી છે ?

ઉકેલ : $\sqrt{\frac{1}{4}} = \sqrt[6]{\left(\frac{1}{4}\right)^3} = \sqrt[6]{\frac{1}{64}}$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \sqrt[6]{\frac{1}{9}}$$

$$\frac{1}{9} > \frac{1}{64} \Rightarrow \sqrt[6]{\frac{1}{9}} > \sqrt[6]{\frac{1}{64}} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{3}} > \sqrt{\frac{1}{4}}$$

ઉદાહરણ 2.28: $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{3}$ અને $\sqrt[6]{5}$ ને ચડતા ક્રમમાં ગોઠવો.

ઉકેલ : 2,3 અને 6 નો લઘુત્તમ 6 છે.

$$\therefore \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{4}$$

$$\sqrt{3} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}$$

$$\sqrt[6]{5} = \sqrt[6]{5}$$

હવે $\sqrt[6]{4} < \sqrt[6]{5} < \sqrt[6]{27}$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{2} < \sqrt[6]{5} < \sqrt{3}$$

1. ગુણાકાર કરો $\sqrt[3]{32}$ અને $5\sqrt[3]{4}$.
2. ગુણાકાર કરો $\sqrt{3}$ અને $\sqrt[3]{5}$.
3. વડે ભાગો : $\sqrt[3]{135}$ ને $\sqrt[3]{5}$.
4. વડે ભાગો : $2\sqrt{24}$ ને $\sqrt[3]{320}$.

5. કઈ મોટી છે $\sqrt[4]{5}$ or $\sqrt[3]{4}$?

6. કઈ નાની છે $\sqrt[5]{10}$ or $\sqrt[4]{9}$?

7. ચડતા ક્રમમાં ગોઠવો.

   $\sqrt[3]{2},\ \sqrt[6]{3},\ \sqrt[3]{4}$

8. ઉતરતા ક્રમમાં ગોઠવો.

   $\sqrt[3]{2},\ \sqrt[4]{3},\ \sqrt[3]{4}$

2.16 કરણીનું સંમેયીકરણ :

નીચેના ગુણાકાર વિશે વિચારો :

(i) $3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} = 3$

(ii) $5^{\frac{7}{11}} \times 5^{\frac{4}{11}} = 5$

(iii) $7^{\frac{1}{4}} \times 7^{\frac{3}{4}} = 7$

ઉપરના ત્રણ ગુણાકાર પૈકી દરેકમા આપણે જોઈએ છીએ કે બે કરણીના ગુણાકારથી આપણને સંમેય સંખ્યા મળે છે. આવા કિસ્સામાં દરેક કરણી અન્ય કરણીનો સંમયકારક અવયવ છે.

(i) $\sqrt{3}$ એ $\sqrt{3}$ નો સંમેયકારક અવયવ છે અને એનાથી ઉલટું પણ (એટલે કે $\sqrt{3}$ અને $\sqrt{3}$ એકબીજાના સંમેયકારક અવયવ છે.)

(ii) $\sqrt[11]{5^4}$ અને $\sqrt[11]{5^7}$ એકબીજાના સંમેયકારક અવયવ છે.

(iii) $\sqrt[4]{7}$ અને $\sqrt[4]{7^3}$ એકબીજાના સંમેયકારક અવયવ છે.

બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો કરણીને સંમેય સંખ્યામાં ફેરવવાની પ્રક્રિયાને સંમેયીકરણ કહે છે. અને બે સંખ્યાઓના ગુણાકારથી જો સંમેય સંખ્યા મળે તો એકબીજાના સંમેયકારક અવયવ કહેવાય.

ઉદાહરણ, તરીકે $\sqrt{x}$ નો સંમેયકારક અવયવ $\sqrt{x}$ છે અને $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ નો સંમેયકારક અવયવ $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ છે.

નોંધ :

(i) $x-\sqrt{y}$ અને $x+\sqrt{y}$ રાશીઓ અનુબધ્ધ કરણી કહેવાય છે. તેમનો સરવાળો અને ગુણાકાર હંમેશા સંમેય હોય છે.

(ii) સામાન્ય રીતે સંમેયીકરણ અસંમેય કરણીની અભિવ્યક્તિ ના છેદનું કરવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ 2.29: $\sqrt{18}$ અને $\sqrt{12}$ ના સંમેયકારક અવયવ શોધો.

ઉકેલ : $\sqrt{18} = \sqrt{3\times3\times2} = 3\sqrt{2}$

સંમેયકારક અવયવ $\sqrt{2}$ છે.

$\sqrt{12} = \sqrt{2\times2\times3} = 2\sqrt{3}$.

સંમેયકારક અવયવ $\sqrt{3}$ છે.

ઉદાહરણ 2.30: $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ ના છેદનું સંમેયીકરણ કરો.

ઉકેલ : $$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}} = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)} = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^2}{-3}$$

$$= -\frac{7+2\sqrt{10}}{3} = -\frac{7}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{10}$$

ઉદાહરણ 2.31: $\dfrac{4+3\sqrt{5}}{4-3\sqrt{5}}$ ના છેદનું સંમેયીકરણ કરો.

ઉકેલ : $$\frac{4+3\sqrt{5}}{4-3\sqrt{5}} = \frac{\left(4+3\sqrt{5}\right)\left(4+3\sqrt{5}\right)}{\left(4-3\sqrt{5}\right)\left(4+3\sqrt{5}\right)}$$

$$= \frac{16+45+24\sqrt{5}}{16-45} = -\frac{61}{29}-\frac{24}{29}\sqrt{5}$$

ઉદાહરણ 2.32: $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}$ ના છેદનું સંમેયીકરણ કરો.

ઉકેલ : $$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1} = \frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)-1}{\left[\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+1\right]\left[\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)-1\right]}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2-1} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}{4-2\sqrt{6}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}{4-2\sqrt{6}} \times \frac{4+2\sqrt{6}}{4+2\sqrt{6}}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}-4\sqrt{2}-4+6\sqrt{2}-4\sqrt{3}-2\sqrt{6}}{16-24}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}-2-\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+2}{4}$$

ઉદાહરણ 2.33: *જો* $\frac{3+2\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = a+b\sqrt{2}$, *હોય, તો* a *અને* b *ની કિંમત શોધો.*

ઉકેલ : $\frac{3+2\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = \frac{3+2\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} \times \frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = \frac{9+4+9\sqrt{2}}{9-2}$

$$= \frac{13+9\sqrt{2}}{7} = \frac{13}{7} + \frac{9}{7}\sqrt{2} = a+b\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{13}{7}, \qquad b = \frac{9}{7}$$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 2.10

1. *નીચેના દરેક માટે સંમેયકારક અવયવ શોધો.*

   (i) $\sqrt[3]{49}$ (ii) $\sqrt{2}+1$ (iii) $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{xy}$

2. *નીચેના દરેકમાં છેદના સંમેયીકરણ દ્વારા સાદુરૂપ આપો.*

   (i) $\frac{12}{\sqrt{5}}$ (ii) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{17}}$ (iii) $\frac{\sqrt{11}-\sqrt{5}}{\sqrt{11}+\sqrt{5}}$ (iv) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

3. *સાદુરૂપ આપો :* $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

4. $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}$ *ના છેદનું સંમેયીકરણ કરો.*

5. જો $a = 3 + 2\sqrt{2}$ હોય, તો $a + \frac{1}{a}$ શોધો.

6. જો $\frac{2+5\sqrt{7}}{2-5\sqrt{7}} = x + \sqrt{7}y$, તો x અને y શોધો.

સારાંશ

- $a \times a \times a \times$ ..... m વખત $= a^m$ એ ઘાતાંક સ્વરૂપે છે જ્યાં a એ પાયો અને m એ ઘાતાંક છે.

- ઘાતાંકના નિયમો :

  (i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (ii) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (iii) $(ab)^m = a^m b^m$ (iv) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

  (v) $(a^m)^n = a^{mn}$ (vi) $a^0 = 1$ (vii) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

- $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

- જો x સંમેય સંખ્યા હોય, તો અસંમેય સંખ્યા $\sqrt[n]{x}$ કરણી કહેવાય છે.

- $\sqrt[n]{x}$ માં n મૂલક કહેવાય છે અને x મૂલાધાર કહેવાય છે.

- (1 સિવાય) સહ ગુણાક સાથેની કરણી મિશ્ર કરણી કહેવાય છે.

- કરણીનો ઘાત એ મૂળ દર્શાવતી સંખ્યા છે.

- $\sqrt[n]{x}$ નો ઘાત n છે.

- કરણીના નિયમો (a > 0, b > 0)

  (i) $\left[\sqrt[n]{a}\right]^n = a$ (ii) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ (iii) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

- કરણી પરની પ્રક્રિયાઓ :

$$x^{\frac{1}{n}} \times y^{\frac{1}{n}} = (xy)^{\frac{1}{n}};\quad \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{1}{mn}} = \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}};\quad \frac{x^{\frac{1}{n}}}{y^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\left(x^m\right)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{m}{n}};\quad \sqrt[m]{x^a} = \sqrt[mn]{x^{an}} \text{ or } \left(x^a\right)^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{a}{m}} = x^{\frac{an}{mn}} = \left(x^{an}\right)^{\frac{1}{mn}}$$

- કરણીઓને જો સામાન્ય અસંમેય અવયવ હોય, તો તે સમરૂપ (સજાતીય) હોય છે.
- સજાતીય (સમરૂપ) કરણીના સરવાળા - બાદબાકી થઈ શકે છે.
- કરણીના ઘાત કરણીના મૂલકના ઘાત મૂલાધારના ઘાતને એકસરખી ઘન સંખ્યા વડે ગુણીને બદલી શકાય છે.
- એકસરખા ઘાતની કરણીઓના ગુણાકાર અને ભાગાકાર થઈ શકે છે.
- કરણીઓની સરખામણી કરવા માટે આપણે કરણીઓને સમનઘાત વાળી કરણીઓમાં ફેરવીએ છીએ પછી સહગુણક સાથેના મૂલઘારોની સરખામણી કરીએ છીએ.
- બે કરણીઓનો ગુણાકાર જો સંમેય સંખ્યા હોય, તો દરેકને એક બીજાનો સંમેયકારક અવયવ કહેવાય.
- $x+\sqrt{y}$ ને $x-\sqrt{y}$ નો સંમેય કારક અવયવ કહેવાય છે અવે તેનું પ્રતિપ. (એટલે કે $x+\sqrt{y}$ ને $x-\sqrt{y}$ નો સંમેયકારક અવયવ કહેવાય.)

સત્રાંત સ્વાધ્યાય

1. નીચેના દરેકને ઘાતાંક સ્વરૂપે દર્શાવો.

   (i) $5 \times 3 \times 5 \times 3 \times 7 \times 7 \times 7 \times 9 \times 9$

   (ii) $\left(\frac{-7}{9}\right)\times\left(\frac{-7}{9}\right)\times\left(\frac{-7}{9}\right)\times\left(\frac{-7}{9}\right)$

2. નીચેનાનું સાદુરૂપ આપો.

   (i) $\left(-\frac{5}{6}\right)^3 \times \left(\frac{7}{5}\right)^2 \times \left(\frac{3}{7}\right)^3$

   (ii) $\left(\frac{3}{7}\right)^2 \times \frac{35}{27} \times \left(-\frac{1}{5}\right)^2$

3. સાદુરૂપ આપો અને પરિણામને ઘાતાંક સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

(i) $(10)^2 \times (6)^2 \times (5)^2$

(ii) $\left(-\frac{37}{19}\right)^{20} \div \left(-\frac{37}{19}\right)^{20}$

(iii) $\left[\left(\frac{3}{13}\right)^3\right]^5$

4. નીચેના દરેકનું સાદુરૂપ આપો.

(i) $3^0 + 7^0 + 37^0 - 3$ (ii) $(7^0 + 3^0)(7^0 - 3^0)$

5. નીચેનાનું સાદુરૂપ આપો.

(i) $(32)^{12} \div (32)^{-6}$ (ii) $(111)^6 \times (111)^{-5}$ (iii) $\left(-\frac{2}{9}\right)^{-3} \times \left(-\frac{2}{9}\right)^5$

6. $\left(\frac{3}{7}\right)^{-3} \times \left(\frac{3}{7}\right)^{11} = \left(\frac{3}{7}\right)^x$ હોય, તો x નું મૂલ્ય શોધો.

7. $\left(\frac{3}{13}\right)^{-2} \times \left(\frac{3}{13}\right)^{-9} = \left(\frac{3}{13}\right)^{2x+1}$ હોય, તો x નું મૂલ્ય (કિંમત) શોધો.

8. અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણાકાર તરીકે નીચેના દરેકના ઉત્તર ઘાતાંક સ્વરૂપે લખો.

(i) 6480000 (ii) 172872 (iii) 11863800

9. લબ્ધક નામનો (સૌથી વધુ તેજસ્વી) તારો પૃથ્વીથી લગભગ 8.1×10^{13} કિલોમીટર દૂર છે. ધારણા કરો કે પ્રકાશ 3.0×10^5 કિલોમિટર/સેકન્ડ ઝડપથી ગતિ કરે છે તો લુબ્ધક તારાથી પૃથ્વી પર પ્રકાશ પહોંચતા કેટલો સમય લાગે ?

10. નીચેના પૈકી કઈ કરણી છે તે જણાવો.

(i) $\sqrt{\frac{36}{289}}$ (ii) $\sqrt[9]{729}$ (iii) $\sqrt[3]{\sqrt{5}+1}$ (iv) $\sqrt[4]{3125}$

11. શુધ્ધ કરણી તરીકે દર્શાવો.

(i) $3\sqrt[2]{3}$ (ii) $5\sqrt[3]{4}$ (iii) $5\sqrt[5]{2}$

12. *સરળત્તમ સ્વરૂપમાં મિશ્ર કરણી તરીકે દર્શાવો.*

(i) $\sqrt[4]{405}$ (ii) $\sqrt[5]{320}$ (iii) $\sqrt[3]{128}$

13. *નીચેના પૈકી સમરૂપ (સજાતીય) કરણીઓની જોડ કઈ છે ?*

(i) $\sqrt{112}, \sqrt{343}$ (ii) $\sqrt[3]{625}, \sqrt[3]{3125 \times 25}$ (iii) $\sqrt[6]{216}, \sqrt{250}$

14. *નીચેના દરેકનું સાદુરૂપ આપો.*

(i) $4\sqrt{48} - \frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} + 6\sqrt{3}$

(ii) $\sqrt{63} + \sqrt{28} - \sqrt{175}$

(iii) $\sqrt{8} + \sqrt{128} - \sqrt{50}$

15. *કઈ કરણી મોટી છે ? અથવા કઈ કરણી નાની છે ?*

(i) $\sqrt{2}$ or $\sqrt[3]{3}$ (ii) $\sqrt[3]{6}$ or $\sqrt[4]{8}$

16. *ઉતરતા ક્રમમાં ગોઠવો.*

(i) $\sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{5}$ (ii) $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{4}$

17. *ચડતા ક્રમમાં ગોઠવો.*

$\sqrt[3]{16}, \sqrt{12}, \sqrt[6]{320}$

18. *છેદનું સંમેયીકરણ કરીને સાદુરૂપ આપો.*

(i) $\frac{3}{\sqrt{6} - \sqrt{7}}$ (ii) $\frac{12}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$ (iii) $\frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5} + 2}$

19. *છેદનું સંમેયીકરણ કરીને નીચેનામાંના દરેકનું સાદુરૂપ આપો.*

(i) $\frac{1}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{5} - \sqrt{12}}$

20. *જો* $\frac{5 + 2\sqrt{3}}{7 + 4\sqrt{3}} = a + b\sqrt{3}$, *હોય, તો* a *અને* b *નું મૂલ્ય શોધો. (*a *અને* b *સંમેય સંખ્યાઓ છે.)*

21. જો $x = 7 + 4\sqrt{3}$, તો $x + \frac{1}{x}$ નું મૂલ્ય શોધો.

તમારી પ્રતિ ચકાસોના ઉત્તરો

2.1

1. (i) $(-7)^4$ (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$ (iii) $\left(\frac{-5}{7}\right)^{20}$

2.

	આધાર	ઘાતાંક
(i)	-3	5
(ii)	7	4
(iii)	$-\frac{2}{11}$	8

3. (i) $\frac{81}{2401}$ (ii) $\frac{16}{6561}$ (iii) $-\frac{27}{64}$

4. (i) $\frac{3}{7}$ (ii) $\frac{625}{324}$

5. (i) $\left(\frac{1}{3}\right)^5$ (ii) $\left(-\frac{1}{7}\right)^4$ (iii) $\left(-\frac{5}{3}\right)^4$

2.2

1. (i) $3^1 \times 11^1 \times 13^1$ (ii) $2^3 \times 3^4$ (iii) $2^3 \times 3^3 \times 7^1$

2. (i) 3^6 (ii) 2^9 (iii) $2^5 \times 3^4$

(iv) $\frac{11^3}{2^{12}}$ (v) $\frac{(-7)^3}{2^5}$

2.3

1. (i) $(7)^5$ (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^5$ (iii) $\left(-\frac{7}{8}\right)^6$

2. (i) $(-7)^2$ (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^6$ (iii) $\left(-\frac{7}{8}\right)^{15}$

3. (i) 2^{18} (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^6$ (iii) $\left(-\frac{5}{9}\right)^{15}$

(iv) $\left(\frac{11}{3}\right)^5$ (v) $\left(-\frac{7}{11}\right)^3$

4. *સાચાં :* (i), (ii), (vii)

ખોટા : (iii), (iv), (v), (vi)

2.4

1. $\frac{49}{9}$

2. (i) $\left(\frac{7}{3}\right)^4$ (ii) 12^2 (iii) $\left(\frac{13}{3}\right)^{12}$

3. (i) $\left(\frac{7}{3}\right)^{-4}$ (ii) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-10}$ (iii) $\left(-\frac{4}{3}\right)^{-10}$

4. (i) $\frac{81}{16}$ (ii) $-\frac{2}{3}$ (iii) $-\frac{343}{125}$

5. *સાચા :* (ii), (iii), (iÃk)

2.5

1. (i) 8 (ii) $\frac{25}{9}$

2. (i) 1 (ii) $\frac{7}{8}$ (iii) $\frac{13}{16}$

2.6

1. (i) 4, 64 (ii) 6, 343 (iii) 2, 119

2. (iii), (iv)

3. શુધ્ધ : (i), (iv)

મિશ્ર : (ii), (iii)

2.7

1. (i), (iii)

2. (i) $\sqrt{147}$ (ii) $\sqrt[3]{432}$ (iii) $\sqrt{\frac{75}{8}}$

3. (i) $5\sqrt[3]{2}$ (ii) $3\sqrt[3]{9}$ (iii) $4\sqrt[4]{2}$

2.8

1. $9\sqrt{7}$ 2. $22\sqrt{2}$ 3. $27\sqrt{2}$ 4. $\sqrt{3}$

5. $-3\sqrt{3}$ 6. $30\sqrt[3]{2}$ 7. $51\sqrt{2}+36\sqrt{5}-42\sqrt{3}$

2.9

1. $20\sqrt[3]{2}$ 2. $3\sqrt[3]{5}$ 3. 3 4. $\sqrt[6]{\frac{216}{25}}$

5. $\sqrt[3]{4}$ 6. $\sqrt[4]{9}$ 7. $\sqrt[6]{3}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}$ 8. $\sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{3}, \sqrt[3]{2}$

2.10

1. (i) $\sqrt[3]{7}$ (ii) $\sqrt{2}-1$ (iii) $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}$

2. (i) $\frac{12}{5}\sqrt{5}$ (ii) $\frac{2\sqrt{51}}{17}$ (iii) $\frac{8}{3}-\frac{\sqrt{55}}{3}$ (iÃk) $2+\sqrt{3}$

3. 14

4. $-\frac{1}{4}\left[2+\sqrt{6}+\sqrt{2}\right]$

5. 6

6. $-\frac{179}{171}-\frac{20\sqrt{7}}{171}$

સત્રાંત સ્વાધ્યાયના ઉત્તરો

1. (i) $5^2 \times 3^2 \times 7^3 \times 9^2$ (ii) $\left(-\frac{7}{9}\right)^4$

2. (i) $-\frac{5}{56}$ (ii) $\frac{1}{105}$

3. (i) $2^4 \times 3^2 \times 5^4$ (ii) 1 (iii) $\left(\frac{3}{13}\right)^{15}$

4. (i) શૂન્ય (ii) શૂન્ય

5. (i) $(32)^{18}$ (ii) 111 (iii) $\left(\frac{2}{9}\right)^2$

6. $x = 8$

7. $x = -6$

8. $2^7 \times 3^4 \times 5^4$

9. $3^3 \times 10^7$ સેકન્ડ

10. (ii), (iii), (iÃk)

11. (i) $\sqrt[2]{27}$ (ii) $\sqrt[3]{500}$ (iii) $\sqrt[5]{6250}$

12. (i) $3\sqrt[4]{5}$ (ii) $2\sqrt[5]{10}$ (iii) $4\sqrt[3]{2}$

13. (i), (ii)

14. (i) $\frac{127}{6}\sqrt{3}$ (ii) zero (iii) $5\sqrt{2}$

15. (i) $\sqrt[3]{3}$ (ii) $\sqrt[3]{6}$

16. (i) $\sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{5}$ (ii) $\sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt{2}$

17. $\sqrt[3]{16}, \sqrt[6]{320}, \sqrt{12}$

18. (i) $-3\left(\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)$ (ii) $3\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)$ (ii) $9-4\sqrt{5}$

19. (i) $\dfrac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ (ii) $\dfrac{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}+2\sqrt{105}}{70}$

20. $a = 11$, $b = -6$

21. 14

3

બૈજિક પદાવલીઓ અને બહુપદીઓ

સંખ્યા શાસ્ત્ર કે જેમાં પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ પૂર્ણ સંખ્યાઓ અપૂર્ણાંકો વગેરેનો સમાવેશ થાય છે તેવી સંખ્યા અને તેમના ઉપરની પ્રક્રિયાઓનો ઉપયોગ મદદ અંશે બીજગણોતના અચળ,ચલ, બૈજિક પદાવલીઓ વિશિષ્ટ વગેરે જેવા બીજ બીજગણિતના પાયાના ખ્યાલો અને તેમના પરથી મૂળભૂત પ્રક્રિયાઓ વિશે શીખીશું.

હેતુઓ

આ પાઠનો અભ્યાસ કર્યો પછી તમે

- *બૈજિક પદાવલી અને તેમના ઓળખી શકશો.*
- *બહુપદીને વિશિષ્ટ પદાવલી તરીકે સમજી શકશો અને ઓળખી શકશો.*
- *બહુપદીનો ઘાત નક્કી કરી શકશો.*
- *ચલની આપેલી કિંમત માટે બહુપદીના શૂન્યો સહિત બહુપદી કિંમત શોધી શકશો.*
- *બહુપદી પરની ચાર મુળભૂત પ્રક્રિયાઓ કરી શકશો.*

અપેક્ષિત પૂર્વ - જ્ઞાન

- *સંખ્યા સંહતિઓ અને તે પરથી ચાર મૂળભૂત પ્રક્રિયાઓ .*

પ્રાથમિક અને ઉચ્ચ પ્રાથમિક કક્ષાના બીજા પ્રારંભિક ખ્યાલોનું જ્ઞાન

3.1 બીજગણિતનો પરિચય : બીજ ગણિત વિશે જાણકારી

તમે $0, 1, 2, 3, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \ldots \sqrt{2}, \ldots$ *જેવી સંખ્યાઓ અને આ સંખ્યાઓપર સરવાળા (+), બાદબાકી (−), ગુણાકાર (×) અને ભાગાકાર(÷) જેવી પ્રક્રિયાઓથી તમે મહિનગર છો. કેટલીક વાર અક્ષરો કે જે શાબ્દિક સંખ્યાઓ કહેવાય છે તેઓ પણ સંખ્યા દર્શાવ્યા પ્રતિક તરીકે પુસ્તકની કિંમત વીસ રૂપિયા છે. અંક ગણિત ની રીતે એક પુસ્તકની કિંમત રૂા.* 20 *એમ લખીએ છીએ.*

બીજ ગણિતમાં એક પુસ્તકની રૂપિયામાં કિંમત x *છે એમ લખીએ છીએ. આમ* x *એ સંખ્યા દર્શાવે છે તેજ રીતે* a, b, c, x, y, z, *વગેરે ખુરશીઓ,ટેબલો,વાંદરાઓ,કુતરાઓ,ગાયો,વૃક્ષો વગેરેની સંખ્યા પ્રતિક તરીકે વપરાય છે અક્ષરોનો ઉપયોગ આપણને વધારે વ્યાપક સ્વરૂમાં વિચારવા માટે મદદ કરે છે,*

આપણે એક ઉદાહરણ વિચારીએ તમે જાણો છો કે જો એક ચોરસની બાજુ 3 *એકમ હોય તો તેની પરિમિતી* 4 × 3 *એકમ થાય. બીજગણિતમાં આપણે તેને* p-45 *તરીકે દર્શાવીએ છીએ જ્યાં* p *એ પરિમિતીના એકમનું પ્રતિક અને* S *એ બાજુઓના એકમનું પ્રતિક છે એકગણિતના શબ્દો એ બીજ ગણિતના શબ્દોની સરખામણી કરતાં*

આપણે જોઈએ છીએ કે બીજગણિતના શબ્દો

(a) અંક ગણિતના શબ્દો કરતાં વધારે સચોટ હોય છે.

(b) અંક ગણિતના શબ્દો કરતાં વધારે વ્યાપક હોય છે.

(c) સમજવામાં સરળ હોય છે અને સમસ્યાના ઉકેલને વધારે સરળ બનાવે છે.

થોડા વધારે તુલનાત્મક સ્વરૂપનાં ઉદાહરણો અગાઉ આપણે જે નિષ્કર્ષ તારવ્યા છે તેને સમર્થન આપશો.

શાબ્દિક વિધાન	બૈજિક વિધાન
(i) એક સંખ્યામાં ત્રણનો વધારો થાયતો 8 થાય છે.	$a + 3 = 8$
(ii) સંખ્યામાં તેજ સંખ્યા જેટલો વધારો થાય તો 12 થાય છે.	$x + x = 12$, ને $2x = 12$
(iii) જોઈએ છીએ કે બીજગણિતના શબ્દો	$d = s \times t$, ને $d = st$ જેમ લખાય છે.
(iv) કોઈ સંખ્યા ને તેજ સંખ્યા વડે ગુણી 5 ઉમેરતાં 9 થાય	$b \times b + 5 = 9$, $b^2 + 5 = 9$ જેમ લખાય છે.
(v) બે ક્રમિક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર 30 છે.	$y \times (y + 1) = 30$, ને $y (y + 1) = 30$, એમ લખાય છે જ્યાં y પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.

અક્ષરો એ અંક ગણિતની સંખાયઓનું પ્રતિનિધિત્વ કરતા હોવાથી પ્રક્રિયાના ચિહ્નો $+, -, \times$ અને $\div$ નું અંક ગણિતમાં જે અર્થ છે તેજ અર્થ બીજગણિતમાં પણ છે. બીજ ગણિતમાં ગુણાકાર ના ચિહ્નને ઘણીવાર છોડી દેવામાં આવે છે (માટે 5એ લખીએ છીએ અને a + b માટે ab લખીએ છીએ.

3.2 ચલ અને અચલ

2009 ના વર્ષના મહિનાઓ જાન્યુઆરી, ફેબ્રુઆરી, માર્ચ..... ડિસેમ્બરવિશે વિચારો જો આપણે વર્ષ 2009 ને a (સંકેત) વડે દેર્શાવીએ અને દરેક મહિનાને a (સંકેત) વડે દર્શાવીએ અને દરેક મહિનાને x (સંકેત) વડે દર્શાવીએ તો આપણે જણાય છે કે આ પરિસ્થિતિમાં a (વર્ષ 2009) માર્ચ....ડિસેમ્બર)એક મહિના માટે હોઈ શકે આમ X એ સ્થિર નથી. તે ચલ છે આ બાબતમાં આપણે a એ <u>અચળ</u> અને x એ ચલ છે અમ કહી શકીએ.

તેજ રીતે આપણે ધોરણ 10ના વિદ્યાર્થીઓ વિશે વિચારીએ અને ધોરણ 10 તે દર્શાવવા a કહીએ અને દરેક વિદ્યાર્થીને y કહીએ તો આ કિસ્સામાં આપણને દેખાય છે કે b (ધોરણ 10) નિશ્ચિત (સ્થિર) છે અને તેથી b અચળ છે. અને b (એક વિદ્યાર્થી) એ ચલ છે કારણ કે તે ધોરણ - 10ના આપમે એક બીજી પરિસિથિતિનો અભ્યાસ કરીએ જો વિદ્યાર્થી છાત્રાલયમાં રહે, તો તેને નિશ્ચિત રૂા.1000 રૂમના ભાડા પેટે ચુકવવા પડે છે . રોજના જમવાના ખોરાકના રૂા. 100 છે એમ માનો તો ભોજન બીલની રકમ (મહિનાની) તેણે ત્યાં કેટલા દિવસ ભોજન લીધું છે તેના પર આધાર રાખે છે. આ કિસ્સામાં રૂમનું ભાડું <u>અચળ</u> છે અને તે ત્યાં કેટલા દિવસ ભોજન લે તે <u>ચલ</u> છે.

હવે, નીચેની સંખ્યાઓનો વિચાર કરો.

$$4, -14, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{4}{15}, 3x, \frac{21}{8}y, \sqrt{2}z$$

તમે જાણો છો કે $4, -14, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$, and $-\frac{4}{15}$ $3x, \frac{21}{8}y$ and $\sqrt{2}z$ એ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે અને

a,b,c

તેમાંના દરેકને એક ચોરસ કિંમત છે. જ્યારે $3x, \frac{21}{8}y$ and $\sqrt{2}z$ સંખ્યાઓ x, y ,z ધરાવે છે.અને તેથી -4-4 વગેરેની માફક તેમની કોઈ ચોક્સ કિંમત હોતી નથી તેમની કિંમત અનુક્રમે x, y ,અને z ની કિંમત પર આધાર રાખે છે તેથી x, y ,અને z ચલ છે. આમ,

ચલ એવી શાબ્દિક સંખ્યા છે જેને જુદી જુદી કિંમતો હોઈ શકે છે જ્યારે અચલને નિશ્ચિત કિંમત હોય છે.

બીજ ગણિતમાં સામાન્ય રીતે આપણે અચળ ને a,b,c વડે દર્શાવીએ છીએ અને ચલ x, y ,z વડે દર્શાવીએ છીએ તેમ છતાં પણ શાબ્દિક સંખ્યા અચળ દર્શાવે છે કે ચલ દર્શાવે છે તે કથન પરથી સ્પષ્ટ થશે.

3.3 બૈજિક પદાવલીઓ અને બહુપદીઓ

જે પદાવલીમાં અંક ગણિતની સંખ્યાઓ (અચળ) ચલો અને પ્રક્રિયાની નિશાનીઓનો સમાવેશ થયો હોય તે પદાવલી બૈજિક પદીવલી કહેવાય છે. આમ

$3 + 8$, $8x + 4$, $5y$, $7x - 2y + 6$, $\frac{1}{\sqrt{2x}}, \frac{x}{\sqrt{y-2}}, \frac{ax+by+cz}{x+y+z}$ આ બધી બૈજિક પદાવલીઓ છે. તમે જોયુ હશે કે $3 + 8$ એ અંકગણિતીય સાથે સાથે બૈજિક એમ બંન્ને પદાવલીઓ છે બૈજિક પદાવલીએ સંખ્યાઓ ચલો અને અંકગણિતીય પ્રક્રિયાઓનું જોડાણ છે (પ્રક્રિયાઓનો સંયોગ છે)

જ્યારે એક કે તેથી વધુ નિશાનીઓ +(વત્તા) કે -(ઓછા) બૈજિક પદાવલીને કેટલાક ભાગોમાં વહેંચે છે ચિહ્ન સાથેનો દરેક ભાગ પદાવલીનું <u>પદ</u> કહેવાય છે. બૈજિક પદાવલીમાં લખવામાં ઘણીવાર પ્રથમપદની ધન (+) નિશાનીને અવગણવામાં આવે છે (લખવામાં આવતી નથી) દાખલા તરીકે

આપણે $x - 5y + 4$ ને બદલે $+ x - 5y + 4$.લખીએ છીએ અહીં $x, - 5y$ અને 4 એ પદાવલીનાં ત્રણ પદો છે.

$\frac{1}{3}xy$ માં $\frac{1}{3}$ એ પદનો એક xy નો પણ સંખ્યિક સહગુણક કહેવાય છે x નો સહગુણક કહેવાય છે $\frac{1}{3}y$ છે અને y નો સહગુણક $\frac{1}{3}x$ જ્યારે પદનો +1 કે - 1 હોય ત્યારે ઘણીવાર લખાણમાં 1ને અવણવામાં આવે છે આમ પદ x^2y +1 $-x^2y$ – 1.ના સંખ્યિક સહગુણકને -1 કહો.

બૈજિક પદાવલી કે જેમાં (ચલો) છેદમાં ન હોય અને ચલ (ચલો) ના ઘાતાંક પૂર્ણ સંખ્યાઓ હોય અને જુદાજુદા પદોના સાંખ્યિક સહગુણકો વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય, તે પદાવલીને બહુપદી કહેવાય છે.

બીજા શબ્દોમાં

(i) બહુપદીના કોઈ પણ પદનો ચલ છેદમાં ન હોય

(ii) બહુપદીના દરેક પદમાં ચલ (ચલો)ના ઘાતાક ઋણ પૂર્ણાંકો ન હોય (પૂર્ણ સંખ્યાઓ હોય) અને

(iii) અને દરેક પદનો સાંખ્યિક સહગુણક વાસ્તવિક સંખ્યા હોય આમ ઉદાહરણ તરીકે

5, $3x - y$, $\frac{1}{3}a - b + \frac{7}{2}$ અને $\frac{1}{4}x^3 - 2y^2 + xy - 8$ આ બધી બહુપદીઓ છો

$x^3 - \frac{1}{x}, \sqrt{x+y}$ and $x^{\frac{2}{3}} + 5$ આ બહુપદીઓ નથી.

જ્યારે u $x^2 + 8$ એ એક ચલ x વાળી બહુપદી છે. અને

$2x^2 + y^3$ એ બે ચલ x અને y વાળી બહુપદી છે.

આ પાઠમાં આપણે બહુપદીની ચર્ચા બે પદોસુધી સિમિત રાખીશું.

<u>એક ચલમાં બહુપદીનું સામાન્ય સ્વરૂપ :</u>

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...+a_nx^n$$

$a_0, a_1, a_2, ...a_n$ એ એક ચલ x માં બહુપદીનું સામાન્ય સ્વરૂ છે, જ્યાં સહગુણક $a_0, a_1x, a_2x^2, ..., a_nx^n$ એ $(n + 1)$ એ બહુપદીનાં (m +1) પદો છે.

બૈજિક પદાવલી અથવા બહુપદીમાં જો L એકજપદ હોય છે. આમ–2, 3y, $-5x^2$, xy, $\frac{1}{2}x^2y^3$ આ બધી એક પદી છે.

- બૈજિક પદાવલી અથવા બહુપદીમાં માત્ર બેજ પદો હોય તો તેને દ્વિપદી કહેવાય છે (દ્વિપદી પદાવલી કે દ્વિપદી બહુપદી) આમ.

$5 + x$, $y^2 - 8x$, $x^3 - 1$ આ બદી દ્વિપદી છે.

- બૈજિક પદાવલી અથવા બહુપદીમાં જો માત્ર ત્રણ પદોજ હોય, તો તેને ત્રિપદી બહુપદી કહેવાય છે.

(ત્રિપદી પદાવલી કે ત્રિપદી બહુપદી કહેવાય છે)

બહુપદીનાં પદો કે જેમાં ચલ (ચલો) એકજ (એક સરખાં) હોય અને પદોના ઘાતાકોપણ એક સરખા (એકજ) હોય તે સજાતીય પદો કહેવાય છે.

ઉદાહરણ તરીકે નીચેની પદાવલીમાં

$3xy + 9x + 8xy - 7x + 2x^2$

પદો 3xy અને 8xy સમજાતીય પદો છે વળી 9x અને 7x પણ સમજાતીય પદો છે જ્યારે 9x અને $2x^2$ એ સમજાતીય પદો નથી જે પદો સમજાતીય નથી તે પદો વિજાતીય પદો કહેવાય ઉપરની પદાવલીમાં 3xy + 7x પદો પણ વિજાતીય છે

ધ્યાનમાં લો કે ગાણિતિક સંખ્યાઓ સમજાતીય પદો છે ઉદાહરણ તરીકે $x^2 + 2x + 3$ અને $x^3 - 5$ ની સજાતીય નથી તે પદો વિજાતીય પદો કહેવાય ઉપરની પદાવલીમાં $3 = 3x^0$ અને $-5 = -5x^0$ છે.

પદાવલીના વિજાતીય પદો :

$2x^2 - 3xy + 9y^2 - 7y + 8$ માં બધા પદો વિજાતીય છે એટલે કે આ પદાવલીમાં (કોઈ પમ) બે પદો સમજાતીય નથી.

ઉદાહરણ : ૩.૧ $2x^2y + 5$ માં ચલ અને અચલ લખો.

ઉકેલ : ચલ : x અને y

અચલ: 2 અને 5

ઉદાહરણ : ૩.૨

$8x^2y^3$, માં નીચેનો સહગુણ શોધો

(i) x^2y^3 (ii) x^2 (iii) y^3

ઉકેલ : (i) $8x^2y^3 = 8 \times (x^2y^3)$ x^2y^3 નો 8

(ii) $8x^2y^3 = 8y^3 \times (x^2)$

x^2 નો સહગુણક $8y^3$ છે

(iii) $8x^2y^3 = 8x^2 \times (y^3)$

y^3 નો સહગુણક $8x^2$ છે

ઉદાહરણ 3.3: *નીચેની પદાવલીના પદ જણાવો.*

$$3x^2y - \frac{5}{2}x - \frac{1}{3}y + 2$$

ઉકેલ : *આપેલ પદાવલીનાં પદો નીચે પ્રમાણ છે.*

$$3x^2y,\ -\frac{5}{2}x,\ -\frac{1}{3}y,\ 2$$

ઉદાહરણ 3.4: *નીચેના માંથી કઈ બૈજિક પદાવલીઓ બહુપદીઓ છે ?*

(i) $\frac{1}{2} + x^3 - 2x^2 + \sqrt{6}x$ (ii) $x + \frac{1}{x}$

(iii) $2x^2 + 3x - 5\sqrt{x} + 6$ (iv) $5 - x - x^2 - x^3$

ઉકેલ (i) *અને* (iv) *બહુપદીઓ છે.*

(i) *માં બીજું પદ* $\frac{1}{x} = x^{-1}$. *પદમાં ચલનો ઘાતાંક ઋણ છે તેથી પદાવલી બહુપદી નથી.*

(ii) *માં ત્રીજા પદમાં* $-5\sqrt{x} = -5x^{\frac{1}{2}}$ *ત્રીજા પદમાં ચલનો ઘાત અપૂર્ણાંક હોવાથી પદાવલી બહુપદી નથી*

ઉદાહરણ 3.5: *નીચેની દરેક પદાવલીમાં જો કોઈ સજાતીય પદો હોય, તો લખો.*

(i) $x + y + 2$ (ii) $x^2 - 2y - \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{3}y - 8$

(iii) $1 - 2xy + 2x^2y - 2xy^2 + 5x^2y^2$ (iv) $\frac{2}{\sqrt{3}}y - \frac{1}{3}z + \frac{\sqrt{5}}{3}y + \frac{1}{3}$

ઉકેલ: (i) *પદાવલીમાં સમજાતીય પદો નથી.*

(ii) x^2 $-\frac{1}{2}x^2$ *સમજાતીય પદો છે વળી* $-2y$ *અને* $\sqrt{3}$ *એ પણ સમજાતીય પદો છે.*

(iii) *પદાવલીમાં સમજાતીય પદો નથી.*

(iv) $\frac{2}{\sqrt{3}}y$ અને $\frac{\sqrt{5}}{3}y$ એ સમજાતીય પદો છે.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 3.1

1. નીચેના દરેકમાંથી ચલ L અને અચલ શોધો

(i) $1 + y$ (ii) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + 7$ (iii) $\frac{4}{5}x^2y^3$

(iv) $\frac{2}{5}xy^5 + \frac{1}{2}$ (v) $2x^2 + y^2 - 8$ (vi) $x + \frac{1}{x}$

2. $2x^2y$ માં નીચેના સહગુણક લખો.

(i) x^2y (ii) x^2 (iii) y

3. ચલો અને પ્રક્રિયાની નિશાનીઓ વાપરીને નીચેનાં દરેક શાબ્દિક વિધાનને બૈજિક વિધાનનો દર્શાવો .

(i) એક સંખ્યામાંથી ત્રણ બાદ કરતાં મળતી સંખ્યા વડે 15 છે.

(ii) એક સંખ્યામાં 5 ઉમેરતા મળતી સંખ્યા 22 છે.

4. નીચેની પદાવલીઓમાંથી દરેક પદાવલીના પદો શોધો.

(i) $2 + abc$ (ii) $a + b + c + 2$ (iii) $x^2y - 2xy^2 - \frac{1}{2}$ (iv) $\frac{1}{8}x^3y^2$

5. નીચેની પદાવલીઓમાંથી દરેક પદાવલીમાં જો કોઈ સજાતીય પદો હોય તો તે શોધો.

(i) $-xy^2 + x^2y + y^2 + \frac{1}{3}y^2x$ (ii) $6a + 6b - 3ab + \frac{1}{4}a^2b + ab$

(iii) $ax^2 + by^2 + 2c - a^2x - b^2y - \frac{1}{3}c^2$

6. નીચેનામાંથી કઈ બૈજિક પદાવલીઓ બહુપદીઓ છે ?

(i) $\frac{1}{3}x^3 + 1$ (ii) $5^2 - y^2 - 2$ (iii) $4x^{-3} + 3y$

(iv) $5\sqrt{x+y} + 6$ (v) $3x^2 - \sqrt{2}y^2$ (vi) $y^2 - \frac{1}{y^2} + 4$

7. નીચેની દરેકને એકપદી દ્વિપદી કે ત્રિપદી તરીકે દર્શોવો ?

(i) $x^3 + 3$ (ii) $\frac{1}{3}x^3y^3$ (iii) $2y^2 + 3yz + z^2$

(iv) $5 - xy - 3x^2y^2$ (v) $7 - 4x^2y^2$ (vi) $-8x^3y^3$

3.4 બહુપદીઓના ઘાત

પદમાં આવેલા ચલોના ઘાતાંકોના સરવાળાને તે પદની ઘાત કહેવાય છે. દાખલા તરીકે $\frac{1}{2}xy$ ની ઘાત 3 છે કારણ કે x અને y ના ઘાતંકોનો સરવાળો $2 + 1$ એટલે કે 3 છે.

તે જ રીતે $2x^5$ પદની ઘાત 5 છે. શૂન્ય સિવાયના અચળ પદનીઘાત શૂન્ય (0) છે. દા.ત અચળપદ 3ની ઘાત 0 છે કારણ કે $3 = 3 \times 1 = 3 \times x^0$, as x^0 (કારણ કે= 1) આ રીતે લખી શકાય છે.

બહુપદીને + ઓછો (-) નિશાનીથી છૂટા પડતા અનેક પદો હોય છે. બહુપદીના પદ કે પદોમાં જે પદની ઘાત સૌથી મોટી હોય, તે ઘાત બહુપદીની ઘાત કહેવાય છે.

$$3x^4y^3 + 7\,xy^5 - 5x^3y^2 + 6xy$$

તેને અનુક્રમે 7, 6, 5, અને 2 ઘાત પદો છે જે પૈકી 7 સૌથી વધુ છે તેથી આ બહુપદીના ઘાત 7 છે.

જે બહુપદીની ઘાત 2 હોય , તેને વર્ગાત્મક બહુપદી કહેવાય છે. દાખલા તરીકે $3 - 5x + 4x^2$ અને $x^2 + xy + y^2$ એ વર્ગાત્મક બહુપદીઓ છે.

નોંધો કે શૂન્ય સિવાયની અચળ બહુપદીની ઘાત શૂન્ય લેવામાં આવે છે.

બહુપદીના પદોના ચલ (ચલો) ના સહગુણકો શૂન્ય હોય તો તે બહુપદીને શૂન્ય બહુપદી કહે છે. શૂન્ય બહુપદીની ઘાત વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવી નથી.

3.5 બહુપદીઓનાં મૂલ્યો

આપણે બહુપદીમાં આવેલા ચલની આપેલી કિંમત મૂકીને બહુપદીનું મૂલ્ય શોધી શકીએ. ધ્યાનમાં રાખો કે આપણે બહુપદીઓને એક ચલ સુધી મર્યાદિત કરીએ છીએ.

બહુપદી $3x^2 - x + 2$ for $x = 2$ લઈ તેનું મૂલ્યાંકન કરવાનો સોપાનો

સોપાન 1: આપેલ ચલની કિંમત આપેલ ચલના સ્થાને મૂકો

$x = 2$, હોવાથી $3 \times (2)^2 - 2 + 2$

સોપાન 2: સંખ્યાત્મક અભિવ્યક્તિનું સાદું રૂપ આપો.

$3 \times (2)^2 - 2 + 2 = 3 \times 4 = 12$

જો $x = 2$, તો $3x^2 - x + 2 = 12$ થાય.

ચલો આપણે બીજું ઉદાહરણ જોઈએ .

ઉદાહરણ 3.6: કિંમત શોધો .

(i) $1 - x^5 + 2x^6 + 7\,x$ હોય તો $x = \frac{1}{2}$

(ii) $5x^3 + 3x^2 - 4x - 4$ હોય તો $x = 1$

ઉકેલ : (i) $x = \frac{1}{2}$,લેતાં આપેલ બહુપદીનું મૂલ્ય નીચે પ્રમાણે છે.

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^6 + 7 \times \frac{1}{2}$$

$$= 1 - \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{7}{2}$$

$$= \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

(ii) $x = 1$, *લેતાં આપેલ બહુપદી*

$5 \times (1)^3 + 3 \times (1)^2 - 4 \times$

$1 - 4 = 5 + 3 - 4 - 4$

$= 0$

$x = 1$ *એ આપેલ બહુપદીનું શૂન્ય છે.*

3.6 તમારી પ્રગતિ ચકાસો

(1) નીચેના દરેક એક પદની ઘાત કહો.

(II) $\frac{18}{5}x^7$ (II) $\frac{7}{8}y^3$ (III) 10 X (IV) 27

2. *નીચેની દરેક એકપદીઓને ઘાતાના અડધા ક્રમમાં લખો.*

$-3x^6, \frac{2}{9}x^2, 9x, -25x^3, 2.5$

3. *નીચેની દરેક બહુપદીની ઘાત નક્કી કરો .*

(i) $5x^6y^4 + 1$ (ii) $10^5 + xy^3$ (iii) $x^2 + y^2$ (iv) $x^2y + xy^2 - 3xy + 4$

4. *ચલની દર્શાવેલી કિંમત માટે નીચેની દરેક બહુપદીનું મૂલ્ય શોધો.*

(i) $x^2 - 25$ for $x = 5$ (ii) $x^2 + 3x - 5$ for $x = -2$

(iii) $\frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{5}x^2 - \frac{7}{5}$ for $x = -1$ (iv) $2x^3 - 3x^2 - 3x + 12$ for $x = -2$

5. $x = 2$ *અને* $x = 3$ *બહુપદીઓ* $x^2 - 5x + 6$ *નું શૂન્ય છે કે કેમ તે ચકાસો .*

3.7 બહુપદીઓના સરવાળા અને બાદબાકી

બહુપદીમાં સમજાતીય અને વિજાતીય પદોનો સમાવેશ થાય છે તેનાથી તમે મહિતીગાર છો. બહુપદીઓના સરવાળામાં

આપણે તેમનાં સમજાતીય પદોનો એકબીજાની સાથે સરવાળો કરીએ છીએ તેજરીતે એક બહુપદીમાંથી બીજી બહુપદી બાદ કરતાં આપણે એકસમજાતીય પદમાંથી બાદ કરીએ છીએ હવે પ્રશ્ન એ થાય છે કે આપણે સમજાતીય પદોનાં સરવાળો અને બાદબાકી કેવી રીતે કરીએ છીએ ? ચાલો એક ઉદાહરણ લઈએ .

$$5 \times 6 + 5 \times 7 = 5 \times (6 + 7)$$

$$6 \times 5 + 7 \times 5 = (6 + 7) \times 5$$

$$\begin{aligned} 2x + 3x &= 2 \times x + 3 \times x \\ &= (2 + 3) \times x \\ &= 5 \times x \\ &= 5x \end{aligned}$$

તેજરીતે

$$2xy + 4\,xy = (2 + 4)\,xy = 6xy$$

અને $3x^2y + 8x^2y = (3 + 8)x^2y = 11x^2y$

તેજરીતે

$$7 \times 5 - 6 \times 5 = (7 - 6) \times 5 = 1 \times 5$$

$$5y - 2y = (5 - 2) \times y = 3y$$

અને $9x^2y^2 - 5x^2y^2 = (9 - 5)x^2y^2 = 4x^2y^2$

ઉપરની વિગતને ધ્યાનમાં લેતાં આપણે તારવીએ કે ,

1. બે કે તેથી વધારે સમજાતીય પદોનો સરવાળો એ એવું સમજાતીય પદ છે જેનો સાંખિક સહ ગુણક સજાતીય પદોનો સહગુણકોના સરવાળા જેટલો હોય છે.

2. બે સજાતીય પદોની બાદબાકી એ એવું સજાતીયપદ છે જેનો સાંખ્યિક સહગુણક બે સજાતીય પદોના સાંખ્યિક સહ ગુણકોની બાદબાકી જેટલો હોય છે.

તેથી બે કે તેથી વધારે બહુપદીઓનો સરવાળો કરવામાટે આપણે નીચેનાં સોપાનો (ધ્યાનમાં) લઈશું.

સોપાન- 1 આપેલ બહુપદીઓના સહગુણકોના એકબીજાસાથે સમૂહ બનાવો (જૂથ બનાવો)

સોપાન- 2 આપેલ બહુપદીઓનો સરવાળો મેળવવા માટે સમજાતીય પદોનો એકબીજા સાથે સરવાળો કરો.

ઉદાહરણ 3.8: Add $-3x + 4$ અને $2x^2 - 7x - 2$ નો સરવાળો

ઉકેલ : $(-3x + 4) + (2x^2 - 7x - 2)$

$$\begin{aligned} &= 2x^2 + (-3x - 7x) + (4 - 2) \\ &= 2x^2 + (-3 - 7)x + 2 \\ &= 2x^2 + (-10)x + 2 \\ &= 2x^2 - 10x + 2 \end{aligned}$$

$$(-3x + 4) + (2x^2 - 7x - 2) = 2x^2 - 10x + 2$$

બહુપદીઓનો સરવાળો ઘણી સફળતાથી કરી શકાય જો..

(i) આપેલ બહુપદીઓને એવી રીતે ગોઠવવામાં આવે કે તેમનાં સજાતીય પદો એક ઉભી હરોળમાં આવે અને

(ii) દરેક હરોળના (સજાતીય પદોના ગ્રુપના) સહગુણકોનો સરવાળો કરવામાં આવે છે.

$$\begin{array}{l} \quad\;\; -3x + 4 \\ 2x^2 - 7x - 2 \\ 2x^2 + (-7-3)x + (4-2) \end{array}$$

$$(-3x + 4) + (2x^2 - 7x - 2) = 2x^2 - 10x + 2$$

ઉદાહરણ 3.9: $5x + 3y - \frac{3}{4}$ અને $-2x + y + \frac{7}{4}$

ઉકેલ : $5x + 3y - \frac{3}{4}$

$$-2x + y + \frac{7}{4}$$

$$3x + 4y + \left(\frac{7}{4} - \frac{3}{4}\right)$$

$$= 3x + 4y + 1$$

$$\left(5x + 3y - \frac{3}{4}\right) + \left(-2x + y + \frac{7}{4}\right) = 3x + 4y + 1$$

ઉદાહરણ 3.10: $\frac{3}{2}x^3 + x^2 + x + 1$ અને $x^4 - \frac{x^3}{2} - 3x + 1$

ઉકેલ : $\frac{3}{2}x^2 + x^2 + x + 1$

$$+x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 3x + 1$$

$$x^4 + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)x^3 + x^2 + (1-3)x + (1+1)$$

$$= x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 2$$

$$\therefore \left(\frac{3}{2}x^2 + x^2 + x + 1\right) + \left(x^4 - \frac{x^3}{2} - 3x + 1\right) = x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 2$$

એક બહુપદીમાંથી બીજી બહુપદી બાદ કરવા માટે આપણે ત્રણ સોપાનો માંથી પસાર થવું પડશે.(ત્રણ સોપાનો પ્રમાણે કાર્ય કરવું પડશે.)

સોપાન -1 આપેલ બહુપદીઓ એવી રીતે ગોઠવો કે સજાતીય પદો એક ઉભી હરોળમાં આવે .

સોપાન -2 જે પદાવલી બાદ કરવાની છે તેના દરેક પદની નિશાની બદલો (એટલે કે + વત્તાનું - ઓછા અને ઓછા (-) નું વત્તા (+) કરો)

ઉદાહરણ **3.11:** $-4x^2+3x+\frac{2}{3}$ અને $9x^2-3x-\frac{2}{7}$.

ઉકેલ: $9x^2-3x-\frac{2}{7}$

$$-4x^2+3x+\frac{2}{3}$$

$$+ \quad - \quad -$$

$$(9+4)x^2+(-3-3)x+\left(-\frac{2}{7}-\frac{2}{3}\right)$$

$$=13x^2-6x-\frac{20}{21}$$

$$\therefore\left(9x^2-3x-\frac{2}{7}\right)-\left(-4x^2+3x+\frac{2}{3}\right)=13x^2-6x-\frac{20}{21}$$

ઉદાહરણ **3.12:** Subtract $3x-5x^2+7+3x^3$ from $2x^2-5+11x-x^3$.

ઉકેલ : $-x^3+2x^2+11x-5$

$$3x^3-5x^2+3x+7$$

$$- \quad + \quad - \quad -$$

$$(-1-3)x^3+(2+5)x^2+(11-3)x+(-5-7)$$

$$=-4x^3+7x^2+8x-12$$

$$\backslash\ (2x^2-5+11x-x^3)-(3x-5x^2+7+3x^3)=-4x^3+7x^2+8x-12$$

ઉદાહરણ **3.13:** Subtract $12xy-5y^2-9x^2$ **અને** $15xy+6y^2+7x^2$.

ઉકેલ : $15xy+6y^2+7x^2$

$$12xy-5y^2-9x^2$$

$$- \quad + \quad +$$

$$3xy+11y^2+16x^2$$

આમ $(15xy + 6y^2 + 7x^2) - (12xy - 5y^2 - 9x^2) = 3xy + 11y^2 + 16x^2$

પદાવલીઓને ઉભી હરોળમાં ગોઠવ્યા સિવાય પણ આપણે સીધીજ બાદબાકી નીચે પ્રમાણે કરી શકીએ.

$(15xy + 6y^2 + 7x^2) - (12xy - 5y^2 - 9x^2)$

$= 15xy + 6y^2 + 7x^2 - 12xy + 5y^2 + 9x^2$

$= 3xy + 11y^2 + 16x^2$

આજ રીતે આપણે બે થી વધારે બહુપદીઓનો સરવાળો કરી શકીએ .

ઉદાહરણ3.14: $3x + 4y - 5x^2$, $5y + 9x$ અને $4x - 17y - 5x^2$ નો સરવાળો કરો.

ઉકેલ ÷ :

$$\begin{array}{l} 3x + 4y - 5x^2 \\ 9x + 5y \\ 4x - 17y - 5x^2 \\ \hline 16x - 8y - 10x^2 \\ \hline \end{array}$$

$(3x + 4y - 5x^2) + (5y + 9x) + (4x - 17y - 5x^2) = 16x - 8y - 10x^2$

ઉદાહરણ3.15: $3x^2 - 8x + 11, - 2x^2 + 12x - 4x^2 + 17$ ના સરવાળા માંથી $x^2 - x - 1$ બાદ કરો .

ઉકેલ : પ્રથમ આપણે $3x^2 - 8x + 11, - 2x^2 + 12x$ અને $- 4x^2 + 17$ નો સરવાળો કરીએ.

$$\begin{array}{rrr} 3x^2 & - 8x & + 11 \\ - 2x^2 & + 12x & \\ - 4x^2 & & + 17 \\ \hline - 3x^2 & + 4x & + 28 \\ \hline \end{array}$$

હવે આપણે આ સરવાળા માંથી $x^2 - x - 1$ બાદ કરીએ.

$$\begin{array}{rrr} - 3x^2 & + 4x & + 28 \\ x^2 & - x & - 1 \\ - & + & + \\ \hline - 4x^2 & + 5x & + 29 \end{array}$$

તેથી માર્ગનું પરિણામ $- 4x^2 + 5x + 29$.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 3.3

1. *નીચેની બહુપદીઓની જોડના સરવાળા કરો.*

(i) $\frac{2}{3}x^2 + x + 1; \quad \frac{3}{7}x^2 + \frac{1}{4}x + 5$

(ii) $\frac{7}{5}x^3 - x^2 + 1; \quad 2x^2 + x - 3$

(iii) $7x^2 - 3x + 4y; \quad 3x^3 + 5x^2 - 4x + \frac{7}{3}y$

(iv) $2x^3 + 7x^2y - 5xy + 7; \; -2x^2y + 7x^3 - 3xy - 7$

2. *સરવાળો કરો .*

(i) $x^2 - 3x + 5, \; 5 + 7x - 3x^2$ *અને* $x^2 + 7$

(ii) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{8}x - 5, \; \frac{2}{3}x^2 + 5 + \frac{1}{8}x$ *અને* $-x^2 - x$

(iii) $a^2 - b^2 + ab, \; b^2 - c^2 + bc$ *અને* $c^2 - a^2 + ca$

(iv) $2a^2 + 3b^2, 5a^2 - 2b^2 +$ *અને* $- 6a^2 - 5ab + b^2$

3. *બાદબાકી કરો.*

(i) $7x^3 - 3x^2 + 2$ *માંથી* $x^2 - 5x + 2$

(ii) $3y - 5y^2 + 7 + 3y^3$ *માંથી* $2y^2 - 5 + 11y - y^3$

(iii) $2z^3 + 7z - 5z^2 + 2$ *માંથી* $5z + 7 - 3z^2 + 5z^3$

(iv) $12x^3 - 3x^2 + 11x + 13$ *માંથી* $5x^3 + 7x^2 + 2x - 4$

4. $4a - b - ab + 3$ *અને* $3a - 5b + 3ab \;\; 2a + 4b - 5ab$ *ના સરવાળા માંથી બાદ કરો .*

3.8 બહુપદીઓના ગુણાકાર

એક એકપદીનો બીજી એકપદી સાથે ગુણાકાર કરવા માટે આપણે ઘાતાંકોના અને ચિહ્નોના નિયમોને અનુસરીએ છીએ.

ઉદાહરણ

$$3a \times a^2b^2c^2 = (3 \times 1)\, a^{2+1}\, b^2\, c^2$$
$$= 3a^3b^2c^2$$

$$-5x \times 2xy^3 = (-5 \times 2)\, x^{1+1}\, y^3$$
$$= -10\, x^2y^3$$

$$-\frac{1}{2}y^2z \times \left(-\frac{1}{3}\right)yz = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)y^{2+1}z^{1+1}$$

$$= \frac{1}{6}y^3z^2$$

બહુદીનો એક પદી સાથે ગુણાકાર કરવા માટે આપણે એક બહુપદીના દરેક પદને એક પદી સાથે ગુણીએ છીએ ઉદાહરણ તરીકે .

$$x^2y \times (-y^2 + 2xy + 1)$$
$$= x^2y \times (-y^2) + (x^2y) \times 2xy + (x^2y) \times 1$$
$$= -x^2y^3 + 2x^3y^2 + x^2y$$

એક બહુપદીનો બીજી બહુપદી સાથેનો ગુણાકાર કરવા માટે આપણે એક બહુપદીના લદરેક પદને બીજી બહુપદીના દરેક પદ સાથે ગુણીએ છીએ પછી પદોનો સરવાળો કરી સાદુરૂપ આપીએ છીએ. બહુપદીનાં પદોની ગોઠવણી ચલના ઘાતાંકના ચડતા ક્રમમાં અથવા ઉતરતા ક્રમમાં ગોઠવવાનું સલાહ ભરેલું છે. (ટૂંકમાં પદોને ચલના ઘાતાંકના ચડતા અથવા ઉતરતા ક્રમમાં લખવા જોઈએ.)

દાખલા તરીકે .

$$(2n + 3)(n^2 - 3n + 4)$$
$$= 2n \times n^2 + 2n \times (-3n) + 2n \times 4 + 3 \times n^2 + 3 \times (-3n) + 3 \times 4$$
$$= 2n^3 - 6n^2 + 8n + 3n^2 - 9n + 12$$
$$= 2n^3 - 3n^2 - n + 12$$

આ અંગે કેટલાંક વધુ ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 3.16: $(0.2x^2 + 0.7\,x + 3)$ *અને* $(0.5\,x^2 - 3x)$

ઉકેલ : $(0.2x^2 + 0.7\,x + 3) \times (0.5\,x^2 - 3x)$

$$= 0.2x^2 \times 0.5\,x^2 + 0.2x^2 \times (-3x) + 0.7\,x \times 0.5\,x^2 + 0.7\,x \times (-3x) + 3 \times 0.5x^2 + 3\times(-3x)\,)$$

$$= 0.1x^4 - 0.60x^3 + 0.35x^3 - 2.1x^2 + 1.5\,x^2 - 9x$$

$$= 0.1\,x^4 - 0.25\,x^3 - 0.6x^2 - 9x$$

ઉદાહરણ 3.17: *નો ગુણાકાર કરો*

$2x - 3 + x^2$ by $1 - x$.

ઉકેલ : બહુપદી ને ઘાતાંકના ઉતરતા ક્રમમાં ગોઠવતાં

$(x^2 + 2x - 3) \times (-x + 1)$

$= x^2 \times (-x) + x^2 \times (1) + 2x \times (-x) + 2x \times 1 - 3 \times (-x) - 3 \times 1$

$= -x^3 + x^2 - 2x^2 + 2x + 3x - 3$

$= -x^3 - x^2 + 5x - 3$

વૈકલ્પિતરીતે :

$x^2 \quad + 2x - 3$	એક બહુપદી
$-x \;\; + 1$	બીજી બહુપદી
$-x^3 - 2x^2 \;\; + 3x$	
$+ x^2 \quad + 2x - 3$	અપૂર્ણ ગુણાકાર
$-x^3 - x^2 \;\; + 5x \;\; - 3$	(ગુણાકારનું પરિણામ.)
	ગુણાકાર

3.9 બહુપદીઓનો ભાગાકાર

એક પદીનો બીજી પદીના ભાગાકાર કરવામાં આવે આપણે પ્રથમ સાંખ્યિક સહગુણકો અને ઘાતાંકના નિયમોનો ઉપયોગ કરીને અચળ પદોનો ભાગાકાર અલગ-અલગ રીતે કરીએ છીએ. પદી આ ભાગાકારને ગુણાકાર કરીએ છીએ.

(i) $$25x^3y^3 \div 5x^2y = \frac{25x^3y^3}{5x^2y} = \frac{25}{5} \times \frac{x^3}{x^2} \times \frac{y^3}{y}$$

$$= 5 \times x^1 \times y^2$$

$$= 5xy^2$$

(ii) $$-12ax^2 \div 4x = -\frac{12ax^2}{4x} = \frac{-12}{4} \times \frac{a}{1} \times \frac{x^2}{x}$$

$= -3$ક્ટ

બહુપદીને એક પદી વડે ભાગવા માટે આપણે બહુપદીના દરેક પદને

(i) $$\left(15x^3 - 3x^2 + 18x\right) \div 3x = \frac{15x^3}{3x} - \frac{3x^2}{3x} + \frac{18x}{3x}$$

$$= 5x^2 - x + 6$$

(ii) $$\left(-8x^2 + 10x\right) \div \left(-2x\right) = \frac{-8x^2}{-2x} + \frac{10x}{-2x}$$

$$= \left(\frac{-8}{-2}\right)\left(\frac{x^2}{x}\right) + \frac{10}{(-2)} \times \frac{x}{x}$$

$$= 4x - 5$$

એક બહુપદીનો બીજી બહુપદી સાથે ભાગાકાર કરવાની પ્રક્રિયા અંકગણિતમાં જે રીતે ભાગાકાર કરવામાં આવે છે તેજ રીતે કરવામાં આવે છે 20ને 3 વડે ભાગતી વખતે કરેલી પ્રક્રિયા યાદ કરો.

$$\begin{array}{r} 6 \\ 3\overline{)20} \\ \underline{18} \\ 2 \end{array}$$

ભાજક → 3; ભાગાકાર ← 6; ભાજ્ય ← 20; શેષ ← 18

એક બહુપદીનો બીજી બહુપદી

$2x^2 + 5x + 3$ by $2x + 3$.

સોપાન 1: બંને બહુપદીઓના પદોને ચલોના ઘાતાંકના ઉતરતા ક્રમમાં ગોઠવો. (બંનેમાં સમાન રીતે)

$$2x+3\overline{)2x^2+5x+3}$$

સોપાન 2: ભાગાકારનું પ્રથમ પદ મેળવવા માટે ભાજકના પ્રથમ પદને ભાજકના પ્રથમપદ વડે ભાગો.

$$\begin{array}{r} x \\ 2x+3\overline{)2x^2+5x+3} \end{array}$$

સોપાન 3: શેષ (પછીનું ભાજક) મેળવવા માટે ભાગાકારના પ્રથમ પદ વડે ભાજકના બધાજ પદો સાથે ગુણાકાર કરો અને પરિણામને ભાજકમાંથી બાદ કરો.

$$\begin{array}{r} x \\ 2x+3\overline{)2x^2+5x+3} \\ 2x^2+3x \\ \underline{-\quad -} \\ 2x+3 \end{array}$$

સોપાન 4: પરિણામે મળતા ભાજકના પ્રથમ પદને ભાજકના પ્રથમ પદ વડે ભાગો

સોપાન 5: ભાજકના બધા પદોને ભાગાકારના બીજા પદ વડે ગુણો અને પરિણામને ભાગાકારના બીજા પદ તરીકે દર્શાવો.

સોપાન 6: સોપાન 4 અને સોપાન 5ની પ્રક્રિયા જ્યાં સુધી શેષ શૂન્ય ન થાય અથવા શેષ સ્વરૂપે રહેલી બહુપદીનાં ગુરુત્તમ ઘાતાંક ભાજકના ઘાતાંક કરતાં નાનો ન થાય ત્યાં સુધી આગળ ને આગળ ચાલુ રાખો.

$$\begin{array}{r} x+1 \\ 2x+3\overline{)2x^2+5x+3} \\ 2x^2+3x \\ \underline{-\quad -} \\ 2x+3 \\ 2x+3 \\ \underline{-\quad -} \\ \underline{0} \end{array}$$

ઉપરના ઉદાહરણમાં આપણે ભાગાકાર $x+1$ અને શેષ 0 (શૂન્ય) મળી.

આપણે બીજા કેટલાંક વધારે ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 3.18 : $x^3 - 1$ ને $x - 1$.

$$\begin{array}{r} x^3 \quad -x^2 \\ - \quad\;\; + \\ \hline x^2 - 1 \\ x^2 \quad -x \\ - \quad\;\; + \\ \hline x - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x \;-\; 1 \\ - \quad + \\ \hline \quad 0 \\ \hline \end{array}$$

ભાગાકાર $x^2 + x + 1$ અને શેષ 0 (શૂન્ય) છે.

ઉદાહરણ 3.19: $5x - 11 - 12x^2 + 2x^3$ અને $2x - 5$ વડે ભાગો.

ચલ x ના

ભાજકને ઘાતાંકના ઉતરતા ક્રમમાં દર્શાવતાં $2x^3 - 12x^2 + 5x - 11$ મળે.

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - \frac{7}{2}x - \frac{25}{4} \\ \hline 2x-5 & 2x^3 - 12x^2 + 5x - 11 \\ & 2x^3 - 5x^2 \\ & - \quad + \\ & \quad -7x^2 + 5x - 11 \\ & \quad -7x^2 + \frac{35}{2}x \\ & \quad + \qquad - \\ & \qquad -\frac{25}{2}x - 11 \\ & \qquad -\frac{25}{2}x + \frac{125}{4} \\ & \qquad + \qquad - \\ & \qquad\qquad -\frac{169}{4} \end{array}$$

ભાગાકાર $x^2 - \frac{7}{2}x - \frac{25}{4}$ અને શેષ $-\frac{169}{4}$ છે.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 3.4

1. ગુણાકાર કરો.

   (i) $9b^2c^2$ સાથે $3b$ (ii) $5x^3y^5$ સાથે $-2xy$

   (iii) $2xy + y^2$ સાથે $-5x$ (iv) $x + 5y$ સાથે $x - 3y$

2. ભાગાકાર શોધો.

(i) $x^5y^3 \div x^2y^2$ (ii) $-28y^7z^2 \div \left(-4y^3z^2\right)$

(iii) $\left(a^4 + a^3b^5\right) \div a^2$ (iv) $-15b^5c^6 \div 3b^2c^4$

3. ભાગાકાર કરો અને ભાગફળ અને શેષ જણાવો.

(i) $x^2 - 1$ સાથે y $x + 1$ (ii) $x^2 - x + 1$ સાથે $x + 1$

(iii) $6x^2 - 5x + 1$સાથે $2x - 1$ (iv) $2x^3 + 4x^2 + 3x + 1$ સાથે $x + 1$

સારાંશ

- સાંખ્યિક સંખ્યા (અજ્ઞાત જથ્થો) જેને જુદા જુદા મૂલ્યો હોઈ શકે તે ચલ કહેવાય છે (તેને ચલ કહે છે.)
- અચલ ને ચોક્કસ (નિશ્ચિત) મૂલ્ય હોય છે.
- બૈજિક પદાવલીએ સંખ્યાઓ, ચલો, આંકગણિતીય પ્રક્રિયાઓ (સંખ્યાશાસ્ત્રીય પ્રક્રિયયાઓ) નો સમૂહ છે. તેને + કે - થી જોડાયેલાં એક કે વધારે પદો હોય છે.
- $2xy^2$ નો સાંખ્યિક સહગુણક 2 છે . x નો 2y સહગુણાક છે અને y નો સહગુણ $2x$ છે
- ઘન x નો સાંખ્યિક સહગુણક (x+1) છે અને (- x) નો સાંખ્યિક સહ ગુણક (-1) છે.
- બૈજિક પદાવલી કે જેમાં ચલ (ચલો) છેદમાં ન હોય અને ચલ (ચલ)ના ઘાતાંક પૂર્ણ સંખ્યામાં હોય અને જુદા જુદા પદોના સાંખ્યિક સહ ગુણાકો વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય, તે પદાવલી બહુપદી કહેવાય છે.
- એક ચલ x માં બહુપદીનું પ્રમાણિત સ્વરૂપ

  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ (અથવા ઉલટા ક્રમમાં લખાયું હોય) $a_0, a_1, a_2, ... a_n$ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ અને ઘાત 3 જ્યાં $n, n-1, n-2, ..., 3, 2, 1$ એ પૂર્ણ સંખ્યાઓ છે.
- બૈજિક પદાવલી અથવા બહુપદીમાં જો એક પદ હોય, તો તેને એકપદી અને જો તેમાં બે પદ હોય તો તેને દ્વિપદી અવે જો તેમાં ત્રણ પદ હોય તો તેને ત્રિપદી કહે છે. બૈજિક પદાવલી નાં પદો કે જેમાં ચલ (ચલો) એક સમાન (એકજ) હોય અને પદોના ઘાતાંકે પણ એક સરખા હોય, તો તે પદો સમજાતીય પદો કહેવાય . જે પદો સમજાતીય નથી તે વિજાતીય પદો કહેવાય છે.
- બહુપદીના પદ કે પદોમાં જે પદની ઘાત સોપી મોટી હોય, તે જ ઘાત બહુપદીની ઘાત કહેવાય છે.
- શૂન્ય સિવાયની અચળ બહુપદીની ઘાત શૂન્ય છે.
- બૈજિક પદાવલી કે બહુપદીમાં આવેલા ચલ (ચલો)ની આપેલી સાંખ્યિક કિંમત મૂકવાની પ્રક્રિયાને બૈજિક પદાવલી કે બહુપદીનું મૂલ્ય કહે છે.
- ચલ કે ચલોની કિંમત કે જેને લીધે બહુપદીનું મૂલ્ય 0 (શૂન્ય) થાય છે તેને બહુપદીનું શૂન્ય (બહુપદીનાં શૂન્યો કહેવાય છે.
- બે સજાતીય પદોનો સરવાળો એ સજાતીયપદ છે જેનાં સાંખ્યિક સહગુણક બે સજાતીય પદોના સાંખ્યિક સહ ગુણકોની બાદબાકી (તફાવત) જેટલો હોય છે.
- બહુપદીનો એક પદી સાથે ગુણાકાર કે ભાગાકાર કરવા માટે આપણે ઘાતાંકોના અને ચિહ્નનોના નિયમોને

ધ્યાનમાં રાખીને આપણે દરેક પદોનો એક પદી સાથે ગુણાકાર કે ભાગાકાર અલગ અલગ રીતે કરીએ છીએ.

- એક બહુપદીનાં બીજી બહુપદી સાથેનો ગુણાકાર કરવા આપણે એક બહુપદીના દરેક પદને, બીજી બહુપદીના દરેક પદ સાથે ગુણીએ છીએ. પછી પદોનો સરવાળો કરી સાદું રૂ આપીએ છીએ. એક બહુપદીનો બીજી બહુપદી વડે ભાગાકાર કરવા માટે આપણે બેને બહુપદીઓના પદોને તેમના ચલના ઘાતાંકો ઉત્તરતા ક્રમમાં એક સરખી રીતે ગોઠવીએ છીએ. પછી અંકગણિતમા સંખ્યાના ભાગાકાર માટેના જે સોપાનો લઈએ છીએ તેજ સોપાનો લેવામાં આવે છે.

સત્રાંત સ્વાધ્યાય

1. સાચા વિકલ્પમાટે (✓)ની નિશાની કરો.

(i) $4x^4y^2$ માં x^4 નો સહગુણક છે.

(A) 6 (B) y^2 (C) $6y^2$ (D) 4

(ii) $-x^2y^4$ બહુપદીનો સાંખ્યિક સહગુણક છે.

(A) 2 (B) 6 (C) 1 (D) –1

(iii) નીચેની બૈજિક પદાવલીઓમાંથી કઈ પદાવલી બહુપદી છે ?

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}x^2-\sqrt{8}+3.7x$ (B) $2x+\frac{1}{2x}-4$

(C) $\left(x^2-2y^2\right)\div\left(x^2+y^2\right)$ (D) $6+\sqrt{x}-x-15x^2$

(iv) $1-\sqrt{2}a^2b^3-(7a)(2b)+\sqrt{3}b^2$ અભિવ્યક્તિમાં (પદાવલી) કેટલાં પદોનો સમાવેશ ?

(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2

(v) નીચેની પદાવલીઓમાંથી કઈ પદાવલી દ્વિપદી છે ?

(A) $2x^2y^2$ (B) $x^2 + y^2 – 2xy$

(C) $2 + x^2 + y^2 + 2x^2y^2$ (D) $1 – 3xy^3$

(vi) નીચેના પદોની જોડીઓમાંથી કઈ જોડી સજાતીય પદો ની છે.

(A) 2a, 2b (B) $2xy^3, 2x^3y$

(C) $3x^2y, \frac{1}{\sqrt{2}}yx^2$ (D) 8, 16 a

(vii) $x^2 – 2x – 15$ બહુપદીનું શૂન્ય છે.

(A) $x = – 5$ (B) $x = – 3$

(C) $x = 0$ (D) $x = 3$

(viii) The degree of the polynomial $x^3y^4 + 9x^6 – 8y^5 + 17$ is

(A) 7 (B) 17

(C) 5 (D) 6

2. ચલો અને પ્રક્રિયાઓની નિશાનીઓ વાપરીને નીચેની દરેક શાબ્દિક વિધાનને બૈજિક વિધાનને દર્શાવો.

(i) સંખ્યામાં તેજ સંખ્યા જેટલો વધારો થાયતો 6 થાય

(ii) કોઈ સંખ્યામાં ત્રણ ગણામાંથી 4 બાદ કરતાં 11 થાય

(iii) બે ક્રમિક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર 35 થાય છે

(iv) એક સંખ્યાનો $\frac{1}{2}$ ભાગ તે સંખ્યાના $\frac{1}{5}$ ભાગ કરતાં 2 વધારે છે.

3. નીચેની દરેક બહુપદીની ઘાત નક્કી કરો.

(i) 3^{27} (ii) $x + 7x^2y^2 - 6xy^5 - 18$ (iii) $a^4x + bx^3$ a અને d અચળ છે.

(iv) $c^6 - a^3x^2y^2 - b^2x^3y$ a,d, અને c અચળાંક છે

4. આપેલું મૂલ્ય બહુપદીનું શૂન્ય છે કેમ તે નક્કી કરો.

(i) $x^2 + 3x - 40;$ $x = 8$

(ii) $x^6 - 1$ $x = -1$

5. ચલની દર્શાવેલી કિંમત માટે દરેક બહુપદીનું મૂલ્ય શોધો.

(i) $2x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{5}x^5 + 7x^3$ at $x = \frac{1}{2}$

(ii) $\frac{4}{5}y^3 + \frac{1}{5}y^2 - 6y - 65$ at $y = -5$

6. n= 10 માટે $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ n= 10 ની કિંમત શોધો અને ખાતરી કરોકે પરિણામ પ્રથમ 10 પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના સરવાળ જેટલું છે.

7. સરવાળો કરો.

(i) $\frac{7}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^2 - 3x + \frac{7}{5}$ and $\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^2 - 3x + \frac{3}{5}$

(ii) $x^2 + y^2 + 4xy$ અને $2y^2 - 4xy$

(iii) $x^3 + 6x^2 + 4xy$ અને $7x^2 + 8x^3 + y^2 + y^3$

(iv) $2x^5 + 3x + \frac{2}{3}$ અને $-3x^5 + \frac{2}{5}x - 3$

8. બાદબાકી કરો.

(i) 0 માંથી $-x^2 + y^2 - xy$

(ii) $a + b - c$ માંથી $a - b + c$

(iii) $x^2 - y^2x + y$ માંથી $y^2x - x^2 - y$

(iv) $-m^2 + 3mn$ માંથી $3m^2 - 3mn + 8$

9. $x^2 + xy + y^2$ મેળવવા માટે $2x^2 + 3xy$?

10. $-13x + 5y - 8$ માંથી શું બાદકરીએ તો પરિણામ $11x - 16y + 7$ આવે ?

11. બે બહુપદીઓનો સરવાળો $x^2 - y^2 - 2xy + y - 7$.છે તેમાંથી એક બહુપદી જો $2x^2 + 3y^2 - 7y + 1$, હોય તો બીજી પદાવલી શોધો.

12. જો $A = 3x^2 - 7x + 8$, $B = x^2 + 8x - 3$ અને $C = -5x^2 - 3x + 2$,હોય, તો $B + C - A$ શોધો.

13. $3x - y - xy$ અને $3x - y + 2xy$ ના સરવાળામાંથી $-y - xy$

14. ગુણાકાર કરો.

(i) $a^2 + 5a - 6$ નો $2a + 1$ (ii) $4x^2 + 16x + 15$ નો $x - 3$

(iii) $a^2 - 2a + 1$ નો $a - 1$ (iv) $a^2 + 2ab + b^2$ નો $a - b$

(v) $x^2 - 1$ નો $2x^2 + 1$ (vi) $x^2 - x + 1$ નો $x + 1$

(vii) $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{6}$ નો $x - \frac{7}{4}$ (viii) $\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{4}x - 3$ નો $3x^2 + 4x + 1$

15. $(x^2 - xy + y^2)$ નો $(x + y)$ના ગુણાકાર માંથી $(x^2 + xy + y^2)$ અને $(x - y)$ નો ગુણાકાર બાદ કરો .

16. ભાગાકાર કરો અને દરેકમાં ભાગાકાર અને શેષ જણાવો.

(i) $8x^3 + y^3$ by $2x + y$ વડે (ii) $7x^3 + 18x^2 + 18x - 5$ by $3x + 5$ વડે

(iii) $20x^2 - 15x^3y^6$ by $5x^2$ વડે (iv) $35a^3 - 21a^4b$ by $(-7a^3)$ વડે

(v) $x^3 - 3x^2 + 5x - 8$ by $x - 2$ વડે (vi) $8y^2 + 38y + 35$ by $2y + 7$ વડે

તમારી પ્રગતિ ચકાસોના ઉત્તરો

3.1

1. (i) y; 1 (ii) x, y; $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 7$ (iii) x, y; $\frac{4}{5}$

(iv) x, y; $\frac{2}{5}, \frac{1}{2}$ (v) x, y; 2, –8 (vi) x; અચળ નથી

2. (i) 2 (ii) 2y (iii) $2x^2$

3. (i) $x - 3 = 15$ (ii) $x + 5 = 22$

4. (i) 2, abc (ii) a,b,c, 2 (iii) $x^2y, -2xy^2, -\frac{1}{2}$

(iv) $\frac{1}{8}x^3y^2$

5. (i) $-xy^2, +\frac{1}{3}y^2x$ (ii) $-3ab, +ab$ (iii) સમજાતીય પદો નથી .

6. (i) , (ii) અને (v)

7. એકપદી (ii) અન (vi);

દ્વિપદી (i) અને (v); ત્રિપદી : (iii) અને (iv)

3.2

1. (i) 7 (ii) 3 (iii) 1 (iv) 0

2. 2.5, 9x, $\frac{2}{9}x^2, -25x^3, -3x^6$

3. (i) 10 (ii) 4 (iii) 2 (iv) 3

4. (i) 0 (ii) –7 (iii) $-\frac{19}{15}$ (iv) 6

3.3

1. (i) $\frac{23}{11}x^2+\frac{5}{4}x+6$ (ii) $\frac{7}{5}x^3+x^2+x-2$

(iii) $3x^3+12x^2-7x+\frac{19}{3}y$ (iv) $9x^3+5x^2y-8xy$

2. (i) $-x^2+4x+17$ (ii) 0

(iii) $ab+bc+ca$ (iv) a^2+2b^2-4ab

3. (i) $-7x^3+4x^2-5x$ (ii) $-4y^3+7y^2+8y-12$

(iii) $3z^3+2z^2-2z+5$ (iv) $-7x^3+10x^2-9x-17$

4. $a-ab-3$

3.4

1. (i) $27b^3c^2$ (ii) $-10x^4y^6$

(iii) $-10x^2y-5xy^2$ (iv) $x^2+2xy-15y^2$

2. (i) x^3y (ii) $7y^4$ (iii) $a^2 + ab^5$ (iv) $-5b^3c^2$
3. (i) $x - 1; 0$ (ii) $x - 2; 3$ (iii) $3x - 1; 0$ (iv) $2x^2 + 2x + 1; 0$

સત્રાંત સ્વાધ્યાયના ઉત્તરો

1. (i) C (ii) D (iii) A (iv) B (v) D (vi) C (vii) B (viii) A
2. (i) $y + y = 6$ (ii) $3y - 4 = 11$ (iii) $z(z + 2) = 35$ (iv) $\frac{x}{3} - \frac{x}{5} = 2$
3. (i) 0 (ii) 6 (iii) 3 (iv) 4
4. (i) No (ii) Yes
5. (i) $\frac{37}{24}$ (ii) 0
6. 55
7. (i) $3x^3 + x^2 - 6x + 2$ (ii) $x^2 + 3y^2$

   (iii) $9x^3 + 13x^2 + 4xy + y^2 + y^3$ (iv) $-x^5 + \frac{17}{5}x - \frac{7}{3}$
8. (i) $x^2 - y^2 + xy$ (ii) $2c - 2b$

   (iii) $2y^2x - 2x^2 - 2y$ (iv) $4m^2 - 6mn + 8$
9. $x^2 + 2xy - y^2$
10. $-24x + 21y - 15$
11. $-x^2 - 4y^2 - 2xy + 8y - 8$
12. $-7x^2 + 12x - 9$
13. $2xy - y; 2y$
14. (i) $2a^3 + 11a^2 - 7a - 6$ (ii) $4x^3 + 4x^2 - 33x - 45$

    (iii) $a^3 - 3a^2 + 3a - 1$ (iv) $a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$

    (v) $2x^4 - x^2 - 1$ (vi) $x^3 + 1$

    (vii) $x^3 - \frac{13}{12}x^2 - \frac{x}{3} - \frac{35}{24}$ (viii) $2x^4 + \frac{77}{12}x^3 - \frac{10}{3}x^2 - \frac{43}{4}x - 3$
15. $-2y^3$
16. (i) $4x^2 - 2xy + y^2; 0$ (ii) $9x^2 - 9x + 21; -110$

    (iii) $4 - 3xy^6; 0$ (iv) $-5 + 3ab; 0$

    (iv) $x^2 - x + 3; -2$ (v) $4y + 5; 0$

4

વિશિષ્ટ ગુણનફળ અને અવયવીકરણ

અગાઉના પાઠમાં બૈનિક પદાવલીઓ ખાસ કરીને બહુપદીઓના ગુણાકાર વિશે તમે શીખી ગયા છો. બીજગણિતના અભ્યાસમાં વારંવાર ઉદ્ભવતા ચોક્કસ ગુણાકારો આપણને જોવા મળે છે. જો આપણે તેમના વિશે વધારે (ઉંડાણ પૂર્વકનું) જ્ઞાન મેળવીએ તો એ ગુણાકારોમાં આપણે પુષ્કળ સમય અને મહેનત બચાવી શકીએ અને વાસ્તવમાં બધાં સોપાનો લખ્યા સિવાય આપણે ગુણાકારની પ્રક્રિયા કરી શકીએ. દા.ત.

જો તમે $(a + b)^2$, $(a – b)^2$, $(a + b)\ (a – b)$, $(a – b)^3$ *વગેરેના ગુણાકાર જાણતા હોય તો અનુક્રમે* 108×108, 97×97, 104×96, $99 \times 99 \times 99$, *ના જેવા ગુણાકાર સરળતાથી કરી શકો (સરળતાથી કરી શકાય) આવા ગુણાકાર (ગુણાનફૂપને વિશિષ્ટ ગુણનફળ (ગુણાકાર) કહેવામાં આવે છે.*

અવયવી કરણ એ a^2-b^2, a^3+$8b^3$, *ના જેવા ચોક્કસ ગુણાકારોના અવયવો પાડવાની ક્રિયા છે. આપણે એવી બહુપદીઓ કે જેના સહગુણકો પૂર્ણાંકો હોય તેવીજ બહુપદીના અવયવો પાડવાનું શીખીશું.*

આ પાઠમાં તમે કેટલાંક વિશિષ્ટ (ગુણાકારો) ગુણમફળ અને કેટલીક બહુપદીઓના અવયવીકરણ વિશે શીખશો. તદ્ઉપરાંત અવયવીકરણથી બહુપદીઓના ગુ.સા.અ અને લ.સા.અ. શોધતાં અને અંતમાં તમને સંમેય બૈજિક પદાવલી અને સંમયે બૈજિક પદાવલી પરની મૂળભૂત પ્રક્રિયાઓ અભિવ્યક્ત કરવાનું તમ શીખવીશું.

હેતુઓ :

આ પાઠનો અભ્યાસ કર્યા પછી તમે.

- *વિશિષ્ટ ગુણાકારો* (a+b)2, (a+b) (a-b), (x+a) (x+b) (a+b) (a2+ab+b2), (a-b) (a2+ab+b2), (a+b)3 *અને .... માટેના સૂત્રો લખી શકશો.*
- *સૂત્રોનો ઉપયોગ કરીને સંખ્યાના વર્ગ અને ઘન ગણી શકશો.*
- a^2-b^2, a^3+b^3 *સ્વરૂપની અભિવ્યક્તિનો સમાવેશ થતો હોય તેવી આપેલી બહુપદીના અવયવો પાડી શકશો.*

- મધ્યમપદના વિભાજન દ્વારા ax2+bx+c(a # 0) સ્વરૂપનો બહુપદીઓના અવયવો પાડી શકશો.
- અવયવીકરણની મદદથી ગુ.સા.અ. અને લ.સા.અ નક્કી કરી શકશો.
- એક કે બે ચલમાં સંમેય પદાવલીઓનાં ઉદાહરણ આપી શકશો.
- સંમેય પદાવલીઓ પર ચાર મૂળભૂત પ્રક્રિયાઓ કરી શકશો.

અપેક્ષિત પૂર્વજ્ઞાન

- સંખ્યા સંહતિ અને ચારમૂળભૂત પ્રક્રિયાઓ
- ઘાતાંકના નિયમો
- બહુપદી પરના ચાર મૂળભૂત પ્રક્રિયાઓ
- સંખ્યાઓના ગુ.સા.અ અને લ.સા.અ.
- પ્રાથમિક અને ઉચ્ચ પ્રાથમિક કક્ષાએ શીખેવેલી ભૂમિતિ અને માપનનું જ્ઞાન

4.1 વિશિષ્ટ ગુણનરૂપ (ગુણાકાર)

બીજ ગણિતમાં જે વારંવાર અભિવ્યક્ત થાય છે તેવા વિશિષ્ટ ગુણાકાર વિશે શીખીએ.

(1) $(a + b)^2$ શોધીએ.

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$

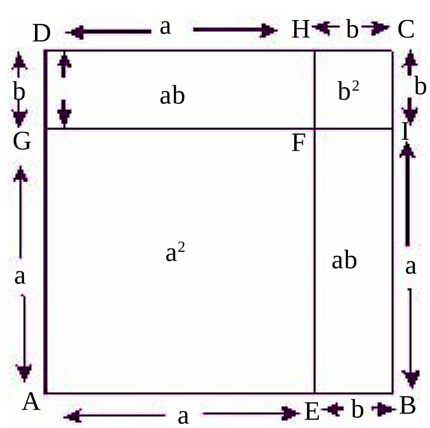
$= a(a + b) + b(a + b)$ (વિભાજનનો નિયમ)

$= a^2 + ab + ab + b^2$

$= a^2 + 2ab + b^2$

ભૌતિક ચકાસણી

જમીબાજુ દર્શાવેલી આકૃતિ તરફ ધ્યાન કેન્દ્રિત કરો.



(i) $(a + b)^2$ = ABCD ચોરસનું ક્ષેત્રફળ

= AEFG ચોરસનું ક્ષેત્રફળ +

EBIF લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ +

DGFH લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ +

CHFI ચોરસનું ક્ષેત્રફળ

$= a^2 + ab + ab + b^2$

$= a^2 + 2ab + b^2$

આમ $\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

(2) $(a - b)^2$ શોધીએ.

$(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$ [વિભાજનનો નિયમ]

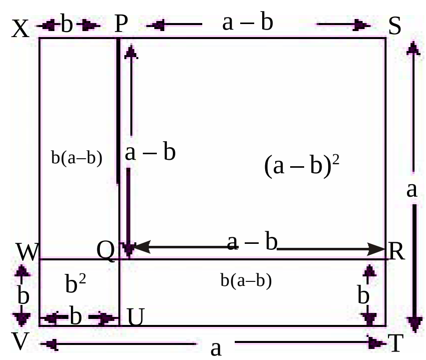
$= a(a - b) - b(a - b)$

$= a^2 - ab - ab + b^2$

$= a^2 - 2ab + b^2$

બીજી પદ્ધતિ (બીજી રીત) : $(a+b)^2$ *નો ઉપયોગ કરીને*

આપણે જાણીએ છીએ કે. a-b= a+c-b



$(a - b)^2 = [a + (-b)]^2$

$= a^2 + 2(a)(-b) + (-b)^2$

$= a^2 - 2ab + b^2$

ભૌતિક ચકાસણી :

નોંધ : PQRS *ક્ષેત્રફળને* PQRS *તરીકે દર્શાવાય*

$(a - b)^2 = PQRS$

$= STVX - [RTVW+PUVX-QUVX]$

$= a^2 - (ab + ab - b^2)$

$= a^2 - ab - ab + b^2$

$= a^2 - 2ab + b^2$

આમ $\mathbf{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

તારવણી

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .....(1)

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ .....(2)

પરિણામ (1) અને (૨) નો સરવાળો કરતાં.

$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2) = 2a^2 + 2b^2$

પરિણામ (1) અને (૨) ની બાદબાકી કરતાં.

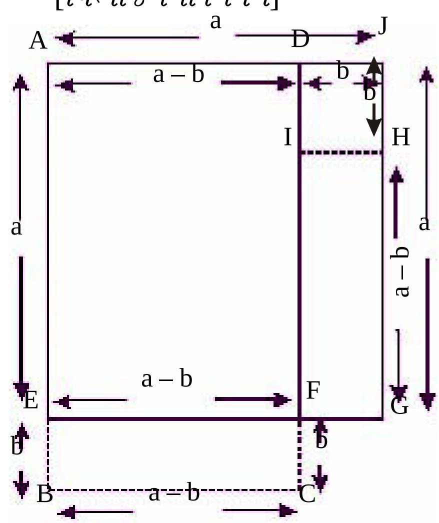
$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

(3) $(a + b)(a - b)$ નું ગુણનફળ મેળવીએ

$(a + b)(a - b) \quad = a(a - b) + b(a - b)$ [વિભાજનનો નિયમ]

$= a^2 - ab + ab - b^2$

$= a^2 - b^2$



ભૌમિતિક ચકાસણી :

જમણીબાજુ આપેલી આકૃતિનું નિરીક્ષણ કરો.

$(a + b)(a - b) = ABCD$

$= AEFD + EBCF$

$= AEFD + FGHI$

$= [AEFD + FGHI + DIHJ]$

$- DIHJ$

$= AEGJ - DIHJ$

$= a^2 - b^2$

આમ. $\quad$ $\mathbf{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$

બે સંખ્યાનો સરવાળો અને તેમના તફાવતના ગુણાકારની પ્રક્રિયા અંકશાસ્ત્રમાં (અંક ગણિત) માં ખૂબ ઉપયોગી છે.

દાખલા તરીકે $\quad 64 \times 56 = (60 + 4) \times (60 - 4)$

$= 60^2 - 4^2$

$= 3600 - 16$

$= 3584$

(4) હવે આપણે $(x + a)(x + b)$ નું ગુણાનફળ મેળવીએ.

$(x + a)(x + b) = x(x + b) + a(x + b)$ [વિભાજનનો નિયમ]

$= x^2 + bx + ax + ab$

$= x^2 + (a + b)x + ab$

આમ $\quad$ $\mathbf{(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab}$

નોંધ

તારણી (i) $\mathbf{(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab}$

(ii) $\mathbf{(x - a)(x + b) = x^2 + (b - a)x - ab}$

આ પરિણામોની ચકાસણી કરવાની મને સલાહ આપવામાં આવે છે.

(5) હવે આપણે $(ax + b)(cx + d)$ નું ગુણમફળ મેળવીએ.

$$(ax + b)(cx + d) = ax(cx + d) + b(cx + d)$$
$$= acx^2 + adx + bcx + bd$$
$$= acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

$$\mathbf{(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd}$$

તારવણી (i) $\mathbf{(ax - b)(cx - d) = acx^2 - (ad + bc)x + bd}$

(ii) $\mathbf{(ax - b)(cx + d) = acx^2 - (bc - ad)x - bd}$

તમને આ પરિણામ ચકાસવાની સલાહ આપવામાં આવે છે.

ઉપર દર્શાવેલાં વિશિષ્ટ ગુણનફળો પર આધારિત કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 4.1: નીચેનું ગુણનફળ મેળવો.

(i) $(2a + 3b)^2$ (ii) $\left(\frac{3}{2}a - 6b\right)^2$

(iii) $(3x + y)(3x - y)$ (iv) $(x + 9)(x + 3)$

(v) $(a + 15)(a - 7)$ (vi) $(5x - 8)(5x - 6)$

(vii) $(7x - 2a)(7x + 3a)$ (viii) $(2x + 5)(3x + 4)$

ઉકેલ :

(i) અહીં આપણે (સૂત્ર પ્રમાણે જોતાં) a ની જગ્યાએ હવે અને b ની જગ્યાએ 3b છે.

$$(2a + 3b)^2 = (2a)^2 + 2(2a)(3b) + (3b)^2$$
$$= 4a^2 + 12ab + 9b^2$$

(ii) વિશિષ્ટ ગુણાનફળ (૨) નો ઉપયોગ કરીને

$$\left(\frac{3}{2}a - 6b\right)^2 = \left(\frac{3}{2}a\right)^2 - 2\left(\frac{3}{2}a\right)(6b) + (6b)^2$$

$$= \frac{9}{4}a^2 - 18ab + 36b^2$$

(iii) $(3x + y)(3x - y) = (3x)^2 - y^2$ *[વિશિષ્ટ ગુણનફળ 3 નો ઉપયોગ]*

$= 9x^2 - y^2$

(iv) $(x + 9)(x + 3) = x^2 + (9 + 3)x + 9 \times 3$ *[વિશિષ્ટ ગુણનફળ 4 નો ઉપયોગ કરીને]*

$= x^2 + 12x + 27$

(v) $(a + 15)(a - 7) = a^2 + (15 - 7)a - 15 \times 7$

$= a^2 + 8a - 105$

(vi) $(5x - 8)(5x - 6) = (5x)^2 - (8 + 6)(5x) + 8 \times 6$

$= 25x^2 - 70x + 48$

(vii) $(7x - 2a)(7x + 3a) = (7x)^2 + (3a - 2a)(7x) - (3a)(2a)$

$= 49x^2 + 7ax - 6a^2$

(viii) $(2x + 5)(3x + 4) = (2 \times 3)x^2 + (2 \times 4 + 5 \times 3)x + 5 \times 4$

$= 6x^2 + 23x + 20$

વિશિષ્ટ ગુણનફળ કે જેને ઘણીવાર બૈજિક સૂત્રો કહેવામાં આવે છે. તેમની મદદથી સાંખિત ગુણતરી (સંખ્યાત્મક ગણતરી) વધારે સરળતાથી કરી શકાય છે.

આપણે નીચેનાં ઉદારણો જોઈએ

વિશિષ્ટ ગુણનફળનો ઉપયોગ કરીને નીચેના દરેકની ગણતરી કરો.

(i) 101×101 (ii) 98×98 (iii) 68×72

(iv) 107×103 (v) 56×48 (vi) 94×99

ઉકેલ (i) $101 \times 101 = 101^2 = (100 + 1)^2$

$= 100^2 + 2 \times 100 \times 1 + 1^2$

$= 10000 + 200 + 1$

$= 10201$

(ii) $98 \times 98 = 98^2 = (100 - 2)^2$

$= 100^2 - 2 \times 100 \times 2 + 2^2$

$= 10000 - 400 + 4$

$= 9604$

(iii) $68 \times 72 = (70-2) \times (70+2)$

$= 70^2 - 2^2$

$= 4900 - 4$

$= 4896$

(iv) $107 \times 103 = (100+7)(100+3)$

$= 100^2 + (7+3) \times 100 + 7 \times 3$

$= 10000 + 1000 + 21$

$= 11021$

(v) $56 \times 48 = (50+6)(50-2)$

$= 50^2 + (6-2) \times 50 - 6 \times 2$

$= 2500 + 200 - 12$

$= 2688$

(vi) $94 \times 99 = (100-6)(100-1)$

$= 100^2 - (6+1) \times 100 + 6 \times 1$

$= 10000 - 700 + 6$

$= 9306$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 4.1

1. *નીચેના દરેકનું ગુણનફળ મેળવો.*

(i) $(5x+y)^2$ (ii) $(x-3)^2$ (iii) $(ab+cd)^2$

(iv) $(2x-5y)^2$ (v) $\left(\frac{x}{3}+1\right)^2$ (vi) $\left(\frac{z}{2}-\frac{1}{3}\right)^2$

(vii) $(a^2+5)(a^2-5)$ (viii) $(xy-1)(xy+1)$ (ix) $\left(x+\frac{4}{3}\right)\left(x+\frac{3}{4}\right)$

(x) $\left(\frac{2}{3}x^2-3\right)\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}\right)$ (xi) $(2x+3y)(3x+2y)$ (xii) $(7x+5y)(3x-y)$

2. સાદુંરૂપ આપો.

(i) $(2x^2 + 5)^2 - (2x^2 - 5)^2$ (ii) $(a^2 + 3)^2 + (a^2 - 3)^2$

(iii) $(ax + by)^2 + (ax - by)^2$ (iv) $(p^2 + 8q^2)^2 - (p^2 - 8q^2)^2$

3. વિશિષ્ટ ગુણનફળનો ઉપયોગ કરી નીચેના દરેકની ગણતરી કરો.

(i) 102×102 (ii) 108×108 (iii) 69×69

(iv) 998×998 (v) 84×76 (vi) 157×143

(vii) 306×294 (viii) 508×492 (ix) 105×109

(x) 77×73 (xi) 94×95 (xii) 993×996

4.2 બીજાં કેટલાંક વિશિષ્ટ ગુણન ફળ

(6) દ્વિપદી $(a + b)$. ને જુઓ આપણે તેનો ઘન શોધીએ.

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2$$

$= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$ [વિભાજનનો ગુણધર્મ]

$= a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2)$

$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$= a^3 + 3ab(a + b) + b^3$

આમ **$(a + b)^3 = a^3 + 3ab(a + b) + b^3$**

(7) હવે આપણે $(a - b)$ નો ઘન શોધીએ.

$$(a - b)^3 = (a - b)(a - b)^2$$

$= (a - b)(a^2 - 2ab + b^2)$ [વિભાજનનો ગુણધર્મ]

$= a(a^2 - 2ab + b^2) - b(a^2 - 2ab + b^2)$ [વિભાજનનો ગુણધર્મ]

$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$

$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$= a^3 - 3ab(a - b) - b^3$

આમ **$(a - b)^3 = a^3 - 3ab(a - b) - b^3$**

આજ પરિણામ તમે $(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$ માં b ના સ્થાને - b મૂકીને મેળવી શકો

(8) $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a(a^2 - ab + b^2) + b(a^2 - ab + b^2)$ [વિભાજનનો ગુણધર્મ]

$$= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + b^3$$

આમ $\qquad \mathbf{(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3}$

(9) $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a(a^2 + ab + b^2) - b(a^2 + ab + b^2)$ [વિભાજનનો ગુણધર્મ]

$$= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3$$

$$= a^3 - b^3$$

આમ $\qquad \mathbf{(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3}$

ઉપર દર્શાવેલા વિશિષ્ટ ગુણનફળો આધારિત કેટલાક ઉદાહરણો જોઈએ

ઉદાહરણ **4.3:** નીચેના દરેકનું ગુણનફળ શોધો.

(i) $(7x+9y)^3$ (ii) $(px - yz)^3$ (iii) $(x - 4y^2)^3$

(iv) $(2a^2 + 3b^2)^3$ (v) $\left(\frac{2}{3}a - \frac{5}{3}b\right)^3$ (vi) $\left(1 + \frac{4}{3}c\right)^3$

ઉકેલ (i) $(7x+9y)^3 = (7x)^3 + 3(7x)(9y)(7x+9y) + (9y)^3$

$$= 343x^3 + 189xy(7x+9y) + 729y^3$$

$$= 343x^3 + 1323x^2y + 1701xy^2 + 729y^3$$

(ii) $(px - yz)^3 = (px)^3 - 3(px)(yz)(px - yz) - (yz)^3$

$$= p^3x^3 - 3pxyz(px - yz) - y^3z^3$$

$$= p^3x^3 - 3p^2x^2yz + 3pxy^2z^2 - y^3z^3$$

(iii) $(x - 4y^2)^3 = x^3 - 3x(4y^2)(x - 4y^2) - (4y^2)^3$

$$= x^3 - 12xy^2(x - 4y^2) - 64y^6$$

$$= x^3 - 12x^2y^2 + 48xy^4 - 64y^6$$

(iv) $(2a^2 + 3b^2)^3 = (2a^2)^3 + 3(2a^2)(3b^2)(2a^2 + 3b^2) + (3b^2)^3$

$$= 8a^6 + 18a^2b^2(2a^2 + 3b^2) + 27b^6$$

$$= 8a^6 + 36a^4b^2 + 54a^2b^4 + 27b^6$$

(v) $\left(\frac{2}{3}a - \frac{5}{3}b\right)^3 = \left(\frac{2}{3}a\right)^3 - 3\left(\frac{2}{3}a\right)\left(\frac{5}{3}b\right)\left(\frac{2}{3}a - \frac{5}{3}b\right) - \left(\frac{5}{3}b\right)^3$

$$= \frac{8}{27}a^3 - \frac{10}{3}ab\left(\frac{2}{3}a - \frac{5}{3}b\right) - \frac{125}{27}b^3$$

$$= \frac{8}{27}a^3 - \frac{20}{9}a^2b + \frac{50}{9}ab^2 - \frac{125}{27}b^3$$

(vi) $\left(1+\frac{4}{3}c\right)^3 = (1)^3 + 3(1)\left(\frac{4}{3}c\right)\left(1+\frac{4}{3}c\right) + \left(\frac{4}{3}c\right)^3$

$$= 1 + 4c\left(1+\frac{4}{3}c\right) + \frac{64}{27}c^3$$

$$= 1 + 4c + \frac{16}{3}c^2 + \frac{64}{27}c^3$$

ઉદાહરણ 4.4: *વિશિષ્ટ ગુણનફળનો ઉપયોગ કરીને નીચેના દરેકનો ઘન શોધો.*

(i) 19 (ii) 101 (iii) 54 (iv) 47

ઉકેલ

(i) $19^3 = (20 - 1)^3$

$= 20^3 - 3 \times 20 \times 1\,(20 - 1) - 1^3$

$= 8000 - 60\,(20 - 1) - 1$

$= 8000 - 1200 + 60 - 1$

$= 6859$

(ii) $101^3 = (100 + 1)^3$

$= 100^3 + 3 \times 100 \times 1\,(100 + 1) + 1^3$

$= 1000000 + 300 \times 100 + 300 + 1$

$= 1030301$

(iii) $54^3 = (50 + 4)^3$

$= 50^3 + 3 \times 50 \times 4\,(50 + 4) + 4^3$

$= 125000 + 600\,(50 + 4) + 64$

$= 125000 + 30000 + 2400 + 64$

$= 157464$

(iv) $47^3 = (50 - 3)^3$

$= 50^3 - 3 \times 50 \times 3\,(50 - 3) - 3^3$

$= 125000 - 450\,(50 - 3) - 27$

$= 125000 - 22500 + 1350 - 27$

$= 103823$

ઉદાહરણ 4.5: *વાસ્તવિક ગુણાકાર કર્યા સિવાય નીચેના દરેકનું ગુણનફળ શોધો.*

(i) $(2a + 3b)\,(4a^2 - 6ab + 9b^2)$

(ii) $(3a - 2b)\,(9a^2 + 6ab + 4b^2)$

ઉકેલ (i) $(2a + 3b)\,(4a^2 - 6ab + 9b^2) = (2a + 3b)\,[(2a)^2 - (2a)\,(3b) + (3b)^2]$

$= (2a)^3 + (3b)^3$

$= 8a^3 + 27b^3$

(ii) $(3a - 2b)\,(9a^2 + 6ab + 4b^2) = (3a - 2b)\,[(3a)^2 + (3a)\,(2b) + (2b)^2]$

$= (3a)^3 - (2b)^3$

$= 27a^3 - 8b^3$

ઉદાહરણ **4.6:** *સાદુંરૂપ આપો.*

(i) $(3x - 2y)^3 + 3\,(3x - 2y)^2\,(3x + 2y) + 3(3x - 2y)\,(3x + 2y)^2 + (3x + 2y)^3$

(ii) $(2a - b)^3 + 3\,(2a - b)\,(2b - a)\,(a + b) + (2b - a)^3$

ઉકેલ : (i) Put $3x - 2y = a$ and $3x + 2y = b$

આપેલ પદાવલીની અભિવ્યક્તિ નીચે પ્રમાણે બને છે.

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$= (a + b)^3$

$= (3x - 2y + 3x + 2y)^3$

$= (6x)^3$

$= 216x^3$

(ii) $2a - b = x$ *અને* $2b - a = y$ *મૂકતાં*

$+ b = x + y$

$x^3 + 3xy\,(x + y) + y^3$

$= (x + y)^3$

$= (a + b)^3$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

ઉદાહરણ **4.7:** સાદુંરૂપ આપો.

(i) $$\frac{857\times857\times857-537\times537\times537}{857\times857+857\times537+537\times537}$$

(ii)

ઉકેલ : આપેલ પદાવલીને નીચે પ્રમાણે લખી શકાય

857 = a અને 537 = b, મૂકતાં પદાવલીનું સ્વરૂપ નીચે મુજબ બને છે.

$$\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^2+ab+b^2}=a-b$$

$$= 857-537 \text{ (a અને b કિંમત મૂકતાં)}$$

$$=320$$

$$\frac{674\times674\times674+326\times326\times326}{674\times674-674\times326+326\times326}$$

$$\frac{857^3-537^3}{857^2+857\times537+537^2}$$

(ii) આપેલ પદાવલીને નીચે મુજબ લખી શકાય.

$$\frac{674^3+326^3}{674^2-674\times326+326^2}$$

$$=\frac{(674+326)(674^2-674\times326+326^2)}{674^2-674\times326+326^2}$$

= 674 + 326

= 1000

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 4.2

1. નીચેના દરેકને પદાવલી સ્વરૂપે લખો.

(i) $(3x+4y)^3$ (ii) $(p-qr)^3$ **(iii)** $\left(a+\frac{b}{3}\right)^3$

(iv) $\left(\frac{a}{3}-b\right)^3$ (v) $\left(\frac{1}{2}a^2+\frac{2}{3}b^2\right)^3$ (vi) $\left(\frac{1}{3}a^2x^3-2b^3y^2\right)^3$

2. વિશિષ્ટ ગુણન ફળનો ઉપયોગ કરીને નીચેના દરેકનો ઘન શોધો

(i) 8 (ii) 12 (iii) 18 (iv) 23
(v) 53 (vi) 48 (vii) 71 (viii) 69
(ix) 97 (x) 99

3. વાસ્તવિક ગુણકાર કર્યા સિવાય નીચેના દરેકનું ગુણનફળ શોધો.

(i) $(2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2)$ (ii) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$
(iii) $(1 + x)((1 - x + x^2)$ (iv) $(2y - 3z^2)(4y^2 + 6yz^2 + 9z^4)$
(v) $(4x + 3y)(16x^2 - 12xy + 9y^2)$ (vi) $\left(3x - \frac{1}{7}y\right)\left(9x^2 + \frac{3}{7}xy + \frac{1}{49}y^2\right)$

4. કિંમત શોધો.

(i) જો $a + 2b = 10$ અને $ab = 15$ હોય તો $a^3 + 8b^3$ ની કિંમત શોધો.
સૂચન $(a + 2b)^3 = a^3 + 8b^3 + 6ab(a + 2b)$
$a^3 + 8b^3 = (a + 2b)^3 - 6ab(a + 2b)]$ હવે આગળ વધો
(ii) જો $x - y = 5$ અને $xy = 55$ હોય તો $x^3 - y^3$ ની કિંમત શોધો.

5. જો (i) $4x - 5z = 16$ અને $xz = 12$ હોય, તો $64x^3 - 125z^3$ કિંમત શોધો.

(ii) જો $4x - 5z = \frac{3}{5}$ અને $xz = 6$ હોય તો $64x^3 - 125z^3$ ની કિંમત શોધો

6. સાદું રૂપ આપો.

(i) $(2x + 5)^3 - (2x - 5)^3$
(ii) $(7x + 5y)^3 - (7x - 5y)^3 - 30y(7x + 5y)(7x - 5y)^3$
સુચન $7x + 5y = a$ અને $7x - 5y = b$ મૂકો જેથી $a - b = 10y$ થાય]
(iii) $(3x + 2y)(9x^2 - 6xy + 4y^2) - (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$
(iv) $(2x - 5)(4x^2 + 10x + 25) - (5x + 1)(25x^2 - 5x + 1)$

7. સાદું રૂપ આપો.

(i) $\dfrac{875 \times 875 \times 875 + 125 \times 125 \times 125}{875 \times 875 - 875 \times 125 + 125 \times 125}$

(ii)

4.3 બહુપદીઓનું અવયવી-કરણ

યાદ કરોકે 3 x 4 = 12 માં 3 અને 4 એ ગુણનફળ 12 ના અવયવો છે. તેજ રીતે બીજ ગણિતમાં જ્યારે $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$, થાય છે. ત્યારે આપણે $(x+y)$ અને $(x-y)$ એ ગુણનફળ $(x^2 - y^2)$. ના અવયવો છે એમ કહીએ છીએ.

બહુપદીનું અવયવી કરણ એ બહુપદીને બે (કે વધુ) બહુપદીઓના ગુણનફળ તરીકે દર્શાવવાની પ્રક્રિયા છે. ગુણનફળમાં રહેલી દરેક બહુપદી આપેલ બહુપદીનો અવયવ કહેવાય છે.

અવયવીકરણમાં જ્યાં સુધી ઉલ્લેખ કરવામાં ન આવ્યો હોય ત્યાં સુધી આપેલ બહુપદીઓના અવયવો પૂર્ણાંકમાં (એટલે કે પૂર્ણાંક સહગુણકો સાથે) દર્શાવવા પૂરતું મર્યાદિત રાખીશું. આવા કિસ્સાઓમાં એ જરૂરી છે કે અવયવો પણ પૂર્ણાંક બહુપદીમાંજ હોવા જોઈએ $2x^2 - y^2$ પ્રકારની બહુપદી પ્રકારના અવયવો પાડવા માટે યોગ્ય ગણાવી જોઈએ નહીં. કારણે કે આ અવયવો પૂર્ણાંક બહુપદીઓ નથી.

જ્યારે કોઈ બહુપદીનો એક પણ અવયવ ફરીથી ઓછીધાતવાળી બે બહુપદીઓમાં ગુણનફળ તરીકે દર્શાવી શકાતી ન હોય અને પૂર્ણાંક સહગુણકોમાં જો 1 અથવા 1 સિવાયનો બીજો કોઈ અવયવ સામાન્ય ન હોય, ત્યારે તે બહુપદીનું સંપૂર્ણ અવયવીકરણ થયું છે એમ કહેવાય આમ .... નું સંપૂર્ણ અવયવીકરણ $x(x-4)$ છે. જ્યારે બીજીબાજુ $(4x^2 - 1)(4x^2 + 1)$ $(16x^4 - 1)$નું સંપૂર્ણ અવયવી-કરણ નથી કારણ કે અવયવ $(4x^2 - 1)$ ના ફરીથી $(2x - 1)(2x + 1)$ જેવા અવયવો પાડી શકાય છે. આમ $(16x^4 - 1)$ નું સંપૂર્ણ અવયવીકરણ 1) $(4x^2 + 1)$. છે.

$\left(\sqrt{2}x + y\right)\left(\sqrt{2}x - y\right)$

અવયવીકરણમાં આપણે આ પાઠમાં અગાઉ શીખી ગયેલા વિશિષ્ટ ગુણનફળોનો પૂરેપુરો ઉપયોગ કરતા રહીશું. હવે બહુપદીના અવયવી કરણમાં વિવિધ પ્રકારો માટે અલગ અલગ ઉદાહરણ લઈએ.

(1) વિભાજનના ગુણધર્મ પ્રમાણે અવયવી કરણ :

(સામાન્ય અવયવ બહાર કાઢવાની રીત)

ઉદાહરણ 4.8 અવયવ પાડો.

(i) $10a - 25$ (ii) $x^2y^3 + x^3y^2$

(iii) $5ab(ax^2 + y^2) - 6mn(ax^2 + y^2)$ (iv) $a(b - c)^2 + b(b - c)$

ઉકેલ (i) $10a - 25 \quad = 5 \times 2a - 5 \times 5$

$= 5(2a - 5)$ [બંને પદોમાં ૫ સામાન્ય હોવાથી)

આમ 5 અને $2a - 5$ અને $10a - 25$ ના અવયવ છે.

(ii) $x^2y^3 + x^3y^2$, માં જુઓ કે બંને પદોમાં (સૌથી ઉંચી ધાતવાળુ)

x^2y^2 (પદ) સામાન્ય છે.

$\therefore x^2y^3 + x^3y^2 = x^2y^2 \times y + x^2y^2 \times x$

$= x^2y^2 (y + x)$

$x, x^2, y, y^2, xy, x^2y, xy^2, x^2y^2$ અને $y + x$ એ $x^2y^3 + x^3y^2$ ના અવયવો છે.

(iii) જુઓ કે $ax^2 + y^2$ એ બંને પદોમાં સામાન્ય છે.

$5ab (ax^2 + y^2) – 6mn(ax^2 + y^2)$

$= (ax^2 + y^2) (5ab – 6mn)$

(iv) $a(b – c)^2 + b(b – c) = (b – c) \times [a(b – c)] + (b – c) \times b$

$= (b – c) \times [a(b – c) + b]$

$= (b – c) \times [ab – ac + b]$

(2) બે વર્ગોના તફાવતનું અવયવીકરણ

તમે જાણો છો કે $(x + y) (x – y) = x^2 – y^2$ તેથી $x + y$ અને $x – y$ એ $x^2 – y^2$ ના અવયવો છે.

ઉદાહરણ 4.9: અવયવ પાડો

(i) $9x^2 – 16y^2$ (ii) $x^4 – 81y^4$

(iii) $a^4 – (2b – 3c)^2$ (iv) $x^2 – y^2 + 6y – 9$

ઉકેલ (i) $9x^2 – 16y^2 = (3x)^2 – (4y)^2$ જે વર્ગોનો તફાવત છે.

$= (3x + 4y) (3x – 4y)$

(ii) $x^4 – 81y^4 = (x^2)^2 – (9y^2)$

$= (x^2 + 9y^2) (x^2 – 9y^2)$

ધ્યાનમાં રાખો કે $x^2 – 9y^2 = (x)^2 – (3y)^2$ એ બે વર્ગોનો તફાવત છે.

$x^4 – 81y^4 = (x^2 + 9y^2) [(x)^2 –(3y)^2]$

$= (x^2 + 9y^2) (x + 3y) (x – 3y)$

(iii) $a^4 – (2b – 3c)^2 = (a^2)^2 – (2b – 3c)^2$

$= [a^2 + (2b – 3c)] [a^2 – (2b – 3c)]$

$= (a^2 + 2b – 3c) (a^2 – 2b + 3c)$

(iv) $x^2 – y^2 + 6y – 9 = x^2 – (y^2 – 6y + 9)$ [આ સોપાન ધ્યાનમાં રાખો]

$= (x)^2 – [(y)^2 – 2 \times y \times 3 + (3)^2]$

$= (x)^2 – (y – 3)^2$

$= [x + (y – 3)] [x – (y – 3)]$

$= (x + y - 3)(x - y + 3)$

(3) *પૂર્ણવર્ગ ત્રિપદીનું અવયવીકરણ*

ઉદાહરણ **4.10 :** *અવયવ પાડો*

(i) $9x^2 + 24xy + 16y^2$ (ii) $x^6 - 8x^3 + 16$

ઉકેલ (i) $9x^2 + 24xy + 16y^2 = (3x)^2 + 2(3x)(4y) + (4y)^2$

$= (3x + 4y)^2$

$= (3x + 4y)(3x + 4y)$

આમ આપેલ બહુપદીના અવયવો દરેક $(3x + 4y)$ *થાય છે.*

(ii) $x^6 - 8x^3 + 16 = (x^3)^2 - 2(x^3)(4) + (4)^2$

$= (x^3 - 4)^2$

$= (x^3 - 4)(x^3 - 4)$

આપેલ બહુપદીના અવયવો દરેક $(x^3 - 4)$. *થાય છે.*

(4) *બહુપદીનું બે વર્ગોના તફાવતમાં ફેરવીને અવયવી કરણ*

ઉદાહરણ **4.11:** *અવયવ પાડો*

(i) $x^4 + 4y^4$ (ii) $x^4 + x^2 + 1$

(i) $x^4 + 4y^4 = (x^2)^2 + (2y^2)^2$

$= (x^2)^2 + (2y^2)^2 + 2(x^2)(2y^2) - 2(x^2)(2y^2)$

$2(x^2)(2y^2)$ *ઉમેરીને અને બાદ કરીને*

$= (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2$

$= (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy)$

(ii) $x^4 + x^2 + 1 = (x^2)^2 + (1)^2 + 2x^2 - x^2$

[x^2 *ઉમેરીને અને બાદ કરીને*]

$= (x^2 + 1)^2 - (x)^2$

$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 4.3

અવયવ પાડો

1. $10xy - 15xz$ 2. $abc^2 - ab^2c$

3. $6p^2 - 15pq + 27\,p$

4. $a^2\,(b - c) + b\,(c - b)$

5. $2a(4x - y)^3 - b\,(4x - y)^2$

6. $x(x + y)^3 - 3xy\,(x + y)$

7. $100 - 25p^2$

8. $1 - 256y^8$

9. $(2x + 1)^2 - 9x^2$

10. $(a^2 + bc)^2 - a^2\,(b + c)^2$

11. $25x^2 - 10x + 1 - 36y^2$

12. $49x^2 - 1 - 14xy + y^2$

13. $m^2 + 14m + 49$

14. $4x^2 - 4x + 1$

15. $36a^2 + 25 + 60a$

16. $x^6 - 8x^3 + 16$

17. $a^8 - 47a^4 + 1$

18. $4a^4 + 81b^4$

19. $x^4 + 4$

20. $9a^4 - a^2 + 16$

21. n *ની કિંમત શોધો.*

(i) $6n = 23 \times 23 - 17 \times 17$ (ii) $536 \times 536 - 36 \times 36 = 5n$

---

(5) પૂર્ણઘન બહુપદીઓનું અવયવીકરણ

ઉદાહરણ 4.12: *અવયવ પાડો*

(i) $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$ (ii) $x^6 - 3x^4y^2 + 3x^2y^4 - y^6$

ઉકેલ (i) $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$

$= (x)^3 + 3x^2\,(2y) + 3x\,(2y)^2 + (2y)^3$

$= (x + 2y)^3$

$x + 2y.$

(ii) $(x^2)^3 - 3x^2y^2\,(x^2 - y^2) - (y^2)^3$

$= (x^2 - y^2)^3$

$= [(x + y)\,(x - y)]^3$ $[\,x^2 - y^2 = (x + y)\,(x - y)]$

$= (x + y)^3\,(x - y)^3$

(6) બે ઘનના સરવાળા અને તફાવતવાળી બહુપદીનું અવયવીકરણ

વિશિષ્ટ ગુણનફળમાં તમે શીખી ગયા છો કે

$(x + y)\,(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$

અને $(x - y)\,(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$

$x^3 + y^3$ *ના અવયવો* $x + y$ *અને* $x^2 - xy + y^2$ *અને*

$x^3 - y^3$ *ના અવયવો* $x - y$ *અને* $x^2 + xy + y^2$ *છે.*

હવે નીચેના ઉદાહરણ જુઓ :

ઉદાહરણ 4.13: *અવયવપાડો*

(i) $64a^3 + 27b^3$ (ii) $8x^3 - 125y^3$

(iii) $8(x + 2y)^3 - 343$ (iv) $a^4 - a^{13}$

(i) $64a^3 + 27b^3 = (4a)^3 + (3b)^3$

$= (4a + 3b)\,[(4a)^2 - (4a)(3b) + (3b)^2]$

$= (4a + 3b)\,(16a^2 - 12ab + 9b^2)$

(ii) $8x^3 - 125y^3 = (2x)^3 - (5y)^3$

$= (2x - 5y)\,[(2x)^2 + (2x)(5y) + (5y)^2]$

$= (2x - 5y)\,(4x^2 + 10xy + 25y^2)$

(iii) $8(x + 2y)^3 - 343 = [2(x + 2y)]^3 - (7)^3$

$= [2(x + 2y) - 7]\,[2^2(x + 2y)^2 + 2(x + 2y)(7) + 7^2]$

$= (2x + 4y - 7)\,(4x^2 + 16xy + 16y^2 + 14x + 28y + 49)$

(iv) $a^4 - a^{13} = a^4(1 - a^9)$ [*કારણ કે બંને પદમાં* a^4 *સામાન્ય છે.*]

$= a^4\,[(1)^3 - (a^3)^3]$

$= a^4(1 - a^3)(1 + a^3 + a^6)$

$= a^4(1 - a)(1 + a + a^2)(1 + a^3 + a^6)$

[Since $1 - a^3 = (1 - a)(1 + a + a^2)$]

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 4.4

અવયવ પાડો

1. $a^3 + 216b^3$
2. $a^3 - 343$
3. $x^3 + 12x^2y + 48xy^2 + 64y^3$
4. $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$
5. $8x^3 - 125y^3 - 60x^2y + 150xy^2$
6. $64k^3 - 144k^2 + 108k - 27$
7. $729x^6 - 8$
8. $x^2 + x^2y^6$
9. $16a^7 - 54ab^6$
10. $27b^3 - a^3 - 3a^2 - 3a - 1$
11. $(2a - 3b)^3 + 64c^3$
12. $64x^3 - (2y - 1)^3$

(7) મધ્યમપદના વિભાજન દ્વારા ત્રિપદી (બહુપદીના અવયવો પાડવાની રીત :

આપણે શીખી ગયા છીએ કે

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab = 1.x^2 + (a + b)x + ab$

અને $(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$

અહીં જમણી બાજુ દર્શાવેલી પદાવલીઓ સામાન્ય રીતે ax^2 x bx x c *પ્રકારની છે. જેમના અવયવો નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે પાડી શકાય.*

- *પ્રથમપદ x^2 ના સહગુણકને અંતિમપદ વડે ગુણો*

- *એ ગુણનફળના એવા બે અવયવ શોધો કે જેમનો સરવાળો મધ્યમપ (બીજાપદ) ac ના સહગુણક જેટલો થાય બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો આપણે ac (પ્રથમપદનો સહગુણાંક અંતિમપદ) ના એવા બે અવયવો નક્કી કરવાના છે કે જેમનો સરવાળો ac (મધ્યમપદના સહગુણક) જેટલો થાય.*

નીચે આપેલાં ઉદાહરણો આ રીતેની વધારે ચકાસણી કરશે.

ઉદાહરણ 4.14: અવયવ પાડો

(i) $x^2 + 3x + 2$ (ii) $x^2 - 10xy + 24y^2$

(iii) $5x^2 + 13x - 6$ (iv) $3x^2 - x - 2$

ઉકેલ (i) *અહીં,* A = 1, B = 3 *અને* C= 2; so AC = 1 × 2 = 2

તેથી આપણે 2 *ના એવા બે અવયવો નક્કી કરવાના છે કે જેમનો સરવાળો* 3 *થાય*

દેખીતી રીતે 1+2=3 *(એટલે કે* ac *ના બે અવયવો* 1 *અને* 2 *છે.)*

બહુપદીને નીચે પ્રમાણે દર્શાવીશું.

$$x^2 + (1 + 2)x + 2$$
$$= x^2 + x + 2x + 2$$
$$= x(x + 1) + 2(x + 1)$$
$$= (x + 1)(x + 2)$$

(ii) $x^2 - 4xy - 6xy + 24y^2$ *અહીં* $AC = 24y^2$ *અને* $B = -10y$ *છે.*

$24y^2$ *ના બે અવયવો કે જેમનો સરવાળો* $-10y$ *છે તે*

$-4y$ *અને* $-6y$ *છે.*

બહુપદીને નીચે પ્રમાણે લખીએ.

$= x(x - 4y) - 6y(x - 4y)$

$= (x - 4y)(x - 6y)$

(iii) $5x^2 + 13x - 6$ *અહીં* ac = -30 *અને* b= 13 *છે.*

-30 *ના અવયવો કે જેમનો સરવાળો* -30 *છે તેઓ* 15 *અને* -2 *છે.*

બહુપદીને $5x^2 + 15x - 2x - 6$ *સ્વરૂપે લખીએ.*

$$= 5x(x + 3) - 2(x + 3)$$
$$= (x + 3)(5x - 2)$$

(iv) $3x^2-x-2$ *અહીં* ac = 6 *અને* b = -1 *છે.*

-6 ના એવા બે અવયવ શોધવા છે કે જેમનો સરવાળો -1 થાય તેઓ (-3) અને 2 છે.

બહુપદીને $3x^2 - 3x + 2x - 2$ સ્વરૂપે લખાય.

$3x^2 - 3x + 2x - 2$

$= 3x(x-1) + 2(x-1)$

$= (x-1)(3x+2)$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 4.5

અવયવ પાડો

1. $x^2 + 11x + 24$
2. $x^2 - 15xy + 54y^2$
3. $2x^2 + 5x - 3$
4. $6x^2 - 10xy - 4y^2$
5. $2x^4 - x^2 - 1$
6. $x^2 + 13xy - 30y^2$
7. $2x^2 + 11x + 14$
8. $10y^2 + 11y - 6$
9. $2x^2 - x - 1$
10. $(m-1)(1-m) + m + 109$
11. $(2a-b)^2 - (2a-b) - 30$

    Hint put $2a - b = x$
12. $(2x+3y)^2 - 2(2x+3y)(3x-2y) - 3(3x-2y)^2$

    Hint: Put $2x + 3y = a$ and $3x - 2y = b$

4.4 બહુપદીઓના ગુ.સા.અ. અને લ.સા.અ.

(1) બહુપદીઓનો ગુ.સા.અ.

અંકગણિતમાં પ્રાકૃતિનું સંખ્યાઓના ગુ.સા.અ. (ગુરૂત્તમ સાધારણ અવયવ) શબ્દથી પહેલેથીજ પરિચિત છો. તે (ગુ.સા.અ) આપેલી દરેક સંખ્યાઓના અવયવોમાં સૌથી મોટો અવયવ છે. દાખલા તરીકે 8 અને 12 નો ગુ.સા.અ. 4 છે. કારણ કે 8 અને 12 ના સામાન્ય અવયવો 1,2, અને 4 છે. તેમાં 4 સૌથી મોટી સંખ્યા છે. (એટલે કે એ બધામાં મોટી)

તેવીજ રીતે બીજ ગણિતમાં બે કે તેથી વધારે બહુપદીઓનો ગુ.સા.અ. (ગુરુત્તમ સાધારણ અવયવ) એ સૌથી વધારે ધાત વાળી બહુપદી, અને આપેલ બહુપદીઓમાંની દરેક બહુપદીમાં હોય તેવા અવયવના સૌથી મોટા સાંખિત સહગુણકનું ગુણનફળ છે. ઉદાહરણ તરીકે $4(x+1)^2$ અને $6(x+1)^3$ માં ગુ.સા.અ. $2(x+1)^2$ છે.

એકપદીઓનો ગુ.સા.અ. અને આપેલ બહુપદીઓમાંની દરેક બહુપદીનો સાંખિક સહગુણાક અને આપેલી બધીજ એક પદીઓમાં સામાન્ય હોય તેવા સૌથી વધારે ધાતવાળા ચલ (ચલો) ના ગુણાકારથી મેળવી શકાય છે.

દાખલા તરીકે $12x^2 2y^3$, $18xy^4$ અને $24x^3y^5$ આપેલ એકપદીઓ નો ગુ.સા.અ. $6xy^3$ છે. કારણ કે 12, 18 અને 24 નો ગુ.સા.અ. 6 અને બધીજ બહુપદીઓ (એકપદીઓ) નાં સૌથી ઉંચી ઘાતવાળા સામાન્ય પદો x અને y છે.

આ અંગે આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 4.15: નીચેનામાં ગુ.સા.અ. શોધો.

(i) $4x^2y$ અને x^3y^2 (ii) $(x-2)^3(2x-3)$ અને $(x-2)^2(2x-3)^3$

ઉકેલ: (1) સાંખ્યિક સહગુણકો 4 અને I નો ગુ.સા.અ. 1 છે.

જ્યારે આપેલ બહુપદીઓમાં અવયવ તરીકે x ઓછામાં ઓછાં 2 (બે) વખત આવે છે અને y ઓછામાં ઓછા 1 વખત આવે છે તેથી તેમનો ગુ.સા.અ.

$1 \times x^2 \times y$ એટલે x^2y

(2) સાંખ્યિક સહગુણકો 1 અને 1નો ગુ.સા.અ. 1 છે.

આપેલ બહુપદીઓમાં અવયવ તરીકે $(x-2)$ ઓછામાં ઓછા બે વખત આવે છે અને $(2x-3)$ ઓછામાં ઓછા એક વખત આવે છે તેથી આવેલ બહુપદીઓનો ગુ.સા.અ.

$1 \times (x-2)^2 \times (2x-3)$ એટલે $(x-2)^2(2x-3)$ છે.

ઉપરના ઉદાહરણ 4.15માં દષ્ટિપાત કરતાં આપણે કહી શકીએ કે જેના સરળતાથી અવયવો પાડી શકાય એવી બહુપદીઓનો ગુ.સા.અ. નક્કી કરવા માટે આપણે દરેક બહુપદીને અવયવોના ગુણાનફુળ તરીકે દર્શાવીએ છીએ આ પરિસ્થિતિના આધારે આપેલ બહુપદીનો ગુ.સા.અ. આવેલ બહુપદીઓમાંની દરેક બહુપદીના સાંખિક સગુણકોનો ગુ.સા.અ. અને બધી બહુપદીઓમાં સામાન્ય હોય તેવા સૌથી વધુ ઘાતવાળા અવયવ (અવયવો)નું ગુણનફળ છે.

વધારે સ્પષ્ટતા માટે નીચે આપેલ ઉદાહરણ 4.16 પર ધ્યાન કેન્દ્રિત કરો.

ઉદાહરણ 4.16: ગુ.સા.અ. શોધો.

(i) x^2-4 અને x^2+4x+4

(ii) $4x^4-16x^3+12x^2$ અને $6x^3+6x^2-72x$

ઉકેલ (i) $x^2-4=(x+2)(x-2)$

$x^2+4x+4=(x+2)^2$

સાંખ્યિક સહગુણકોનો ગુ.સા.અ. 1 છે.

બીજા અવયવોનો ગુ.સા.અ. $=(x+2)^1=x+2$

તેથી માગેલો ગુ.સા.અ. $=x+2$

(ii) $4x^4-16x^3+12x^2 = 4x^2(x^2-4x+3)$

$$= 4x^2 (x-1)(x-3)$$

$$6x^3 + 6x^2 - 72x \quad = 6x (x^2 + x - 12)$$

$$= 6x (x+4)(x-3)$$

માંગેલ ગુ.સા.અ. = $2x(x-3)$ (કારણ કે સાંખિક સહગુણકોનો ગુ.સા.અ. 2 છે.)

$$= 2x^2 - 6x$$

(2) બહુપદીઓનો લ.સા.અ.

ગુ.સા.અ.ની માફક અંકગણિતમાં પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના લ.સા.અ. (લઘુત્તમ સાધારણ અવયવી) થી પણ પરિચિત છો. તે (લ.સા.અ.) આપેલી સંખ્યાઓના અવયવીઓમાં સૌથી નાનો સામાન્ય અવયવી (સાંની સંખઅયા) છે.

દાખલા તરીકે 8 અને 12નો લ.સા.અ. 24 છે કારણ કે 24 એ 8 અને 12ના સામાન્ય અવયવીઓમાં સૌથી નાનો છે જે નીચે પ્રમાણે છે.

8ના અવયવી	8, 16, <u>24</u>, 32, 40, <u>48</u>, 56, 64, <u>72</u>, 80, ...
12ના અવયવી	12, <u>24</u>, 36, <u>48</u>, 60, <u>72</u>, 84, 96, ...
8 અને 12ના સામાન્ય અવયવી	24, 48, 72, ...

તેવી જ રીતે બીજગણિતમાં બે કે તેથી વધારે બહુપદીઓનો લ.સા.અ. (લઘુત્તમ સાધારણ અવયવી) એ સૌથી લઘુત્તમ ઘાત વાળી બહુપદી (બહુપદીઓ) અને આપેલ બહુપદીઓમાંની દરેક બહુપદીના અનુરૂપ ઘટકોના અવયવી હોય તેવા સૌથી નાના સાંખિક સહગુણકનું ગુણનફળ છે.

ઉદાહરણ તરીકે $4(x+1)^2$ *અને* $6(x+1)^3$ *નો લ.સા.અ.* $12(x+1)^3$.

એકપદીનો લ.સા.અ. એ આપેલ એકપદીઓમાંની દરેક એક પદીના સાંખિક સહગુણકોનો લ.સા.અ. અને સૌથી ઊંચા ઘાતવાળા ચલોના અવયવોના ગુણાકારથી મેળવી શકાય છે.

ઉદારણ તરીકે $12x^2y^2z$ *અને* $18x^2yz$ *નો લ.સા.અ.* $36x^2y^2z$ *છે કારણ કે 12 અને 18 નો લ.સા.અ. 36 છે અને સૌથી ઉંચી ઘાતવાળા ચલો x, y અને z ના અવયવો અનુક્રમે* x^2, y^2 *અને z છે. ચાલો તેને સ્પષ્ટ કરવામાટે આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.*

ઉદાહરણો 4.17: *લ.સા.અ. શોધો.*

(i) $4x^2y$ અને x^3y^2 (ii) $(x-2)^3(2x-3)$ અને $(x-2)^2(2x-3)^3$

ઉકેલ : (1) $4x^2y$ *અને* x^3y^2 *માં સાંખિક સહગુણકો 4 અને 1 નો લ.સા.અ. 4 છે અને x નો મહત્તમ ઘાત* x^3 *અને y નો મહત્તમ ઘાત* y^2 *હોવાથી માંગેલો (જરૂરી) લ.સા.અ.* $4x^2y^2$ *છે.*

(2) દેખીતી રીતે જ સાંખિક સહગુણકો 1 અને 1નો લ.સા.અ. 1 છે. આપેલ બહુપદીઓના અવયવ (x-2)*નો મહત્તમ ઘાત વાળો અવયવ* $(x-2)^3$ *છે અને* (2x-3) *નો મહત્તમ ઘાતવાળો અવયવ* $(2x-3)^3$

છે.

આપેલ બહુપદીનો લ.સા.અ. $= 1 \times (x-2)^3 \times (2x-3)^3$

$= (x-2)^3 (2x-3)^3$

ઉદાહરણ4.18: માં દષ્ટિપાત કરતાં આપણે કહી શકીએ કે

(i) $(x-2)(x^2-3x+2)$ અને x^2-5x+6

(ii) $8(x^3-27)$ અને $12(x^5+27x^2)$

ઉકેલ (i) $(x-2)(x^2-3x+2) = (x-2)(x-2)(x-1)$

$= (x-2)^2(x-1)$

વળી $x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$

સાંખિક સહગુણકોનો લ.સા.અ. 1 છે.

બીજા અવયવોનો લ.સા.અ. $= (x-2)^2(x-1)(x-3)$

તેથી આપેલ બહુપદીઓનો લ.સા.અ. $= (x-1)(x-2)^2(x-3)$

(ii) $8(x^3-27) = 8(x-3)(x^2+3x+9)$

$12(x^5+27x^2) = 12x^2(x^3+27)$

$= 12x^2(x+3)(x^2-3x+9)$

સાંખિક સહગુણકો 8 અને 12 નો લ.સા.અ. $=24$

અન્ય અવયવોનો લ.સા.અ. $= x^2(x-3)(x+3)(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)$

તેથી માગેલ લ.સા.અ. $= 24x^2(x-3)(x+3)(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 4.6

1. નીચેની બહુપદીઓના ગુ.સા.અ. શોધો.

(i) $27x^4y^2$ અને $3xy^3$

(ii) $48y^7x^9$ અને $12y^3x^5$

(iii) $(x+1)^3$ અને $(x+1)^2(x-1)$

(iv) x^2+4x+4 અને $x+2$

(v) $18(x+2)^3$ અને $24(x^3+8)$

(vi) $(x+1)^2(x+5)^3$ અને $x^2+10x+25$

(vii) $(2x-5)^2(x+4)^3$ અને $(2x-5)^3(x-4)$

(viii) x^2-1 અને x^4-1

(ix) x^3-y^3 અને x^2-y^2

(x) $6(x^2-3x+2)$ અને $18(x^2-4x+3)$

2. નીચેની પદાવલીઓને ધ્યાનતાં લો.

(i) $25x^3y^2$ અને $15xy$

(ii) $30xy^2$ અને $48x^3y^4$

(iii) $(x + 1)^3$ અને $(x + 1)^2 (x - 1)$

(iv) $x^2 + 4x + 4$ અને $x + 2$

(v) $18 (x + 2)^3$ અને $24 (x^3 + 8)$

(vi) $(x + 1)^2 (x + 5)^3$ અને $x^2 + 10x + 25$

(vii) $(2x - 5)^2 (x + 4)^2$ અને $(2x - 5)^3 (x - 4)$

(viii) $x^2 - 1$ and $x^4 - 1$

(ix) $x^3 - y^3$ અને $x^2 - y^2$

(x) $6(x^2 - 3x + 2)$ અને $18(x^2 - 4x + 3)$

4.5 સંમેય પદાવલી પરની પ્રક્રિયાઓ

તમે પૂર્ણાંક અને સંમેય સંખ્યાઓથી પરિચિત છો. જે સંખ્યાને $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય જ્યાં (p અને q=1)અને પૂર્ણાંક છે તેને સંમેય પદાવલી કહેવાય છે.

બૈજિક પદાલી કે જેને $\frac{P}{Q}$ સ્રૂપમાં દર્શાવી શકાય જ્યાં p અને q (શૂન્યતર બહુપદીઓ) હુપદીઓ ને સંમેય પદાવલી કહેવાય છે. આમ નીચેના જેવી દરેક પદાવલી એક અથવા બે ચલમાં સંમેય પદાવલી છે.

$$\frac{x+1}{x-1}, \frac{x^2-3x+5}{x^2-5}, \frac{\frac{1}{2}a^2+b^2-\frac{5}{6}}{a+b}, \frac{x^2+\sqrt{2}y^2}{\sqrt{3}x-y}$$

નોંધઃ

(1) બહુદી '$x^2 + 1$' એ સંમેય પદાવલી છે કારણ કે તેને $\frac{x^2+1}{1}$ સ્વરૂપે લખી શકાય છે અને તમે શીખી ગયા છો કે છેદમાં રહેલ અચળ સંખ્યા '1' એ શૂન્ય શૂન્યઘાતવાળી બહુપદી છે.

(2) બહુપદી 7 એ સંમેય પદાવલી છે કારણ કે તેને $\frac{7}{1}$ સ્વરૂપમાં લખી શકાય છે જ્યાં 7 અને 1 બંને શૂન્યઘાતવળી બહુપદીઓ છે.

(3) દેખીતી રીતેજ સંમેય પદાલી એ બહુપદી ન પણ હોય ઉદાહરણ તરીકે સંમેય પદાવલી $\frac{1}{x}\left(= x^{-1}\right)$ એ બહુપદી નથી. એથી ઉલટું દરેક બહુપદી સંમેય પદાલી છે.

નીચેની પદાવલીઓને ધ્યાનમાં લો.

$\frac{\sqrt{x}+2}{1-x}$, $x^2+2\sqrt{x}+3$, $\frac{a^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{b}}{a^2+ab+b^2}$ આમાંની એકપણ પદાવલી સંમેય પદાવલી નથી.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 4.7

1. નીચેનામાંથી કઈ પદાલીઓ સંમેય પદાવલીઓ છે?

(1) $\frac{2x-3}{4x-1}$ (2)

(3) $\frac{2\sqrt{3}x^2+\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$ (4) $\frac{2x^2-\sqrt{x}+3}{6x}$

(5) $200+\sqrt{11}$ (6) $\left(a+\frac{1}{b}\right)\div b^{\frac{1}{3}}$

(7) $y^3+3yz(y+z)+z^3$ (8) $5\div(a+3b)$

2. નીચેના દરેક માટે બે ઉદાહરણ આપો.

(1) એક ચલ સંમેય પદાવલી

(2) દ્વિચલ સંમેય પદાવલી

(3) સંમેય પદાવલી જેનો અંશ દ્વિપદી અને છેદ ત્રિપદી હોય.

(4) સંમેય પદાવલી જેનો અંશ અચળ હોય અને છેદ દ્વિઘાત બહુપદી હોય.

(5) દ્વિચલ સંમેય પદાવલી જેનો અંશ ત્રિઘાત બહુપદીઓ છેદ પંચઘાત બહુપદી હોય.

(6) બૈજિક પદાલી જે સંમેય પદાલી ન હોય.

4.6 સંમેય પદાવલી પરની પ્રક્રિયાઓ

સંમેય સંખ્યાઓ પર જે રીતે મૂળભૂત પ્રક્રિયાઓ થાય છે તેજ રીતે સંમેય પદાવલી પર પણ ચાર મૂળભૂત પ્રક્રિયાઓ થાય છે.

(1) સંમેય પદાવલીના સરવાળા અને બાદબાકી

સંમેય સંખ્યા અને સંમેય પદાવલીના સરવાળાની સામ્યતા જોવા આપણે નીચેના ઉદાહરણો જોઈશુ. નોંધો કે સંમેય પદાલીઓના ગુણાકાર, ભાગાકાર અને બાદબાકીમાં પણ સામ્યતા જોવા મળે છે. (સામ્યતા સાચી પડે છે.)

ઉદાહરણ 4.19: સરવાળો કરો :

(i) (ii) $\frac{2x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x+1}$

ઉકેલ : (i) $= \frac{5\times4+3\times3}{24}$

$=$

$=$

(ii) $\frac{2x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x+1} =$

$=$

$= \frac{3x^2+4x-1}{x^2-1}$

ઉદાહરણ 4.20: બાદબાકી કરો $\frac{x-1}{x+1}$ *માંથી* $\frac{3x-2}{3x+1}$

ઉકેલ : $\frac{3x-2}{3x+1}-\frac{x-1}{x+1} =$

$=$

$= \frac{3x-1}{3x^2+4x+1}$

નોંધ : *જુઓ કે બે સંમેય પદાવલીઓનો સરવાળો અને બાદબાકી કરતો સંમેય પદાવલીના સરવાળા અને બાદબાકી કરતા સંમેય પદાવલી મળે છે.*

બે સંમેય પદાવલીના સરવાળા અને બાદબાકી કરતાં સંમેય પદાવલી જ મળે છે.

અને $x-\frac{1}{x}(x\neq0)$ *આ બંને સંમેયી પદાવલીઓ છે. કારણ કે -- અને* $\frac{1}{x}$ *બંને સંમેય પદાવલીઓ છે.*

તે જ રીતે $x^2+\frac{1}{x^2}, x^3+\frac{1}{x^3}, x^2-\frac{1}{x^2}, x^3-\frac{1}{x^3}$, વગેરે દરેક સંમેય પદાવલીઓ રસ પેદા કરે છે.

કારણ કે $x+\frac{1}{x}$ અથવા $x-\frac{1}{x}$, ની આપેલી કિંમત માટે

આપણે $x^2+\frac{1}{x^2}, x^2-\frac{1}{x^2}, x^3+\frac{1}{x^3}, x^3-\frac{1}{x^3}$ વગેરેમાં આપણે નક્કી કરી શકીએ છીએ અને કિસ્સાઓમાં તો તેથી ઉલટું પણ (કરી શકીએ છીએ.)

નીચેના દાખલાઓ (ઉદાહરણો) પર ધ્યાન રાખીએ.

ઉદાહરણ 4.21: નીચેનાની કિંમત શોધો.

(i) $x^2+\frac{1}{x^2}$ if $x-\frac{1}{x}=1$ (ii) $x^4+\frac{1}{x^4}$ if $x+\frac{1}{x}=4$

(iii) $x-\frac{1}{x}$ if $x^4+\frac{1}{x^4}=119$ (iv) $x^3+\frac{1}{x^3}$ if $x+\frac{1}{x}=3$

(v) $x^3-\frac{1}{x^3}$ if $x-\frac{1}{x}=5$

ઉકેલ: (1) $x-\frac{1}{x}=1$ આપેલુ છે.

$$\therefore \left(x-\frac{1}{x}\right)^2=(1)^2$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}-2\times x\times\frac{1}{x}=1$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}-2=1$$

તેથી, $x^2+\frac{1}{x^2}=3$

(ii) $x+\frac{1}{x}=4$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=(4)^2$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+2=16$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=14$$

$$\Rightarrow \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2=(14)^2$$

$$\Rightarrow x^4+\frac{1}{x^4}+2=196$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=194$$

(iii) $x^4+\frac{1}{x^4}=119$ આપેલું છે.

$$\Rightarrow (x^2)^2+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2+2=119+2=121$$

$$\Rightarrow \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2=(11)^2$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=11$$ [કારણ કે x^2 અને $\frac{1}{x^2}$ ધન છે.]

$$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}-2=9$$

$$\Rightarrow \left(x-\frac{1}{x}\right)^2=(3)^2$$

$$\therefore x-\frac{1}{x}=\pm 3$$

(iv) $x+\frac{1}{x}=3$ આપેલ છે.

$$\therefore \left(x+\frac{1}{x}\right)^3=(3)^3$$

$$\Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}+3\times x\times\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)=27$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3(3) = 27$$

$$\therefore x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$$

(v) $x - \frac{1}{x} = 5$ આપેલ છે.

$$\therefore \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 = (5)^3$$

$$\Rightarrow x^3 - \frac{1}{x^3} - 3 \times x \times \frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{x}\right) = 125$$

$$\Rightarrow x^3 - \frac{1}{x^3} - 3(5) = 125$$

$$\therefore x^3 - \frac{1}{x^3} = 140$$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 4.8

1. સંમેય પદાવલીઓનો સરવાળા શોધો.

(i) $\frac{x^2+1}{x-2}$ અને $\frac{x^2-1}{x-2}$

(ii) $\frac{x+2}{x+3}$ અને $\frac{x-1}{x-2}$

(iii) $\frac{x+1}{(x-1)^2}$ અને $\frac{1}{x+1}$

(iv) $\frac{3x+2}{x^2-16}$ અને $\frac{x-5}{(x+4)^2}$

(v) $\frac{x-2}{x+3}$ અને $\frac{x+2}{x+3}$

(vi) $\frac{x+2}{x-2}$ અને $\frac{x-2}{x+2}$

(vii) $\frac{x+1}{x+2}$ અને $\frac{x^2-1}{x^2+1}$

(vii) $\frac{3\sqrt{2}x+1}{3x^2}$ અને $\frac{-2\sqrt{2}x+1}{2x^2}$

2. બાદબાકી કરો.

(i) $\frac{x-1}{x-2}$ માંથી $\frac{x+4}{x+2}$

(ii) $\frac{2x-1}{2x+1}$ માંથી $\frac{2x+1}{2x-1}$

(iii) $\frac{1}{x}$ માંથી x

(iv) $\frac{2}{x}$ માંથી $\frac{x+1}{x^2-1}$

(v) $\frac{x^2+1}{x-4}$ માંથી $\frac{2x^2+3}{x-4}$

(vi) $\frac{1}{x^2+2}$ માંથી $\frac{2x^3+x^2+3}{(x^2+2)^2}$

(vii) $\frac{x+2}{2(x^2-9)}$ માંથી $\frac{x-2}{(x+3)^2}$

(vii) $\frac{x+1}{x-1}$ માંથી $\frac{4x}{x^2-1}$

3. નીચેનાની કિંમત શોધો.

(i) $a^2+\frac{1}{a^2}$ when $a+\frac{1}{a}=2$

(ii) $a^2+\frac{1}{a^2}$ when $a-\frac{1}{a}=2$

(iii) $a^3+\frac{1}{a^3}$ when $a+\frac{1}{a}=2$

(iv) $a^3+\frac{1}{a^3}$ when $a+\frac{1}{a}=5$

(v) $a^3-\frac{1}{a^3}$ when $a-\frac{1}{a}=\sqrt{5}$ É

(vi) $8a^3+\frac{1}{27a^3}$ when $2a+\frac{1}{3a}=5$

(vii) $a^3+\frac{1}{a^3}$ when $a+\frac{1}{a}=\sqrt{3}$

(viii) $a^3+\frac{1}{a^3}$ when $a^2+\frac{1}{a^2}=7, a>0$

$\frac{2x+1}{x-1}\times\frac{x-1}{x+3}$

(ix) $a-\frac{1}{a}$ when $a^4+\frac{1}{a^4}=727$

(x) $a^3-\frac{1}{a^3}$ when $a^4+\frac{1}{a^4}=34, a>0$

---

2) સંમેય પદાવલીઓના ગુણાકાર અને ભાગાકાર :

તમે બે સંખ્યાના ગુણાકાર વિશે જાણે છો. માનો કે તે, $\frac{2}{3}$ અને $\frac{5}{7}$ છે. તો $\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}=\frac{2\times5}{3\times7}=\frac{10}{21}$

તેવી જ રીતે બે સંમેય સંખ્યાઓ $\frac{P}{Q}$ અને $\frac{R}{S}$ જ્યાં P, Q, R અને S બહુપદીઓ છે (અને q અને s શૂન્ય નથી.) તેને $\frac{P}{Q}\times\frac{R}{S}$ રીતે $\frac{PR}{QS}$ તમે જોઈ શકો છો કે બે સંમેય સંખ્યાઓનું ગુણનફલ સંમેય સંખ્યા જ મળે છે.

ઉદાહરણ 4.22: ગુણન ફળ શોધો :

(i) $\frac{5x+3}{5x-1}\times\frac{2x-1}{x+1}$

(ii)

(iii)

ઉકેલ : (i) $\frac{5x+3}{5x-1}\times\frac{2x-1}{x+1} =$

$=$

(ii) $\frac{2x+1}{x-1}\times\frac{x-1}{x+3} =$

$=$ *[અંશ અને છેદમાંથી સામાન્ય અવઅવ* $(x-1)$ *દૂર કરતાં]*

(iii) $= \frac{(x^2-7x+10)(x^2-7x+12)}{(x-4)^2(x-5)}$

$= \frac{(x-2)(x-5)(x-3)(x-4)}{(x-4)^2(x-5)}$

$=$

અંશ અને છેદમાંથી સામાન્ય અવયવ $(x-4)$ $(x-5)$ *દૂર કરતાં*

$= \frac{x^2-5x+6}{x-4}$

તમે જોશો કે અંશ અને દમાંથી ગુ.સા.અ. () કાઢી લેતાં જે પરિણામ (ગુણનફળ) મળે છે. તેને અતિસંક્ષિપ્ત પદ કે અતિસંક્ષિપ્તરૂપ કહે છે.

તમે બે સંમેય સંખ્યાઓ માપો કે $\frac{2}{3}$ *અને,* $\frac{5}{7}$ *ના ભાગાકારથી પરિચિત છો તેમને* $\frac{2}{3}\div\frac{5}{7}=\frac{2}{3}\times\frac{7}{5}$ *જ્યાં* $\frac{7}{5}$ *એ* $\frac{5}{7}$ *નો વ્યસ્ત છે એમ લખાય. તેવી જ રીતે સંમેય, શૂન્ય પદાવલી* $\frac{P}{Q}$ *ને શૂન્યેતર પદાવલી* $\frac{R}{S}$ *નો ભાગાકાર* $\frac{P}{Q}\div\frac{R}{S}=\frac{P}{Q}\times\frac{S}{R}$ *લખાય, જ્યાં* P,Q, R, *અને* S *બહુપદીઓ છે*

અને $\frac{S}{R}$ અને $\frac{R}{S}$ નો વ્યસ્ત છે.

ઉદાહરણ 4.23: નીચેની સંમેય પદાવલીઓના વ્યસ્ત શોધો.

(i) $\frac{x^2+20}{x^3+5x+6}$ (ii) $-\frac{2y}{y^2-5}$ (iii) x^3+8

ઉકેલ: (1) $\frac{x^2+20}{x^3+5x+6}$ નો વ્યસ્ત $\frac{x^3+5x+6}{x^2+20}$ છે.

(2) $-\frac{2y}{y^2-5}$ નો વ્યસ્ત $-\frac{y^2-5}{2y}=\frac{5-y^2}{2y}$ છે.

(3) x^3+8 નો વ્યસ્ત $\frac{1}{x^3+8}$ છે.

ઉદાહરણ 4.24: ભાગાકાર કરો અને પરિણામને અતિસંક્ષિપ્ત રૂપમાં દર્શાવો.

(i) $\frac{x^2+1}{x-1} \div \frac{x-1}{x+2} = \frac{x^2+1}{x-1} \times \frac{x+2}{x-1}$

$= \frac{(x^2+1)(x+1)}{(x-1)^2}$

$= \frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2-2x+1}$

(ii) $\frac{x^2-1}{x^2-25} \div \frac{x^2-4x-5}{x^2+4x-5}$

ઉકેલ: (1) $\frac{x^2+1}{x-1} \div \frac{x-1}{x+2} = \frac{x^2+1}{x-1}\times\frac{x+2}{x-1}$

$= \frac{(x^2+1)(x+2)}{(x-1)^2} = \frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2-2x+1}$

(2) $\frac{x^2-1}{x^2-25} \div \frac{x^2-4x-5}{x^2+4x-5} = \frac{(x^2-1)(x^2+4x-5)}{(x^2-25)(x^2-4x-5)}$

$= \frac{(x-1)(x+1)(x+5)(x-1)}{(x-5)(x+5)(x+1)(x-5)}$

=

(ગુ.સા.અ. (x+1)(x+5 દૂર કરતાં)

=

$\frac{x^2-2x+1}{x^2-10x+25}$ જે અતિસંક્ષિપ્તરૂપ છે.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 4.9

1. ગુણનફળ શોધો અને તેને અતિસંક્ષિપ્તરૂપમાં દર્શાવો.

(i) $\frac{7x+2}{2x^2+3x+1}\times\frac{x+1}{7x^2-5x-2}$ (ii)

(iii) $\frac{3x^2-15x+18}{2x-4}\times\frac{17x+3}{x^2-6x+9}$ (iv) $\frac{5x-3}{5x+2}\times\frac{x+2}{x+6}$

(v) (vi) $\frac{x^3+1}{x-1}\times\frac{x-1}{2x}$

(vii) $\frac{x-3}{x-4}\times\frac{x^2-5x+4}{x^2-2x-3}$ (viii) $\frac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}\times\frac{x^2-2x-24}{x^2-16}$

2. નીચેની પદાવલિઓમાંથી દરેક પદાવલીનો વ્યસ્ત શોધો.

(i) $\frac{x^2+2}{x-1}$ (ii) $-\frac{3a}{1-a}$

(iii) $-\frac{7}{1-2x-x^2}$ (iv) x^4+1

3. ભાગાકાર કરો અને પરિણામને સંમેય પદાવલિના અતિસંક્ષિપ્ત રૂપમાં દર્શાવો.

(i) $\frac{x^2+11x+18}{x^2-4x-117}\div\frac{x^2+7x+10}{x^2-12x-13}$ (ii) $\frac{6x^2+x-1}{2x^2-7x-15}\div\frac{4x^2+4x+1}{4x^2-9}$

(iii) $\frac{x^2+x+1}{x^2-9}\div\frac{x^3-1}{x^2-4x+3}$ (iv) $\frac{x^2+2x-24}{x^2-x-12}\div\frac{x^2-x-6}{x^2-9}$

(v) $\frac{3x^2+14x-5}{x^2-3x+2} \div \frac{3x^2+2x-1}{3x^2-3x-2}$ (vi) $\frac{2x^2+x-3}{(x-1)^2} \div \frac{2x^2+5x+3}{x^2-1}$

સારાંશ

- *નીચે આપેલા વિશિષ્ટ ગુણનફળો બીજગણિતમાં વારંવાર જોવા મળે છે.*

  (i) $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ (ii) $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

  (iii) $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ (iv) $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

  (v) $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$

  (vi) $(x+y)^3 = x^3 + 3xy(x+y) + y^3$ (vii) $(x-y)^3 = x^3 - 3xy(x-y) - y^3$

  (viii) $(x+y)(x^2-xy+y^2) = x^3 + y^3$ (ix) $(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3 - y^3$

- *બહુપદીનું અવયવીકરણ એ બહુપદીને બે કે તેથી વધારે બહુપદીઓના ગુણનફળ તરીકે દર્શાવવાની પ્રક્રિયા છે. (ગુણાકાર)*
- *ગુણનફળમાં દર્શાવેલી દરેક બહુપદીએ આપેલ બહુપદીનો અવયવ કહેવાય છે.*
- *જો કોઈ બહુપદીને બહુપદીઓના ગુણનફળ તરીકે દર્શાવી શકાતી હોય અને ગુણનફળમાં રહેલી દરેક બહુપદીને પોતાનો સિવાયને બીજા કોઈ અવયવ નહોય (એટલે કે તેના ફરીથી અવયવ પડતા ન હોય) અને સાંમયિક સહગુણકોમાં 1 અથવા -1 સિવાયનો બીજો કોઈ સામાન્ય અવયવ ન હોય તો તે પદાવલીનું સંપૂર્ણ અવયવીકરણ થયુ છે એમ કહેવાય.*
- *વિશિષ્ટ ગુણનફળમાં દર્શાવેલી રીતો પર આધાર રાખ્યા સિવાય પણ આપણે વિભાજનના ઉપનય પ્રમાણે કેટલાંક અથવ બધા પદોમાં સામાન્ય હોય તેવી એકપણને સામાન્ય લઈને (કાઢીને) અવયવીકરણ કરી શકીએ છીએ.*
- *બે અથવા બેથી વધારે આવેલી બહુપદીઓનો ગુ.સા.અ. સૌથી ઉંચી ઘાતવાળી બહુપદી અને આપેલ બહુપદીઓમાંની દરેક બહુપદીના સૌથી મોટા સાંખિક સહગુણકનું ગુણનફળ છે.*
- *બે અથવા બેથી વધારે આવેલી બહુપદીઓનો લ.સા.અ. સૌથી લઘુત્તમ ઘાતવાળી બહુપદી અને આપેલ બહુપદીઓમાંની દરેક બહુપદીના સૌથી ઓછી ઘાતવાળા સાંખિક સહગુણકો જે આપેલ બહુપદીઓમાંની દરેક બહુપદીના અનુરૂપ ઘટકોના અવયવી ગુણનફળ છે.*
- *બૈજિક પદાવલીને જો* $\frac{P}{Q}$ *સ્વરૂપમાં દર્શાવાય જ્યાં* p *અને* q *બહુપદીઓ છે (અને* q *એ શૂન્યેતર બહુપદી છે) તો તેને સંમેય પદાવલી કહેવાય.*
- *સંમેય સંખ્યાઓ પર જે રીતે પ્રક્રિયાઓ થાય છે તે જ રીતે સંમેય પદાવલી પર પ્રક્રિયાઓ થાય છે.*
- *બે સંમેય પદાવલીઓના (સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકારથી) પણ સંમેય પદાવલીઓ છે.*

- *સંમેય પદાવલીના અંશ અને છેદમાં જો સામાન્ય અવયવ હોય, તો તેને કાઢી લેવાની (રદ કરવાની) પ્રક્રિયાને સંમેય પદાવલીને અતિસંક્ષિપ્ત રૂપ દર્શાવવાની પ્રક્રિયા કહેવાય છે.*

સત્રાંત સ્વાધ્યાય

1. *સાચા વિકલ્પની સામે -- ની નિશાની કરો.*

(i) *જો* $120^2 - 20^2 = 25p$, *હોય, તો* $p =$

(A) 16 (B) 140 (C) 560 (D) 14000

(ii) $(2a^2 + 3)^2 - (2a^2 - 3)^2 =$

(A) $24a^2$ (B) $24a^4$ (C) $72a^2$ (D) $72a^4$

(iii) $(a^2 + b^2)^2 + (a^2 - b^2)^2 =$

(A) $2(a^2 + b^2)$ (B) $4(a^2 + b^2)$

(C) $4(a^4 + b^4)$ (D) $2(a^4 + b^4)$

(iv) *જો* $m - \frac{1}{m} = -\sqrt{3}$, *તો* $m^3 - \frac{1}{m^3} =$

(A) 0 (B) $6\sqrt{3}$ (C) $-6\sqrt{3}$ (D) $-3\sqrt{3}$

(v) $\frac{327 \times 327 - 323 \times 323}{327 + 323} =$

(A) 650 (B) 327 (C) 323 (D) 4

(vi) $8m^3 - n^3$ is =

(A) $(2m - n)(4m^2 - 2mn + n^2)$ (B) $(2m - n)(4m^2 + 2mn + n^2)$

(C) $(2m - n)(4m^2 - 4mn + n^2)$ (D) $(2m - n)(4m^2 + 4mn + n^2)$

(vii) =

(A) 66 (B) 198 (C) 1000 (D) 3000

(viii) $36a^5b^2$ *અને* $90a^3b^4$ *તો ગુ.સા.અ.* =

(A) $36a^3b^2$ (B) $18a^3b^2$

(C) $90a^3b^4$ (D) $180a^5b^4$

(ix) $x^2 - 1$ *અને* $x^2 - x - 2$ *નો લ.સા.અ* =

(A) $(x^2-1)(x-2)$ (B) $(x^2-1)(x+2)$

(C) $(x-1)^2(x+2)$ (D) $(x+1)^2(x-2)$

(x) નીચેનામાંથી કઈ સંમેય પદાવલી નથી ?

(A) (B) $x+\frac{1}{\sqrt{5x}}$

(C) $8\sqrt{x}+6\sqrt{y}$ (D) $\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}$

2. નીચેના દરેકનું ગુણનફળ શોધો.

(i) $(a^m+a^n)(a^m-a^n)$ (ii) $(x+y+2)(x-y+2)$

(iii) $(2x+3y)(2x+3y)$ (iv) $(3a-5b)(3a-5b)$

(v) $(5x+2y)(25x^2-10xy+4y^2)$ (vi) $(2x-5y)(4x^2+10xy+25y^2)$

(vii) $\left(a+\frac{5}{4}\right)\left(a+\frac{4}{5}\right)$ (viii) $(2z^2+3)(2z^2-5)$

$\sqrt{33}$

(ix) $99\times99\times99$ (x) $103\times103\times103$

(xi) $(a+b-5)(a+b-6)$ (xii) $(2x+7z)(2x+5z)$

3. જો $x=a-b$ અને $y=b-c$, હોય તો સાબિત કરો કે,

$(a-c)(a+c-2b)=x^2-y^2$

4. જો $4x-5z=16$ અને $xz=12$ હોય, તો $64x^3-125z^3$ ની કિંમત શોધો.

5. અવયવ પાડો :

(i) $x^7y^6+x^{22}y^{20}$ (ii) $3a^5b-243ab^5$

(iii) $3a^6+12a^4b^2+12a^2b^4$ (iv) $a^4-8a^2b^3+16b^6$

(v) $3x^4+12y^4$ (vi) x^8+14x^4+81

(vii) $x^2+16x+63$ (viii) $x^2-12x+27$

(ix) $7x^2+xy-6y^2$ (x) $5x^2-8x-4$

(xi) x^6-729y^6 (xii) $125a^6+64b^6$

6. ગુ.સા.અ. શોધો.

(i) x^3-x^5 અને x^4-x^7

(ii) $30(x^2 - 3x + 2)$ અને $50(x^2 - 2x + 1)$

7. લ.સા.અ. શોધો.

(i) $x^3 + y^3$ અને $x^2 - y^2$

(ii) $x^4 + x^2y^2 + y^4$ અને $x^2 + xy + y^2$

8. નિશાની દ્વારા દર્શાવેલી પ્રક્રિયા કરો.

(i) $\frac{x+1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1}$

(ii)

(iii) $\frac{x-1}{x-2} \times \frac{3x+1}{x^2-4}$

(iv)

9. સાદુરૂપ આપો : $\frac{2}{a-1} - \frac{2}{a+1} - \frac{4}{a^2+1} - \frac{8}{a^4+1}$

[સુચન : $\frac{2}{a-1} - \frac{2}{a+1} = \frac{4}{a^2-1}$; હવે બાકીના પદ વારફરતી મેરી આગળ વધો]

10. જો $m = \frac{x+1}{x-1}$ અને $n = \frac{x-1}{x+1}$, હોય, તો $m^2 + n^2 - mn$ ની કિંમત શોધો.

તમારી પ્રગતિ ચકાશોના ઉત્તરો

4.1

1. (i) $25x^2 + 20xy + y^2$ (ii) $x^2 - 6x + 9$ (iii) $a^2b^2 + 2abcd + c^2d^2$

(iv) $4x^2 - 20xy + 5y^2$ (v) $\frac{x^2}{9} + \frac{2}{3}x + 1$ (vi) $\frac{z^2}{4} - \frac{1}{3}z + \frac{1}{9}$

(vii) $a^4 - 25$ (viii) $x^2y^2 - 1$ (ix) $x^2 + \frac{25}{12}x + 1$

(x) $\frac{4}{9}x^4 - \frac{25}{9}x^2 - 1$ (xi) $6x^2 + 13xy + 6y^2$ (xii) $21x^2 + 8xy - 5y^2$

2. (i) $40x^2$ (ii) $2a^6 + 18$ (iii) $2(a^2x^2 + b^2y^2)$ (iv) $32p^2q^2$

3. (i) 10404 (ii) 11664 (iii) 4761 (iv) 996004

   (v) 6384 (vi) 22451 (vii) 89964 (viii) 249936

   (ix) 11445 (x) 5621 (xi) 8930 (xii) 989028

4.2

1. (i) $27x^3 + 36x^2y + 36xy^2 + 64y^3$ (ii) $p^3 - 3p^2qr + 3pq^2r^2 - q^3r^3$

   (iii) $a^3 + a^2b + \frac{ab^2}{3} + \frac{b^3}{27}$ (iv) $\frac{a^3}{27} - \frac{a^2b}{3} + ab^2 - b^3$

   (v) $\frac{a^6}{8} + \frac{1}{2}a^4b^2 + \frac{2}{3}a^2b^4 + \frac{8}{27}b^6$ (vi) $\frac{a^6x^9}{27} - \frac{2}{3}a^4b^3x^6y^2 + 4a^2b^6x^3y^4 - 8b^9y^6$

2. (i) 512 (ii) 1728 (iii) 5832 (iv) 12167 (v) 148877

   (vi) 110592 (vii) 357911 (viii) 328509 (ix) 912663 (x) 970299

3. (i) $8x^3 + y^3$ (ii) $x^3 - 8$ (iii) $x^3 + 1$

   (iv) $8y^3 - 27z^6$ (v) $64x^3 + 27y^3$ (vi) $27x^3 - \frac{1}{343}y^3$

4. (i) 100 (ii) 1115

5. (i) 15616 (ii) $\frac{27027}{125}$

6. (i) $120x^2 + 250$ (ii) $1000y^3$ (iii) $19x^3 - 19y^3$ (iv) $-117x^3 - 126$

7. (i) 1000 (ii) 444

4.3

1. $5x(2y - 3z)$ 2. $abc\,(c - b)$

3. $3p(2p - 5q + 9)$ 4. $(b - c)\,(a^2 - b)$

5. $(4x - y)^2 (8ax - 2ay - b)$ 6. $x (x + y) (x^2 - xy + y^2)$

7. $25(2 + 5p) (2 - 5p)$ 8. $(1 + 16y^4) (1 + 4y^2) (1 + 2y) (1 - 2y)$

9. $(5x + 1) (1 - x)$ 10. $(a^2 + bc + ab + ac) (a^2 + bc - ab - ac)$

11. $(5x + 6y - 1) (5x - 6y - 1)$ 12. $(7x - y + 1)(7x - y - 1)$

13. $(m + 7)^2$ 14. $(2x - 1)^2$

15. $(6a + 5)^2$ 16. $(x^3 - 4)^2$

17. $(a^4 + 7a^2 + 1) (a^2 + 3a + 1)(a^2 - 3a + 1)$

18. $(2a^2 + 6ab + 9b^2)(2a^2 - 6ab + 9b^2)$

19. $(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$

20. $(3a^2 + 5a +4)(3a^2 - 5a +4)$ 21. (i) 40 (ii) 57200

4.4

1. $(a + 6b) (a^2 - 6ab + 36b^2)$ 2. $(a - 7) (a^2 + 7a + 49)$

3. $(x + 4y)^3$ 4. $(2x - 3y)^3$

5. $(2x - 5y)^3$ 6. $(4k - 3)^3$

7. $(9x^2 - 2) (81x^4 + 18x^2 + 4)$ 8. $x^2 (1 + y^2) (1 - y^2 + y^4)$

9. $2a(2a^2 - 3b^2) (4a^2 + 6a^2b^2 + 9b^4)$ 10. $(3b - a - 1) (9b^2 + 3ab + 3b + a^2 + a +1)$

11. $(2a - 3b + 4c)(4a^2 + 9b^2 - 6ab -8ac + 12bc + 16 c^2$

12. $(4x - 2y +1)(16x^2 + 8xy - 4x + 4y^2 - 4y + 1)$

4.5

1. $(x + 3) (x + 8)$ 2. $(x - 6y) (x - 9y)$ 3. $(x + 3) (2x - 1)$

4. $2(x - 2y)(3x + y)$ 5. $(2x^2 + 1) (x + 1) (x -1)$ 6. $(x + 15y) (x - 2y)$

7. $(x + 2) (2x + 7)$ 8. $(2y - 3)(5y - 2)$ 9. $(x - 1) (2x + 1)$

10. $(12 - m) (m + 9)$ 11. $(2a - b - 6)(2a - b + 5)$ 12. $(9y - 7)(5x + y)$

4.6

1. (i) $3xy^2$ (ii) $12y^3x^5$ (iii) $(x + 1)^2$ (iv) $x + 2$ (v) $6(x + 2)$

(vi) $(x+5)^2$ (vii) $(2x-5)^2$ (viii) x^2-1 (ix) $x-y$ (x) $6(x-1)$

2. (i) $75x^3y^2$ (ii) $240x^3y^4$ (iii) $(x-1)(x+1)^3$

(iv) x^2+4x+4 (v) $72\,(x+2)^3\,(x^2-2x+4)$ (vi) $(x+1)^2(x+5)^3$

(vii) $(x-4)(x+4)^2(2x-5)^3$ (viii) x^4-1 (ix) $(x-1)(x+1)(x^2+x+1)$

(x) $18(x-1)(x-2)(x-3)$

4.7

1. (i), (ii), (iii), (v), (vii) અને (viii)

4.8

1. (i) $\frac{2x^2}{x-2}$ (ii) $\frac{2x^2+2x-7}{x^2+x-6}$ (iii) $\frac{2x^2+2}{x^3-x^2-x+1}$

(iv) (v) $\frac{2x}{x+3}$ (vi) $\frac{2x^2+8}{x^2-4}$

$\frac{4x^2+5x+28}{x^3+4x^2-16x+64}$ $\frac{1}{2x^2-x^2-1}$ (vii) $\frac{2x^3+3x^2-1}{x^3+2x^2+x+2}$ (viii) $\frac{5}{6x^2}$

2. (i) $\frac{x-6}{x^2-4}$ (ii) $\frac{8x}{4x^2-1}$ (iii) $\frac{x^2-1}{x}$

(iv) $\frac{2-x}{x^2-x}$ (v) $\frac{x^2+2}{x-4}$ (vi) $\frac{2x^3+1}{\left(x^2+2\right)^2}$

(vii) $\frac{x^2-15x+16}{2\left(x^3+3x^2-9x-27\right)}$ (viii) $\frac{1-x}{1+x}$

3. (i) 2 (ii) 6 (iii) 2 (iv) 110 (v) $8\sqrt{15}$

(vi) 115 (vii) 0 (viii) 18 (ix) ± 5 (x) 14

4.9

1. (i) (ii) $\frac{x^4+x^2+1}{x^6+x^4+x^2+1}$ (iii) $\frac{51x+9}{2x-6}$

(iv) (v) $\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^3-2x^2+2x-1}$ (vi) $\dfrac{x^3+1}{2x}$

(vii) $\dfrac{x-1}{x+1}$ (viii)

2. (i) (ii) (iii) (iv) $\dfrac{1}{x^4+1}$

3. (i) $\dfrac{x+1}{x+5}$ (ii) (iii) $\dfrac{1}{x+3}$

(iv) $\dfrac{x+6}{x+2}$ (v) (vi) 1

સત્રાંત સ્વાધ્યાયના જવાબો

1. (i) C (ii) A (iii) D (iv) A (v) D (vi) B (vii) C (viii) B (ix) A (x) C
2. (i) $a^{2m}-a^{2n}$ (ii) x^2-y^2+4x+4 (iii) $4x^2+12xy+9y^2$

   (iv) $9a^2-30ab+25b^2$ (v) $125x^3+8y^3$ (vi) $8x^3-125y^3$

   (vii) $a^2+\dfrac{41}{20}a+1$ (viii) $4z^4-4z^2-15$ (ix) 970299

   (x) 1092727 (xi) $a^2+2ab-11a+30$ (xii) $4x^2+24xz+35z^2$
4. 15616
5. (i) $x^7y^6(1+x^{15}y^{14})$ (ii) $3ab(a-3b)(a+3b)(a^2+9b^2)$

   (iii) $3a^2(a^2+2b^2)^2$ (iv) $(a^2-4b^3)^2$

   (v) $3(x^2+2xy+2y^2)$ (vi) $(x^4-2x^2+9)(x^4+2x^2+9)$

   (vii) $(x+9)(x+7)$ (viii) $(x-3)(x-9)$

   (ix) $(x+y)(7x-6y)$ (x) $(x-2)(5x+2)$

   (xi) $(x-3y)(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)(x^2+3xy+9y^2)$

   (xii) $(5a^2+4b^2)(25a^4-20a^2b^2+16b^4)$
6. (i) $x^3(1-x)$ (ii) $10(x-1)$
7. (i) $(x^2-y^2)(x^2-xy+y^2$ (ii) $x^4+x^2y^2+y^4$

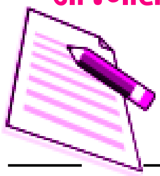
8. (i) $\dfrac{2x^2+2}{x^3-x^2-x+1}$ (ii) $\dfrac{x+2}{x+3}$

(iii) (iv) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-10x+25}$

9. $\dfrac{16}{a^8-1}$

10. $\dfrac{x^4+14x^2+1}{x^4-2x^2+1}$

$$\frac{3x^2-2x-1}{x^3+2x^2-4x-8}$$



5

સુરેખ સમીકરણ

તમે ચલ અને અચલના પાયાના ખ્યાલો વિશે શીખી ગયા છો આ ઉપરાંત બૈજિક પ્રક્રિયાઓ, પદાવલી, બહુપદીઓ અને તેમના શૂન્યો વિશે પણ શીખી ગયા છો. ઘણી પરિસ્થિતિઓ ઓચિંતિ આપણી સામે આવે છે, જેવી કે કોઈ પણ સંખ્યાના બમણામાં 6 ઉમેરતા 20 થાય છે. આ સંખ્યા શોધવા આવતો સંખ્યા x ધારવી પડે છે અને જેના વડે આપણે સંખ્યા શોધી શકીએ તેવો સૂત્રાંત્મક સંબંધ સ્થાપિત કરીએ છીએ. આપણે એ જોઈશુ કે આ પ્રકારની સૂત્રાત્મક રચના આપણને જેમાં ચલ અને અચલ સંખ્યાઓ છે તેવા સમીકરણ તરફ દોરી જાય છે. આ પ્રકરણમાં તમે જેમાં એક ચલ અને બે ચલ છે તેવા સુરેખ સમીકરણ વિશે અભ્યાસ કરશો. તમે એક ચલ સુરેખ સમીકરણ કેવી રીતે બનાવવાં અને તેનો ઉકેલ બૈજિક રીતે કેવી રીતે શોધવો તે શીખશો. વળી તમે દ્વિચલ સુરેષ સમીકરણ આ લેખની મદદથી સાથે સાથે બૈજિક રીતે ઉકેલવાનું શીખશો.

હેતુઓ

આ પ્રકરણનો અભ્યાસ કર્યા પછી તમે

- આપેલ સમીકરણના સમૂહમાંથી સુરેખ સમીકરણને ઓળખી શકશો.
- સુરેખ સમીકરણના ઉદાહરણો આપી શકશો. (ટાંકી શકશો)
- સુરેખ સમીકરણ લખી શકશો અને તેના ઉકેલ આપી શકશો.
- દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણો બનાવી શકશો (લખી શકશો) અને તેનાં ઉદાહરણો આપી શકશો.
- દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનો આલેખ દોરી શકશો.
- દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનો ઉકેલ આપી શકશો.
- બે સુરેખ સમીકરણ (સુરેખ સમીકરણ યુગ્મ) ના ઉકેલની આલેખની તેમજ બૈજિક રીતે શોધી શકશો.
- વાસ્તવિક જીવનના કોયડાઓ એક ચલ કે દ્વિચલ સમીકરણ સ્વરૂપમાં રૂપાંતરિત કરી (ફેરવી) શકશો અને પછી તેનો ઉકેલ શોધી શકશો.

અપેક્ષિત પૂર્વજ્ઞાન

- ચલ અને અચલનો ખ્યાલ
- બૈજિક પદાવલી અને તેની પ્રક્રિયાઓ
- બહુપદીનો, તેના શૂન્યો અને બપદી પરની પ્રક્રિયાઓનો ખ્યાલ

5.1 સુરેખ સમીકરણ

તમે બૈજિક પદાવલી અને બહુપદીથી પરિચિત છો જ. બૈજિક પદાવલીનું મૂલ્ય તેમાં રહેલા ચલની કિંમત પર આધાર રાખે છે. વળી તમે એક ચલ બહુપદી અને તેમના ઘાત વિષે શીખી ગયા છો જે બહુપદીઓમાં ચલની સંખ્યા એક હોય અને ચલનો ઘાત પણ એક હોય તેવી બહુપદીને એક ચલ સુરેખ બહુપદી કહે છે. જ્યારે બે પદાવલીઓને બહાબરના ચિલથી જુદી પાડવામાં આવે તેને સમીકરણ કહે છે. આમ સમીકરણમાં હંમેશા બરાબર (=) નું ચિહ્ન હોય છે. ચિહ્ન જમણી બાજુ અને ડાબી બાજુની પદાવલીઓ સરખી છે એમ બતાવે છે દા.ત.

$3x + 2 = 14$ ...(1)

$2y - 3 = 3y + 4$ ...(2)

$Z^2 - 3z + 2 = 0$ ...(3)

$3x^2 + 2 = 1$ ...(4)

ઉપરના ઉદાહરણોમાં બરાબરનું ચિહ્ન (=) અને ચલોનો સમાવેશ થાય છે. તેથી તે બધા સમીકરણો છે. સમીકરણ (1) માં ડાબીબાજુ (ડા.બા.) $3x + 2$ અને જમણી બાજુ (જ.બા.) = 14 છે અને તેમાં અચળ પદ x છે. સમીકરણ (2) માં ડા.બા. = 2y-3 અને જ.બા. = 3y+4 અને ચલ y છે અને બંને એક ચલ સુરેખ બહુપદીઓ છે. સમીકરણ (3) અને (40 માં ડાબી બાજુ દ્વિઘાત બહુપદી છે અને જમણીબાજુ સંખ્યા છે (અચળ સંખ્યા છે.)

તમે જોઈ શકશો કે સમીકરણ (1) માં ડાબી બાજુ એક ખાત બહુપદી છે અને જમણી બાજુ (અચળ) સંખ્યા છે સમીકરણ (2) માં ડાબી અને જમણી બંને બાજુ સુરેખ બહુપદી છે અને સમીકરણ (3) અને (4) માં ડાબી બાજુ દ્વિઘાત બહુપદીઓ છે. (તેથી) સમીકરણ (10 અને (2) સુરેખ સમીકરણો છે અને સમીકરણ (3) (4) સુરેખ સમીકરણો નથી.

ટૂંકમાં સમીકરણ એ ચલની એક શરત છે. શરત એ છે કે બંને વિગતો એટલે કે ડા.બા. અને જ.બા. બંને સરખી હોવી જોઈએ. એ બંને વિગતો પૈકી કોઈપણ એકમાં ચલ હોય જ તેનું ધ્યાન રાખવું જોઈએ.

એ ધ્યાનમાં રાખવું જોઈએ કે સમીકરણ 3x-4 = 4x-6 અને સમીકરણ 4t-6 = 3x-4 એક જ છે. આમ ડાબી બાજુની વિગત અને જમણી બાજુની વિગતની અદલા બદલી કરીએ ત્યારે સમીકરણ તેજ રહે છે. આ ગુણધર્મનો ઉપયોગ સમીકરણોના ઉકેલ શોધવામાં વારંવાર ઉપયોગ થાય છે.

જે સમીકરણમાં બે ચલો કે જેમનો દરેકમાં ઘાતાંક એક હોય અને ચલોના ગુણાકારવાળું પદ ન હોય, તો તેને દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ રહે છે. દા.ત.

$2x + 3y = 4$ *અને* $x-2y+2 = 3x+y-6$ *એ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણો છે અને સમીકરણ* $3x2+y=5$ *એ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ નથી (અને તેનો ઘાત 2 છે) કારણ કે ચલ* x *નો ઘાત2 છે વળી સમીકરણ* $xy + x = 5$ *એ પણ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ નથી કારણ કે તેમાં* xy *નું પદ છે અને તે બે ચલ પદો* x *અને* y *નો ગુણાકાર છે.*

એક ચલ સુરેખ સમીકરણનું સામાન્ય સ્વરૂપ (વ્યાપક સ્વરૂપ) $ax+b = 0$ *કે જ્યાં* $a \neq 0$ *અને* a *અને* b *અચળ હોય. દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનું સામાન્ય સ્વરૂપ (વ્યાપ સ્વરૂપ)* $ax + by + c = 0$ *છે. જ્યાં* a, b *અને* c *વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે. એવી રીતે કે* a *અને* b *માંથી ઓછામાં ઓછું એક શૂન્ય નથી. (ટૂંકમાં)* a *અને* b *એકી સાથે શૂન્ય ન હોય છે.*

ઉદાહરણ 5.1: *નીચેનામાંથી ક્યો સમીકરણો એક ચલ સુરેખ સમીકરણ છે ? તેમની ડા.બા. અને જ.બા. દર્શાવો.*

(i) $2x + 5 = 8$

(ii) $3y - z = y + 5$

(iii) $x^2 - 2x = x + 3$

(iv) $3x - 7 = 2x + 3$

(v) $2 + 4 = 5 + 1$

ઉકેલ :

1. *આ* x *નું સુરેખ સમીકરણ છે. કારણ કે* x *નો ઘાથાંક 1 છે. ડા.બા.* $= 2x + 5$ *અને જ.બા.* $= 8$

2. *આ એક ચલ સુરેખ સમીકરણ નથી કારણ કે તેમાં બે ચલ* y *અને* z *છે.*

3. *આ સુરેખ સમીકરણ નથી કારણ કે* x *નો મહત્તમ ઘાતાંક 2 છે. અહી ડા.બા.* $= x^2 - 2x$ *અને જ.બા.* $= x + 3$ *છે.*

4. *આ* x *નું સુરેખ સમીકરણ છે. કારણ કે સમીકરણની ડા.બા. અને જ.બા. બંને બાજુએ* x *નો ઘાતાંક 1 છે. ડા.બા.* $= 3x - 7$ *અને જ.બા.* $= 2x + 3$

5. *આ સુરેખ સમીકરણ નથી કારણ કે તેમાં એક પણ ચલ નથી. ડા.બા.* $= 2 + 4$ *અને જ.બા.* $= 5 + 1$. *છે.*

ઉદાહરણ 5.2: *નીચેનામાંથી ક્યાં સમીકરણો દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણો છે ?*

(i) $2x + z = 5$

(ii) $3y - 2 = x + 3$

(iii) $3t + 6 = t - 1$

ઉકેલ :

1. આ x અને y નું દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ છે.

2. આ x અને y નું દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ છે.

3. આ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ નથી કારણ કે તેમાં માત્ર એક ચલ t છે.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 5.1

1. નીચેનામાંથી ક્યાં સમીકરણો એક ચલ સુરેખ સમીકરણો છે ?
   (i) $3x - 6 = 7$
   (ii) $2x - 1 = 3z + 2$
   (iii) $5 - 4 = 1$
   (iv) $y^2 = 2y - 1$
2. નીચેનામાંથી ક્યાં સમીકરણો દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણો છે ?
   (i) $3y - 5 = x + 2$
   (ii) $x^2 + y = 2y - 3$
   (iii) $x + 5 = 2x - 3$

5.2 એક ચલ સુરેખ સમીકરણની રચના

નીચેની પરિસ્થિતિને ધ્યાનમાં લો.

1. x માં 4 ઉમેરતા 11 થાય.

2. y ને 7 વડે ભાગતાં 2 મળે.

3. રીના પાસે કેટલાંક સફરજન છે. તેમાંથી તે 5 સફરજન તેની બહેનને આપે છે. જો તેની પાસે 3 સફરજન બાકી રહે તો તેની પાસે કેટલાં સફરજન હશે ?

4. દ્વિઅંકી સંખ્યાના એકમના અંક કરતાં દશકનો અંક બમણો છે. જો અંકોના સ્થાન અદલ બદલ કરવામાં આવે તો તેથી બનતી નવી સંખ્યા મૂળ સંખ્યા કરતાં 18 ઓછી થાય છે તો મૂળ સંખ્યા શોધો.

   1. માં સમીકરણ આ પ્રમાણે લખી શકાય. $x + 4 = 11$ તમે ચકાસણી કરી શકશો કે $x = 7$ એ આ સમીકરણનું સમાધાન કરે છે. આમ $x = 7$ એ આ સમીકરણનો ઉકેલ છે.

   2. માં $\frac{y}{7} = 2$ ના સમીકરણ છે. (અથવા $y = 14$ સમીકરણનો ઉકેલ છે.)

3. માં શોધવાના જથ્થા માટે તમે x ચલ ધારી શકો એટલે કે રીના પાસે x સફરજન છે તેમાંથી 5 સફરજન તેની બહેનને આપે છે તેથઈ તેની પાસે x - 5 સફરજન બાકી રહે. તેથી જરૂરી સમીકરણ x - 5 = 3 અથવા x = 8 સ્વરૂપે લખી શકાય.

4. માં એકમનો અંક x ધારો તેથી દશકનો અંક 2x થાય તેથી સંખ્યા 10 (2x)+x = 20x + x = 21x થાય. જ્યારે અંકોની અદલા બદલી કરવામાં આવે ત્યારે દશકનો અંક x અને અકમનો અંક 2x બને છે. તેથી સંખ્યા 10 (x)+2x = 12x થાય. જ્યારે મૂળ સંખ્યા નવી સંખ્યા કરતાં 18 વધારે છે તેથી

$21x - 12x = 18$ સમીકરણ બને છે.

$9x = 18$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો. 5.2

નીચેની પરિસ્થિતિઓમાં યોગ્ય ચલો સંખ્યાઓ પસંદ કરીને સુરેખ સમીકરણ બતાવો.

1. 15 માંથી કોઈ સંખ્યાના બમણા બાદ કરવાથી 7 મળે.
2. એક મોટરબોટ દર કિલોમીટરે 0.1 લીટર બળતણ (પેટ્રોલ) વાપરે રછે. એક દિવસે તેણે x કિલોમીટરની મુસાફરી કરી જો તેણે કુલ 10 લીટર (પેટ્રોલ) બળતણ વાપર્યું હોય, તો x માં સમીકરણ બનાવો.
3. એક લંબચોરસની લંબાઈ તેની પહોળાઈ કરતાં બમણી છે. લંબચોરસની પરિમિત 96 મીટર છે. (લંબચોરસની પહોલાઈ માટે y ધારો)
4. 15 વર્ષ પછી સલમાની ઉંમર પોતાની હાલની ઉંમર કરતાં ચાર ગણી થશે. (સલામતી હાલની ઉંમર માટે t વર્ષ ધારો.)

5.3 એક ચલ સુરેખ સમીકરણનો ઉકેલ

ચાલો આપણે નીચેનાં એક ચલ સુરેખ સમીકરણ વિશે વિચારીએ

$x - 3 = -2$

અહીં ડા.બા. = x - 3 અને જ.બા. = 2 છે.

હવે આપણે x ની કેટલીક કિંમતો મૂકીને ડાબી અને જમણી બાજુનું મૂલ્યાંકન કરીએ.

x ની કિંમત	ડ.બા.	જ.મા.
0	-3	-2
1	-2	-2
3	0	-2
4	1	-2

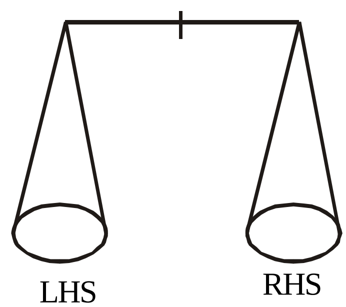
આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે જ્યારે x ની કિંમત 1 હોય ત્યારે જ ડા.બા. = જ.બા. બને છે. x ની તમામ અન્ય કિંમતો માટે ડા.બા# જ.બા. તેથી આપણે x ની કિંમત 1 હોય ત્યારે તે સમીકરણનું સમાધાન કરે છે એમ કહી એ અથવા x = 1 સમીકરણનો ઉકેલ છે.

સમીકરણમાં ચલના સ્થાને સંખ્યા મૂકતા ડા.બા. બરાબર જ.બા. બનાવે તેને તેનો ઉકેલ કહે છે. આ પ્રમાણે ચલની જુદી જુદી કિંમતો લાઈને પ્રયત્ન અને ભૂલ પદ્ધતિથી આપણે ઉકેલ મેળવી શકીએ તેમ છતાં આપણે સુરેખ સમીકરણનો ઉકેલ પદ્ધતિસર શોધવાનું શીખીશું.

સમીકરણને વજનકાંટા સાથે સરખાવી શકાય. તેની (સમીકરણની) બંને બાજુઓ તેનાં પલ્લાં છે. અને = નું ચિહ્ન બંને પલ્લાં સમતોલ છે એમ બતાવે છે. આપણે વજન કાંટાને કામ કરતો જોયો છે. જો આપણે બંને પલ્લામાં સરખું વજન મૂકીએ (ઉમેરીએ) અથવા બંને પલ્લામાંથી સરખું વજન કાઢી લઈએ (બાદ કરીએ) તો બંને પલ્લા સમતોલ રહે છે આ રીતને જ આપણે નીચેની રીતે સમીકરણમાં રૂપાંતર કરી શકીએ.

1. *સમીકરણની બંને બાજુ સરખી સંખ્યા ઉમેરો.*
2. *સમીકરણની બંને બાજુએથી સરખી સંખ્યા બાદ કરો.*
3. *સમીકરણની બંને બાજુઓને શૂન્ય સિવાયની સરખી સંખ્યા વડે ગુણો*
4. *સમીકરણની બંને બાજુઓને શૂન્ય સિવાયની સરખી સંખ્યા વડે ભાગો*

હવે આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.



આકૃતિ **5.1**

ઉદાહરણ 5.3 : $5 + x = 8$ *નો ઉકેલ મેળવો.*

ઉકેલ : *સમીકરણની બંને બાજુમાંથી 5 બાદ કરીએ તો*

$$5 + x - 5 = 8 - 5$$

$$x + 0 = 3$$

$$x = 3$$

તેથી, $x = 3$ *સમીકરણનો ઉકેલ છે.*

ચકાસો : *જ્યારે* $x = 3$ *મૂકીએ ત્યારે ડ.બા.* $= 5 + 3 = 5 + 3 = 8$

અને જ.બા. $= 8$ છે.

ડા.બા. $=$ જ.બા.

ઉદાહરણ 5.4 : $y - 2 = 7$ નો ઉકેલ મેળવો.

ઉકેલ : સમીકરણની બંને બાજુ 2 ઉમેરતા આપણને

$y - 2 + 2 = 7 + 2$ મળે.

$y = 9$

તેથી $y = 9$ એ સમીકરણનો ઉકેલ છે.

ચકાસો : $y = 9$, લેતાં ડા.બા. $= 9 - 2 = 7$ અને જ.બા. $= 7$ છે.

ડા.બા. $=$ જ.બા.

ઉદાહરણ 5.5: $7x + 2 = 8$ નો ઉકેલ મેળવો.

ઉકેલ : સમીકરણની બંને બાજુ 2 બાદ કરતાં

$7x + 2 - 2 = 8 - 2$ મળે.

$7x = 6$

$\frac{7x}{7} = \frac{6}{7}$ (બંને બાજુ 7 વડે ભાગતાં)

$x = \frac{6}{7}$

તેથી, $x = \frac{6}{7}$ એ સમીકરણનો ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 5.6 : $\frac{3y}{2} - 3 = 9$ નો ઉકેલ મેળવો.

ઉકેલ : સમીકરણની બંને બાજુ 3 ઉમેરતા

$\frac{3y}{2} - 3 + 3 = 9 + 3$

$\frac{3y}{2} = 12$

$\frac{3y}{2} \times 2 = 12 \times 2$ (બંને બાજુ 2 વડે ગુણવતાં)

$3y = 24$

(બંને બાજુ 3 વડે ભાગતાં)

$y = 8$

$\frac{3y}{3} = \frac{24}{3}$ તેથી 8 એ સમીકરણનો ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 5.7 : $(x + 3) = 3(2x - 7)$ નો ઉકેલ મેળવો.

ઉકેલ : આ સમીકરણને નીચે પ્રેમાણે લખી શકાય.

$2x + 6 = 6x - 21$

$6x - 21 = 2x + 6$ (ડા.બા. અને જ.બા.ની અદલા બદલી કરતાં)

$6x - 21 + 21 = 2x + 6 + 21$ (બંને બાજુ 21 ઉમેરતાં)

$6x = 2x + 27$

$6x - 2x = 2x + 27 - 2x$ (બંને બાજુ 2x વડે ભાગતાં)

$4x = 27$

$x = \frac{27}{4}$

તેથી, $x = \frac{27}{4}$ એ સમીકરણનો ઉકેલ છે.

નોંધ :

1. આપણે દરેક વખતે જે ઉમેરીએ, બાદ કરીએ, ગુણીએ કે ભાગીએ તેને વિગતવાર લખવાની જરૂર નથી.
2. આ પ્રક્રિયાને ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ અથવા જમણી બાજુથી ડાબી બાજુ સ્થાન પરિવર્તન (પક્ષાંતર) કરવાની રીત કહેવાય છે.
3. જ્યારે આપણે કોઈ પદને એક બાજુથી બીજી બાજુ સ્થાન પરિવર્તન (પક્ષાંતર) કરીએ ત્યારે ચિહ્ન બદલાય છે. નિશાની '+' (વત્તા) એ '-' (ઓછા) નિશાની બને છે. અને '-' એ '+' થાય છે. (નિશાની 'x' (ગુણ્યા) એ ÷ (ભાગ્યા) થાય છે અને નિશાની ÷ એ 'x' થાય છે.)
4. એક ચલ સુરેખ સમીકરણને $ax + b = 0$ સ્વરૂપમાં લખી શકાય છે. જ્યાં a અને b બં અચળ છે.

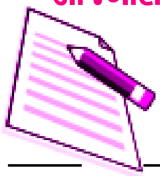
   અને x એ ચલ રહે તેનો ઉકેલ $x = -\frac{b}{a},\ a \neq 0$.

ઉદાહરણ 5.8 : $3x - 5 = x + 3$ નો ઉકેલ શોધો.

ઉકેલ : $3x - 5 = x + 3$

$3x = x + 3 + 5$

$3x - x = 8$



$$2x = 8$$

$$x = 4$$

આમ, $x = 4$ એ આપેલ સમીકરણનો ઉકેલ છે.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 5.3

નીચેના સમીકરણોના ઉકેલ મેળવો

1. $x - 5 = 8$
2. $19 = 7 + y$
3. $3z + 4 = 5z + 4$
4. $\frac{1}{3}y + 9 = 12$
5. $5(x - 3) = x + 5$

5.4 વ્યવહારિક કોયડાઓ (ફૂટ પ્રશ્નો)

તમે એક ચલ સુરેખ સમીકરણ કેવી રીતે રચવું તે શીખી ગયા છો. હવે આપણે સુરેખ સમીકરણના કેટલાક ઉપયોગ વિશે શીખીશું.

ઉદાહરણ 5.9 : જેકોબના પિતાની હાલની ઉંમર જેકોબાના હાલની ઉંમર કરતાં ત્રણ ગણી છે 5 વર્ષ પછી તેમની ઉંમરનો તફાવત 30 વર્ષ થશે તો તેમની હાલની ઉંમર શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે જકેબની હાલની ઉંમર x વર્ષ છે.

તેથી તેના પિતાની હાલની ઉંમર $3x$ વર્ષ હોય

5 વર્ષ પછી જેકોબની ઉમર $= (x + 5)$ વર્ષ અને

તેના પિતાની 5 વર્ષ પછી ઉંમર $= (3x + 5)$ વર્ષ હશે.

તેમની ઉંમરનો તફાવત $= (3x + 5) - (x + 5)$ વર્ષ જે 30 વર્ષ આવેલો છે, તેથી

$$3x + 5 - (x + 5) = 30$$

$$3x + 5 - x - 5 = 30$$

$$3x - x = 30$$

$$2x = 30$$

$$x = 15$$

જેકોબની હાલની ઉંમર 15 વર્ષ છે અને તેના પિતાની હાલની ઉંમર = 3x = 3 x 15 = 45 વર્ષ છે.

ચકાસો : પાંચ વર્ષ પછી જેકોબની ઉમર $= 15 + 5 = 20$ વર્ષ

પાંચ વર્ષ પછી તેના પિતાની ઉંમર $= 45 + 5 = 50$ વર્ષ

તેમની ઉંમરનો તફાવત $= 50 - 20 = 30$ વર્ષ

ઉદાહરણ 5.10 : ત્રણ ક્રમિક બેકી પૂર્ણાંક સંખ્યાોનો સરવાળો 36 છે. તો તે સંખ્યાઓ શોધો

ઉકેલ : ધારો કે સૌથી નાની પેકી પૂર્ણાંક સંખ્યા x છે.

તેથી બીજી બે પેકી પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ $x + 2$ અને $x + 4$ છે.

તેમનો સરવાળો 36 થાય છે.

$$x + (x + 2) + (x + 4) = 36$$

$$3x + 6 = 36$$

$$3x = 36 - 6 = 30$$

$$x = 10$$

તેથી માગેલી પૂર્ણાંક બેકી સંખ્યાઓ 10, 12 અને 14 છે.

ઉદાહરણ 5.11: એક લંબચોરસની લંબાઈ તેની પહોળાઈ કરતાં 3 સેમી વધારે છે જો તેની પરિમિત 34 સેમી હોય, તો તેની લંબાઈ પહોળાઈ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે લંબચોરસની પહોળાઈ x સેમી છે.

તેની લંબાઈ $= (x + 3)$ સેમી

તેની પરિમિત 34 સેમી હોવાથી

$$2(x + 3 + x) = 34$$

$$2x + 6 + 2x = 34$$

$$4x = 34 - 6$$

$$4x = 28$$

$$x = 7$$

તેથી લંબચોરસની પહોળાઈ 7 સેમી અને લંબાઈ 10 સેમી.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 5.4

1. બે સંખ્યાઓનો સરવાળો 85 છે. જો એક સંખ્યા બીજી સંખ્યા કરતાં 7 વધારો હોય, તો બંને સંખ્યાઓ શોધો.
2. પિતાની ઉંમર તેના પુત્રની ઉંમરના 2 ગણા કરતાં 20 વધારે છે. તેમની ઉંમરનો સરવાળો 65 વર્ષ હોય, તો પુત્ર અને પિતાની ઉંમર શોધો.
3. લંબચોરસની લંબાઈ તેની પહોળાઈ કરતાં બમણી છે. લંબચોરસની પરિમિત 66 સેમી છે, તો તેની લંબાઈ અને પહોળાઈ શોધો.
4. એક વર્ગમાં છોકરાઓની સંખ્યા છોકરીઓની સંખ્યાના $\frac{2}{5}$ ભાગની છે. જો છોકરાઓની સંખ્યા 10 હોય, તો છોકરીઓની સંખ્યા શોધો.

5.5 દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ

નેહા પેન્સીલ અને પેન ખરીદવા બજારમાં જાય છે. પેન્સીલની કિંમત 2 રૂપિયા અને પેનની કિંમત 5 રૂપિયા છે. જો નેહા રૂા. 50 નો ખર્ચ કરે તો તેણે કેટલી પેન્સીલ અને પેન ખરીદી હશે ?

આપણે પેન્સીલ અને પેનની સંખ્યા શોધવા માગીએ છીએ તો તેણે ખરીદેલી પેન્સીલ માટે x અને પેન માટે y ધારો

ખરીદેલી પેન્સીલની કિંમત = 2 x x = રૂા. 2x

અને y પેનની કિંમત = 4 x y રૂા. 4y

કુલ કિંમત રૂા. 50 છે.

$2x + 4y = 50$ ...(1)

આ x અને y સ્વરૂપનું દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ છે. કારણ કે તે $ax + by + c = 0$ સ્વરૂપનું છે.

હવે આપણે સમીકરણ (1) નો ઉકેલ શોધવા માટે x અને yની જુદી જુદી કિંમતો લઈશું.

1. જો $x = 1, y = 12$, હોય તો, ડા.બા. $= 2 \times 1 + 4 \times 12 = 2 + 48 = 50$ અને જ.બા. = 50. છે, $x = 1$ અને $y = 12$ નું સમીકરણનો ઉકેલ છે.
2. જો $x = 3, y = 11$, હોય, તો ડા.બા. $= 2 \times 3 + 4 \times 11 = 50$ અને જ.બા. = 50.

   $x = 3, y = 11$ સમીકરણનો ઉકેલ છે.
3. જો $x = 4, y = 10$, હોય, તો ડા.બા. $= 9 \times 4 + 4 \times 10 = 48$ અને જ.બા. = 50. છે. તેથી $x = 4, y = 10$ એ સમીકરણનો ઉકેલ નથી.

   આમ, દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણને એક કરતાં વધારે ઉકેલ હોય છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે (જોયુ કે) ચલ x *ના સંદર્ભમાં એક ચલ સુરેખ સમીકરણનું વ્યાપક સ્વરૂપ* $ax + b = 0, a \neq 0$ *તેને એક જ ઉકેલ હોય છે એટલે કે* $x = -\frac{b}{a}$ *પણ* x *અને* y *ના સંદર્ભમાં દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનું વ્યાપક સ્વરૂપ* $ax + by + c = 0$ .... *(1)*

જ્યા a, b *અને* c *અચળ છે અને* a *અને* b *માંથી ઓછામાં ઓછું એક તો શૂન્ય ન જ હોય* $a \neq 0$ *તેમ લઈએ તો સમીકરણ (1) ને નીચે પ્રમાણે લખી શકાય.*

$$ax = -by - c$$

$$x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}$$

હવે y *ની દરેક કિંમત માટે આપણને* x *ની અતન્ય સંખ્યા મળે આમ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણને અસંખ્ય મળે.*

નોંધ : *સુરેખ સમીકરણ* $ax + c = 0$ *જ્યાં* $a \neq 0$ *ને દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ* $ax + oy + c = 0$ *ના સ્વરૂપમાં વિચારી શકાય, એટલે કે* y *નો સહગુણ 30 લેતાં તેના અનેક ઉકેલ મળી શકે,*

$$x = -\frac{c}{a}, y = 0;\ x = -\frac{c}{a}, y = 1$$

એટલે કે y *ની દરેક કિંમત માટે* x *ની કિંમત* $-\frac{c}{a}$. *બરાબર થાય*

ઉદાહરણ 5.12: *બે સંખ્યાનો સરવાળો 15 થાય છે આ વિગતને ધ્યાનમાં લઈ દ્વિચલ સુરેખ સુરેખ સમીકરણની રચના કરો.*

ઉકેલ : *ધારો કે બે સંખ્યાઓ* x *અને* y *છે. તેથી તેમનો સરવાળો* $x + y$ *થાય. તેમનો સરવાળો 15 આપેલો છે તેથી જરૂરી સમીકરણ* $x + y = 15$.

ઉદાહરણ 5.13 : *સમીકરણ* $4x - 5y = 2$ *ના ઉકેલ (i)* $x = 3$ *અને* $y = 2$ *(ii)* $x = 4$ *અને* $y = 1$ *છે કે કેમ તે ચકાસો.*

ઉકેલ : $4x - 5y = 2$ *આપેલ છે.*

જ્યારે $x = 3$ *અને* $y = 2$ *હોય ત્યારે ડા.બા.*

$= 4x - 5y$

$= 4 \times 3 - 5 \times 2$

$= 12 - 10 = 2 =$ *જ.બા.*

તેથી $x = 3$ *અને* $y = 2$ *એ સમીકરણનો ઉકેલ છે. જ્યારે* $x = 4$ *અને* $y = 1$ *હોય, ત્યારે ડા.બા.*

$= 4x - 5y$

$= 4 \times 4 - 5 \times 1$

$= 16 - 5$

$= 11$

પરંતુ જ.બા. $= 2$ છે.

ડા.બા. $\neq$ જ.બા.

તેથી $x = 4$ અને $x = 1$ સમીકરણનો ઉકેલ નથી.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 5.5

1. અજ્ઞાન સંખ્યાઓ માટે યોગ્ય ચલો પસંદ કરી દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ બનાવો.
   (i) લંબચોરસની પરિમિતિ 98 સેમી છે. (લંબાઈ માટે x અને પહોળાઈ માટે y લો.)
   (ii) પિતાની ઉંમર પુત્રની ઉંરના બમણા કરતાં 10 વધારે છે.
   (iii) એક સંખ્યા કરતાં બીજા સંખ્યા 10 વધારે રછે.
   (iv) 2 કિગ્રા. સફરજન અને ત્રણ કિગ્રા. નારંગીની કિંમત રૂા. 120 છે. (સફરજન અને નારંગીની 1 કિગ્રાની કિંમત પેટે અનુક્રમે x અને y ધારો)

નીચેના વિધાનો સાંચા છે કે ખોટાં તે કહો.

2. $x = 0, y = 3$ એ $3x + 2y - 6 = 0$ સમીકરણનો ઉકેલ છે.
3. $x = 2, y = 5$ એ $5x + 2y = 10$ સમીકરણનો ઉકેલ છે.

5.6 દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનો આલેખ

હવે તમે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનો આલેખ દોરતાં શીખશો. $2x + 3y = 12$. સમીકરણને નીચે મુજબ લખી શકાય.

$2x = 12 - 3y$ અથવા $3y = 12 - 2x$

$$x = \frac{12 - 3y}{2} \text{ or } y = \frac{12 - 2x}{3}$$

y ની દરેક કિંમત માટે અથવા x ની દરેક કિંમત માટે આપણને અનુક્રમે x અને y ની અનન્ય કિંમત મળે છે. x અને y ની જે કિંમતો સમીકરણનું સમાધાન કરે છે તેનું નીચે પ્રમાણે કોષ્ટક બતાવીએ.

$2x + 3y = 12$

x	0	6	3	9	– 3
y	4	0	2	– 2	6

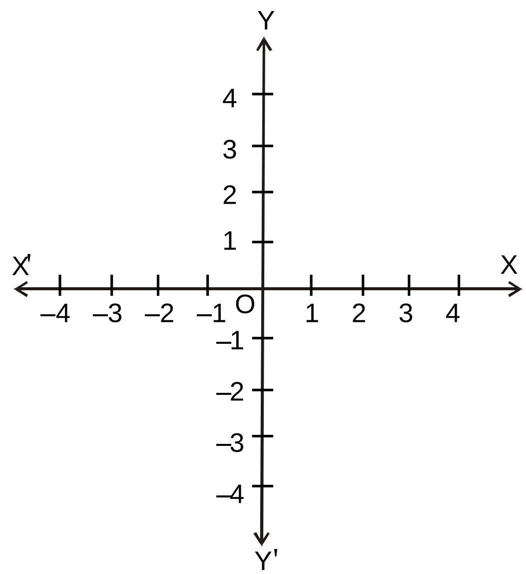
આમ, x = 0, y = 4; x = 6, y = 0; x = 3, y = 2; x = 9, y = –2; x = –3, y = 6 આ બધા આપેલ સમીકરણનો ઉકેલ છે.

આ ઉકેલોને આપણે ક્રમયુક્ત જોડમાં દર્શાવીએ (0, 4), (6, 0), (3, 2), (9, –2) અને (–3, 6).

પ્રથમ અંક x નું મૂલ્ય અને y નું મૂલ્ય દર્શાવે છે. હવે આ ક્રમયુક્ત જોડોને સમતલમાં નિરૂપણ કરી તેમને જોડીને સમીકરણનો આલેખ દોરતાં શીખશો, સમીકરણ 2x + 3y = 12 ના આલેખમાં જે બિંદુઓ ઉકેલ દર્શાવે રહ્યે તે બિંદુઓ સમરેખ હશે (તેઓ એક રેખા પર હશે) અને જે બિંદુઓ ઉકેલ દર્શાવતા નથી તેઓ આ રેખાપર નહી હોય, દરેક બિંદુ ક્રમયુક્ત જોડ કહેવાય છે જે રેખા પર છે અને (સમીકરણનો) ઉકેલ આપશે. અને જે ક્રમયુક્ત જોડી રેખા પર નથી તે સમીકરણનો ઉકેલ બની શકશે નહિ. (તે સમીકરણનોો ઉકેલ નહીં હોય.)

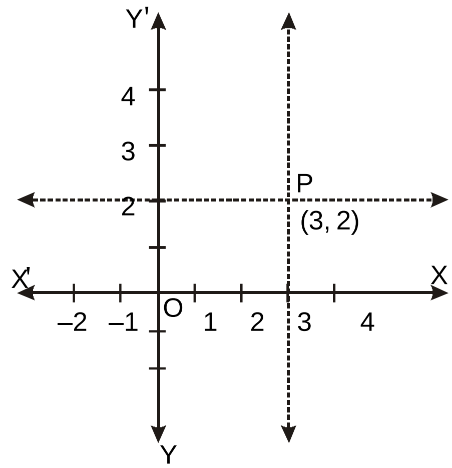
દ્વિચલ સમીકરણનો આલેખ દોરવા માટે આપણે પ્રથમ આ બિંદુઓનું સમતલમાં નિરૂપણ કરીશું, આપણે નીચે પ્રમાણે પ્રક્રિયા કરીશઃ

પગલુ 1: આપણે પરસ્પર O બિંદુમાં છેદતી X'OX અને Y'OY બે લંબરેખાઓ દોરીએ. આકૃતિ 5.2 માં દર્શાવ્યા મુજબ સંખ્યારેખા પર O બિંદુને સંગત રેખા 0 (શૂન્ય) ને ધ્યાનમાં લઈને X'OX અને YOY' ઉપર વાસ્તવિક સંખ્યાઓનું નિરૂપણ કરો. આ બે રેખાઓ સમતલનું ચાર ભાગમાં વિભાજન કરે છે જેને પ્રથમ ચરણ, દ્વિતીય ચરણ, તૃતીય ચરણ અને ચતુર્થ ચરણ કહેવાય છે. રેખા X'OX એ X અક્ષ અને Y'OY ને Y અક્ષ કહેવાય છે. આપણે સમતલમાં X અક્ષ અને Y અક્ષ એકબીજાને લંબ દોરેલા છે. તેથી સમતલને યામ સમતલ અથવા ફ્રેન્ચ ગણિતશાસ્ત્રી દફાર્તે કે જેણે બિદુંઓને સમતલમાં નિરૂપણ કરવાની આ રીત શોધી તેના માનમાં કાર્ઝિયન સમતલ કહીશ



આકૃતિ **5.2**

પગલુ 2: (3,2) નું નિરૂપણ કરવા માટે X ધરી પર 3 ઉપર ટપકું કરો અને આ બિંદુમાંથી X અક્ષને લંબરેખા 'l' દોરો (એટલે Y અક્ષને સમાન્તર) હવે Y ધરી પર 2 આગળ ટપકું કરો અને આ બિંદુમાંથી Y અક્ષને લંબરેખા m દોરો (એટલે કે X અક્ષને સમાન્તર) જે રેખા l ને P બિંદુમાં મળે બિંદુ P એ સમતલમાં બિંદુ (3, 2) દર્શાવે છે. (P ને (3, 2) ને સંગત સમતલનું બિંદુ કહે છે.)



આકૃતિ - 5.3

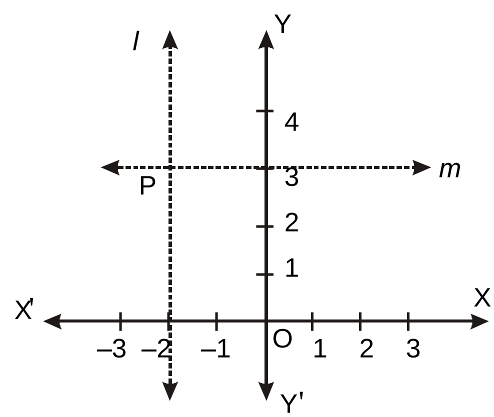
નોંધ 1: *આપણે એ ધ્યાનમાં રાખવુ જોઈએ કે ક્રમયુક્ત જોડ* (a, b) *માટે* a *ને બિંદુનો* x *યામ અને* b *ને બિંદુનો* y *યામ કહેવાય છે.*

નોંધ 2: X *અક્ષ પરના દરેક બિંદુને* (a, o) *વડે દર્શાવી શકીએ એટલે કે તેનો* y *યામ* 0 *(શૂન્ય) છે અને* y *અક્ષ પરનું દરેક બિંદુ* (o, b) *સ્વરૂપમાં છે એટલે કે તેનો* y *યામ* 0 *(શૂન્ય) છે* 'O' *બિંદુના યામ (0, 0) છે.*

નોંધ 3: *પ્રથમ ચરણમાં* x *અને* y *બંને યામ ઘન હોય છે. બીજા ચરણમાં* x *યામ ઋણ અને* y *યામ ધન હોયક છે, ત્રીજા ચરણમાં* x *અને* y *બંને યામ ઋણ હોય છે અને ચોથા ચરણમાં* x *યામ ધન અને* y *યામ ઋણ હોય છે.*

ઉદાહરણ 5.14 : *યામ સમતલમાં (-2, 3) બિંદુનું નિરૂપણ કરો.*

ઉકેલ : *સમતલમાં* x *અક્ષ અને* y *અક્ષ દોરો અને તેમના પર બિંદુઓ આલેખો* x *અક્ષ પર જે બિંદુને સંગત સંખ્યા* -2 *છે તે લો અને તેમાંથી* x *અક્ષને સમાંતર રેખા* 'l' *દોરો.* y *અક્ષ પર જે બિંદુને સંગત સંખ્યા* 3 *છે તે લો અને તમાંથી* x *અક્ષ ને સમંતર રેખા* m *દોરો જે* l *ને* P *બિંદુઓ મળે બિંદુ* P *એ (-2, 3) દર્શાવે છે. આપણે (-2, 3) ને બિંદુના યામ કહીએ છીએ.*



આકૃતિ **5.4**

હવે તમે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનો આલેખ દોરતા શીખશે. આપણે એ ધ્યાનમાં લેવુ જોઈએ કે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનો આલેખ એક રેખા છે, અને રેખા પરના દરેક બિંદુના યામ સમીકરણનું સમાધાન કરે રછે. જો બિંદુ રેખા પર ન હોય તો તેના યામ સમીકરણનું સમાધાન કરશે નહિ, વલી તમે એ પણ જાણો છો કે આપેલા બે બિંદુમાંથી એક અને માત્ર એક જ રેખા દોરી શકાય છે. તેથી કોઈપણ બે બિંદુ લેવાં પૂરતાં રછે એટલે કે x *અને* y *ચલનાં મૂલ્યો જે સમીકરણનું સમાધાન કરે છે તેને સંગત બે બિંદુઓ લઈએ તો તે પૂરતું છે. તેમ છતાં*

એવું સૂચન કરવામાં આવે છે કે ભૂલ થવાથી કોઈ પણ તડને ટાળવા તમારે ત્રણ બિંદુ લેવા જોઈએ.

ઉદાહરણ 5.15 : $2x - 3y = 6$ સમીકરણનો આલેખ દોરો.

ઉકેલ : હવે સમીકરણ $2x - 3y = 6$ નું સમાધાન કરે તેવાં x અને y નાં મૂલ્યો નક્કી કરો. નીચેનામાંથી કોઈ પણ સ્વરૂપ સમીકરણનું પક્ષાતર કરવાથી સરળતા થશે.

$2x = 3y + 6$ અથવા $3y = 2x - 6$

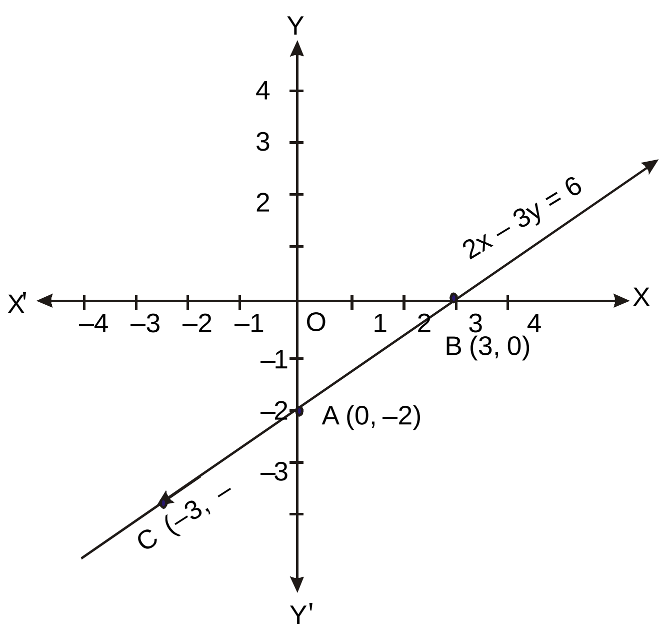
$$\Rightarrow x = \frac{3y+6}{2} \text{ or } y = \frac{2x-6}{3}$$

હવે x અને y ની જુદી જુદી કિંમતો પસંદ કરો તો તેમને અનુરૂપ y અને x નાં મૂલ્યો તમને મળશે

જો આપણે x ની જુદી જુદી કિંમતો $y = \frac{2x-6}{3}$ માં લઈએ (નહીએ) તો y ને અનુરૂપ મૂલ્યો મળશે $x = 0$ માટે $y = -2$ માટે $x = 3$ અને $y = 0$ માટે $x = -3$ અને $y = -4$ મળો. તમે આ મૂલ્યોને નીચે મુજબ કોષ્ટક સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકશો.

x	0	3	–3
y	– 2	0	– 4

સમતલમાં અનુરૂપ બિંદુઓ (0, -2), (3, 0) અને (-3, -4) છે હવે તમે આ બિંદુઓને નિરૂપણ કરો અને આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે રેખા દોરો જે સુરેખ સમીકરણને આલેખ દર્શાવે એ નોંધો કે ત્રણે બિંદુ એક રેખાપર હોવા જોઈએ.



આકૃતિ - 5.5

ઉદાહરણ 5.16: $x = 3$ નો આલેખ દોરો.

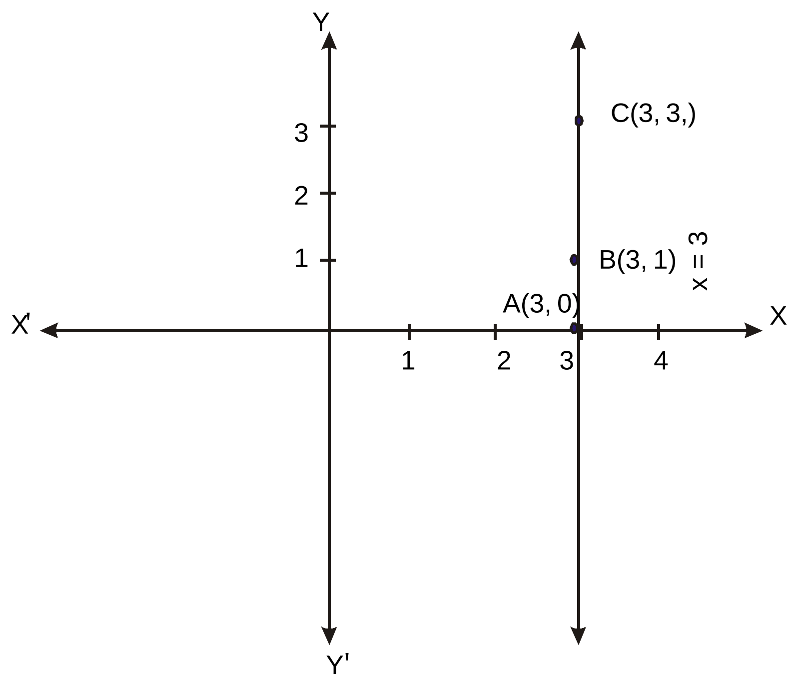
ઉકેલ : એમ જણાય છે કે આ એક ચલ સુરેખ સમીકરણ છે, તમે તેને નીચે પ્રમાણે લખીને દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણમાં સરળતાથી ફેરવી શકશો.

$$x + 0\,y = 3$$

હવે તમારે x અને y ની કિંમત દર્શાવતું કોષ્ટક નીચે પ્રમાણે મળશે.

x	3	3	3
y	3	0	1

નિરીક્ષણ કરો કે y ની કોઈપણ કિંમત માટે x નું મૂલ્ય હંમેશાં 3 છે આમ જરૂરી બિંદુઓ (3, 3), (3, 0), (3, 1) લઈ શકાય આલેખ આકૃતિ 5.6માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ - 5.6

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 5.6

1. નીચેના બિંદુઓનું કાર્ટેઝિવન સમતલમાં (યામ) સમતલમાં નિરૂપણ કરો.

(i) (3, 4) (ii) (–3, –2) (iii) (–2, 1)

(iv) (2, –3) (v) (4, 0) (vi) (0, –3)

2. નીચેના દરેક દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનો આલેખ દોરો.

(i) $x + y = 5$ (ii) $3x + 2y = 6$

(iii) $2x + y = 6$ (iv) $5x + 3y = 4$

5.7 દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ સંહતિ (યુગમ)

નેહા બજારમાં જાય છે અને તે બે પેન્સીલ અને ત્રણ પેન રૂા. 19 માં ખરીદે છે. મેરી ત્રણ પેન્સીલ અને બે પેન રૂા. 16માં ખરીદે છે તો એક પેન્સીલ અને એક પેનની કિંમત શું હશે ? જો એક પેન્સીલની કિંમત રૂા. x અને એક પેનની કિંમત રૂા. y હોય, તો નેહાના સંદર્ભણાં સુરેખ સમીકરણ $2x + 3y = 19$ અને મેરીના સંદર્ભમાં $3x + 2y = 11$ થાય હવે એક પેન્સીલ અને એક પેનની કિંમત શોધવી હોય, તો તમારે x અને y નો એવાં મૂલ્યો શોધવા જોઈ કે જે બંને સમીકરમનું સમાધન કરે, એટલે કે,

$$2x + 3y = 19$$

$$3x + 2y = 16$$

આ બંને સમીકરણોને સાથે દર્શાવવાની ક્રિયાને દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ સંહતિ (સુરેખ સમીકરણ યુગ્મ) કહેવાય છે, અને x અને y ની જે કિંમતો બંને સમીકરણોનું એક સાથે સમાધાન કરે તેને સમીકરણનો ઉકેલ કહે છે.

આવા સમીકરણોના ઉકેલ શોધવાની જુદી જુદી રીતો છે (1) આલેખની રીત (2) બૈજિક રીત તમે આવા સમીકરણોના ઉકેલની પ્રથમ આલેખની રીત અને પછી બૈજિક રીત શીખશો.

5.7.1 આલેખની રીત :

આ પદ્ધતિમાં તમારે બંને દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણના આલેકો એક જ આલેખપત્ર ઉપર દોરવા પડશે. સમીકરણોમાં આલેખો નીચે પ્રમાણે હોઈ શકે.

1. **પરસ્પર છેદતી રેખાઓ :** આ બાબતમાં છેદબિંદુ બંને સમીકરણોનું એક સાથે ઉકેલ બનશે. x યામ x ની અને y યામ y ની કિંમત આવશે. આ બાબતમાં સમીકરણ યુગ્મને અનન્ય ઉકેલ મળશે.
2. **એક જ રેખાઓ :** આ બાબતમાં સામાન્ય રેખા પરનું દરેક બિંદુ (સમીકરણ યુગ્મનો) ઉકેલ આપશે તેથી સમીકરણથી આ પદ્ધતિમાં સમીકરણ યુગ્મના ઉકેલો અનંત મળશે (અસંખ્ય ઉકેલ મળશે)
3. **સમાંતર રેખાઓ :** આ બાબતમાં બંને સમીકરણોમાં એક પણ બિંદુ સામાન્ય નહી હોય તેથી સમીકરણ યુગ્મને એક પણ ઉકેલ નહીં હોય.

ઉદાહરણ 5.17 : નીચેના સમીકરણ યુગ્મનો ઉકેલ શોધો.

$$x - 2y = 0 \qquad ...(1)$$

$$3x + 4y = 20 \qquad ...(2)$$

ઉકેલ : ચાલો આપણે આ સમીકરણોના આલેખ દોરીએ આ માટે તમારે દરેક સમીકરણના ઓછામાં ઓછા બે ઉકેલોની જરૂર પડશે. આપણે આ મૂલ્યોને નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવીએ.

$x - 2y = 0$

x	0	2	–2
y	0	1	–1

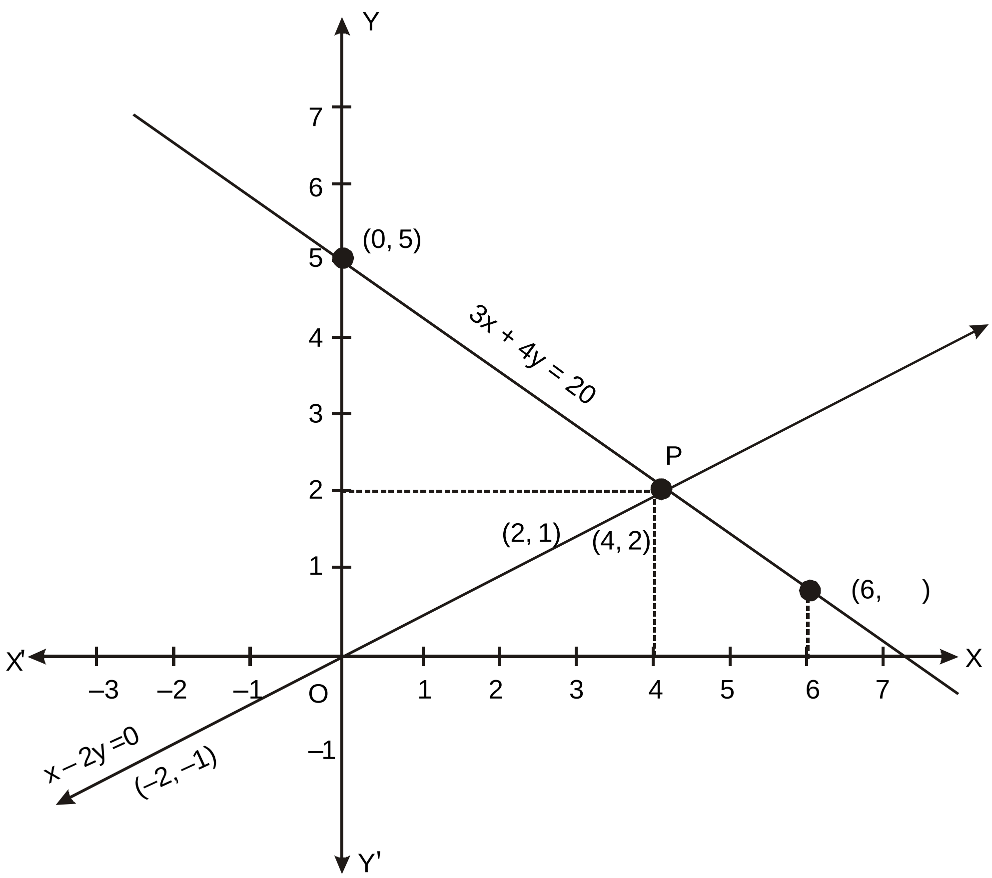
$3x + 4y = 20$

x	0	4	6
y	5	2	1/2

હવે આ બિંદુઓનું નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે એક જ આલેખ પત્ર પર નિરૂપણ કરો. બંને આલેકો જેના યામ (4, 2) છે એવા -- બિંદુમાં છેદે છે, આ પ્રમાણે

$x = 4$ અને $y = 2$ એ ઉકેલ છે.

તમે $x = 4$ અને $y = 2$ એ સમીકરણનું સમાધાન કરે છે તે ચકાસી શકશો.



આકૃતિ 5.7

ઉદાહરણ 5.18 : *નીચેના સમીકરણ યુગ્મનો ઉકેલ શોધો.*

$x + y = 8$ ...(1)

$2x - y = 1$ ...(2)

ઉકેલ : *આ સમીકરણોનો આલેખ દોરવા માટે દરેક સમીકરણના ઉકેલો પસંદ કરીને નીચે પ્રમાણે કોષ્ટક તૈયાર કરો.*

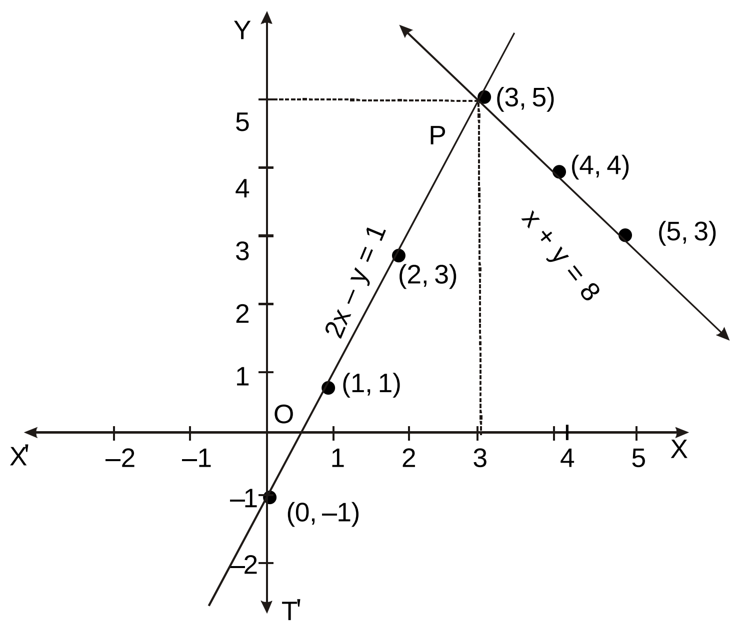
$x + y = 8$

x	3	4	5
y	5	4	3

$2x - y = 1$

x	0	1	2
y	–1	1	3

$x + y = 8$ *નો આલેખ મેળવવા માટે (3, 5), (4, 4) અને (5, 3) બિંદુઓ અને* $2x - y = 1$ *નો આલેખ મેળવવા માટે (0, -1), (1, 1) અને (2, 3) બિંદુઓનું એક જ આલેખપત્ર પર નિરૂપણ કરો. આ બંને રેખાઓ જેના યામ (3, 5) છે એવા P બિંદુમાં પરસ્પર છેદે છે. તેથી* $x = 3$ *અને* $y = 5$ *આ બંને સમીકરમોનું એક સાથે સમાધાન કરે છે એવું તમે ચકાસી શકશો.*



આકૃતિ 5.8

ઉદાહરણ 5.19 : *નીચેના સમીકરણ યુગ્મનો ઉકેલ શોધો.*

$x + y = 2$ ...(1)

$2x + 2y = 4$ ...(2)

ઉકેલ : *દરેક સમીકરણના કેટલાક ઉકેલો માટેનું કોષ્ટક તૈયાર કરો.*

$x + y = 2$

x	0	2	1
y	2	0	1

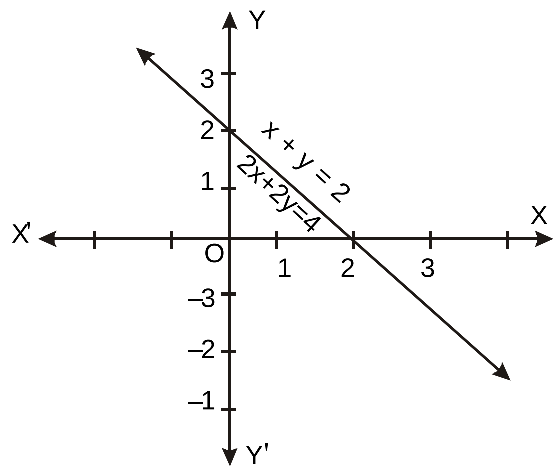
$2x + 2y = 4$

x	0	2	1
y	2	0	1

હવે આ ઉકેલોને અનુરૂપ બિંદુઓનું નિરૂપણ કરી આ સમીકરણઓના આલેખ દોરો.

તમે જોઈ શકશો કે બંને સમીકરણના આલેખ એક જ છે. તેથી સમીકરણ યુગ્મના ઉકેલો અનંત છે. (અસંખ્ય ઉકેલો છે.)

દા.ત. $x = 0, y = 2, x = 1, y = 1, x = 2, y = 0$ *વગેરે વળી તમે એ પણ જોઈ શકશો કે આ બંને સમીકરણો અનિવાર્ય રીતે (મૂળભૂત રીતે) એક જ સમીકરણ છે.*



આકૃતિ 5.9

ઉદાહરણ 5.20 : *નીચેના સમીકરણ યુગ્મનો ઉકેલ શોધો.*

$2x - y = 4$ ...(1)

$4x - 2y = 6$ ...(2)

ઉકેલ : *સમીકરણ યુગ્મમાંના દરેક સમીકરણના કેટલાક ઉકેલો લઈ બંને સમીકરણના આલેખ દોરો*

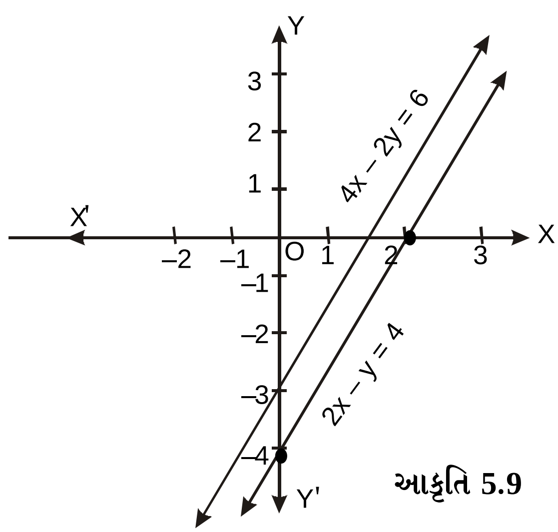
$2x - y = 4$

x	0	2	–1
y	–4	0	–6

$4x - 2y = 6$

x	0	1.5	2
y	–3	0	1

તમે જોઈ શકશો કે આ આ લેખો સમાંતર રેખાઓ છે તેમનામાં એક પણ બિંદુ સામાન્ય નથી તેથી સમીકરણ યુગ્મનો કોઈ ઉકેલ નથી.



આકૃતિ 5.9

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 5.7

નીચેના સમીકરણ યુગ્મના ઉકેલ આલેખની રીતે શોધો. વળી એ પણ જણાવો કે તેમને અનન્ય ઉકેલ છે, અસંખ્ય ઉકેલ છે કે ઉકેલ નથી.

1. $x - y = 3$
   $x + y = 5$
2. $2x + 3y = 1$
   $3x - y = 7$
3. $x + 2y = 6$
   $2x + 4y = 12$
4. $3x + 2y = 6$
   $6x + 4y = 18$
5. $2x + y = 5$
   $3x + 2y = 8$

5.7.2 બૈજિક રીત

દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ યુગ્મના ઉકેલ શોધવાની કેટલીક રીતો છે આલેખની રીત તરીકે ઓળખાતી (જાણીતી) એક પદ્ધતિ તમે શીખી ગયા છો. હવે બૈજિક પદ્ધતિ તરીકે ઓળખાતી બીજી બે પદ્ધતિઓની આપણે ચર્ચા કરીશું, તેઓ નીચે પ્રમાણે છે.

1. *અવેજી પદ્ધતિ*

2. *લોપની રીત*

નોંધ : *સમીકરણમાં અનન્ય ઉકેલ હોય (તેવા સમીકરણના ઉકેલ માટે) તેના માટે આ પદ્ધતિઓ ઉપયોગી છે.*

અવેજી પદ્ધતિ : *આ પદ્ધતિમાં આપણે એક સમીકરણમાંથી કોઈપણ એક ચલની કિંમત શોધીને તેના બીજા સમીકરણમાં અવેજીમાં મૂકીએ છીએ. આ રીતે બીજું સમીકરકણ એક ચલ સુરેખ સમીકરણ રૂપે સંક્ષિપ્ત રૂપમાં ફેરવાશે જેનો આપણે અગાઉ ઉકેલ શોધ્યો છે. આ પદ્ધતિને આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો દ્વારા સમજીએ.*

ઉદાહરણ 5.21: *નીચેના સમીકરણ યુગ્મનો ઉકેલ અવેજની રીતે શોધો.*

$$5x + 2y = 8 \qquad ...(1)$$

$$3x - 5y = 11 \qquad ...(2)$$

ઉકેલ : *સમીકરણ (1) માં આપણને* $2y = 8 - 5x$ *મળે છે. અથવા* $y = \frac{1}{2}(8 - 5x)$ *મળે ....(3)*

y ની કિંમત સમીકરણ (2) માં મૂકતાં આપણને

$$3x - \frac{5}{2}(8 - 5x) = 11$$

$6x - 5(8 - 5x) = 22$ (બંને બાજુ 2 વડે ગુણતાં)

$6x - 40 + 25x = 22$

$31x = 40 + 22$

$$x = \frac{62}{31} = 2$$

x = 2 નું મૂલ્ય સમીકરણ (3) માં મૂકતાં

$$y = \frac{1}{2}(8 - 5 \times 2) = \frac{1}{2}(8 - 10)$$

or $$y = -\frac{2}{2} = -1$$

તેથી સમીકરણ યુગ્મનો ઉકેલ x = 2, y = – 1 છે.

ઉદાહરણ 5.22 : અવેજી પદ્ધતિથી નીચેના સમીકરણ (1) યુગ્મનો ઉકેલ શોધો.

$2x + 3y = 7$ ...(1)

$3x + y = 14$ ...(2)

ઉકેલ : સમીકરણ (2) માંથી આપણને $y = 14 - 3x$ મળો.... (3)

y ની કિંમત સમીકરણ (1) માં મૂકતા (તબદીલ કરતાં)

$2x + 3(14 - 3x) = 7$ (આપણને મળે.)

$2x + 42 - 9x = 7$

$2x - 9x = 7 - 42$

$-7x = -35$

$$x = \frac{-35}{-7} = 5$$

x = 5 ની કિંમત સમીકરણ (3) માં મૂકતાં

$y = 14 - 3x = 14 - 3 \times 5$

$$y = 14 - 15 = -1$$

આથી $x = 5$ *અને* $y = -1$ *ઉકેલ છે.*

ચકાસો : *તમે ચકાસી શકશો કે* $x = 5$ *અને* $y = 1$ *બંને સમીકરણોનું સમાધાન કરે છે.*

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 5.8

નીચેના સમીકરણ યુગ્મના અવેજી રીતથી ઉકેલ શોધો.

1. $x + y = 14$
   $x - y = 2$

2. $2x + 3y = 11$
   $2x - 4y = -24$

3. $3x + 2y = 11$
   $2x + 3y = 4$

4. $7x - 2y = 1$
   $3x + 4y = 15$

લોપની રીત : *આ પદ્ધતિમાં એક ચલનો લોપ કરવા માટે બંને સમીકરણોના કોઈ પણ એક ચલના સહગુણાંકો સંખ્યાત્મક રીતે સરખા કરવા માટે શૂન્ય સિવાયની અનુકૂળ અચળ સંખ્યા વડે ગુણીને આપણે એક સમીકરણ અને બીજા સમીકરણનો સરવાળો, અથવા બાદબાકી કરીએ છીએ જેથી એક ચલનો લોપ થાય છે અને આપણને એક ચલ સમીકરણ મળે છે.*

હવે આપણે આ પદ્ધતિએ સ્પષ્ટ કરવા કેટલાંક ઉદાહરણો વિષે વિચારીએ.

ઉદાહરણ 5.23 : *લોપની રીત વાપરીને નીચેના સમીકરણ યુગ્મનો ઉકેલ શોધો.*

$$3x - 5y = 4 \qquad ...(1)$$

$$9x - 2y = 7 \qquad ...(2)$$

ઉકેલ : x *નો લોપ કરવા માટે,* x *ના સહગુણાંક સરખા કરવા માટે સમીકરણ (1) ને 3 વડે ગુણો જેથી નીચે પ્રમાણે સમીકરણો મળશે.*

$$9x - 15y = 12 \qquad ...(3)$$

$$9x - 2y = 7 \qquad ...(4)$$

સમીકરણ (3) માંથી સમીકરણ (4) બાદ કરતાં

$$9x - 15y - (9x - 2y) = 12 - 7$$

$$9x - 15y - 9x + 2y = 5$$

$$-13y = 5$$

$$y = -\frac{5}{13}$$

$y = -\frac{5}{13}$ *સમીકરણ (1) માં મૂકતાં*

$$3x - 5 \times \left(-\frac{5}{13}\right) = 4$$

$$3x + \frac{25}{13} = 4$$

$$3x = 4 - \frac{25}{13} = \frac{27}{13}$$

$$x = \frac{9}{13}$$

તેથી, $x = \frac{9}{13}$ *અને* $y = -\frac{5}{13}$ *એ આપેલ સમીકરણ યુગ્મનો જરૂરી ઉકેલ છે.*

ઉદાહરણ 5.24 : *લોપની રીત વાપરીને નીચેના સમીકરણ યુગ્મનો ઉકેલ શોધો.*

$$2x + 3y = 13 \qquad \ldots(1)$$

$$5x - 7y = -11 \qquad \ldots(2)$$

ઉકેલ : y *નો લોપ કરવા માટે સમીકરણ (1) ને* 7 *વડે અને સમીકરણ (2) ને* 3 *વડે ગુણતાં*

$$14x + 21y = 91 \qquad \ldots(3)$$

$$15x - 21y = -33 \qquad \ldots(4)$$

સમીકરણ (3) અને (4) નો સરવાળો કરતાં

$$29x = 58$$

$$x = \frac{58}{29} = 2$$

$x = 2$ *સમીકરણ (1) માં મૂકતાં*

$$2 \times 2 + 3y = 13$$

$$3y = 13 - 4 = 9$$

$$y = \frac{9}{3} = 3$$

તેથી $x = 2$ અને $y = 3$ આપેલ સમીકરણ યુગ્મનો ઉકેલ છે.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 5.9

લોપની રીતથી નીચેના સમીકરણ યુગ્મોનો ઉકેલ શોધો

1. $3x + 4y = -6$
   $3x - y = 9$
2. $x + 2y = 5$
   $2x + 3y = 8$
3. $x - 2y = 7$
   $3x + y = 35$
4. $3x + 4y = 15$
   $7x - 2y = 1$
5. $2x + 3y = 4$
   $3x + 2y = 11$
6. $3x - 5y = 23$
   $2x - 4y = 16$

5.8 કૂટ પ્રશ્નો (વ્યવહારિક કોયડાઓ)

ઉદાહરણ 5.25 : એક લંબચોરસ બગીચાની પરિમિતિ 20 મીટર રછે. જો તેની લંબાઈ તેની પહોળાઈ કરતાં 4 મીટર વધારે હોય, તો બગીચાની લંબાઈ અને પહોળાઈ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે બગીચાની લંબાઈ x મીટર છે, તેથી બગીચાની પહોળાઈ $(x - 4)$ મીટર હોય, પરિમિત 20 મીટર હોવાથી

$$2\,[x + (x - 4)] = 20$$

$$2(2x - 4) = 20$$

$$2x - 4 = 10$$

$$2x = 10 + 4 = 14$$

$$x = 7$$

લંબચોરસની લંબાઈ 7 મીટર અને પહોળાઈ $7 - 4 = 3$ મીટર છે.

વૈકલ્પિક રીતે : બે ચલોનો ઉપયોગ કરીને નીચે પ્રમાણે પ્રક્રિયા કરીને તમે કૂટ પ્રશ્નો ઉકેલ શોધી શકશો.

ધારો કે બગીચાની લંબાઈ x મીટર છે

અને બગીચાની પહોળાઈ x મીટર

$$x = y + 4 \qquad \ldots(1)$$

વળી પરિમિત 20 મીટર છે.

$$2(x + y) = 20$$

$$x + y = 10 \qquad \ldots(2)$$

6

દ્વિઘાત સમીકરણ

આ પ્રકરણમાં તમે દ્વિઘાત સમીકરણ વિશે શીખશો તમે આપેલા સમીકરણ સમૂહમાંથી દ્વિઘાત સમીકરણને ઓળખી શકશો ઓ તેને પ્રમાણિ સ્વરૂપમાં લખી શકશો તમે દ્વિઘાત સમીકરણને ઉકેલતાં , સરળ સ્વરૂપે દર્શાવિતા અને દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉપયોગ કરી ફુટ પ્રશ્નો ઉકેલતાં શીખશો.

હેતુઓ

આ પ્રકરણમાં અભ્યાસ કર્યા પછી તમે

- આપેલ સમીકરણ સમૂહમાંથી દ્વિઘાત સમીકરણને ઓળખી શકશો.
- દ્વિઘાત સમીકરણને પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકશો.
- (1) અવયવો અને (2) પૂર્ણવર્ગ ની રીતે દ્વિઘાત સમીકરણને ઉકેલી શકશો.

  દ્વિઘાત સૂત્ર ની રીતે
- દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉપયોગ કરીને ફુટ પ્રશ્નોના ઉકેલ શોધી શકશો.

અપેક્ષિત પૂર્વજ્ઞાન

- બહુપદીઓ
- બહુપદીના શૂન્યો
- સુરેખ સમીકરણો અને તેના ઉકેલો
- બહુપદીના અવયવો.

6.1 દ્વિઘાત સમીકરણ

તમે બે ઘાતવાળી બહુપદીથી પરિચિત છો. બે ઘાતવાળી બહુપદીને દ્વિઘાત બહુપદી કહેવાય છે. જ્યારે દ્વિઘાત બહુપદીને શૂન્ય બરાબર (શૂન્ય સમાન) કરીએ ત્યારે તે દ્વિઘાત સમીકરણ કહેવાય છે . આ પ્રકરણમાં તમે માત્ર એકચલ દ્વિઘાત સમીકરણ વિશે શીખશો. આપેલ સમીકરણ સમૂહમાંથી દ્વિઘાત સમીકરણને ઓળખવા માટે કેટલાક ઉદાહરણો જોઈએ .

ઉદાહરણ : નીચેના સમીકરણોમાંથી ક્યાં સમીકરણો દ્વિઘાત સમીકરણો છે ?

(i) $3x^2 = 5$ i) $x^2 + 2x + 3 = 0$

(iii) $x^3 + 1 = 3x^2$ (iv) $(x + 1)(x + 3) = 2x + 1$

(v) $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ (v) $x^2 + \sqrt{x} + 1 = 0$

ઉકેલ:

(i) *તે દ્વિઘાત સમીકરણ છે કારણ કે* $3x^2 = 5$ *ને* $3x^2 - 5 = 0$ *સ્વરૂપે લખી શકાય છે અને* $3x^2 - 5$ *એ દ્વિઘાત બહુપદી છે.*

(ii) $x^2 + 2x + 3 = 0$ *એ દ્વિઘાત સમીકરણ છે કારણ કે* $x^2 + 2x + 3$ *એ બે ઘાત વાળી બહુપદી છે.*

(iii) $x^3 + 1 = 3x^2$ *ને* $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ *સ્વરૂપમાં લખી ને મહત્તમ ઘાતાંક 3 છે તથી આ સમીકરણ દ્વિઘાત સમીકરણ નથી.*

(iv) $(x + 1)(x + 3) = 2x + 1$ *એ દ્વિઘાત સમીકરણ છે કારણ કે* $(x + 1)(x + 3) = 2x + 1$ *ને નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય.*

$x^2 + 4x + 3 = 2x + 1$

or $x^2 + 2x + 2 = 0$

હવે ડાબી બાજુ દ્વિઘાત બહુપદી છે તેથી $(x + 1)(x + 3) = 2x + 1$ *એ દ્વિઘાત સમીકરણ છે.*

(v) $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ *એ દ્વિઘાત સમીકરણ નથી*

કારણ કે $\frac{1}{x}$ *પદનો ઘાતાક -1 છે તેમ છતાં આપણે તેને નીચે પ્રમાણે દ્વિઘાત સમીકરણની સ્થિતિમાં લાવી શકીએ.*

or $\frac{x^2+1}{x} = \frac{5}{2}, x \neq 0$

or $2(x^2 + 1) = 5x$, x ¹ 0

or $2x^2 - 5x + 2 = 0$, x ¹ 0

(vi) $x^2 + \sqrt{x} + 1 = 0$ *એ દ્વિઘાત સમીકરણ નથી કારણે કે* $x^2 + \sqrt{x} + 1$ *એ દ્વિઘાત બહુપદી નથી (શા માટે ?*

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 6.1

૧. *નીચેના ક્યા સમીકરણો દ્વિઘાત સમીકરણો છે ?*

(i) $3x^2 + 5 = x^3 + x$ (ii) $\sqrt{3}x^2 + 5x + 2 = 0$

(iii) $(5y + 1)(3y - 1) = y + 1$ (iv) $\frac{x^2+1}{x+1} = \frac{5}{2}$

(v) $3x + 2x^2 = 5x - 4$

દ્વિઘાત સમીકરણનું પ્રમાણિત સ્વરૂપ

$ax^2 + bx + c = 0, a > 0$ *સ્વરૂપનું દ્વિઘાત સમીકરણ કે જેમાં* a, b, c, *અચળ અને* x *ચલ છે તેવા સમીકરણને દ્વિઘાત સમીકરણનું પ્રમાણિત સ્વરૂપ કહે છે દરેક દ્વિઘાત સમીકરણને હમેંશા પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય છે.*

ઉદાહરણ : ૨ *નીચેનાં સમીકરણોમાંથી ક્યા સમીકરણો પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં છે ? જે સમીકરણો પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં નથી તેમને પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં દર્શાવો .*

(i) $2 + 3x + 5x^2 = 0$ (ii) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

(iii) $7y^2 - 5y = 2y + 3$ (iv) $(z + 1)(z + 2) = 3z + 1$

ઉકેલ: (i) *તે પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં નથી. તેવું પ્રમાણિત સ્વરૂપ* $5x^2 + 3x + 2 = 0$ *છે.*

(ii) *તે પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં છે.*

(iii) *તે પ્રમાણિત સ્વરૂપમા નથી.*

$7y^2 - 5y = 2y + 3$

$7y^2 - 5y - 2y - 3 = 0$

$7y^2 - 7y - 3 = 0$ *જે હવે પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં છે.*

(ii) *તે પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં નથી તેને નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય.*

$(z + 1)(z + 2) = 3z + 1$

$z^2 + 3z + 2 = 3z + 1$

$z^2 + 3z - 3z + 2 - 1 = 0$

$z^2 + 1 = 0$

$z^2 + 0z + 1 = 0$

જે હવે પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં છે.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 6.2

1. નીચેના માંથી ક્યા દ્વિઘાત સમીકરણો પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં છે ? જે સમીકરણો પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં નથી તેમને પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં લખો.

   (i) $3y^2 - 2 = y + 1$ (ii) $5 - 3x - 2x^2 = 0$

   (iii) $(3t - 1)(3t + 1) = 0$ (iv) $5 - x = 3x^2$

6.3 દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ

તમે બહુપદીનાં શૂન્યો વિશે શીખી ગયા છો બહુપદીના શૂન્ય એ એવી વાસ્તવિક સંખ્યા છે જે તે ચલના સ્થાન મુકતાં બહુપદીનું મૂલ્ય શૂન્ય થાય છે.

દ્વિઘાત સમીકરણ બાબતમાં ચલતી જે કિંમત અને કારણો ડા.બા. અને જ.બા સરખી થાય છે તેને દ્વિઘાત સણીકરણનું બીજ અથવા ઉકેલ કહેવાય છે. વળી તમે એ પણ શીખી ગયા છો કે જો એ બહુપદી p(x), નું શૂન્ય હોય, તો (x –a) એ બહુપદી p(x) નો અવયઅવ છે તેથી ઉલટું જો , if (x –a) એ બહુપદીનું શૂન્ય છે તમે આ પરિણામો દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ શોધવામા વાપરી શકશો. દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ શોધવાની બે બૈજિક રીતો છે (i) અવયઅવની રીત (ii) પૂર્ણ વર્ગની રીત.

(દ્વિઘાત સૂત્રની રીત)

અવયઅવની રીત

હવે આપણે દ્વિઘાત સમીકરણના સૂરેખ અવયઅવો પાડીને તેનો ઉકેલ શોધવાનું શીખીએ ઉદાહરણો દ્વારા આ રીત દર્શાવી છે.

ઉદાહરણ 6.3: $(x - 4)(x + 3) = 0$ સમીકરણનો ઉકેલ શોધો.

જ્યારે $(x - 4)(x + 3) = 0$, છે તેથી

$x - 4 = 0$, અથવા $x + 3 = 0$

$x = 4$ અને અથવા $x = -3$

$x = 4$ અને $x = -3$ એ સમીકરણનો ઉકેલે છે.

ઉદાહરણ 6.4: $6x^2 + 7x - 3 = 0$ સમીકરણનો અવયઅવ પાડીને ઉકેલ શોધો

ડાબી બાજુએ મધ્યમ પદના ભાગ પાડતાં

$6x^2 + 9x - 2x - 3 = 0$ [કારણ કે $6 \times (-3) = -18 = 9 \times (-2)$ અને $9 - 2 = 7$]

$3x(2x + 3) - 1(2x + 3) = 0$

$(2x + 3)(3x - 1) = 0$

$2x + 3 = 0$ અથવા $3x - 1 = 0$

$x = -\frac{3}{2}$ અથવા $x = \frac{1}{3}$

$x = -\frac{3}{2}$ અને $x = \frac{1}{3}$ સમીકરણના ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 6.5: $x^2 + 2x + 1 = 0$ સમીકરણનો ઉકેલ શોધો.

$x^2 + 2x + 1 = 0$ આપેલ છે.

$(x + 1)^2 = 0$

$x + 1 = 0$

$x = -1$ મળશે.

$x = -1$ એ એક માત્ર ઉકેલ છે.

નોંધ : ઉદાહરણ 6.3 અને 6.4 તમે જોયું કે તે સમીકરણોને બે ભિન્ન ઉકેલ હતા તેમ છતાં સમીકરણ 6.5માં તમને એકજ ઉકેલ મળ્યો આપણે તેને બે ઉકેલ છે તેમ કહીએ છીએ તે યોગાનું યોગ છે.

તમારી પ્રગતિ ચકાશો 6.3

1. અવયઅવની રીત વાપરીને નીચેના સમીકરણોના ઉકેલ શોધો.

(i) $(2x + 3)(x + 2) = 0$ (ii) $x^2 + 3x - 18 = 0$

(iii) $3x^2 - 4x - 7 = 0$ (iv) $x^2 - 5x - 6 = 0$

(v) $25x^2 - 10x + 1 = 0$ (vi) $4x^2 - 8x + 3 = 0$

દ્વિઘાત સૂત્ર ની રીત (પૂર્ણ વર્ગની રીત)

હવે તમે દ્વિઘાત સમીકરણના ઉકેલ શોધવા માટેનુ સૂત્ર શોધતાં શીખશો આ માટે આપણા દ્વિઘાત સમીકરણનું સામાન્ય સ્વરૂપ $ax^2 + bx + c = 0$ ને પૂર્ણ વર્ગમાં ફેરવીને લખીશું આપણને

We have $ax^2 + bx + c = 0$ આપેલું છે x^2 ના સહગુણને બેકી સંખ્યાનો પૂર્ણ વર્ગ બનાવવા માટે બંન્ને બાજુઓ 4 વડે ગણતા.

$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$ મળે

બંન્ને બાજુ x^2 ઉમેરતાં

$(2ax)^2 + 2(2ax)b + (b)^2 + 4ac = b^2$

$$(2ax)^2 + 2(2ax)b + (b)^2 = b^2 - 4ac$$

$$(2ax+b)^2 = \left\{\pm\sqrt{b^2-4ac}\right\}^2$$

$$2ax+b = \pm\sqrt{b^2-4ac}$$

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

આમ દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ *ના બે ઉકેલ મળે છે.*

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{(ii)} \quad \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

અહીં $(b^2 - 4ac)$, *અભિવ્યક્તિને* by D, *ચિહ્નથી દર્શાવીશું ને* **Discriminant**, *વિવેચક કહેવાય છે , કારણ કે તે ઉકેલ (ના બીજ)ની સંખ્યા અથવા દ્વિઘાત સમીકરણના બીજના સ્વરૂપ નક્કી કરે છે.*

દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$, a ¹ 0, if

(i) $D = b^2 - 4ac > 0$, *તો સમીકરણને બે ભિન્ન*

વાસ્તવિક બીજ $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ *અને* $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

(ii) $D = b^2 - 4ac = 0$,*તો સમીકરણને બે ભિન્ન સંખ્યા*

વાસ્તવિક બીજ $\frac{-b}{2a}$ *સ્વરૂપમાં મળે.*

(iii) $D = b^2 - 4ac < 0$, *તો સમીકરણે એકપણ વાસ્તવિક બીજ નહીં હોય કારણ કે ઋણ વાસ્તવિક સંખ્યાનું વર્ગમુળ વાસ્તવિક સંખ્યા નથી.*

આમ દ્વિઘાત સમીકરણને વધુમાં વધુ બે બીજ હોય છે.

ઉદાહરણ 6.6: *બીજ નક્કી કર્યા સિવાય નીચેના સમીકરણના બીજનું સ્વરૂપ (બીજની સંખ્યા) વિષે અભિપ્રાય આપો.*

(i) $3x^2 - 5x - 2 = 0$

(ii) $2x^2 + x + 1 = 0$

(iii) $x^2 + 2x + 1 = 0$ *(ઉદાહરણ 6.5માં આનો ઉકેલ આપ્યો છે)*

ઉકેલ: (i) *આપેલ સમીકરણ* $3x^2 - 5x - 2 = 0$ *ને* $ax^2 + bx + c = 0$, *સાથે સરખાવતાં આપણને* $a = 3, b = -5$ *અને* $c = -2$ *મળે*

હવે $D = b^2 - 4ac \quad = (-5)^2 - 4 \times 3 \times (-2)$

$= 25 + 24 = 49$

જ્યારે $D > 0$, હોવાથી સમીકરણને બે ભિન્ન વાસ્તવિક બાજ છે.

(ii) સમીકરણ $2x^2 + x + 1 = 0$ ને $ax^2 + bx + c = 0$, સાથે સરખાવતાં

$a = 2$, $b = 1$ અને $c = 1$ મળે

હવે $D = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1 - 8 = -7$

જ્યારે $D = b^2 - 4ac < 0$, હોવાથી સમીકરણને કોઈ વાસ્તવિક બીજ નહીં હોય.

(iii) સમીકરણ $x^2 + 2x + 1 = 0$ ને $ax^2 + bx + c = 0$,

સાથે સરખાવતાં $= 1$, $b = 2$, $c = 1$ મળે.

હવે $D = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$

જ્યારે, $D = b^2 - 4ac = 0$ હોવાથી સમીકરણને બે સમાન વાસ્તવિક બીજ મળે.

ઉદાહરણ 6.7: વર્ગ સૂત્ર (પૂર્ણ વર્ગ)ની રીત વાપરીને સમીકરણ $6x^2 - 19x + 15 = 0$ સાથે સરખાવતાં $ax^2 + bx + c = 0$ અને $a = 6$, $b = -19$, $c = 15$

હવે $\quad D = b^2 - 4ac = (-19)^2 - 4 \times 6 \times 15$

$\frac{20}{12}$ $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{19 \pm \sqrt{1}}{12} = \frac{19 \pm 1}{12}$ $\qquad = 361 - 360 = 1$

?. તેથી

$x =$

$$x = \frac{19+1}{12} = \frac{5}{3} \text{ and } \frac{19-1}{12} = \frac{3}{2}$$

તેથી બીજ $= \frac{5}{3}$ and $\frac{3}{2}$. છે.

ઉદાહરણ 6.8: સમીકરણ $3x^2 + mx - 5 = 0$ માંથી ની કિંમત એવી શોધો કે જેથી સમીકરણને બે સમાન બીજ મળે.

ઉકેલ : આપેલ સમીકરણને $ax^2 + bx + c = 0$

સાથે સરખાવતા, $a = 3$, $b = m$ અને $c = -5$ મળે

સમાનબીજ માટે

$D = b^2 - 4c = 0$ હોવું જોઈએ

$$m^2 - 4 \times 3 \times (-5) = 0$$

$$m^2 = 60$$

$$m^2 = \pm 2\sqrt{15}$$

$$m = \pm 2\sqrt{15},$$

ઋણ વાસ્તવિક સંખ્યાનું વર્ગમુળ વાસ્તવિક સંખ્યા નથી તેથી m ની કોઈ કિંમત માટે સમીકરણને વાસ્તવિક બીજ મળશે નહી.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 6.4

1. *બીજ નક્કી કર્યા સિવાય નીચેના સમીકરણના બીજના સ્વરૂપ (બીજની સંખ્યા) વિષે અભિપ્રાય આપા ?*

   (i) $3x^2 - 7x + 2 = 0$ (ii) $4x^2 - 12x + 9 = 0$ (iii)
   (iii) $25x^2 + 20x + 4 = 0$ (iv) $x^2 - x + 1$

2. *દ્વિઘાત સૂત્રની રીત વાપરીને વનીચેના સમીકરણો ઉકેલો ?*

   (i) $y^2 - 14y - 12 = 0$ (ii) $x^2 - 5x = 0$

   (iii) $x^2 - 15x + 50 = 0$

3. *નીચેના સમીકરણોના વાસ્તવિક સમાન બીજ મળે તે રીતે m ની કીંમત શોધો ?*

   (i) $2x^2 - mx + 1 = 0$ (ii) $mx^2 + 3x - 5 = 0$

   (iii) $3x^2 - 6x + m = 0$ (iv) $2x^2 + mx - 1 = 0$

6.4 કુટ પ્રશ્નો (વ્યાવહારિક કોયડાઓ

હવે જેમાં દ્વિઘાત સમીકરણનો સમાવેશ થતો હોય (ઉપયોગ થતો હોય) તેવા કુટ પ્રશ્નોનો ઉકેલ આપણે શોધીશું.

ઉદાહરણ 6.9: *બે ક્રમિક એકી પ્રકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો 74 છે તો તે સંખ્યાઓ શોધો.*

ઉકેલ : *ધારોકે બે ક્રમિક એકી સંખ્યાઓ* x *અને* x + 2 *તેમના વર્ગોનો સરવાળો 74 થતો હોવાથી*

; $x^2 + (x + 2)^2 = 74$ *મળે*

; $x^2 + x^2 + 4x + 4 = 74$

; $2x^2 + 4x - 70 = 0$

; $x^2 + 2x - 35 = 0$

; $x^2 + 7x - 5x - 35 = 0$

; $x(x + 7) - 5(x + 7) = 0$

; $(x+7)(x-5)=0$

; $x+7=0$ અથવા $x-5=0$

; $x=-7$ અથવા $x=5$

હવે x એ પ્રાકૃતિક સંખ્યા હોવાથી $x=-7$ હોઈ શકે નહીં

$x = 5$ $\quad$ $x = 2$ $\ 5x\ 2$ $=-7$

તેથી સંખ્યાઓ 5 અને 7 છે

ઉદાહરણ 6.10: બે ચોરસ મેદાનોના ક્ષેત્રફળોનો સરવાળો 468 ચો.મીટર છે જો તેમની પરિમિતિનો તફાવત 24 મીટર હોય, તો બંન્ને ચોરસવાળી બાજુઓ શોધો.

ઉકેલ : ધારોકે મોટા ચોરસની બાજુનું માપ x મીટર છે અને નાના ચોરસની બાજુનું માપ y મીટર છે મોટા મેદાનની પરિમિતી 4x મીટર અને નાના ચોરસની પરિમિતી 4y મીટર થાય.

તેમનો તફાવત 24 મીટર છે

$4x-4y=24$

$x-y=6$

$x=y+6 \qquad$ ....(1)

$\dfrac{-6+30}{2}$

બંન્નેના ક્ષેત્રફળનો સરવાળો 468 ચો.મીટર(11) છે

$x^2+y^2=468 \qquad$ ....(2)

સ.કુ.(1) માંથી x ની કિંમત સ.કુ. (2) માં મુકતાં

$(y+6)^2+y^2=468$

$y^2+12y+36+y^2=468$

$2y^2+12y-432=0$

$y^2+6y-216=0$

$$y=\frac{-6\pm\sqrt{36+864}}{2}=\frac{-6\pm\sqrt{900}}{2}$$

$$y=\frac{-6\pm 30}{2}\ y=$$ અથવા

$y=12$ અથવા $y=18$

ચોરસની બાજુ ઋણ ન હોઈ શકે $y=12$

$x=y+6=12+6=18$

મોટા ચોરસની બાજુની લંબાઈ 18 મીટર અને

નાના ચોરસની બાજુની લંબાઈ 12 મીટર

ઉપરના દાખલાને નીચેની રીતે ગણીએ તો ?

ધારોકે મોટા ચોરસની બાજુનું માપ x મીટર છે

તેની પરિમિતી x મીટર થાય

બન્નેની પરિમિતી નો તફાવત 24 મીટર છે

નાના ચોરસની પરિમિતી (4x - 24) મીટર થાય.

નાના ચોરસની બાજુંનું માપ મીટર

બન્નેના ક્ષેત્રફળનો સરવાળો 468 ચોમી. છે

ઉદાહરણ 6.11: *બે અંકોની એક સંખ્યાના અંકોનો ગુણાકાર 12 છે જો તે સંખ્યામાં 9 ઉમેરવામાં આવેતો અંકોના સ્થાન અદલ બદલ થાય છે તો તે સંખ્યા શોધો.*

ઉકેલ : ધારોકે તે સંખ્યાનો દશાકનો આંક x છે અને એકમનો આંક y છે

સંખ્યા $= 10y + x$

અંકોની બદલી કરતાં નવી સંખ્યા

$10y + x$

$10x + y + 9 = 10y + x$

$10x - x + y - 10y = -9$

$9x - 9y = -9$

$x - y = -1$

$x =- + y - 1 \qquad \ldots(1)$

અંકોનો ગુણાકાર 12 છે

$xy = 12 \qquad \ldots(2)$

સ.કુ. (1) માંથી x ની કિંમત સં.કુ. (2) માં મુકતાં

$(y - 1)y = 12$

$y^2 - y - 12 = 0$

$(y - 4)(y + 3) = 0$

$y = 4$ or $y = -3$

અંક ઋણ હોઈ શકે નહિં $= 4$

$x = y - 1 = 4 - 1 = 3$

34.

ઉદાહરણ 6.12: બે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો 12 છે તેમની વ્યસ્ત સંખ્યાઓનો સરવાળો $\frac{4}{9}$, છે તો તે સંખ્યાઓ શોધો .

ઉકેલ: ધારોકે એક સંખ્યા x છે તો બીજી સંખ્યા 12- x - હોય છે.

તેમના વ્યસ્તોનો સરવાળો $\frac{4}{9}$ છે.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{12-x} = \frac{4}{9}, \; x \neq 0, \; 12 - x \neq 0$$

$$\frac{12 - x + x}{x(12-x)} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{12}{12x - x^2} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{12 \times 9}{4} = 12x - x^2$$

$$27 = 12x - x^2$$

$$x^2 - 12x + 27 = 0$$

$$(x - 3)(x - 9) = 0$$

$x = 3$ અથવા $x = 9$

જ્યારે $x = 3$, ત્યારે બીજી સંખ્યા $12 - 3 = 9$ હોય જ્યારે પહેલી સંખ્યા 9 હોય ત્યારે બીજી સંખ્યાઓ 3 અને 9 છે .

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 6.5

1. બે ક્રમિક બેકી પ્રાકૃતિક સંખ્યાના વર્ગોનો સરવાળો 164 થાય છે તે સંખ્યા શોધો.
2. એક લંબચોરસ બગીચાની લંબાઈ તેની પહોળાઈ કરતાં 7 મીટર વધારે છે બગીચાનું ક્ષેત્રફળ 144 ચો.મી. છે તો બગીચાની લંબાઈ અને પહોળાઈ શોધો .
3. બે અંકની સંખ્યાના અંકોનો સરવાળો 13 છે જો તેમના વર્ગનો સરવાળો 89 છે તો તે સંખ્યાઓ શોધો.

4. બે અંકોની સંખ્યા દશકનો આંક એકમના અંક ના બમણા કરતાં 2 વધારે છે જો તે અંકોનો ગુણાકાર 24 હોય તો તે સંખ્યા શોધો.

5. બે સંખ્યાઓનો સરવાળો 15 છે તો તેમના વ્યસ્તનો સરવાળો   છે તોતે સંખ્યા શોધો.

સારાંશ - ઉપસંહાર

- $ax^2 + bx + c = 0$, a ^{1} 0 દ્વિઘાત સમીકરણ તરીકે કે જેમાં a, b, c અચળ અને x ચલ છે તેવા સ્વરૂપે ને (સમીકરણને) દ્વિઘાત સમીકરણનું પ્રમાણિત સ્વરૂપ કહેવાય છે.
- ચલનું જે મૂલ્ય કે મૂલ્યો દ્વિઘાત સમીકરણનું સમાધન કહે છે (ઉકેલ આપે છે) તેઓ તેમાં બીજ અથવા ઉકેલ કહેવાય છે.
- દ્વિઘાત બહુપદીનાં શૂન્યો તેને (બહુપદીને) અનુરૂપ દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ અથવા ઉકેલ કહેવાય છે.
- જો તમે $ax^2 + bx + c = 0$, a ^{1} 0 ના બે સુરેખ અવયઅવો પાડી શકોતો દ્વિઘાત સમીકરણax^2 $ax^2 + bx + c = 0$, ના બીજ દરેકઅવય અવની કિંમત શૂન્ય મૂકીને મેળવી શકો.

$ax^2 + bx + c = 0$, a # 0 નાં બીજ

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- $b^2 - 4ac$ એ દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$, a ^{1} 0 (distinct) નો વિવેક કહેવાય છે. સામાન્ય રીતે તેને D થી દર્શાવાય છે.

  (i) જો $D > 0$ તો દ્વિઘાત સમીકરણને બે ભિન્ન વાસ્તવિક બીજ હોય છે.

  (ii) જો $D = 0$ તો દ્વિઘાત સમીકરણને બે સમાન વાસ્તવિક બીજ હોય છે.

  (iii) જો $D < 0$, તો દ્વિઘાત સમીકરણને વાસ્તવિક બીજ હોતાં નથી.

અંતિમ સ્વધ્યાય

1. નીચેનામાંથી ક્યાં દ્વિઘાત સમીકરણો છે ?

   (i) $y\left(\sqrt{5}y - 3\right) = 0$ (ii) $5x^2 - 3\sqrt{x} + 8 = 0$

   (iii) $3x - \frac{1}{x} = 5$ (iv) $x(2x + 5) = x^2 + 5x + 7$

2. અવયઅવની રીત વાપરીને નીચેના સમીકરણો ઉકેલો

   (i) $(x - 8)(x + 4) = 13$ (ii) $3y^2 - 7y = 0$

(iii) $x^2 + 3x - 18 = 0$ (iv) $6x^2 + x - 15 = 0$

3. $5x^2 - 3x + m = 0$ ને બે સમાન બીજ હોય, તો તેની કિંમત શોધો.

4. $x^2 - mx - 1 = 0$ ને બે સમાન હોય, તો તેની કિંમત શોધો.

5. દ્વિઘાત સૂત્ર નીચેના સમીકરણોના ઉકેલ શોધો.

(i) $6x^2 - 19x + 15 = 0$ (ii) $x^2 + x - 1 = 0$

(iii) $21 + x = 2x^2$ (iv) $2x^2 - x - 6 = 0$

6. કાટકોણ ત્રિકોણની બાજુઓનું માપ $x - 1$, x અને $x + 1$ છે તો xની કિંમત શોધો. અને તે પરથી બાજુઓનાં માપ શોધો.

7. અજ ક્રમિક એકી પૂર્ણકોના વર્ગોનો સરવાળો 290 થાય છે તો તે અંકો શોધો.

8. કારકોણ ત્રિકોણના કર્ણોનું માપ 13 સેમી છે બાકીની બે બાજુઓના માપનો તફાવત 7 સેમી. હોય તો બંન્ને ચોરસની બાજુઓનાં માપ શોધો.

9. બે ચોરસના ક્ષેત્રફળોનો સરવાળો 41 ચો. મી છે તેમની પરિમિતીનો સરવાળો 36 સેમી. છે તો બંન્ને ચોરસની બાજુઓનાં માપ શોધો.

10. 5 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળમાં સમદ્વિજ કાટકોણ ત્રિકોણ અંતર્ગત છે તો ત્રિકોણની બાજુઓ (બાજુઓનાં માપ) શોધો.

તમારી પ્રગતિ ચકાસના ઉત્તરો

6.1

1. (ii), (iii), (v)

6.2

1. (i) No, $3y^2 - y - 3 = 0$ (ii) No, $2x^2 + 2x - 5 = 0$

(iii) No, $6t^2 + t - 1 = 0$ (iv) No, $3x^2 + x - 5 = 0$

6.3

1. (i) $\frac{3}{2}, -2$ (ii) $3, -6$ (iii) $\frac{7}{3}, -1$

(iv) 2, 3 (v) $\frac{1}{5}, \frac{1}{5}$ (vi) $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$

6.4

1. (i) બે ભિન્ન વાસ્તવિક બીજ

(ii) બે સમાન વાસ્તવિક બીજ

(iii) બે સમાન વાસ્તવિક બીજ

(iv) વાસ્તવિક બીજ નહીં હોય

2. (i) $7 \pm \sqrt{37}$ (ii) 0, 5 (iii) 5, 10

3. (i) $\pm 2\sqrt{2}$ (ii) $\frac{9}{20}$ (iii) 3 (iv) m ની કોઈ કિંમત નહિં.

6.5

1. 8, 10 2. 16m, 9m 3. 85, 58 4. 83

અંતિમ સ્વાધ્યાયના જવાબો

1. (i), (iv)

2. (i) 8, 4 (ii) $0, \frac{7}{3}$ (iii) 3, – 6 (iv) $\frac{3}{2}, -\frac{5}{3}$

3. $\frac{9}{20}$

4. m ની કોઈ પણ કિંમત માટે સમાન બીજ મળશે નહીં. (રકમ ખોટી છે.)

5. (i) $\frac{3}{2}, \frac{5}{3}$ (ii) $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (iii) $\frac{7}{2}, -3$ (iv) $2, \frac{3}{2}$

6. 3, 4, 5

7. 11, 13 અથવા –13 , –11

8. 5 cm, 12 સેમી

9. 5 cm, 4 સેમી

10. $5\sqrt{2}$ cm, $5\sqrt{2}$ સેમી, 10 સેમી

7

સમાંતર શ્રેણીઓ

તમે તમારા રોજિંદા જીવનમાં નિરીક્ષણ કર્યું હશે (જોયુ હશે) કે કુદરતમાં ફુલોની પાંખડીઓ, મધપૂડાના કાણા, અનાનસ ઉપરના વલયકાર આકા વગેરે ઘણી બધી વસ્તુઓ એક પ્રકારની તરાહને અનુસરે છે. આ પ્રકરણાં તમે સંખ્યાઓની એક વિશિષ્ટ પ્રકારની તરાહ જે એ સમાંતર શ્રેણી કહેવાય છે તેની વિશે શિખશો. વળી તમે સમાંતર શ્રેણીય સિવાય પણ શીખો.

હેતુઓ

આ પ્રકરણનો અભ્યાસ કર્યા પછી તમે......

- આપેલ સંખ્યાઓની યાદીમાંથી સમાંતર શ્રેણીને ઓળખી શકશો.
- સમાંતર શ્રેણીનું સામાન્ય પદ નક્કી કરી શકશો.
- સમાંતર શ્રેણીના પ્રથમ --- પદોનો સરવાળો કરી શકશો.

પૂર્વજ્ઞાન

- સંખ્યાઓની રચનાનું જ્ઞાન
- સંખ્યા રચના પરથી ક્રિયાઓ

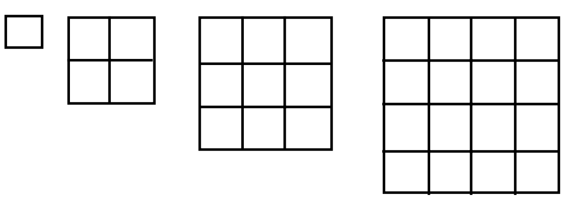
7.1 સંખ્યાની કેટલીક તરાહો :

ચાલો આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

(1) રીટા 10 % ના સાદા વ્યાજે રૂા.1000 બેંકમાં મૂકે છે. એક વર્ષ, બેવર્ષ, ત્રણ વર્ષ અને ચાર વર્ષ પછી તેની રકમ અનુક્રમે 1100,1200,1300 અને 1400 રૂપિયા થશે.

તમે કોઈ તરાહનું નિરીક્ષણ કર્યું ? તમે જોઈ શકશો કે રકમમાં દર વર્ષે રૂા. 100 ની ચોક્કસ રકમનો વધારો થાય છે.

(2) 1,2,3,4,.... ચોરસ એકમોની સંખ્યા અનુક્રમે 1,4,9,16 છે 1,4,6,16....



આ સંખ્યાઓની યાદીમાં તમને કોઈ તરાહ દેખાય છે ?

તમે જોઈ શકો છો કે,

$1 = 1^2, 4 = 2^2, 9 = 3^2, 16 = 4^2, ...$

એટલે કે આ પ્રાકૃત્તિક સંખ્યાઓના વર્ગ છે.

હવે સંખ્યાઓની કેટલીક વધુ યાદીઓ વિશે વિચારીએ અને શક્ય હોય તો તેમની તરાહને સમજવાનો પ્રયત્ન કરીએ.

1, 3, 5, 7, 9 ..... (1)

2, 4, 6, 8, 10 ... (2)

1, 4, 7, 10, 13 .... (3)

5, 3, 1, –1, –3... (4)

1, 3, 9, 27, 81, ... (5)

2, 3, 5, 7, 11, 13... (6)

તમે જોઈ શકો છો કે યાદી (1) માં પ્રાકૃત્તિક એકી સંખ્યાઓ છે. પ્રથમ સંખ્યા 1 છે. બીજી સંખ્યા 3 છે. ત્રીજી સંખ્યા 5 છે. એટલે કે આ બધી સંખ્યાઓ એક તરાહને અનુસરે છે. તરાહ એ છે કે પ્રથમ સંખ્યા સિવાય આ બધી સંખ્યાઓ પોતાની સરાહની પુરોગામી (અગાઉની) સંખ્યમાં ઉમેરવાથી મેળવી શકાય છે.

યાદી (2),(3) અને (4) માં પ્રથમ સંખ્યા સિવાય દરેક સંખ્યા પોતાની તરતની (પુરોગામી) સંખ્યામાં અનુક્રમે 2,3, અને -2 ઉમેરવાથી મેળવી શકાય છે. યાદી (તરતની) આગળની સંખ્યાને ત્રણ વડે ગુણતાં મેળવી શકાય છે. યાદી (6) માં તમે જોઈ શકશો કે તે અવિભાજ્ય સંખ્યાઓની યાદી છે. તેના પછીની અવિભાજ્ય સંખ્યા મેળવી આપે એવો કોઈ નિયમ બનાવવાનું આજ સુધી શક્ય બન્યુ નથી.

યાદીમાંથી સંખ્યાઓને સામાન્ય રીતે

$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$

$t_1, t_2, t_3, ..., t_n, ...$

સંખ્યાઓની યાદીમાં જેમને અનુક્રમે પ્રથમ, દ્વિતિય, તૃતિય અને --- પદ કહેવાય છે.

આપણે ઘણીવાર આ દરેક યાદીને શ્રેણી ક્રમ અથવા સંખ્યાઓની તરાહ કહીએ છીએ.

7.2 સમાંતર શ્રેણી

તમે જુદા જુદા પ્રકારની તરાહો જોઈ છે તરાહમાં પોતાના પછીનું પદ નક્કી કરવા માટે કેટલીક તરાહો સ્પષ્ટ ગાણિતિક નિયમોને અનુસરે છે. હવે તમે સંખ્યાઓની તરાહમાં એક ચોક્કસ પ્રકારની તરાહ વિશે શીખશો. નીચેના તરાહોને યાદ કરો.

1, 3, 5, 7, 9, ... (1)

2, 4, 6, 8, 10, ... (2)

$1, 4, 7, 10, 13, \ldots$ (3)

તમે જોયું હશે કે (1) અને (2) માં પ્રથમ પદને બાદ કરતાં દરેક પદ તેના અગાઉના પદમાં 2 ઉમેરવાથી મેળવાય છે. (મળે છે.) (3) માં પ્રથમ પદને બાદ કરતાં દરેક પદ તેના અગાઉના પદમાં 3 ઉમેરવાથી મળે છે. સંખ્યાની તરાહોમાં આપેલી સંખ્યાઓ તેના પદો કહેવાયછે. અગાઉ દર્શાવ્યા મુજબ આ પદો સામાન્ય રીતે.

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

or $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n, \ldots$ થી દર્શાવાય છે.

પછીનું પદ સરાહમાં પોતાનું સ્થાન દર્શાવે છે. આ પ્રમાણે a_n અથના t_n તરાહનું n મું પદ દર્શાવે છે.

એક ચોક્કસ પ્રકારની તરાહ કે જેમાં પ્રથમ પદ સિવાયનું દરેક પદ પોતાના અગાઉના પદમાં અચળ સંખ્યા (ધન કે ઋણ) ઉમેરવાથી મેળવી શકાય છે. તેને સમાંતર શ્રેણી કહે છે. સામાન્ય રીતે પ્રથમ પદ ‘a’ વડે દર્શાવાય છે અને સામાન્ય તફાવત ‘d’ વડે દર્શાવાય છે. આ પ્રમાણે સમાંતરક શ્રેણીનું પ્રમાણિત સ્વરૂપ છે.

$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots$ હશે.

ઉદાહરણ 7.1: નીચેની સંખ્યાઓની યાદીમાંથી સમાંતર શ્રેણી શોધી કાઢો. સમાંતર શ્રેણીમાં અનુક્રમે પ્રથમ પદ અને સામાન્ય તફાવત શોધી કાઢો.

(1) $2, 7, 12, 17, 22, \ldots$

(2) $4, 0, -4, -8, -12 \ldots$

(3) $3, 7, 12, 18, 25 \ldots$

(4) $2, 6, 18, 54, 162 \ldots$

ઉકેલ:

(1) આ સમાંતર શ્રેણી છે

જ્યારે $7 - 2 = 5$, $12 - 7 = 5$, $17 - 12 = 5$ અને $22 - 17 = 5$

આ પ્રમાણે પ્રથમ પદને બાદ કરતાં દરેક પદ પોતાના તુરંત અગાઉના પદમાં 5 ઉમેરવાથઈ મળે છે. તેથી પ્રથમ પદ $a = 2$ એ સામાન્ય તફાવત $d = 5$.

(2) આપણે જોઈએ છીએ કે

$0 - 4 = -4$, $-4 - 0 = -4$, $-8 - (-4) = -4$, $-12 - (-8) = -4$ તેથી તે સમાંતર શ્રેણી છે.

આમ, પ્રથમ પદ $a = 4$

અને સામાન્ય તફાવત $d = -4$.

(3) 3, 7, 12, 18, 25, યાદીમાં જોઈ શકો છે કે 7 − 3 = 4, 12 − 7 = 5, 18 − 12 = 6, 25 − 18 = 7 આ પ્રમાણે બે ક્રમિક પદોનો તફાવત એક સરખો નથી તેથી તે સમાંતર શ્રેણી નથી.

(4) 2, 6, 18, 54, 162, સંખ્યાઓની યાદીમાં

6 − 2 = 4, 18 − 6 = 12

તેથી બે ક્રમિક પદોનો તફાવત એક સરખો નથી.

તેથી તે સમાંતર શ્રેણી નથી.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 7.1

નીચેનામાંથી કઈ સમાંતર શ્રેણી છે જો તેઓ સમાંતર શ્રેણી હોય, તો તેમનું પ્રથમ પદ અને સામાન્ય તફાવત શોધો.

1. −5, −1, 3, 7, 11, ...
2. 6, 7, 8, 9, 10, ...
3. 1, 4, 6, 7, 6, 4, ...
4. −6, −3, 0, 3, 6, 9, ...

7.3 સમાંતર શ્રેણીનું સામાન્ય પદ (Nમું પદ)

ચાલો આપણે સમાંતરશ્રેણી કે જેનું પ્રથમ પદ a હોય અને સામાન્ય તફાવત a હોય તે વિશે વિચારીએ. ચાલો આપણે સમાંતર શ્રેણીના પદોને $t_1, t_2, t_3,....,t_n$, વડે દર્શાવીએ જેમાં t_n એ સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ દર્શાવે છે. જ્યારે પ્રથમ પદ a છે. અને બીજુ પદ AP સામાન્ય તફાવત, a + d ઉમેરીને મેળવી શકાય છે. એટલે કે a + d ત્રીજુ પદ a + d માં d ઉમેરી મેળવી શકાશે તેથી ત્રીજુ પદ (a + d) + d = a + 2d થશે. અને આગળ આ સાથે.

પ્રથમ પદ, $t_1 = a = a + (1 - 1)\,d$

બીજુ પદ, $t_2 = a + d = a + (2 - 1)\,d$

ત્રીજુ પદ, $t_3 = a + 2d = a + (3 - 1)\,d$

ચોથુ પદ, $t_4 = a + 3d = a + (4 - 1)\,d$

તમે કોઈ તરાહ જોઈ શકો છો. આપણે (જોઈ શકીએ છીએ કે) દરેક પદ a + (પદોનો ક્રમ -1) d તો કહો કે 10 મું પદ શું હશે ?

$t_{10} = a + (10 - 1)d = a + 9d$

તમે કહી શકો કે n મું પદ અથવા સામાન્ય પદ શું હશે ?”

સ્પષ્ટ છે કે $t_n = a + (n - 1)\,d$

ઉદાહરણ 7.2: *સમાંતર શ્રેણી* 16, 11, 6, 1, −4, −9, *નું* 15 *નું* n *નું પદ શોધો ?*

ઉકેલ: *અહીં* $a = 16$ *અને* $d = 11 - 16 = -5$

આમ, $t_{15} = a + (15 - 1)d = a + 14d$

$= 16 + 14(-5) = 16 - 70$

$= -54$

તેથી 15 *મું પદ એટલે કે,* $t_{15} = -54$

હવે, $t_n = a + (n - 1)d$

$= 16 + (n - 1) \times (-5) = 16 - 5n + 5$

$= 21 - 5n$

ઉદાહરણ 7.3: *સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ*-3 *અને* 12 *મું પદ* 41 *છે તો સામાન્ય તફાવત નક્કી કરો.*

ઉકેલ: *ધારો કે પ્રથમ પર* a *અનેસામાન્ય તફાવત* d *છે.*

$t_{12} = a + (12 - 1)d = 41$

or $-3 + 11d = 41$ $[a = -3]$

or $11d = 44$

or $d = 4$

તેથી સામાન્ય તફાવત 4 *છે.*

ઉદાહરણ 7.4: *સમાંતર શ્રેણીનો સામાન્ય તફાવત* 5 *છે અને* 10 *મું પદ* 43 *છે. તો પ્રથમ પદ શોધો.*

ઉકેલ: *આપણી પાસે :*

$t_{10} = a + (10 - 1)\,d$

$43 = a + 9 \times 5$ $[d = 5]$

$43 = a + 45$

$a = -2$

તેથી પ્રથમ પદ -2 *છે.*

ઉદાહરણ 7.5: *સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ*-2 *અને* 11 *મું પદ* 18 *છે તો તેનું* 15 *મું પદ શોધો.*

ઉકેલ: 15 *મું પદ શોધવા માટે તમારે* d *ની જરૂર પડશે.*

હવે, $t_{11} = a + (11 - 1)d$

$18 = -2 + 10d$

$10d = 20$

$$d = 2$$

$$t_{15} = a + 14d$$

$$= -2 + 14 \times 2 = 26$$

$$t_{15} = 26.$$

ઉદાહરણ 7.6: *સમાંતર શ્રેણીનું p માંનું પદનું p ઘણું અને q માં પદમાં પદનું q ઘણું સરખું છે તો સાબિત કરો કે (p + q) મું પદ શૂન્ય છે. ((p + q) શરત છે.)*

ઉકેલ:

$$t_p = a + (p - 1)d$$

$$t_q = a + (q - 1)d$$

જ્યારે $pt_p = qt_{q,}$

$$p[a + (p - 1)d] = q[a + (q - 1)d]$$

$$pa + p(p - 1)d - qa - q(q - 1)d = 0$$

$$(p - q)a + (p^2 - q^2)d - pd + qd = 0$$

$$(p - q)a + (p^2 - q^2)d - (p - q)d = 0$$

$$(p - q)a + (p - q)(p + q)d - (p - q)d = 0$$

$$(p - q)[a + (p + q)d - d] = 0$$

$$a + (p + q)d - d = 0 \quad [\text{as } p - q\ ^{1}\ 0]$$

$$a + (p + q - 1)d = 0$$

પરંતુ ડાબી બાજુએ (p + q) મુ પદ છે.

$$t_{p+q} = 0$$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 7.2

1. *સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ અને સામાન્ય તફાવત -3 છે. તો તેનું 12 મું પદ શોધો.*
2. *સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 2 અને 9 મું પદ 26 છે. તો સામાન્ય તફાવત શોધો.*
3. *સમાંતર શ્રેણીનું 12 મું પદ -25 અને 18 મું પદ -46 છે. તો તેનું પ્રથમ પદ અને સામાન્ય તફાવત શોધો .*
4. 5,2,-1... *સમાંતર શ્રેણીનું કયું પદ -22 છે.*
5. *સમાંતર શ્રેણીનું p મું, q મું અને r મું પદ અનુક્રમે x,y,z છે સાબિત કરો કે*

$$x(q - r) + y(r - p) + z(p - q) = 0$$

7.4 સમાંતર શ્રેણીના પ્રથમ પદોનો સરવાળો.

જ્યારે જર્મન મહાન ગણિતજ્ઞ કાર્લ હેડરી ગાઉસ પ્રાથમિક શાળામાં હતા. ત્યારે તેમજ શિક્ષકે વર્ગમાં 1 થી 100 સુધીની પ્રાકૃતિક સરવાળો કરવાનું કહ્યું જ્યારે બાકીનો ાખો વર્ગ આ પ્રશ્ન મથામણ રતો હતો ત્યારે ગાઉસે ટૂંક સમયમાં (નહિવત સમયમાં) જવાબ મેળવ્યો. ગાઉસ કેવી રીતે ઉત્તર મેળવ્યો ? નીચે પ્રમાણએ કામ કર્યું .... એવું બનવા જોગ છે.

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100 \qquad (1)$$

આ સંખ્યાઓને ઉલટા ક્રમમાં લખતા આપણને

$$S = 100 + 99 + 98 + \ldots + 2 + 1 \qquad (2)$$

પદોનો ક્રમ મુજબ સરવાળો કરતાં આપણને

$$2S = 101 + 101 + 101 + \ldots + 101 + 101 \ (100 \text{ વખત})$$

$$= 100 \times 101$$

$$S = \frac{૧૦૦ \times ૧૦૧}{૨}$$

$$S = 5050$$

આપણે સમાતર શ્રેણીના n પદોનો સરવાળો કરતા આજ પધ્ધતિનો ઉપયોગ કરીશું.

$\frac{n}{2}$

સમાંતર શ્રેણીના પ્રથમ n પદો

$a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (n-2)d, a + (n-1)d$ આ છે.

n પદોના સરવાળાને ચાલો આપણે S_n તરીકે દર્શાવીએ છીએ,

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + [a + (n-2)d] + [a + (n-1)d] \qquad (3)$$

આ પદોને ઉલટા ક્રમમાં લખતા આપણને

$$S_n = [a + (n-1)d] + [a + (n-2)d] + \ldots + (a + d) + a \qquad (4)$$

હવે આપણને (3) અને (4) ના ક્રમ np પદોનો સરવાળો કરીએ. આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે (3) ના કોઈપણ પદ અને તેને સુસંગત (4) ના પદોનો સરવાળો $2a + (n-1)d$ છે.

$2S_n = [2a+(n-1)d] + [2a+(n-1)d] + \ldots + [2a+(n-1)d] + [2a+(n-1)d]$, n વખત આપણને મળે છે.

$$2S_n = n[2a + (n-1)d]$$

$$S_n = \quad [2a + (n-1)d],$$

જેનાથી આપણને સમાંતર શ્રેણીના પ્રથમ n પદોનો સરવાળો સામાન્ય સૂત્ર મળે છે.

આને નીચે પ્રમાણે લખી શકાય.

$$S_n = \frac{n}{2}[a + \{a + (n-1)d\}]$$

$$= \frac{n}{2}(a + t_n), \qquad [\text{કારણ કે } n \text{ મું પદ } t_n = a + (n-1)d]$$

ઘણી વખત -- માં પદને છેલ્લુ પદ એવું નામ આપવામાં આવે છે. અને તેને '--' તરીકે દર્શાવામાં આવે છે.

$$S_n = \frac{n}{2}(a + l) \qquad (4)$$

ઉદાહરણ 7.7: નીચેના સમાંતર શ્રેણીઓના પ્રથમ 12 પદોનો સરવાળો શોધો.

(1) 11, 16, 21, 26 ....

(1) −151, −148, −145, −142

ઉકેલ: (1) 11, 16, 21, 26 .... આપેલ સમાંતર શ્રેણી છે.

અહીં, a = 11 અને d = 16 – 11 = 5 છે. અને n = 12 છે. તમે જાણો છો કે સમાન્તર શ્રેણીના પ્રથમ n પદોનો સરવાળો $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ સૂત્ર થી મળે છે. (આપવામાં આવે છે.)

$$S_{12} = \frac{12}{2}[2 \times 11 + (12-1)5]$$

$$= 6\,[22 + 55] = 6 \times 77$$

$$= 462$$

તેથી માંગેલો સરવાળો 462 છે.

(2) −151, −148, −145, −142...... સમાંતર શ્રેણા આપેલ છે.

અહીં, a = – 151, d = – 148 – (–151) = 3 અને n = 12.

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$S_{12} = \frac{12}{2}[2 \times (-151) + (12-1)3]$$

$$= 6[-302 + 33] = 6 \times (-269)$$

$$= -1614$$

તેથી માંગેલો જવાબ −1614 છે.

ઉદાહરણ 7.8: *સમાંતર શ્રેણી* 2, 4, 6, 8, 10 .... *નો સરવાળો* 210 *મેળવવા માટે તેમાં કેટલાં પદ જરૂરી છે ?*

ઉકેલ : *આપેલ સમાંતર શ્રેણીમાં* , a = 2, d = 2 *અને* $S_n = 210$ *આપેલ છે.*

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$210 = \frac{n}{2}[2 \times 2 + (n-1)2]$$

$$420 = n[2n + 2]$$

$$420 = 2n^2 + 2n$$

$$2n^2 + 2n - 420 = 0$$

$$n^2 + n - 210 = 0$$

$$n^2 + 15n - 14n - 210 = 0$$

$$n(n + 15) - 14(n + 15) = 0$$

$$(n + 15)(n - 14) = 0$$

$$n = -15 \text{ or } n = 14$$

જ્યારે n *ઋણ ન હોઈ શકે તેથી* n=14 *તેથી સરવાળો* 210 *મેળવવા માટે* 14 *પદો જરૂરી છે.*

ઉદાહરણ 7.9: *નીચેનાનો સરવાળો શોધો.*

$$2 + 5 + 8 + 11 + ... + 59$$

ઉકેલ: *અહીં* 2, 5, 8, 11, ... *સમાંતર શ્રેણીમાં છે. અને* a = 2, d = 3 *અને* $t_n = 59$.

સરવાળો શોધવા માટે તમારે n નું મૂલ્ય શોધવાની જરૂર પડે છે.

હવે, $t_n = a + (n-1)d$

$$59 = 2 + (n-1)3$$

$$59 = 3n - 1$$

$$60 = 3n$$

$$n = 20$$

હવે, $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$$S_{20} = \frac{20}{2}[2 \times 2 + (20-1)3] \qquad S_{20} = 10[4 + 57] = 610$$

તેથી જરૂરી સરવાળો 610 *છે.*

ઉદાહરણ 7.10: *જેને 7 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય તેવી 1 થી 1000 સુધીની પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો શોધો.*

ઉકેલ: *અહીં 7 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય તેવી પ્રથમ સંખ્યા 7 છે. અને 7 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય તેવી છેલ્લી સંખ્યા 994 છે.*

7, 14, 21, ..., 994 *પદોનો સરવાળો કરવો પડે.*

અહીં, $a = 7, d = 7, t_n = 994$

$t_n = a + (n - 1)d$

$994 = 7 + (n - 1)7$

$994 = 7n$

$n = 142$ *મળે છે.*

હવે, $S_n = \frac{n}{2}[a + l]$

$= \frac{142}{2}[7 + 994] = 71 \times 1001$

$= 71071$

તેથી, માગેલો સરવાળો 71071 *છે.*

ઉદાહરણ 7.11: *સમાંતર શ્રેણીના પ્રથમ ત્રણ પદોને સરવાળો 36 છે. અને તેમનો ગુણાકાર 1620 છે. તો સમાંતર શ્રેણી શોધો.*

ઉકેલ: *ધારો કે સમાંતર શ્રેણીના પ્રથમ ત્રમ પદોના* a + d, a *અને* a + d2 *છે. તેમ છતાં તેમનો ગુણાકાર બેશક (ચોક્કસ) અઘરો બનશે. અને બે સમીકરણનો એક સાથે ઉકેલ શોધવામાં (સમય વધારે બગડશે) તેથી સરળ રસ્તો પ્રથમ ત્રણ પદો,* a + d, a *અને* a + d2 *ધારવાનો છે. જેથી કરીને ત્રણ પદોનો સરવાળો* 3a *થયા.*

ચાલો સમાંતર શ્રેણીના પ્રથમ ત્રણ પદો a + d, a *અને* a + d2 *થાય.*

$a - d + a + a + d = 36$

$3a = 36,$

$a = 12$ *મળે છે.*

હવે જ્યારે ગુણાકાર 1620 *થાય છે ત્યારે*

$(a - d)\ a\ (a + d) = 1620$

$(12 - d)\ 12\ (12 + d) = 1620$

$12^2 - d^2 = 135$

$$144 - d^2 = 135$$

$$d^2 = 9$$

$$d = 3 \text{ or } -3$$

જો d = 3, તો સંખ્યાઓ 12 – 3, 12 અને 12 + 3 એટલે કે 9, 12 અને 15 થાય (કારણ કે a = 12 છે.)

જો d = – 3, લઈએ તો સંખ્યાઓ 12(-3), 12 અને (12 + (-3))

તેથી સંખ્યાઓ 15, 12 અને 9

તેથી સમાંતર શ્રેણીના પ્રથમ ત્રણ પદ 9, 12, 15 અથવા 15, 12, 9 આપેલી શરતનું પાલન કરે છે.

સમાંતર શ્રેણી 9,12,15 ..... અથવા 15,12,9 .... થાય.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 7.3

1. નીચેની સમાંતર શ્રેણીઓના પ્રથમ 15 પદોનો સરવાળો શોધો.

   (1) 11, 6, 1, –4, –9 ...

   (2) 7, 12, 17, 22, 27 ...

   અથવા

2. 25, 28, 31, 34, ... સમાંતર શ્રેણીમાં કેટલાં પદોનો સરવાળો 1070 થાય છ?

3. નીચેનાનો સરવાળો શોધો :

   1 + 4 + 7 + 10 + ... +118

4. 3 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય તેવી 1 થી 100 સુધીની બધી જ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો શોધો.

5. સમાંતર શ્રેણીના કોઈપણ ત્રણ ક્રમિક પદોનો સરવાળો 21 છે. અને ગુણાકાર ટકા છે. તો સમાંતર શ્રેણીના ત્રણ પદો શોધો.

6. નીચેની સમાંતર શ્રેણીઓમાં દરેકમાં l, a, n, d અને S_n પૈકી જે કંઈ ખૂટતુ હોય તે નક્કી કરો.

   (i) $a = -2$, $d = 5$, $S_n = 568$.

   (ii) $l = 8$, $n = 8$, $S_8 = -20$

   (iii) $a = -3030$, $l = -1530$, $n = 5$

   (iv) $d = \frac{2}{3}$, $l = 10$, $n = 20$

ઉપસંહાર - સારાંશ

- જે શ્રેણીમાં પ્રથમ પદ સિવાયનું દરેક પદ અગાઉના પદમાં અચળ સંખ્યા ઉમેરવાથી મેળવાય છે. તેને સમાંતર શ્રેણી કહે છે.
- સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 'a' થી અને સામાન્ય તફાવત 'd' થી દર્શાવાય છે.
- સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ $t_n = a + (n-1)d$ મેળવી શકાય છે.
- સમાંતર શ્રેણીના પ્રથમ n પદોનો સરવાળો $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ થી મેળવી શકાય છે.
- સમાંતર શ્રેણીનું મુખ્ય પદ a અને છેલ્લું પદ l અને પદોની સંખ્યા n હોય. તો $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$ થી મેળવાય છે.

અંતિમ સ્વાધ્યાય

1. નીચેના તરાહમાંથી કઈ તરાહ સમાંતર શ્રેણી છે ?

    (1) 2, 5, 8, 12, 15, ...

    (2) −3, 0, 3, 6, 9 .....

    (3) 1, 2, 4, 8, 16, ...

2. નીચેનાની સમાંતર શ્રેણીઓમાંની દરેક શ્રેણીનું n મું પદ શોધો.

    (1) 5, 9, 13, 17, ...

    (2) −7, −11, −15, −19

3. સમાંતર શ્રેણીનું ચોથુ પદ તેના પ્રથમ પદના ત્રણ ગણા જેટલું છે. અને 7 મું પદ, ત્રીજા પદના બમણા કરતા 1 વધારે છે, તો પ્રથમ પદ અને સામાન્ય તફાવત શોધો.

4. સમાંતર શ્રેણીનું 5 મું પદ 23 અને 12 મું પદ 37 છે. તો પ્રથમ પદ અને સામાન્ય તફાવત શોધો.

5. ત્રિકોણના ખૂણાના માપ સમાંતર શ્રેણીમાં છે. સૌથી નાના ખૂણાનું માપ સૌથી મોટા ખૂણાના માપનો 1/3 ભાગ હોય તો ત્રિકોણના ત્રણ ખૂણાના માપ શોધો.

6. (1) 100, 95, 90, 85, ..., સમાંતર શ્રેણીનું કયું પદ -25 છે ?

    (2) $\frac{25}{4}$ નું કયું પદ $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}$..... છે ?

7. સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ $t_n = a + bn$ આપેલું છે. તો પ્રથમ પદ અને સામાન્ય તફાવત શોધો.

8. સમાંતર શ્રેણીના 7 માં પદના 7 ગણા, 11 માં પદના 11 ગણા જેટલા છે, તો સાબિત કરો કે 18 મું પદ શૂન્ય છે.

9. સમાન્તર શ્રેણી જેનું પ્રથમ પદ -- અને સામાન્ય તફાવત -- છે. દરેક પદને બમણા કરવામાં આવે તો પરિણામની આ તહાર સામાન્તર શ્રેણી છે જો હા તો તેનું પ્રથમ પદ અને સામાન્ય તફાવત શોધો.

10. જો $k + 2$, $4k – 6$ અને $3k – 2$ એ સમાંતર શ્રેણીના ત્રણ ક્રમાંક પદો હોય તો k ની કિંમત શોધો.

11. માગ્યા પ્રમાણે કરો.

(1) 1, 4, 7, 10, ... સમાંતર શ્રેણીમાં કેટલા પદોનો સરવાળો 715 થાય ?

(2) –10, –7, –4, –1, ... સમાંતર શ્રેણીના કેટલા પદોનો સરવાળો 104 થાય ?

12. પ્રથમ સો એકી સંખ્યાઓનો સરવાળો શોધો.

13. સમાંતર શ્રેણીમાં $a = 2$ અને પ્રથમ પાંચ પદોનો સરવાળો ત્યારપછીના પાંચ પદોના સરવાળાનો 1/4 ભાગ છે તો બતાવો કે 20 મું પદ -112 છે.

સૂચન - જો સમાંતર શ્રેણી $a, a + d, a + 2d, \ldots$

તો $S_5 = \frac{5}{2}[a + (a + 4d)]$

ત્યાર પછીનાં પાંચ પદોમાં પ્રથમ પદ $a + 5d$ અને છેલ્લું પદ $a + 9d$ થાય.

14. સમાંતર શ્રેણીના પ્રથમ -n પદોનો સરવાળો $2n + 3n^2$ છે, તો સમાંતર છે, તો સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ શોધો.

સૂચન - $t_r = S_r – S_{r-1}$

15. ત્રણ અંકોની સંખ્યાઓને 4 વડે ભાગતા શેષ વધે તેવી તમામ સંખ્યાઓનો સરવાળો શોધો.

(સૂચન પ્રથમ પદ 101 અને છેલ્લુ પદ 997)

તમારી પ્રગતિ ચકાસોના જવાબ

7.1 સમાંતર શ્રેણી છે.

1. $a = – 5, d = 4$
2. $a = 6, d = 1$
3. સમાંતર શ્રેણી નથી
4. $a = –6, d = 3$

7.2

1. – 29   2. 3   3. 5, – 3   4. 10^{th} મું પદ

7.3

1. (i) – 360 (ii) 630
2. 20
3. 2380
4. 1689
5. 3, 7, 11 or 11, 7, 3
6. (i) $n = 16,\ l = 73$ (ii) $a = -3,\ d = 3$

   (iii) $d = 375,\ S_n = -11400$ (iv) $a = -\frac{3}{8},\ S_n = \frac{220}{3}$

અંતિમ સ્વાધ્યાય જવાબ

1. (ii)
2. (i) $t_n = 4n + 1$ (ii) $t_n = -4n - 3$
3. 3, 2
4. 15, 2
5. $30^o, 60^o, 90^o$
6. (i) 26^{th} term (ii) 25^{th} term
7. a + b, b
9. હા, પ્રથમ પદ = 2a, સામાન્ય તફાવત = 2d
10. 3 11. (i) 22 પદ (ii) 13 પદ
12. 10,000 14. 6r – 1 15. 123525

માધ્યમિક અભ્યાસક્રમ
ગણિત

મહાવરો - બીજગણિત

મહતમ ગુણ : 25 | **સમય : 45 મિનિટ**

સુચનાઓ :

1. *બધાજ પ્રશ્નોના જવાબ અલગ પત્રકમાં આપો.*
2. *નીચે આપેલ માહિતી તમારી ઉત્તરવહીમાં આપો.*

   નામ

   એનરોલમેન્ટ નંબર

   વિષય

   મહાવરાનો વિષય

   સરનામુ

3. *તમારો મહાવરો તમારા અભ્યાસકેન્દ્રના શિક્ષકને બતાવો અને તમારી કામગીરીનો હકારાત્મક અભિપ્રાય મેળવો.*

મહાવરો રાષ્ટ્રીય મુક્ત વિદ્યાલયી શિક્ષણ સંસ્થામાં મોકલશો નહીં.

1. *આપેલ શ્રેણી* $x^6 - ax^5 + x^4 - ax^3 + 3x - a + 2$ *નો એક અવયવ* $(x - a)$ *હોય તો* a *ની કિંમત શોધો.*

   (A) $a = 1$

   (B) $a = -1$

   (C) $a = 2$

   (D) $a = -2$

2. $\dfrac{1}{(-3/5)^{-2}}$ *નો વ્યસ્ત શોધો.* 1

   (A) $\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2$

(B) $\left(\frac{-5}{3}\right)^2$

(C) $(-5/3)^{-2}$

(D) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$

3. જો સમાંતર શ્રેણીમાં 3 પટનો સરવાળો 15 અને મનો ગુણાકાર 45 હોય તો તે ત્રણ નંબર શોધો.
1

(A) 1, 3, 15

(B) 2, 4, 9

(C) 1, 5, 9

(D) 0, 5, 9

4. જો $y = \frac{x-1}{x+1}$, તો $2y - \frac{1}{2y}$ =.........

(A) $\frac{3x^2-10x-3}{2(x^2-1)}$

(B) $\frac{3x^2-10x+1}{x^2-1}$

(C) $\frac{3x^2+10x+3}{2(x^2-1)}$

(D) $\frac{3x^2-10x+3}{2(x^2-1)}$

5. આપેલ પદનું ટૂંકમાં સાદુરૂપ આપો.

$$\frac{4x^2-25}{2x^2+11x=15}$$

(A) $\frac{2x-5}{x+3}$

(B) $\dfrac{2x+5}{x+3}$

(C) $\dfrac{2x-5}{x-3}$

(D) $\dfrac{2x-5}{x-3}$

6. x શોધો, જેથી $\left(\dfrac{7}{8}\right)^{-3} \times \left(\dfrac{8}{7}\right)^{-11} = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{x}$: 2

7. $\sqrt{3}$ અને $\sqrt{8}$ વચ્ચે ત્રણ અસંગત સંખ્યા શોધો. 2

8. જો બે બહુપદીનો ગુ.સા.અ.(x–2) અને લ.સા.અ. $x^4 + 2x^3 - 8x - 16$ હોય અને એક બહુપદી $x^3 - 8$ હોય તો, તો બીજી શોધો. 2

9. જો કોઈપણ આંક અને તેની વ્યસ્તનો સરવાળો $\dfrac{50}{7}$,હોય તો તેનો આંક શોધો. 2

10. એક લંબચોરસની લંબાઈ તેની પહોળાઈના બમણા કરતાં 5 cm ઓછી છે. જો તેની પરિમિતિ 110 cm, હોય તો લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ શોધો. 2

11. સમાંતર શ્રેણીનું પહેલું પદ a અને બીજુ પદ b અને છેલ્લુ પદ c હોય તો તેનો સરવાળો $\dfrac{(a+c)(b+c-2a)}{2(b-a)}$ હોય તે દર્શાવો. 4

12. જો અન્ય 30 માર્કમાંથી જેટલા ગુણ મેળવેલ છે. તેનાથી 10 વધારે માર્કને 9 વડે ગુણતા જેટલા માર્ક્સ મળે છે. તે તેના ખરા માર્ક્સનો વર્ગ છે. તો અજયે કેટલા માર્ક્સ મેળવેલ હશે ? 6

8

ટકા અને તેના ઉપયોગો

તમે સમાચાર પત્રોમાં, દૂરદર્શનમાં (ટેલીવીઝનમાં) અને હોર્ડીંગ્ઝ (જાહેરાતના પાટીયા) માં નીચે પ્રકારની જાહેરાતો જોઈ હશે.

- 'સેલ' 60 % સુધીની છૂટ
- ચુંટણીમાં 70 % ઉપરાંતનું મતદાન
- બારમાં ધોરણની પરીક્ષામાં રમેશે કુલ ગુણમાં 93 % (ગુણ) મેળવ્યા.
- બેંકોએ બાંધી મુદતની થાપણ ઉપર વ્યાજનો દર 93 % થી ઘટાડીને 7 % કર્યો.

ઉપરનાં બધા વિધાનોમાં અગત્યના શબ્દો 'ટકા' (%) છે. ટકા () શબ્દ લેટિન શબ્દ -- શબ્દમાંથી આવેલો છે. જેનો અર્થ 100 ઉપર અથવા 100 માંથી એવો થાય છે.

આ પાઠમાં આપણએ ટકાનો અપૂર્ણાંક અથવા દશાંશની રીતે (સ્વરૂપ) અભ્યાસ કરીશું અને નફો-ખોટ, વળતર, સાદુ વ્યાજ, ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ, વૃદ્ધિદર અને મૂલ્યમાં ઘટાડો (ઘસારો) વગેરેને લગતી સમસ્યાઓના ઉકેલમાં તેના ઉપયોગ વિશે પણ અભ્યાસ કરીશું.

હેતુઓ

આ પાઠનો અભ્યાસ કર્યા પછી તેમ

- ટકાના ખ્યાલને સ્પષ્ટ કરી શકશો.
- આપેલી સંખ્યા અથવા જથ્થાના ચોક્કસ ટકા ગણી શકાશે.
- ટકા ઉપર આધારિત સમસ્યાઓ ઉકેલી શકશો. (દાખલા ગણી શકશો)
- નફા-ખોટ ઉપર આધારિત સમસ્યાઓ ઉકેલી શકશો.
- વસ્તુની છાપેલી કીંમત અને વળતરના દર ઉપરથી વસ્તુની વેચાણ કિંમત વળતર નક્કી કરી શકશો.
- વળતરને લગતા પ્રશ્નોમાં પ્રતિય પ્રશ્નોના ઉકેલ આપી શકશો.
- નિશ્ચિત વ્યજનો દર અને સમય માટે રોકાણ કરેલી કેટલીક રકમનું સાદુ વ્યાજ અને કુલ રકમ (વ્યાજમુદ્દત) ગણી શકશો.
- સાદા વ્યજની ગણતરીમાં ચક્રવૃદ્ધિ વ્યજનો ખ્યાલ સ્પષ્ટ કરી શકશો.
- આપેલા સ્થિર કે અસ્થિર વ્યજના દર ઉપરથી અને ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજના સૂત્રની મદદથી વાસ્તવિક

જીવનમાં ચડતી-પડતીની સમસ્યાઓ ઉકેલી શકશે.

અપેક્ષિત પૂર્વજ્ઞાન

- પૂર્ણ સંખ્યાઓ, અપૂર્ણાંકો અને દશાંશ (સંખ્યાઓ) પરથી ચાર મૂળભૂત પ્રક્રિયાઓ
- બે અપૂર્ણાંકોની સરખામણી.

8.1 ટકા

યાદ કરો કે અપૂર્ણાંક $\frac{3}{4}$ એટલે 4 સરખા ભાગમાંથી 3 ભાગ $\frac{7}{13}$ એટલે 13 સરખા ભાગમાંથી 7 ભાગ અને $\frac{23}{100}$ એટલે 100 સરખા ભાગમાંથી 23 સરખા ભાગ.

અપૂર્ણાંક કે જેનો છેદ 100 હોય તેના 'ટકા' તરીકે વંચાય છે. દાખલા તરીકે $\frac{23}{100}$ ને 23 % (ત્રેવીસ ટકા) તરીકે વંચાય છે.

"%" ચિહ્ન ટકા માટે વપરાય છે.

ગુણોત્તર કે જેનું બીજુ પદ 100 હોય તેને પણ ટકા કહેવાય છે.

તેથી, 33 : 100 એ 33% બરાબર છે. (33 : 100 = 33%)

યાદ કરો કે અપૂર્ણાંક, $\frac{3}{5}$ અને $\frac{1}{2}$, ની સરખામણી કરવા આપતો પ્રથમ સામાન્ય (એક સરખા) છેદવાળા અપૂર્ણાંકોમાં ફેરવીએ છીએ (છેદનો લ.સા.અ.)

આ પ્રમાણે, $\frac{3}{5}=\frac{3}{5}\times\frac{2}{2}=\frac{6}{10}$, અને

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{5}{5}=\frac{5}{10}$$

હવે, $\frac{6}{10}>\frac{5}{10}$ હોવાથી $\frac{3}{5}>\frac{1}{2}$

આ અપૂર્ણાંકોનો આપણે 100 ના છેદમાં રૂપાંતર (ફેરવી) કરી શક્યા હોત.

$$\frac{3}{5}=\frac{3}{5}\times\frac{20}{20}=\frac{60}{100} \text{ અથવા } 60\%$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{50}{50}=\frac{50}{100} \text{ અથવા } 50\%$$

અને તેથી, $\frac{3}{5} > \frac{1}{2}$ કારણ કે 60%એ 50% કરતાં વધારે છે.

8.2 અપૂર્ણાંકનું ટકામાં અને ટકાનું અપૂર્ણાંકમાં રૂપાંતર

ઉપરના વિભાગમાં આપણે શીખી ગયા કે અપૂર્ણાંકને ટકામાં રૂપાંતર કરવા માટે આપણે 100 છેદ વાળા સરખા અપૂર્ણાંકોમાં ફેરવીએ છીએ પછી અપૂર્ણાંકના બદલાયેલા છેદને (બદલે) (100ને) % (ટકા) ચિહન લગાડીએ છીએ ઉદાહરણ તરીકે,

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{25}{25} = \frac{75}{100} = 75 \times \frac{1}{100} = 75\% \text{ અને}$$

$$\frac{4}{25} = \frac{4}{25} \times \frac{4}{4} = \frac{16}{100} = 16 \times \frac{1}{100} = 16\%$$

નોંધ : અપૂર્ણાંકને ટકામાં દર્શાવવા માટે આપણે અપૂર્ણાંકને 100 વડે ગુણીને સાદુરૂપ આપીએ અને પછી % નું ચિહન લગાડીએ છીએ. દાખલા કરીકે,

$$\frac{4}{25} = \frac{4}{25} \times 100\% = 16\%$$

ઉલટી રીતે,

ટકાને અપૂર્ણાંકમાં દર્શાવવા માટે આપણે % સંજ્ઞા (ચિહન) ને છોડી દઈએ છીએ અને સંખ્યાને $\frac{1}{100}$ વડે ગુણીએ છીએ (અથવા સંખ્યાને 100 વડે ભાગીએ છીએ % અને પછી સાદુરૂપ આપીએ છીએ) ઉદાહરણ તરીકે,

$$47\% = 47 \times \frac{1}{100} = \frac{47}{100}, \qquad 17\% = 17 \times \frac{1}{100} = \frac{17}{100}, \qquad 3\% = \frac{3}{100}$$

$$45\% = 45 \times \frac{1}{100} = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}, \quad 210\% = \frac{210}{100} = \frac{21}{10}, \quad x\% = \frac{x}{100}.$$

8.3 ટકાનું દશાંશમાં અને દશાંશનું ટકામાં રૂપાંતરણ

નીચેના ઉદાહરણ જોઈએ.

$$0.35 = \frac{35}{100} = 35 \times \frac{1}{100} = 35\%$$

$$4.7 = \frac{47}{10} = \frac{470}{100} = 470 \times \frac{1}{100} = 470\%$$

$$0.459 = \frac{459}{1000} = \frac{459}{10} \times \frac{1}{100} = 45.9\%$$

$$0.0063 = \frac{63}{10000} = \frac{63}{100} \times \frac{1}{100} = 0.63\%$$

આમ, દશાંશને ટકામાં દર્શાવવા માટે આપણે બે દશાંશ સ્થળ જમણીબાજુ ખસીએ છીએ અને પછી % સંજ્ઞા મૂકીએ છીએ.

ઉલટી રીતે,

ટકાને દશાંશ દર્શાવવા માટે આપણએ % સંજ્ઞાને છોડી દઈએ છીએ અને બે દશાંશ સ્થળ ડાબી બાજુ મૂકીએ (ખસીએ) છીએ.

ઉદાહરણ તરીકે,

$43\% = 0.43$	$75\% = 0.75$	$12\% = 0.12$
$9\% = 0.09$	$115\% = 1.15$	$327\% = 3.27$
$0.75\% = 0.0075$	$4.5\% = 0.045$	$0.2\% = 0.002$

કેટલાંક થોડાં વધુ ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 8.1: સ્વેતાએ 25 ગુણની કસોટીમાં 18 ગુણ મેળવ્યા તો તેણે ગુણના કેટલા ટકા મેળવ્યા ?

ઉકેલ: કુલ ગુણ $= 25$

મેળવેલ ગુણ $= 18$

મેળવેલા ગુણનો (ગુણોત્તર) અપૂર્ણાંક $= \dfrac{18}{25}$

મેળવેલ ગુણ ટકામાં $= \dfrac{18}{25} \times \dfrac{4}{4} = \dfrac{72}{100} = 72\%$

બીજીરીતે :

મેળવેલ ગુણ ટકામાં $= \dfrac{18}{25} \times 100\% = 72\%$

ઉદાહરણ 8.2: દુકાનમાં $\dfrac{1}{4}$ ભાગમાં જોડા વળતરથી (કમીશન) થી વેચવા માટે રાખ્યા હતા. તો સામાન્ય કિંમતે વેચવા માટે કેટલા જોડો રહ્યા ?

ઉકેલ: કમીશનથી વેચવા માટેના કુલ જોડાનો અપૂર્ણાંક $= \frac{1}{4}$

સામાન્ય કિંમતે વેચવા માટેના કુલ જોડાનો અપૂર્ણાંક $= \frac{3}{4}$ $\left(1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\right)$

$= \frac{3}{4} \times \frac{25}{25} = \frac{75}{100} = 75\%$ અથવા $\frac{3}{4} \times 100\% = 75\%$

ઉદાહરણ 8.3 : વર્ગના 40 વિદ્યાર્થીઓ પૈકી 32 વિદ્યાર્થીઓએ વન ભોજન સાથેના પર્યટનમાં જવાનું નક્કી કર્યું તો કેટલા ટકા વિદ્યાર્થીઓએ વન ભોજન સાથેના પ્રર્યટનમાં જવાનું પસંદ કર્યું હતું.

ઉકેલ: વર્ગમાં કુલ વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા $= 40$

જે વિદ્યાર્થીઓએ પર્યટનમાં જવાનું નક્કી કર્યું તેમની સંખ્યા $= 32$

જે વિદ્યાર્થીઓએ પર્યટનમાં જવાનું નક્કી કર્યું તેમના ટકા

$$= \frac{32}{40} \times 100\% = 80\%$$

ઉદાહરણ 8.4: ARITHMETIC, શબ્દમાં અક્ષરોના કેટલા ટકા I છે ?

ઉકેલ: અક્ષરોની કુલ સંખ્યા $= 10$

I અક્ષરોની સંખ્યા $= 2$

I અક્ષરના ટકા $= \frac{2}{10} \times 100\% = 20\%$

ઉદાહરણ 8.5 : એસિડ અને પાણીના 80 લીટર મિશ્રણમાં 20 લીટર એસિડ છે તો મિશ્રણમાં કેટલા ટકા પાણી છે. ?

ઉકેલ: મિશ્રણનો કુલ જથ્થો $= 80$ લીટર

એસિડનો જથ્થો $= 20$ લીટર

પાણીનો જથ્થો $= 60$ લીટર

મિશ્રણમાં પાણીના ટકા $= \frac{60}{80} \times 100\% = 75\%$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 8.1

1. નીચેના દરેક અપૂર્ણાંક ટકામાં ફેરવો.

(a) $\frac{12}{25}$ (b) $\frac{9}{20}$ (c) $\frac{5}{12}$ (d) $\frac{6}{15}$ (e) $\frac{125}{625}$

(f) $\frac{3}{10}$ (g) $\frac{108}{300}$ (h) $\frac{189}{150}$ (i) $\frac{72}{25}$ (j) $\frac{1231}{1250}$

2. નીચેના દરેક ટકાને અપૂર્ણાંકમાં દર્શાવો.

(a) 53% (b) 85% (c) $16\frac{7}{8}\%$ (d) 3.425% (e) 6.25%

(f) 70% (g) $15\frac{3}{4}\%$ (h) 0.0025% (i) 47.35% (j) 0.525%

3. નીચેના દરેક દશાંશને ટકા તરીકે દર્શાવો.

(a) 0.97 (b) 0.735 (c) 0.03 (d) 2.07 (e) 0.8

(f) 1.75 (g) 0.0250 (h) 3.2575 (i) 0.152 (j) 3.0015

4. નીચેના દરેક ટકાને દશાંશમાં લખો.

(a) 72% (b) 41% (c) 4% (d) 125% (e) 9%

(f) 410% (g) 350% (h) 102.5% (i) 0.025% (j) 10.25%

5. ગુરપ્રિતે પરીક્ષામાં કુલ પ્રશ્નોના અડધા પ્રશ્નોના જવાબો સાચા લખ્યા તો તેણે કેટલા ટકા જવાબો સાચા લખ્યા ?

6. પ્રખરે 20 ગુણની કસોટીમાં 18 ગુણ મેળવ્યા તો તેણે કેટલા ટકા ગુણ મેળવ્યા ?

7. હરીશ રૂા.14400 ના માસિક પગારમાંથી રૂા.900 બતાવે છે તો તેની બચતના ટકા શોધો.

8. ચૂંટણીમાં એક ઉમેદવારને 47500 મત મળ્યા છતાં તે તેના હરીફ ઉમેદવારથી 5000 મતોના તફાવતથી હાર્યો (ચુંટણીમાં માત્ર બે જ ઉમેદવાર હતા. અને એક પણ મત રદ થયો નથી) તો વિજેતા ઉમેદવારને કેટલા ટકા મત મળ્યા ?

9. PERCENTAGE શબ્દમાં અક્ષરોના કેટલા ટકા E છે ?

10. 40 વિદ્યાર્થીઓના વર્ગમાં 10 વિદ્યાર્થીઓએ પ્રથમ વર્ગ મેળવ્યો, 15 વિદ્યાર્થીઓએ બીજો વર્ગ મેળવ્યો અને 13 જણાએ માત્ર લાયકાત મેળવી તો કેટલા ટકા વિદ્યાર્થીઓ નાપાસ થયા ?

8.4 સંખ્યાનાં અથવા મોટી માત્રાની સંખ્યાના (જથ્થાના) ટકાની ગણતરી

સંખ્યા અથવા જથ્થાના ચોક્કસ ટકા નક્કી કરવા માટે આપવો. પ્રથમ ટકાને અપૂર્ણાંકમાં કે દશાંશમાં ફેરવીએ છીએ પછી સંખ્યા અથવા જથ્થા વડે ગુણીએ છીએ.

90 ના 25% $= \frac{25}{100} \times 90 = 22.50$

અથવા 90 ના 25% $= 0.25 \times 90 = 22.50$

120 રૂપિયાના 60% $=0.60\times 120=72.00$ રૂપિયા

80 કિલોના 120 $=1.20\times 80=96$ કિલો

આપણે વ્યવહારિક જીવનનો કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 8.6: એક પરીક્ષામાં નીતુએ 62 % ગુણ મેળવ્યા જો પરીક્ષામાં કુલ 600 ગુણ હોય તો નીતુએ કુલ કેટલા ગુણ મેળવ્યા હશે ?

ઉકેલ: અહીં આપણે 600 ના 62 % શોધવાના છે.

600 ગુણના 62 % $= 0.62\times 600 = 372$ ગુણ

નિતુએ 372 ગુણ મેળવ્યા છે.

ઉદાહરણ 8.7 : નરેશ દર મહિને રૂા. 30800 કમાય છે તે 50 % ઘરખર્ચ માટે, 15 % વ્યક્તિગત ખર્ચ માટે, 20 % ખર્ચ તેના બાળકોના ખર્ચ માટે વાપરે છે અને બારીના બચાવે છે તો તે દર મહિને કેટલી રકમ બચાવે છે. ?

ઉકેલ: ઘરના કામ કામ માટેનું ખર્ચ $=50\%$

વ્યક્તિગત ખર્ચ $=15\%$

બાળકો માટેનો ખર્ચ $=20\%$

કુલ ખર્ચ $=(50+15+20)\%=85\%$

બચત $(100-85)\%=15\%$

રૂપિયા 30800 ના 15% $=$ રૂા. (0.15×30800)

$=$ રૂા. 4620

ઉદાહરણ 8.8: 360 ના કેટલા ટકા 144 થાય ?

ઉકેલ: ધારો કે $x\,\%=144$

$$\therefore \frac{x}{100}\times 360=144$$

અથવા $x=\frac{144}{360}\times 100=40\%$

જવાબ : 360 ના 40 % એટલે 144

બીજી રીતે : 360 માંથી 144 = અપૂર્ણાંક $\frac{144}{360}$

$$\text{ટકા} = \frac{144}{360}\times 100\% = 40\%$$

ઉદાહરણ 8.9: 120 ને ઘટાડીને 96 કર્યા છે તો ઘાટાડાના ટકા શોધો ?

ઉકેલ: અહીં ઘટાડો $= 120 - 96 = 24$

$$\text{ઘટાડાના ટકા} = \frac{24}{120} \times 100\% = 20\%$$

ઉદાહરણ 8.10: વસ્તુની કિંમત 450 થી વધીને 4 વડે થઈ તો કિંમત કેટલા ટકાનો વધારો થયો ?

ઉકેલ: કિંમતમાં થયેલો વધારો $=$ રૂા. $(495 - 450)$

$=$ રૂા. 45

$$\text{ટકામાં થયેલો વધારો} = \frac{45}{450} \times 100 = 10\%$$

ઉદાહરણ 8.11: વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા 60 % છે. જો શાળામાં કુલ 690 વિદ્યાર્થીની હોય, તો શાળા વિદ્યાર્થીઓની કુલ સંખ્યા શોધો. વળી શાળામાં છોકરાઓની સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ: ધારો કે શાળામાં કુલ વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા x છે.

તેથી, x ના $60\% = 690$

$$\therefore \frac{60}{100} \times x = 690 \text{ તેથી } x = \frac{690 \times 100}{60} = 1150$$

: શાળામાં કુલ વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા 1150 છે.

છોકરાઓની સંખ્યા $= 1150 - 690 = 460$

ઉદાહરણ 8.12: A ની આવક B ની આવક કરતાં 25 % વધારે છે. B ની આવક C ની અવક કરતાં 8% વધારે છે તો - ની આવક રૂા. 20250 હોય, તો C ની આવક શોધો.

ઉકેલ: ધારો કે C ની આવક x રૂપિયા છે.

B ની આવક $x + x$ % ના 8

$$= x + \frac{8x}{100} = \frac{108}{100} \times x$$

$$\text{A ની આવક} = \frac{108x}{100} + 25\% \text{ ના } \frac{108x}{100}$$

$$= \frac{108x}{100} \times \frac{125}{100}$$

$$\therefore \frac{108}{100} \times x \times \frac{125}{100} = 20250$$

અથવા $x = 20250 \times \frac{100}{108} \times \frac{100}{125} = 15000$

: C ની આવક રૂા. 15000 છે.

ઉદાહરણ 8.13: ચાની કિંમતમાં 10 % ઘટાડો થતાં એક વેપારી રૂા. 22500 માં 25 કિ.ગ્રા. થા વધુ ખરીદે છે તો ચાની પ્રતિ કિલોગ્રામ ચાલી ઘટાડેલી કિંમત કેટલી ? વખત પ્રતિ કિલોગ્રામ ચાની મૂળકિંમત શોધો.

ઉકેલ: 2250 ના 10 % $= \frac{10}{100} \times 22500 =$ રૂા. 2250

રૂા. 2250 ના કારણે 25 કિલોગ્રામ ચા વધારે મળે છે.

25 કિ.ગ્રા. ચાની ઘટાડેલી કિમત - રૂા. 2250

1 કિ.ગ્રા. ચાની ઘટાડેલી કિંમત $\frac{2250}{25}$ = રૂા. 90

ઘટાડો 10% હોવાથી મૂળ કિંમત = રૂા. 100 દર કિગ્રા

ઉદાહરણ 8.14: એક વિદ્યર્થીએ પ્રથમ પેપરમાં 45 % ગુણ મેળવ્યા અને બીજા પેપરમાં 70 % ગુણ મેળવ્યા. હવે કુલ ગુણના 60 % ગુણ મેળવવા માટે તેણે ત્રીજા પેપરમાં કેટલા ગુણ મેળવવા જોઈએ ?

ઉકેલ: ધારો કે દરેક પેપર 100 ગુણનું છે.

પ્રથમ પેપરમાં મેળવેલ ગુણ = 100 ના 45% = 45

બીજા પેપરમાં મેળવેલ ગુણ = 100 ના 70% = 70

ત્રણ પેપરના કુલ ગુણ = 3 x 100 = 300

તેણે કુલ ગુણના 60 % મેળવવાના છે.

$$= \frac{60}{100} \times 300 = 180$$

ત્રીજા પેપરમાં મેળવેલ ગુણ $= 180 - (45 + 70)$

$$= 180 - 115 = 65$$

ઉદાહરણ 8.15: એક રકમમાં 15 % વધારો થતાં તે રૂા. 19320 થાય છે તો મૂળ રકમ શોધો.

ઉકેલ: ધારો કે મૂળ રકમ x છે.

$x + x$ ના 15% = 19320

$$x + \frac{15x}{100} = 19320 \quad \frac{115x}{100} = 19320$$

$$\therefore x = \frac{19320 \times 100}{115} = 16800$$

જરૂરી રકમ $=$ રૂા. 16800.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 8.2

1. શોધો : (i) 16% ના 1250 (ii) 47% ના 1200
2. એક કુટુંબ માસિક રૂા. 7500 ના અંદાજપત્ર (બજેટ) ના 35 % ખર્ચ ખોરાક પાછળ ખર્ચે છે તો તે કુટુંબ ખોરાક પાછળ કેટલા રૂપિયા ખર્ચે છે ?
3. એક બગીચામાં 800 છોડવાઓ છે તે પૈકી 35 % વૃક્ષા, 20 % છોડવાઓ, 25 % દવા માટે વપરાતી વનસ્પતિ અને બાકીના વેલા છે તો દરેક પ્રકરના છોડવાઓની સંખ્યા શોધો.
4. જો 60 ઘટીને 45 થાય ત ો કેટલા ટકા ઘટાડો થયો ?
5. જો 80 ને વધારીને 125 કરીએ તો કેટલા ટકા વધારો થયો ?
6. રમણને પરીક્ષામાં પાસ થવા માટે ઓછામાં ઓછા 40 % ગુણ પ્રાપ્ત કરવા પડે. તે 178 ગુણ મેળવે છે અને 22 ગુણથી નાપાસ થાય છે તો કુલ ગુણ શોધો.
7. શાળાએ જવા માટે મતે 45 મિનિટ લાગે છે અને 80 % જેટલો સમય બસ મુસાફરી મા જાય છે તો બસ પ્રવાસમાં કેટલો સમય લાગે ?
8. બે ઉમેદવારો માટેની એક ચુંટણીમાં 2 % મતદારોએ મતદાન ન કર્યું. એક ઉમેદવારે થયેલા મતદાનના 40 % મત મેળવ્યા અને 900 મતથી હાર્યો. તો મતદારોની કુલ સંખ્યા શોધો.
9. ખાંડની કિંમતમાં 25 % વધારાથી એક વ્યક્તિને રૂા. 240 માં 1.5 કિગ્રા ખાંડ ઓછી ખરીદવાની ફરજ પડે છે તો ખાંડની કિલોગ્રામ દીઠ વધારેલી કિંમત તથા મૂળકિંમત શોધો.
10. એક સંખ્યા પ્રથમ 20 % વધારાય છે અને પછી 20 % ઘટાડાય છે તો ચોખ્ખા ઘટાડો શોધો ?
11. પ્રથમ સત્રાંત પરીક્ષામાં - ને 12 ગુણ મળ્યા અને 13 ને 10 ગુણ મળ્યા. બીજી સત્રાંત પરીક્ષામાં (કુલ સરખા ગુણવાળી) - ને 14 ગુણ મળ્યા અને - ને 12 ગુણ મળ્યા તો કયા વિદ્યાર્થીએ વધારે સુધારો કર્યો કહેવાય ?
12. એક સ્પર્ધામાં 30,000 વિદ્યાર્થીઓએ ભાગ લીધો. તેમાં 40 % છોકરીઓ અને બાકીના છોકરાઓ હતા. જો 10 % છોકરાઓએ અને 12 % છોકરીઓ ઈનામ સાથે વિજયી બની હોય તો જે વિદ્યાર્થીઓએ ઈનામ મેળવ્યાં છે તેમના ટકા શોધો.
13. સુનિલ, શૈલેશ કરતાં 10 % વધારે અને શૈલેશ સ્વામી કરતાં 20 % વધારે કમાય છે જો સ્વામી સુનિલ કરતાં રૂા. 3200 ઓછા કમાતો હોય, તો દરેકની કમાણી શોધો.

8.5 ટકાનાં ઉપયોજનો

ટકાની સંકલ્પનાનો ઉપયોગ કરવો પડતો હોય તેવી અસંખ્ય પરિસ્થિતિઓ રોજબરોજના જીવનનો આપણી સમક્ષ આવે છે. નીચેના વિભાગમાં વિવિધ ક્ષેત્રો જેવાં કે, નફા-ખોટના ફૂટ પ્રશ્નો, વળતર, સાદુવ્યાજ, ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ, વૃદ્ધિ અને ઘસારાનો દરમાં ટકાના ઉપયોજનની ચર્ચા કરીએ.

8.5.1 નફો- ખોટ

આપણે નફો અને ખોટને લગતાં પદો અને સૂત્રઓને યાદ કરીએ.

મૂળ કિંમત (મૂ.કિ.): વસ્તુ કે કિંમતે ખરીદાય તેને તેની મૂળ કિંમત કહે છે.

વેચાણ કિંમત (વે.કિ.): વસ્તુ જે કિંમતે વેચાય તેને તેની વેચાણ કિંમત કહે છે.

નફો : જ્યારે વે.કિ. > મૂ.કિ. ત્યારે નફો થાય છે.

$$\text{નફો} = \text{વે.કિ.} - \text{મૂ.કિ.}$$

ખોટ: જ્યારે મૂ.કિ. > વે.કિ. ત્યારે ખોટ થાય છે.

$$\text{ખોટ} = \text{મૂ.કિ} - \text{વે.કિ.}$$

નોંધ : નફાના ટકા કે ખોટના ટકા હંમેશા મૂળ કિંમત પર જ ગણાય છે.

$$\text{નફો}\ \% = \left(\frac{\text{નફો}}{\text{મૂ.કિ.}} \times ૧૦૦\right)\%, \qquad \therefore\ \text{નફો} = \frac{\text{નફાના}\ \% \times \text{મૂ.કિ.}}{૧૦૦}$$

$$\therefore\ \text{ખોટ} = \frac{\text{ખોટના}\ \% \times \text{મૂ.કિ.}}{૧૦૦}$$

$$\text{વેચાણ કિંમત} = \text{મૂળકિંમત} + \text{નફો}$$

$$\text{અથવા વે.કી.} = \left(\frac{૧૦૦ \times \text{નફાના ટકા}}{૧૦૦}\right) \times ૧૦૦$$

$$\text{મૂળ કિંમત} = \text{વે.કિ.} - \text{નફો}$$

$$= \frac{\text{વે.કી.} \times ૧૦૦}{(૧૦૦ + \text{નફો})} = \frac{\text{વે.કી.} \times ૧૦૦}{(૧૦૦ - \text{ખોટના ટકા})}$$

નફો અને ખોટને સંબંધિત ઉકેલવા આ સૂત્રોમાં ઉપયોજન દર્શાવતાં ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 8.16: છ દુકાનદાર એક વસ્તુ રૂા.360 માં લાવીને રૂા. 270 માં વેચે છે તો તેને કેટલા ટકા નફો કે ખોટ ગઈ ?

ઉકેલ: અહીં = મૂ.કિ. 360, અને વે.કિ. = 270

જ્યારે મૂ.કિ. > વે.કિ., :- ખોટ જાય.

ખોટ %

$$= \frac{90}{360} \times 100 = 25\%$$

ઉદાહરણ 8.17: સુધાએ એક મકાન રૂા. 4,52000 માં ખરીદ્યુ. તેને મરામત ખર્ચ (રિપેરિંગ ખર્ચ) 28,000 થયો. તેને મકાન 4,92,000 માં વેચવું પડ્યું તો તેને નફો થયો કે ખોટ તે ટકામાં શોધો.

ઉકેલ: અહીં મૂ.કિ. = મૂળ કિંમત + વ્યવસ્થા ખર્ચ (ખરાજાત) = પડતર કિંમત

પડતર કિંમત $= (452000 + 28000)$

$= 4,80,000$ રૂપિયા

વે.કિ. $= 4,92,000$

પ.કિ. > વે.કિ. તેથી નફો $= (492000 - 480000) =$ રૂા. 12000

નફો % $= \frac{12000 \times 100}{480000} = \frac{5}{2}\% = 2.5\%$

ઉદાહરણ 8.18: વેપારીને એક પુસ્તક રૂા. 258 માં વેચતાં 20 % નફો થાય છે જો તેને 30 % નફો જોઈતો હોય, તો તેણે તે પુસ્તક કેટલામાં વેચવું જોઈએ ?

ઉકેલ: વે.કિ. = રૂા. 258

નફો = 20%

મૂ.કિ. =

= રૂપિયા = રૂા. 215

હવે 30 % નફો લેવા માટે

વે.કિ. = = રૂા. = રૂા. 279.50

ઉદાહરણ 8.19: એક માણસે રૂા.100 માં 25 નારંગી ખરીદી અને તેમને રૂા.100 ની 20 નારંગીના ભાવે વેચી તો તેના નફા કે ખોટના ટકા શોધો.

ઉકેલ: 25 નારંગીની મૂ.કી. = રૂા. 100

1 નારંગીની મૂ.કિ. $=$ $=$ રૂા. 4

અને 1 નારંગીની વે.કિ. $= \frac{100}{20} =$ રૂા. 5

1 નારંગી પરનો નફો $= (5-4) =$ રૂા.1

નફો $\% = \frac{1}{4} \times 100 = 25\%$

ઉદાહરણ 8.20 : એક માણસે બે ઘોડા, દરેક પર 29700 રૂપિયાની કિંમતે વેચ્યા. એકમાં તેને 10 % ખોટ ગઈ અને બીજામાં તેને 10 % નફો થયો તો આ સોદામાં (ધંધામાં) તેના નફા કે ખોટના ટકા શોધો.

ઉકેલ: પહેલા ઘોડાની વે.કી. $=$ રૂા. 29700

ખોટ $= 10\%$

મૂ.કિ. $= \frac{29700 \times 100}{90} =$ રૂા. $33,000$

બીજા ઘોડાની વે.કી. $=$ રૂા. 29700,

નફો $= 10\%$

મૂ.કિ. $=$ $=$ રૂા. $27,000$

બંને ઘાડાની કુલ મૂ.કિ. (ખરીદ કિંમત)$= (33000 + 27000)$ રૂપિયા

$=$ રૂા. $60,000$

બંને ઘોડાની કુલ વે.કી. $= (29700 \times 2)$રૂપિયા $=$ રૂા. 59400

ચોખ્ખી ખોટ $= (60000 - 59400) =$ રૂા. 600

ખોટના ટકા $\% =$ $= 1\%$

ઉદાહરણ 8.21: 15 વસ્તુઓની મૂળકિંમત 12 વસ્તુોની વેચાણ કિંમત જેટલી છે તો આ વ્યવહારમાં નફો કે ખોટના ટકા શોધો.

ઉકેલ: 15 વસ્તુઓની મૂ.કિ. $= 15$ રૂપિયા

જે 12 વસ્તુની વેચાણકિંમત જેટલા છે.

12 વસ્તુની વે.કી. $= 15$ રૂપિયા

$$15 \text{ વસ્તુની વે.કી.} = \text{રૂા.}\ \frac{15}{12}\times 15 = \text{રૂા.}\frac{75}{4}$$

$$\text{નફો} = \text{રૂા.}\ \left(\frac{75}{4}-15\right) = \text{રૂા.}\ \frac{15}{4}$$

$$\text{નફાના } \% = \frac{15/4}{15}\times 100 = 25\%$$

તામારી પ્રગતિ ચકાસો 8.3

1. એક દુકાનદારે જથ્થાબંધ વેપારી પાસેથી એક કબાટ રૂા.4500 માં ખરીદ્યું અને રૂા.6000 માં વેચ્યું તો તેના નફા કે ખોટના ટકા શોધો.
2. એક છૂટક વેપારી રૂા.3800 માં કુલર ખરીદે છે તેને લાવવા અને રિપેર કરવાનો રૂા.200 ખર્ચવા પડે છે. જો તે કુલર રૂા.4400 માં વેચે તોતેના નફાના ટકા શોધો.
3. એક ફેરિયો રૂા.7 ના 5 લીંબુના ભાવે લીબું ખરીદે છે અને એક લીબું રૂા.1.5 ના ભાવે વેચે છે તો તેનો નફો ટકામાં શોધો.
4. એક માણસ રૂા. 5 માં 2 નારંગીના ભાવે કેટલીક નારંગી ખરીદી અને રૂા.8 ની 3 નારંગીના ભાવે વેચી. આ વ્યવહારમાં તેને રૂા.20 નો નફો થયો તો તેણએ ખરીદેલી કુલ નારંગીની સંખ્યા શોધો.
5. એક સાઈકલ રૂા.2024 માં વેચતાં, સાઈકલના વેપારીને 12 ટકા જાય છે. જો તે 12 % નફો મેળવવા ઈચ્છે તો તે સાઈકલની વેચણ કિંમત શી હશે ?
6. 45 નારંગી રૂા.160 માં વચતાં એક મહિલાને 20 % ખોટ જાય છે તેણે રૂા. 112 માં કેટલી નારંગી વેચવી જોઈએ, કે જેથી એકંદરે તેને 20 % નફો મળે ?
7. એક વેપારી બે મીશન કરેલ રૂા.2400 માં વેચે છે એક મશીન વેચતાં તેને 20 % નફો મળે છે અને બીજું મશીન વેચતાં તેને 20 % ખોટ જાય છે, તો વેપારીના નફા કે ખોટના ટકા શોધો.
8. હરીશ એક ટેબલ રૂા.960 માં ખરીદ્યુ અને 5 % નફો લઈને રમણને વેચ્યું. રમણે 10 % નફો લઈને મુકુલને વેચ્યુ. તો મુકુલે ટેબલ માટે આપેલી રકમ શોધો.
9. એક માણસ રૂા.5 માં 6 કેળાંના ભાવે કેટલાંક કેળાં ખરીદે છે અને તેટલાંજ કેળાં રૂા.15 ના ગઝનના ભાવે ખરીદે છે. તે બંને જથ્થાને ભેગાં કરે છે. અને રૂા.14 ના 50 % ના ભાવે વેચે છે તો આ સોદાનાં તેના નફા અથવા ખોટના ટકા શોધો.
10. 20 વસ્તુની વેચાણ કિંમત બરાબર 23 વસ્તુની મૂળ કિંમત હોય તો નફો કે ખોટના ટકા શોધો.

8.5.2 વળતર (વટાવ)

તમે નીચે પ્રકારની જાહેરાતનો ખાસ કરીને તહેવારોની ઋતુ દરમિયાન જોઈ હશે.

SALE સેલ	દિવાળીનો ખજાનો
50% સુધી વળતર	દરેક વસ્તુપર 20 % વળતર (કમીશન)

વળતરએ છાપેલી (અંકિત કિમત) કિંમતમાં ઘટાડો છે. 20 % વળતર એટલે વસ્તુની છાપેલી (અંકિત કરેલી) કિંમતમાં 20 % ઘટાડો. ઉહારહણ તરીકે જો વસ્તુની અંકિત કરેલી કિંમત રૂા.100 હોય અને તે રૂા. 80 માં વેચવામાં આવે એટલે કે અંકિત કરેલી કિંમતમાં રૂા.20 ઓછા. આપણે જે શબ્દોનો ઉપયોગ કરવાનો છે તેની વ્યાખ્યા આપીએ.

છાપેલી કિંમત : (અંકિત કિંમત) વસ્તુની છાપેલી કિંમત (અંકિત કરેલી કિંમત) એ એવી કિંમત છે જે કિંમતે વસ્તુ વેચાણની યાદીમાં મૂકવામાં આવે છે. આ કિંમત વસ્તુ ઉપર છાપવાળાં (લખવામાં આવે છે.) તેથી તેને છાપેલી કિંમત છે.

વળતર : વળતર એ વસ્તુની છાપેલી કિંમતમાં ઘટાડો.

વાસ્તવિક વેચાણ કિંમત :

વેચાણના વળતરના કિસ્સામાં વસ્તુની છાપેલી કિંમતમાંથી વળતરની કિંમત બાદ કરતાં વસ્તુની મળતી કિંમતને વાસ્તવિક વેચામ કિંમત આપવા વેચાણ કિંમત કહે છે.

તેના સ્પષ્ટીકરણ માટે આપણો કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 8.23 એક કોટની છાપેલી કિંમત 2400 રૂપિયા છે જો 12 % વળતર આપવામાં આવે તો તેની વેચાણ કિંમત શોધો.

ઉકેલ : કોટની છાપેલી કિંમત = રૂા.2400

વળતર = 12 %

વાસ્તવિક (ખરેખરી) વે.કી. = છાપેલી કિંમત - વળતર

$=$ રૂા. $2400 -$ રૂા. 2400 ના 12%

$$= 2400 - \left(\frac{12}{100} \times 2400\right)$$

$$= (2400 - 288)$$

$=$ રૂા. 2112

તેથી કોટની ખરેખરી વેચાણ કિંમત રૂા. 2112 છે.

ઉદાહરણ 8.24: રૂા. 8400 ની છાપેલી કિંમતનું મશીન રૂા, 6300 માં મળે છે તો વળતર ટકા શોધો.

ઉકેલ: મશીનની છાપેલી કિંમત = રૂા. 8400

વાસ્તવિકત વેચાણ કિંમત = રૂા. 6300

આપવામાં આવેલું વળતર = રૂા. $(8400 - 6300)$

$=$ રૂા. 2100

વળતર % $= \frac{2100}{8400} \times 100\% = 25\%$

નોંધ : વળતર હંમેશા છાપેલી કિંમત (અંકિત કરેલ કિંમત) ઉપર જ ગણવામાં આવેલ છે.

ઉદાહરણ 8.25: જથ્થા બંધ વેપારીના પંખાની છાપેલી કિંમત રૂા. 1250 છે. અને તે છૂટક વેપારીને 20 % વળતરથી મળે છે. તો નફો મેળવવા છૂટક વેપારીએ તે પંખો કેટલામાં વેચવો જોઈએ ?

ઉકેલ: છાપેલી કિંમત = રૂા. 1250

વળતર = 1250 ના 20%

$= \frac{20}{100} \times 1250 =$ રૂા. 250

છૂટક વેપારીની કિંમત = રૂા. $(1250 - 250)$

= રૂા. 1000

નફો = 15%

વેચાણ કિંમત $= \frac{\text{મૂ.કિ.} (100 + \text{નફો } \%)}{100}$

= રૂા. $\left(\frac{1000 \times 115}{100}\right)$

= રૂા. 1150

ઉદાહરણ 8.26: એક વેપારી તેના સામાન પર તેની મૂળ કિંમતમાં 25 % વધારીને કિંમત છાપે છે અને 10 % વળતક આપે છે તો તેના નફા-ખોટના ટકા શોધો.

ઉકેલ: ધારો કે વસ્તુની મૂળ કિંમત = 100 રૂપિયા

છાપેલી કિંમત = 100 + 100 ના 25%

= 125 રૂપિયા

વળતર = 10%

તેથી વાસ્તવિક વેચાણ કિંમત = 125 − 125 ના 10%

$= 125 - \left(\frac{10}{100} \times 125\right)$

= $(125 - 12.50)$ = રૂા. 112.50

નફો = રૂા. $(112.50 - 100)$ = રૂા. 12.50

$$\text{નફો \% માં} = \frac{12.50}{100} \times 100 = 12.5\%$$

ઉદાહરણ 8.27: રૂા. 5400 છાપેલી કિંમતની વસ્તુ 15 % વળતરથી વેચાય છે તહેવારોને કારણે વેપારી બીજું 5 % વળતર આપે છે. તો વસ્તુની વેચાણ કિંમત શોધો.

ઉકેલ: છાપેલી કિંમત = રૂા. 5400, વળતર = 15%

વેચાણ કિંમત = રૂા. 5400 − 5400 15%

$$= 5400 - \frac{15}{100} \text{ X } 5400$$

$$= (5400 - 810) = \text{રૂા. } 4590$$

હવે વેપારી 4590 રૂપિયા ઉપર 5 % વળતર આપશે.

વાસ્તવિક વેચાણ કિંમત = 4590 − 4590ના 5%

$$= 4590 - \frac{5}{100} \text{ X } 4590$$

$$= (4590 - 229.50)$$

$$= \text{રૂા. } 4360.50$$

વસ્તુની વાસ્તવિક વેચાણ કિંમત 4360.50.

ઉદાહરણ 8.28: એક છૂટક વેપારી જથ્થાબંધ વેપારી પાસેથી રૂા. 300 પ્રતિ (દર) પુસ્તક લખે કેટલાંક પુસ્તકો ખદીરે છે અને તે દરેક પુસ્તક પર રૂા. 400 કિંમત છાપે છે. તે કેટલુંક વળતર આપ્યા બાદ મૂળ કિંમત પર 30 % નફો મેળવે છે, તો તેના ગ્રાહકોને કેટલા ટકા વળતર આપે છે ?

ઉકેલ: પુસ્તકની મૂ.કિ. = રૂા. 300

છાપેલી કિંમત = ’400

નફો = 30%

$$\text{વેચાણ કિંમત} = \frac{\text{મૂ.કિ.(૧૦૦+ નફો ટકામાં)}}{\text{૧૦૦}}$$

=

= રૂા. 390

આપેલું વળતર = (400 − 390) = રૂા. 10

વળતર ટકામાં =

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 8.4

1. છાપેલી કિંમત રૂા. 375 નું શર્ટ 15 % વળતરથી વેચાયું તો તેની વાસ્તવિક વેચાણ કિંમત શોધો.
2. માંજાના એક જોડની અંકિત કિંમત (છાપેલી કિંમત) રૂા.60 છે. તેને રૂા. 48 માં વેચવાનાં છે તો આપેલા વળતરના ટકા શોધો.
3. એક વોશિંગ મશીન તેની છાપેલી કિંમતના 0 % વળતરથી વેચવામાં આવ્યું. રોકડા નાણા આપનારને બીજું ફરીથી 5 % વળતર આપવામાં આવ્યું જો વોશિંગ મશીનની છાપેલી કિંમત રૂા. 18,000 હોય તો તેની વેચાણકિંમત શોધો.
4. રૂા. 2800 છાપેલી કિંમતનું મશીન એક માણસ રૂા. 2100 માં ખરીદે છે તો આપેલા વળતરના ટકા શોધો.
5. એક ટેબલ ફેનની છાપેલી કિંમત રૂા.840 છે. અને 25 % વળતર છૂટક વેપારીને આપવામાં આવે છે. જો છૂટક વંપારી 15 % નફો મેળવવા માંગતો હોય તો એ ટેબર ફેન તેણે કેટલી કિંમતમાં વેચવો જોઈએ ?
6. એક દુકાનદાર તેના માલની કિંમત કરતાં 50 % વધુ કિંમત છાપે છે (અંકિત કરે છે.), અને 40 % વળતર આપે છે, તો તેના નફા કે ખોટના ટકા શોધો.
7. એક વેપારી રૂા.2500 છાપેલી કિંમતનું ટેબલ 28 % વળતરથી ખરીદે છે. તેને લાવવાનો ખર્ચ રૂા. 100 કરે છે અને 15 % નફાથી તે ટેબલ વેચે છે તો ટેબલની વેચાણ કિંમત શોધો.
8. એક છૂટક વેપારી ઉત્પાદક પાસેથી એક શર્ટના રૂા.175 લેખે (કેટલાંક) શર્ટ ખરીદે છે. અને દરેકની છાપેલી કિંમત 250 નક્કી કરે છે. તે થોડું વળતર આપ્યા બાદ 28 % નફો મેળવે છે તે તેના ગ્રાહકોને કેટલા ટકા વળતર આપે છે ?

8.5.3 સાદુ વ્યાજ :

જ્યારે વ્યક્તિને તેના મિત્રો, સગાઓ, બેંક વગેરે પાસેથી લોન તરીકે નાણાં ઉછીનાં લેવાં પડે તે, નાણાં ધીરનારને નાણાં વાપરવાના બદલામાં કેટલાક વધારાના નાણાં સાથે ચોક્કસ સમય પછી નાણાં પાછા આપવાનું વચન આપે છે.

ઉછીના લીધેલા નાણાંને મુદલ કહે છે. અને તેને 'P' તરીકે દર્શાવાય છે. અને વધારાનાં ચુકવેલ નાણાંને વ્યાજ કહે છે જે સામાન્ય રીતે 'I' (આઈ) તરીકે દર્શાવાય છે.

પાછા આપેલા કુલ નાણાં જે મુદ્દલ અને વ્યાજનો સરવાળો છે તેને વ્યાજ મુદ્દલ (રાશ) કહેવાય છે. જે સામાન્ય રીતે 'A' તરીકે દર્શાવાય છે.

આપ, $A = P + I$

વ્યાજ મહદઅંશે એક વર્ષના ટકાના દરે અભિવ્યક્ત થાય છે. વ્યાજનો આધાર તેણે કેટલા નાણાં (P) અને કેટલા સમય માટે (T) (કે જે સમય માટે તેણે નાણાં વાપર્યાં છે) ઉછીના લીધાં છે તેના પર છે.

પ્રતિ વર્ષના વ્યાજના દરની પરસ્પરની સહમતીથી વ્યાજ ગણવામાં આવે છે. વ્યાજના દરને

'R' તરીકે દર્શાવાય છે. R એટલે $R = r\,\% = \frac{r}{100}$

આમ વ્યાજ =મુદ્દલ x વ્યાજનો વાર્ષિક દર x સમય

$$I = P \times R \times T$$

આ પ્રમાણે ગણનું વ્યાજ સાદું વ્યાજ ગણાય છે.

સાદા વ્યાજને લગતા આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 8.29: નીચેના દરેક કિસ્સામાં સાદું વ્યાજ શોધો.

	P	R	T
(a)	રૂ. 8000	5%	2 yrs
(b)	રૂ. 20,000	15%	$1\frac{1}{2}$ yrs

ઉકેલ: (a) $I = P.\ R.\ T.$

$$= \text{રૂ. } \left[8000 \times \frac{5}{100} \times 2\right] = \text{રૂ. } 800$$

(b) $$I = \text{રૂ. } \left[20000 \times \frac{15}{100} \times \frac{3}{2}\right] = \text{રૂ. } 4500$$

ઉદાહરણ 8.30: સાદા વ્યાજે 500 રૂપિયાનું મુદ્દલ ત્રણ વર્ષમાં 6050 થાય છે તે વ્યાજનો દર (પ્રતિવર્ષ) શોધો.

ઉકેલ: અહીં $A =$ રૂ. 6050, $P =$ રૂ.5000, $T = 3$ yrs

$$I = \text{રૂ. } (6050 - 5000) = \text{રૂ. } 1050$$

$I = P \times R \times T$ અથવા $r\% = \frac{I}{P \times T}$ $\qquad \therefore r = \frac{I \times 100}{P \times T}$

$$r = \frac{1050 \times 100}{5000 \times 3} = 7 \qquad R = 7\ \%$$

ઉદાહરણ 8.31: કોઈ એક રકમ પ્રતિવર્ષના $\frac{1}{2}$ % ના સાદા વ્યાજના દરે 4 વર્ષમાં રૂ.4875 થાય છે તો તે રકમ શોધો.

ઉકેલ: અહીં = રૂ. 4875, $R = 12\frac{1}{2}\% = \frac{25}{2}\%$, $T = 4$ yrs

$$I = P \times R \times T$$

$$I = \left(P \times \frac{25}{200} \times 4\right) = \text{રૂ. } \frac{P}{2}$$

$$A = \text{રૂ. } \left(P + \frac{P}{2}\right) = \text{રૂ. } \frac{3P}{2}$$

આમ, $\frac{3P}{2} = 4875$ અથવા $3P = 9750$ અથવા

$P =$ 3250 રૂપિયા

ઉદાહરણ 8.32: 2000 રૂપિયાનું પ્રતિવર્ષ 14 % લેખે કેટલા વર્ષમાં સાદુ વ્યાજ વ્યાજ ?

ઉકેલ: અહીં $P =$ રૂ. 2000, $I =$ રૂ. 560 $R = 14\%$

$$I = P \times R \times T$$

$$560 = 2000 \times \frac{14}{100} \times T$$

$$\therefore T = \frac{560 \times 100}{2000 \times 14} = 2 \text{ વર્ષ}$$

$\frac{P\times R\times 4}{100} + P$ $225 = \frac{P\times R\times 3}{100}$ or $\frac{P\times R}{100} = 75$

ઉદાહરણ 8.33: કોઈ એક રકમ પ્રતિવર્ષ સાદા વ્યાજના દરે ચાર વર્ષમાં રૂ. 1300 થાય છે અને 7 વર્ષમાં 1525 થાય છે તો તે રકમ અને વ્યાજદર શોધો.

ઉકેલ: અહીં $1300 =$ ...(1)

અને $1525 =$ ...(2)

સ.ક. (2) માં (1) બાદ કરતાં

75 કિંમતને સ.ક. (1) માં મૂકતાં

$$1300 = 75 \times 4 + P$$

$= \text{રૂ. } (1300 - 300) = \text{રૂ. } 1000$

ફરીથી આપણી પાસે $\frac{P\times R}{100} = 75$ or $R = \frac{75\times 100}{P} = \frac{75\times 100}{1000} = 7.5\%$

તેથી મુદ્દલ = રૂા. 1000 અને વ્યાજનો દર = 7.5%

બીજી રીતે ગણતાં :

4 વર્ષનું વ્યાજ મુદ્દલ = રૂા. 1300

7 વર્ષનું વ્યાજ મુદ્દલ = રૂા.1525

3 વર્ષનું વ્યાજ = રૂા. $(1525 - 1300)$

I વર્ષનું વ્યાજ = રૂા. 225

$1300 = P + PR4 = P + 4 \times 75$ વર્ષ

P = રૂા. (1300 – 300) = 1000 રૂપિયા

R =

ઉદાહરણ 8.34: *કોઈ એક રકમ સાદા વ્યાજે 10 વર્ષમાં બમણી થાય તો તે રકમ તેટલા જ સાદા વ્યાજના દરે કેટલા વર્ષમાં અઢીગણી (રફ) થાય.*

ઉકેલ: ધારોકે મુદ્દલ = રૂા. 100,

T = 10 વર્ષ, A = રૂા. 200, I = રૂા. 100

હવે, P = રૂા. 100, R = 10% , A = રૂા. 250 : I = રૂા. 150

$$\therefore T = \frac{150}{120} = 15 \text{ વર્ષ}$$

ઉદાહરણ 8.35: *રૂા. 70,000 ના રોકાણમાંથી રૂા.30,000 વર્ષ 4 % ના દરે 1 વર્ષ માટે અને રૂા. 20,000/- 3% ના દરે 1 વર્ષ માટે રોકે છે. જો તેને કુલ રોકાણ પર 5 % વ્યાજ મેળવવું હોય, તો બાકીની રકમ કેટલા ટકાના વ્યાજે રોકવી જોઈએ ?*

ઉકેલ: 5% ના દરે રૂા. 70,000 નું 1 વર્ષનું વ્યાજ

$$= 70{,}000 \times \frac{5}{100} \times 1 = \text{રૂા. } 3500$$

4% લેખે રૂા.30,000 નું 1 વર્ષનું વ્યાજ $= 30000 \times \frac{4}{100} \times 1$

$=$ રૂા. 1200

3% લેખે રૂા. 20,000 નું 1 વર્ષનું વ્યાજ $= 20000 \times \frac{3}{100} \times 1$

$=$ રૂા. 600

બાકીના રકમનું વ્યાજ $= 3500 - 1200 - 600$

$=$ રૂા. 1700

બાકીની રકમ રૂા.20,000 છે.

$$\therefore 1700 = 20000 \times \frac{R}{100} \times 1$$

અથવા $R = \frac{1700 \times 100}{20000} = \frac{17}{2} = 8.5\%$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 8.5

1. રમા પોતાની બહેનપણી પાસેથી રૂા. 14,000 પ્રતિવર્ષે 8 % ના દરે ઉછીના લે છે. તે 2 વર્ષ પછી નાણાં પરત કરે છે તો તેણે કુલ કેટલાં નાણાં (રકમ) પાછા આપવાં પડે.
2. રમેશ એક કંપનીમાં પ્રતિવર્ષે 8 % ના સાદા વ્યાજના દરે રૂા.15,000 રોકે છે તો ત્રણ વર્ષ પછી તેને કેટલું વ્યાજ મેળશે તો શોધો.
3. નવીન રૂા.25,000 તેના બે મિત્રોને ઉછીના આપે છે તેણે એતક મિત્રને પ્રતિવર્ષ 10 % લેખે રૂા. 10,000 ધીર્યા અને બાકીની રકમ બીજા મિત્રને પ્રતિવર્ષ રૂા. 12 % લેખે ધીરે તો 2 વર્ષને અંતે તેને કેટલું વ્યાજ મળ્યું હશે ?
4. શાલીનીએ એક ફાઈનાન્સ કંપનીમાં રૂા. 29,000 ત્રણ વર્ષ માટે રોક્યા અને તેને (ત્રણ વર્ષના અંતે) 38570 રૂપિયા મળ્યા તો પ્રતિવર્ષ સાદા વ્યજનો દર શું હતો ?
5. પ્રતિવર્ષ 10 % ના દરે કેટલા વર્ષ પછી રકમનું સાદુ વ્યાજ તેના (મુદ્દલના) $\frac{2}{5}$ જેટલું થાય ?
6. કેટલા ટકાના દરે 5 વર્ષના અંતે મુદ્દલનું સાદું વ્યાજ મુદ્દલ કરતાં અડધું થાય ?
7. કોઈ એક રકમનું 3 વર્ષના અંતે વ્યાજ મુદ્દલ રૂા.1265 થાય છે અને 6 વર્ષના અંતે રૂા.1430 થાય છે તો સાદા વ્યજનો દર અને મુદ્દલ શોધો.

8. રૂા. 75,000 ના રોકાણમાંથી પ્રતિવર્ષ 5 % ના દરે રૂા.30,000 રોક્યા અને પ્રતિવર્ષ 5 % ના દરે રૂા.24,000 એક વર્ષ માટે રોક્યા. હવે જો તેને કુલ રકમ પર 6 % પ્રતિવર્ષ વ્યાજ મેળવ્યું હોય, તો બચેલી રકમ પ્રતિવર્ષ કેટલા વ્યાજના દરથી રોકવી પડે.

9. કોઈ રકમ 8 વર્ષમાં બમણી થાય છે તો તે જ વ્યાજના દરે કેટલા વર્ષમાં 4 ગણી થાય.

10. કયા કિસ્સામાં વ્યાજ વધુ મળે ?

(અ) રૂા.5,000 પ્રતિવર્ષ 4 % ના દરે 5 વર્ષ માટે રોક્યા.

(બ) રૂા.4,000 પ્રતિવર્ષ 5 % ના દરે 6 વર્ષ માટે રોક્યા ?

8.5.4 ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ

અગાઉના વિભાગમાં તમે સાદા વ્યાજ વિશે શીખી ગયા છો. જ્યારે સમગ્ર સમય દરમિયાન લોનનું વ્યાજ એક જ મુદ્દલ પર ગણવામાં આવે તેને સાદું વ્યાજ કહેવાય છે.

અને તે નીચેના સૂત્રથી મળે છે.

$I = P \times R \times T$

પંરતુ જો આ વ્યાજ નિશ્ચિત સમયગાળા દરમિયાન ચુકવાયું ન હોય, તો તે મુદ્દલનો ભાગ બની જાય છે અને તેથી બીજા સમય ગાળા માટે તેને મુદ્દલમાં ઉમેરવામાં આવે છે. અને બીજા સમયગાળાનું વ્યાજ આ નવા મુદ્દલ ઉપર ગણવામાં આવે છે. આ રીતે ગણેયેલું વ્યાજ ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ કહેવાય છે, જે સમયગાળા પછી વ્યાજ, બીજા વર્ષના મુદ્દલ માટે મુદ્દલમાં ઉમેરાતું હોય તે સમયને રૂપાંતરણ માટેનો સમય કહેવાય છે.

રૂપાંતરણ માટેનો સમયગાળો એકવર્ષ, છ માસ કે ત્રણ માસનો કે ત્રિમાસિક સંયોજિત કરવાનું હોય, તેમ કહેવાય છે.

ચાલો આપણે એક ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 8.36: રૂા. 2000 નું 2 વર્ષનું 10 % ના વાર્ષિક દરે ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ શોધો. વ્યાજ વાર્ષિક સંયોજાય છે. (વાર્ષો વર્ષ ઉમેરાય છે)

ઉકેલ: અહીં P = રૂા. 2000 અને R = 10%

$$\text{પહેલા વર્ષનું વ્યાજ} = \text{રૂા. } 2000 \times \frac{10}{100} \times 1 = \text{રૂા. } 200$$

$$\text{બીજા વર્ષ માટેનું મુદ્દલ} = (2000 + 200) \text{ રૂપિયા}$$

$$= 2200 \text{ રૂપિયા}$$

$$\text{બીજા વર્ષનું (બીજા સમયગાળાનું) વ્યાજ} = 2200 \times \frac{10}{100} \times 1$$

$$= 220 \text{ રૂપિયા}$$

બે વર્ષે ચુકવવાની રકમ (વ્યાજ મુદ્દલ) $=$ રૂા. $(2200+220)$

$=$ રૂા. 2420

બે વર્ષના અંતે ચુકવવાનું વ્યાજ $=$ રૂા. $(2420-2000)$

$=$ રૂા. 420

અથવા રૂા. $(200+220)=$ રૂા. 420

ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ $=$ રૂા. 420

આમ, ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ ગણવા માટે રૂપાંતર સમયગાળા બાદ ન ચુકવાયેલું વ્યાજ મુદ્દલમાં ઉમેરાય છે અને પછી આ નવા મુદ્દલ પ્રમાણએ બીજા સમયગાળાનું (બીજા વર્ષનું) વ્યાજ ગણવામાં આવે છે.

8.5.4.1 ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજનું સૂત્ર

ધારો કે P મુદ્દલ n વર્ષ માટે r % વાર્ષિક દરે ઉછીના લેવામાં આવે છે. આ પરિસ્થિતિમાં

પ્રથમ વર્ષ માટેનું વ્યાજ $= P\times\frac{r}{100}\times 1=\frac{Pr}{100}$

1 વર્ષ બાદ રકમ $=$ બીજા વર્ષ માટેનું મુદ્દલ $= P+\frac{Pr}{100}$

$$=P\left(1+\frac{r}{100}\right)$$

બીજા વર્ષ માટેનું વ્યાજ $= P\left(1+\frac{r}{100}\right)\times\frac{r}{100}\times 1=\frac{Pr}{100}.\left(1+\frac{r}{100}\right)$

બે વર્ષ બાદ રકમ $= P\left(1+\frac{r}{100}\right)+\frac{Pr}{100}\left(1+\frac{r}{100}\right)=P\left(1+\frac{r}{100}\right)\left(1+\frac{r}{100}\right)$

$$=P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

તેવી જ રીતે ત્રણ વર્ષ બાદ રકમ $= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^3$ તો આ પ્રમાણે આગળ.

n વર્ષ પછી રકમ $= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$

જો A રકમ દર્શાવે અને R, r % અથવા $\frac{r}{100}$, દર્શાવે તો

$$A = P(1+R)^n = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

અને ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ $= A - P = P(1+R)^n - P$

$= P[(1+R)^n - 1]$ અથવા

$$P\left[\left(1+\frac{r}{100}\right)^n - 1\right]$$

નોંધ : પ્રથમ વર્ષ માટે સાદુ વ્યાજ અને ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ સરખાં હોય છે. (પ્રથમ વર્ષ એટલે સંયોજિત ગાળા દરમિયાન)

ઉદાહરણ 8.37: રૂા. 20,000 નું 3 વર્ષનું 5 % ના વાર્ષિક દરે ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ શોધો. (વ્યાજ વર્ષે, વર્ષે ઉમેરાય છે.)

ઉકેલ: અહીં. $P =$ રૂા. 20,000, $R = 5\%$ અને $n = 3$

ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ $= P[(1+R)^n - 1]$

$$= \text{રૂા. } 20000\left[\left(1+\frac{5}{100}\right)^3 - 1\right]$$

$$= \text{રૂા. } \left[\left(\frac{21}{20}\right)^3 - 1\right]$$

$$= \text{રૂા. } 20000 \times \left[\frac{9261-8000}{8000}\right]$$

$= 3152.50$ રૂપિયા

ઉદાહરણ 8.38: રૂા. 20,000 નું $1\frac{1}{2}$ વર્ષનું 10 % ના વાર્ષિક દરે ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ શોધો. (વ્યાજ અર્ધવાર્ષિક સંયોજાય છે.)

ઉકેલ: અહીં $P =$ રૂા. 20,000, $R = 10\%$ વાર્ષિક દર

$= 5\%$ અર્ધવાર્ષિક વ્યાજદર

અહીં $n = 1\frac{1}{2}$ વર્ષ $= 3$ અર્ધવાર્ષિક (અડધા વર્ષ)

ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ $= P[(1+R)^n - 1] =$

$$= \text{રૂ. } 20,000\left[\left(1+\frac{5}{100}\right)^3 - 1\right]$$

$$= \text{રૂ. } 20,000\left[\left(\frac{100+5}{100}\right)^3 - 1\right]$$

$$= \text{રૂ. } 20,000\left[\left(\frac{105}{100}\right)^3 - 1\right]$$

$$= \text{રૂ. } 20,000\left[\left(\frac{21}{5}\right)^3 - 1\right]$$

$$= \text{રૂ. } 20,000\left[\frac{9261}{8000} - 1\right]$$

$$= \text{રૂ. } 20,000\left[\frac{1261}{8000}\right]$$

$$= \text{રૂ. } 20,000 \times \frac{1261}{8000} = \frac{5 \times 1261}{2} = \frac{6305}{2} \text{ રૂપિયા}$$

$= \text{રૂ. } 3152.50$

ઉદાહરણ 8.39: *રૂ. 20,000 નું 9 માસનું 4 % ના વાર્ષિક દરે ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ શોધો. વ્યાજ ત્રિમાસિક સંયોજાય છે.*

ઉકેલ: P = 20,000, R = 4% *પ્રતિવર્ષ*

$= 1$ *% ચાર માસિક*

n = 9 *માસ* $= 3/4$ *વર્ષ* $= 3$ *ચાર માસ*

$$\text{ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ} = P[(1+R)^n - 1] = 20,000\left[\left(1+\frac{1}{100}\right)^3 - 1\right]$$

$$= 20,000 \times \left[\left(\frac{101}{100}\right)^3 - 1\right]$$

$$= 20,000 \left[\frac{1,30,301 \times 1,00,000}{100 \times 100 \times 100}\right]$$

$$= \frac{20000 \times 30301}{100 \times 100 \times 100}$$

$$=$$

$= 606.02$ રૂપિયા

ઉદાહરણ 8.40: રૂા. 12,000 નું $1\frac{1}{2}$ વર્ષનું 10 % ના વાર્ષિક દરે વ્યાજ મુદ્દલ શોધો. વ્યાજ સંયોજાય છે.

ઉકેલ: અહીં $P = 12000$, $R = 10\%$ $n = 1\frac{1}{2}$ વર્ષ

વ્યાજ વાર્ષિક સંયોજાય છે તેથી 1 વર્ષના અંતે મળતી રકમ (વ્યાજ મુદ્દલ) નીચે પ્રમાણે શોધી શકાય.

$$A = P\left(1 + \frac{R}{100}\right)^1 = 12000 \times \left(1 + \frac{10}{100}\right)^1$$

$= $ રૂા. $12000 \times \frac{11}{10}$

$= $ રૂા. 13200

ત્યાર પછીના 6 માસ માટેનું મુદ્દલ $=$ રૂા. 13200

અને વ્યાજનો દર 10 % વાર્ષિક $=$ 5 % અર્ધવાર્ષિક માટે

$$A = 13200\left(1 + \frac{5}{100}\right)^1$$

$= 13200 \times \frac{21}{20}$ રૂાપિયા

$= 13860$ રૂાપિયા

$1\frac{1}{2}$ વર્ષ પછીની રકમ (વ્યાજ મુદ્દલ) $=$ રૂા. 13860

ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ $= A - P$

$= [13860 - 12000]$

$= 1860$ રૂપિયા

નોંધ : આપણે $1\frac{1}{2}$ વર્ષ પછીનું વ્યાજ મુદ્દલ નીચે પ્રમાણે પણ ગણી શકીએ.

$$A = 12000\left(1+\frac{10}{100}\right)^1\left(1+\frac{5}{100}\right)^1$$

ઉદાહરણ 8.41: રૂા. 15625 મુદ્દલ 3 વર્ષમાં રૂા. 17576 થાય છે તો વ્યાજનો દર શોધો. વ્યાજ વાર્ષિક સંયોજાય છે ?

ઉકેલ: $A =$ રૂા. 17576, $P =$ રૂા. 15,625 અને $n = 3$

ધારો કે $R = r\%$ પ્રતિવર્ષ

$$\therefore 17576 = 15625\left(1+\frac{r}{100}\right)^3$$

$$\therefore \left(1+\frac{r}{100}\right)^3 = \frac{17576}{15625} = \left(\frac{26}{25}\right)^3$$

$$\therefore \left(1+\frac{r}{100}\right) = \frac{26}{25} \text{ or } \frac{r}{100} = \frac{26}{25} - 1 = \frac{1}{25}$$

અથવા $r = \frac{100}{25} = 4$

$r = 4\%$ વ્યાજનો દર 4 % પ્રતિવર્ષ

ઉદાહરણ 8.42: રૂા. 8000 મુદ્દલ વાર્ષિક દર 10 % ના દરે રૂા. 9261 થાય છે તો સમયગાળો શોધો. વ્યાજ અર્ધવાર્ષિક સંયોજાય છે. ?

ઉકેલ: $A =$ રૂા. 9261, $P =$ રૂા. 8000 અને $n = x$ છ માસિક

$R = 10\%$ વાર્ષિક $= 5\%$ અર્ધ વાર્ષિક

$$\therefore 9261 = 8000\left(1+\frac{5}{100}\right)^x$$

$$\text{અથવા } \frac{9261}{8000} = \left(\frac{21}{20}\right)^x \text{ or } \left(\frac{21}{20}\right)^3 = \left(\frac{21}{20}\right)^x \quad \therefore x = 3$$

$$\text{સમય} = 3 \text{ અર્ધવર્ષ} = 1\frac{1}{2} \text{ વર્ષ}$$

ઉદાહરણ 8.43: રૂા. 2400 ના વાર્ષિક 4 % લેખે $1\frac{1}{2}$ વર્ષ માટે સાદા અને ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજનો તફાવત શોધો. વ્યાજ અર્ધવાર્ષિક સંયોજાય છે.

ઉકેલ: અહીં P = રૂા. 24000, R = 4% વાર્ષિક

$T = \frac{3}{2}$ વર્ષ $\qquad$ R = 2% અર્ધવાર્ષિક

= 3 છ માસિકગાળા

$$\text{સાદુ વ્યાજ} = P \times R \times T = \text{રૂા. } 24000 \times \frac{4}{100} \times \frac{3}{2}$$

$$= \text{રૂા. } 1440.$$

$$\text{ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ માટે}, \; A = P\left[\left(1 + \frac{R}{100}\right)^n\right]$$

$$A = 24000\left[\left(1 + \frac{2}{100}\right)^3\right]$$

$$A = 24000\left[\left(\frac{51}{50}\right)^3\right] = 24000\left[\frac{51}{50} \times \frac{51}{50} \times \frac{51}{50}\right]$$

$$= \frac{24 \times 51 \times 51 \times 51}{125} \text{ રૂપિયા}$$

= રૂા. 25468.99 = રૂા. 25469

ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ = રૂા. [25469 – 24000] = રૂા. 1469

તફાવત = ચ. વ્યાજ − સાદું વ્યાજ

= 1469 − 1440

= રૂા. 29

ઉદાહરણ 8.44: *અમુક રકમ -- વર્ષ માટે પ્રતિવર્ષે 4 % ના દરે ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજે રોકવામાં આવે છે. વ્યાજ વાર્ષિક સંયોજાય છે. જો વ્યાજ અર્ધવાર્ષિક સંયોજાય, તો અગાઉના કિસ્સા કરતાં રૂા. 20.40 વધારે મળત, તો રકમ શોધો.*

ઉકેલ: *ધારો કે રકમ રૂા.* x *છે.*

ઉઁlli R = 4% *વાર્ષિક અથવા* 2% *અર્ધ વાર્ષિક ગાળા માટે*

T = 1 *વર્ષ* = 3 *અર્ધ વાર્ષિક ગાળા*

પ્રથમ કિસ્સામાં

$$A = x\left[1+\frac{4}{100}\right]^1\left[1+\frac{2}{100}\right]^1$$

$$= x\left(\frac{26}{25}\right)\left(\frac{51}{50}\right) = \frac{1326\,x}{1250}$$

બીજા કિસ્સામાં

$\frac{1}{2}$

$$A = x\left(1+\frac{2}{100}\right)^3 = x\left(\frac{51}{50}\right)^3$$

$$= \frac{132651}{125000}$$

$$\text{તફાવત} = \left[\frac{132651}{125000}x - \frac{1326}{1250}x\right]$$

$$= \frac{51x}{125000}$$

$$\therefore \frac{51x}{125000} = \frac{2040}{100} \text{ or } x = \text{રૂા. } \frac{2040}{100}\times\frac{125000}{51} = \text{રૂા. } 5000$$

રકમ (મુદ્દલ)= રૂા. 50,000

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 8.6

1. રૂા. 15625 નું 3 વર્ષનું પ્રતિવર્ષ 4 % ના દરે ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજની ગણતરી કરો.
2. રૂા. 15625 નું -- વર્ષનું પ્રતિવર્ષ 8 % ના દરે ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ શોધો. વ્યાજ અર્ધવાર્ષિક થાય છે.
3. રૂા. 1600 નું 9 માસનું પ્રતિવર્ષ 20 % ના દરે ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ ની ગણતરી કરો. વ્યાજ દર ચાર માસે ઉમેરાય છે.
4. કોઈ એક રકમ 3 વર્ષમાં વાર્ષિક 5 % ના દરે રૂા. 27783 થાય છે. વ્યાજ વાર્ષિક સંયોજાય છે. તો તે રકમ શોધો.
5. રૂા.30,000 મુદ્દલના 3 વર્ષ માટે પ્રતિવર્ષ 10 % લેખે સાદા વ્યાજ અને ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજનો તફાવત શોધો. વ્યાજ વાર્ષિક સંયજાય છે.
6. અમુક રકમના 8 % વાર્ષિક દરે $\frac{1}{3}$ વર્ષના સાદા અને ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજનો તફાવત રૂા. 228 છે. વ્યાજ અર્ધવાર્ષિક સંયોજાય છે, તો રકમ શોધો.
7. અમુક રકમ વાર્ષિક 20 % ના દરે 9 % માસ માટે ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજે રોકવામાં આવે છે. વ્યાજ અર્ધવાર્ષિક સંયોજાય છે. જો વ્યાજ ત્રઈમાસિક સંયોજાતું હોય, તો તેને અગાઉના કિસ્સા કરતાં રૂા.210 વધારે મળત તો, રકમ શોધો.
8. રૂા. 15625 મુદ્દલ વાર્ષિક 8 % ના દરે ગણાતાં રૂા.17576 થાય છે. વ્યાજ અર્ધવાર્ષિક ગણાય છે. તો સમયગાળો શોધો.
9. રૂા. 4000 નું 9 મહિનામાં ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ રૂા.630.50 થાય છે. વ્યાજ ત્રિમાસિક ઉમેરાય છે તો વ્યાજનો દર શોધો.
10. અમુક રકમ (મુદ્દલ) 2 વર્ષમાં 17640 રૂપિયા થાય છે. અને તે જ વ્યાજનો દરે 3 વર્ષમાં 18522 રૂપિયા થાય વ્યાજ વાર્ષિક સંયોજાય છે તો મુદ્દલ વાર્ષિક વ્યાજ દર શોધો.

8.5.5 વૃદ્ધિ અને ઘસારાનો દર :

આપણા રોજબરોજના જીવનમાં આપણો વસ્તી, વનસ્પતિ, વાઈરસ (વિષાણુ) વગેરેની વૃદ્ધિ તેમજ મશીનરી, કાર, ઉત્પાદન, મોટર સાઈકલ વગેરેની કિંમતમાં ઘટાડો આપણે જાણીએ છીએ.

વૃદ્ધિ અને ઘસારાને લગતી સમસ્યાઓનો ઉકેલ ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજનું સૂત્ર વાપરીને ઉકેલી શકાય છે. જે સૂત્ર આપણે અગાઉના વિભાગમાં તારવ્યું છે.

જો V એ વસ્તુની પ્રારંભની કિંમત હોય અને

Vn એ તેની n રૂપાંતરણ સમયગાળા પછીની કિંમત હોય.

r % વૃદ્ધિ અને ઘસારાના અમુક સમયગાળાનો દર બતાવતો હોય

તો આપણે લખી શકીએ કે,

$$V_n = V_o\left(1+\frac{r}{100}\right)^n \text{ વૃદ્ધિના કિસ્સામાં}$$

$$V_n = V_o\left(1-\frac{r}{100}\right)^n \text{ ઘસારાના કિસ્સામાં}$$

જો વૃદ્ધિ અને ઘસારાનો દર રૂપાંતર સમયગાળા દરમિયાન બદલાતો હોય, તો Vn નીચેના સૂત્રથી મળે.

$$\text{વૃદ્ધિ માટે } V_n = V_o\left(1+\frac{r_1}{100}\right)\left(1+\frac{r_2}{100}\right)\left(1+\frac{r_3}{100}\right)....$$

$$\text{ઘસારા માટે } V_n = V_o\left(1-\frac{r_1}{100}\right)\left(1-\frac{r_2}{100}\right)\left(1-\frac{r_3}{100}\right)....$$

ઉપરની સંકલ્પનાને સ્પષ્ટ કરતાં કેટલાંક ઉદાહરણો આપણે જોઈએ.

ઉદાહરણ 8.45: એક નગરની વસ્તી 9765625 છે. જો વસ્તીનો વૃદ્ધિ દર વાર્ષિક 4 % હોય, તો 3 વર્ષ પછી તેની વસ્તી કેટલી હશે ?

ઉકેલ: અહીં $V_o = 9765625$, $r = 4\%$ $n = 3$

$$\therefore \; V_3 = 9765625\left[1+\frac{4}{100}\right]^3$$

$$= 9765625 \times \left(\frac{26}{25}\right)^3$$

$$= 10985000.$$

3 વર્ષ વર્ષ પછી નગરની વસ્તી 10985000 હશે.

ઉદાહરણ 8.46: એક કારની કિંમત જાન્યુઆરી 2005 માં રૂા. 3,50,000 હતી પ્રથમ વર્ષમાં તેની કિંમત 15 % ઘટે છે અને પછીના વર્ષમાં ક્રમશઃ 10 % ઘટે છે તો ત્રણ (3) વર્ષ બાદ કારની કિંમત શોધો.

ઉકેલ: અહીં $V_o = 3,50,000$

$r_1 = 15\%, r_2 = 10\%$, $r_3 = 10\%$

$$\therefore V_3 = V_o\left(1-\frac{r_1}{100}\right)\left(1-\frac{r_2}{100}\right)\left(1-\frac{r_3}{100}\right)$$

$$= 350000\left(1-\frac{15}{100}\right)\left(1-\frac{10}{100}\right)\left(1-\frac{10}{100}\right)$$

$$= 350000\times\frac{17}{20}\times\frac{9}{10}\times\frac{9}{10}$$

= રૂા. 2,40,975/-

3 વર્ષ પછી કારની કિંમત રૂા. 2,40,975 હોય.

ઉદાહરણ 8.47: એક છોડની ઉંચાઈ મહિનાની શરૂઆતમાં હોય તેના 2% ના દરે વધે છે. જો જાન્યાઆરી 2008 માં તેની પ્રારંભની ઉંચાઈ 1.2 મીટર હોય, તો એપ્રીલ 2008 ના પ્રારંભમાં તેની ઉંચાઈ શોધો. ત્રમ દશાંશ સ્થળ સાચો જવાહ લખો.

ઉકેલ: અહીં $V_o = 1.2$ m, $r = 2\%$, $n = 3$

$$\therefore V_3 = V_o\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

$$=1.2\left(1+\frac{2}{100}\right)^3 =1.2\left(\frac{51}{50}\right)^3 =1.2734\text{ m}$$

$= 1.273$ m

ઉદાહરણ 8.48: રોગના વિષાણુ દવાને કારણે દર કલાકે 5 % પ્રમાણે ઘટે છે જો રોગના વિષાણું 11 કલાકે 2.3×10^7, તો તે જ દિવસે સાંજના 1 વાગે (13 કલાકે) વિષાણું સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ: $V_o = 2.3\times10^7$, $r = 5\%$, $n = 2$

$$V_2 = 2.3\times10^7\left(1-\frac{5}{100}\right)^2 = 2.3\times10^7\times(0.95)^2$$

$= 2.076\times10^7$

વિષાણું 1.00 વાગે 2.076×10^7 હશે.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 8.7

1. એક નગરની વસ્તી 281250 છે. જો વસ્તી વધારાનો દર 4 % પ્રતિવર્ષ હોય, તો 3 વર્ષ પછી નગરની વસ્તી કેટલી હશે ?

2. જાન્યુઆરી 2005 માં એક કારની કિંમત 4,36,000 રૂપિયા હતી. પહેલે વર્ષે ઘસારાનો દર 15 % અને બાકીનાં વર્ષમાં ઘસારાનો દર 10 % હોય, તો જાન્યુઆરી 2008 માં કારની કિંમત શોધો.

3. આજે મશીનરીની કિંમત રૂા. 3,60,000 છે. પહેલે વર્ષે ઘસારાનો દર 12 % અને બાકીના વર્ષમાં ઘસારાનો દર 8 % હોય, તો ત્રણ વર્ષ પછી મશીનરીની કિંમત કેટલી ઘટી ?

4. ખાતરના ઉપયોગથી પહેલે વર્ષે 10 % બીજે વર્ષે 5 % અને ત્રીજે વર્ષે 4 % પાકમાં વૃદ્ધિ થાય છે. જો વર્ષ 2005 માં પાકનું ઉત્પાદન દર હેક્ટરે 3.5 ટન હોય, તો વર્ષ 2008 માં પાકનું ઉત્પાદન શોધો.

5. દવાને લીધે રોગના જંતુઓનો ઉછેર દર કલાકે 4 % ઘટે છે જો સવારે 9 કલાકે જંતુઓનો સરવાળો 3.5×10^8, તો સવારના 11. કલાકે જંતુઓનો સરવાળો શોધો.

6. ત્રણ વર્ષ પહેલા એક ગામની વસ્તી 50,000 હતી. પછી પ્રથમ વર્ષે વસ્તી વધારાનો દર 5 % હતો. બીજા વર્ષે રોગચાળાને લીધે વસ્તી ઘટાડાનો દર 10 % હતો. અને ત્રીજે વર્ષે વસ્તી વધારાનો દર 4 % નોંધાયો તો હાલ ગામની વસ્તી કેટલી હશે ?

સારાંશ

- ટકા એટલે 100 ઉપર (માંથી)
- ટકા અપૂર્ણાંકમાં કે દશાંશમાં લખી શકાય છે અને એનાથી ઉલટું પણ લખી શકાય છે.
- ટકાને અપૂર્ણાંક લખવા આપણે % (ચિહન) સંજ્ઞા દૂર કરીએ છીએ અને પછી સંખ્યાને 100 વડે ભાગીએ છીએ.
- અપૂર્ણાંકને ટકા વડે દર્શાવવા માટે આપણે અપૂર્ણાંકને 100 વડે ગુણી સાદુરૂપ આપીએ છીએ અને તેની પાછળ % (ચિહ્ન) લગાડીએ છીએ.
- સંખ્યા અથવા જથ્થાના ચોક્કસ ટકા નક્કી કરવા માટે આપણે ટકાને પ્રથમ અપૂર્ણાંકમાં કે દશાંશમાં ફેરવીએ છીએ અને પછી સંખ્યા અથવા જથ્થા વડે ગુણીએ છીએ.
- જ્યારે વસ્તુની વેચાણ કિંમત, વસતુની મૂળ કિંમત કરતાં વધારે હોય ત્યારે નફો થાય છે.
- જ્યારે વસ્તુની વેચાણ કિંમત વસ્તુની મૂળ કિંમત કરતાં ઓછી હોય, ત્યારે ખોટ જાય છે.

  $\text{નફો} = \text{વે.કી.} - \text{મૂ.કિ.}$; $\text{ખોટ} = \text{મૂ.કિ} - \text{વે.કી}$

  $\text{નફાના ટકા (નફાના \%)} = \dfrac{\text{નફો}}{\text{મૂ.કી.}} \times ૧૦૦$; $\text{નુકશાન (ખોટ) ના \%} = \dfrac{\text{ખોટ}}{\text{મૂ.કિ.}} \times ૧૦૦$

  $\text{વે.કિ.} = \dfrac{૧૦૦ + \text{નફો (ટકામાં)}}{૧૦૦} \times \text{મૂ.કિ.}$; $\text{વે.કિ.} = \dfrac{૧૦૦ - \text{ખોટના ટકા (ખોટ ટકામાં)}}{૧૦૦} \times \text{મૂ.કિ.}$

- આપેલ મુદ્દલ (P) વ્યાજનો દર (R) અને મુદ્દત વર્ષ (T) આપેલા હોય, તો સાદું વ્યાજ (I) નીચેના સૂત્રથી ગણાય છે. (ગણવામાં આવે છે.)

  $I. = P \times R \times T$

- વળતર એ વસ્તુની છાપેલી કિંમતમાં ઘટાડો છે.
- વળતર હંમેશા વસ્તુની છાપેલી કિંમત ઉપર ગણાય છે.
- છાપેલી કિંમતમાંથી વળતરની કિંમત બાદ કરતાં જે કિંમત મળે છે તે ગ્રાહકે વસ્તુ ખરીદતી વખતે આપવી પડે છે.
- બે ક્રમાનુસાર વળતર એ વળતરશ્રેણી (ડીસકાઉન્ટ શ્રેણી) સ્વરૂપે કહેવાય છે.
- વળતર શ્રેણીનું કમાત્ર વળતર શ્રેણીમાં રૂપાંતર થઈ શકે છે.
- હપ્તા પદ્ધતિ વ્યક્તિને કિંમતી સામાન ખરીદવા શક્તિમાન બનાવે છે.
- ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજની બાબતમાં

  રકમ (મુદ્દલ વ્યાજ) $A = P(1 + R)^n$, જ્યાં P= મુદ્દલ, R = % અને n = સમય છે.
- પ્રથમ રૂપાંતરિત ગાળા સિવાય (પ્રથમ વર્ષ સિવાય) ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ સાદા વ્યાજ કરતાં વધારે હોય છે.
- જો V_0 એ વસ્તુનુ પ્રારંભિક મૂલ્ય હોય અને Vn એ n રૂપાંતરિત ગાળા પછી મૂલ્ય હોય અને r એ દરેક સમયગાળા માટે વૃદ્ધિ અને ઘટાડાનો દર હોય, તો દરેક સમયગાળા માટે વૃદ્ધિ અને ઘટાડાનો દર હોય, તો

  $$V_n = V_o\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$ વૃદ્ધિના કિસ્સામાં અને

  $$V_n = V_o\left(1-\frac{r}{100}\right)^n$$ એ ઘટાડાના (ઘસારાના) ના કિસ્સામાં

  જો વૃદ્ધિ અને ઘસારાનો દર દરેક રૂપાંતરિત ગાળા દરમિયાન બદલાતો હોય, તો

  $$V_n = V_o\left(1+\frac{r_1}{100}\right)\left(1+\frac{r_2}{100}\right)\left(1+\frac{r_3}{100}\right)....$$ વિકાસ માટે

  $$V_n = V_o\left(1-\frac{r_1}{100}\right)\left(1-\frac{r_2}{100}\right)\left(1-\frac{r_3}{100}\right)....$$ ઘટાડા માટે

સત્રાંત સ્વાધ્યાય

1. નીચેના દરેકને ટકામાં દર્શાવો.

(a) $\frac{9}{20}$ (b) $\frac{7}{10}$ (c) 0.34 (d) 0.06

2. નીચેના દરેકને દશાંશમાં દર્શાવો.

(a) 36% (b) 410% (c) 2% (d) 0.35%

3. નીચેના દરેકને અપૂર્ણાંકમાં દર્શાવો.

(a) 0.12% (b) 2.5% (c) 25.5% (d) 255%

4. નીચેના દરેકની ગણતરી કરો.

(a) 23% ના 500 (b) 2.5% ના 800 (c) 0.4% ના 1000 (d) 115% ના 400

5. 294 એ 700 ના કેટલા ટકા છે ?

6. 60 એ 45 કરતાં કેટલા ટકા વધુ છે ?

7. કઈ સંખ્યાના 10 % વધીને 352 થાય છે ?

8. એવી સંખ્યા શોધો જેના 15 % 270 થાય ?

9. કઈ સંખ્યાને એના 7 % જેટલી ઘટાડીએ તો 16.74 થાય ?

10. જો વર્ગના -- વિદ્યાર્થીઓ ચશ્માં પહેરતા હોય, તો વર્ગના કેટલા ટકા વિદ્યાર્થીઓ ચશ્માં પહેરતાં નથી ?

11. ફ્રીઝમાં 20 ઈંડા છે જેમાંના 6 ઈંડા ભૂખરાં રંગના છે તો કેટલાં ઈંડા છે જેમાંનાં 6 ઈંડા ભૂખરા રંગના છે તો કેટલાં ઈંડા (ફ્રીઝમાં) ભૂખરા રંગના નથી ?

12. વર્ગના કુલ વિદ્યાર્થીઓના 44 % છોકરાઓ છે જો છોકરીઓની સંખ્યા છોકરાઓ કરતાં 6 ઓછી હોય તો વર્ગમાં કુલ કેટલા વિદ્યાર્થીઓ હોય ?

13. એક ચુંટણીમાં 70 % વસ્તીએ મતદાન કર્યું. જો 70,000 લોકોએ મતદાન કર્યું હોય, તો નગરની કુલ વસ્તી કેટલી હોય ?

14. એક વ્યક્તિ પોતાની માસિક આવકના 5 % દાનમાં વાપરે છે અને બાકીનાના 10 % બેંકમાં જમા કરાવે છે. હવે જો તેની પાસે રૂા.11704 બાકી રહ્યા હોય, તો તેની માસિક આવક શોધો.

15. શનીવારે રતનની દુકાનનું વેચાણ રૂા.12,000 થયું અને સીમાની દુકાનનું તે દિવસે વેચાણ રૂા. 15,000 હતું. બીજા દિવસે તેમને અનુક્રમે રૂા. 15000 અને રૂા. 17,500 નું વેચાણ થયું તો કઈ દુકાને વેચાણમાં વધુ સુધારો દેખાડ્યો ?

16. એક વિદ્યાર્થીને 100 ગુણનું એક પેપર એવા 3 પેપરના કુલ ગુણના 45 % ગુણ પાસ થવા મેળવવાના હોય છે. જો તેણે પહેલા પેપરમાં 35 % ગુણ અને બીજા પેપરમાં 50 % ગુણ મેળવ્યા હોય તો પરીક્ષામાં પાસ થવા માટે ત્રીજા પેપરમાં ઓછામાંછા કેટલા ગુણ મેળવવા પડે ?

17. ખાંડની કિંમત રૂા. 25 % નો વધારો થાય છે તો પરિવારે ખાંડની વપરાશમાં કેટલા ટકા વધે નહીં?

18. રૂા. 160 માં 90 બોલપેન વેચતાં વ્યક્તિને (વેપારીને) 20 % ખોટ જાય છે. (તો રૂા. 96 માં કેટલી બોલપેન વેચવી જોઈએ જેથી તેને 20 % નફો થાય.) (અથવા 20 % નફો મેળવવા માટે તેણે રૂા. 96 માં કેટલી બોલપેન વેચવી જોઈએ ?)

19. એક ફેરીઆએ રૂા. 5 માં 6 કેળાનાં ભાવે કેળાં ખરીદ્યા અને રૂા. 4 માં 3 ના ભાવે કેળાં વેચ્યાં તો તેના નફા કે ખોટના ટકા શોધો.

20. એક માણસ બે પ્રકારે ઈંડાની ખરીદી કરે છે. પ્રથમ ખરીદી એક ડઝનના રૂા.18 પ્રમાણે અને એટલીજ ખરીદી બીજા પ્રકારમાં એક ટર્મનના રૂા. 20 એટલી જ ખરીદી બીજા પ્રકારમાં એક ડઝનના 23.75 ના ભાવે વેચે છે તો તેના નફાના ટકા શોધો.

21. એક માણસ એક વસ્તુ 10 % નફાથી વેચે છે જો તેણે તે વસ્તુ 10 % ઓછેથી ખરીદી હોત અને 10 % નફાથી વેચી હોત, તો તેને 25 % નફો થાત તો વસ્તુની મૂળ કિંમત શોધો.

22. માંજાની એક જોડની છાપેલી કિંમત રૂા.80 છે. અને તે રૂા. 64 માં આપવાના છે તો વળતરના ટકા શોધો.

23. એક વેપારી રૂા. 1800 છાપેલી કિંમતનું ટેબલ 25 % વળતરથી ખરીદે છે. તે રૂા.150 એક જગાએથી બીજી જગાએ લઈ જવામાં (પરિવહનમાં) ખર્ચે છે અને તે ટેબલ 10 % નફાથી વેચે છે તો ટેબલની વેચાણકિંમત શોધો.

24. એક ટી.વી. સેટ રૂા. 18750 આપીને ખરીદવામાં આવ્યો. જો વેપારીએ 25% વળતર આપ્યું હોય, તો ટી.વી. ની (અંકિત) છાપેલી કિંમત શોધો.

25. કેટલીક રકમ સાદા વ્યાજે 5 વર્ષ માટે રોકવામાં આવી. જો સાદુ વ્યાજ 12 % નાદરે આપવામાં આવ્યું. જો નાણાં રોકનારને રૂા.1200 વ્યાજ પેટે મળ્યા હોય, તો રકમ શોધો.

26. કોઈ એક રકમનું સાદુ વ્યાજ રકમના (મુદ્દલ) ના $\frac{1}{3}$ જેટલું થાય છે. અને મુદ્દલ, ટકા કરતાં ત્રણ ગણી છે. તો વ્યાજનો દર શોધો.

27. રૂા. 2250 નું 3 % લેખે 4 વર્ષમાં જેટલું વ્યાજ મળે છે. તેટલું વ્યાજ રૂા. 2700 નું 4 % લેખે કેટલા વર્ષમાં મળે ?

28. કોઈ અક રકમના 10 % લેખે 2 વર્ષના અંતે 3 વર્ષના સાદા વ્યાજનો તફાવત રૂા.300 છે તો તે રકમ શોધો.

29. કોઈક રકમ 4 % ના ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજે રોકવામાં આવી. ત્રણ વર્ષને અંતે તે રકમ 70304 થાય છે તો મૂળ રકમ શોધો.

30. કોઈ એક રકમના 10 % લેખે 2 વર્ષના સાદા અને ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજનો તફાવત રૂા. 50 છે. (ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ વાર્ષિક સંયોજાય છે) તો તે રકમ શોધો.

31. કોઈ એક રકમ ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજે વાર્ષિક 20 % ના વ્યાજના દરે 6 માસમાં રૂા. 26460 થાય છે. (વ્યાજ દર વર્ષે સંયોજિત થતું હોય) તો તે રકમ અને વ્યાજનો દર શોધો.

32. કોઈ એક રકમ ચક્રવૃદ્ધિ જે વાર્ષિક 20 % ના વ્યાજના દરે 6 માસમાં રૂા.26460 થાય છે. વ્યાજ ત્રિમાસિક સંયોજાય છે તો તે રકમ શોધો.

33. મુદ્દલ રૂા. 12,000 , 3 વર્ષમાં રૂા.15972 થાય છે. જો વ્યાજ દર વર્ષે સંયોજાતું હોય તો વાર્ષિક વ્યાજનો દર શો હશે ?

34. એક સ્કૂટરની કિંમતમાં પ્રથમ વર્ષે 20 % બીજા વર્ષે 15 % અને ત્યાર પછી 10 % નો ઘટાડો થાય છે. જો અત્યરે સ્કૂટરની કિંમત રૂા. 25,000 હોય. તો ત્રણ વર્ષ પછી સ્કૂટરની કિંમત શું હશે ?

35. એક ગામની વસ્તી બે વર્ષ પહેલાં 20,000 હતી. પહેલે વર્ષે તેમાં 10 % ની વૃદ્ધિ થઈ બીજા વર્ષે તેમાં 10 % નો ઘટાડો થયો તો 2 વર્ષ પછી તે ગામની વસ્તી ગણતરી કરીને શોધો.

તમારી પ્રગતિ ચકાસોના જવાબ

1. (a) 48% (b) 45% (c) $41\frac{2}{3}$% (d) 40% (e) 20%
   (f) 30% (g) 36% (h) 126% (i) 288% (j) 98.48%

2. (a) $\frac{53}{100}$ (b) $\frac{17}{20}$ (c) $\frac{27}{160}$ (d) $\frac{137}{4000}$ (e) $\frac{1}{16}$
   (f) $\frac{7}{10}$ (g) $\frac{63}{400}$ (h) $\frac{1}{40000}$ (i) $\frac{947}{2000}$ (j) $\frac{21}{4000}$

3. (a) 97% (b) 73.5% (c) 3% (d) 207% (e) 80%
   (f) 175% (g) 2.5% (h) 325.75% (i) 15.2% (j) 300.15%

4. (a) 0.72 (b) 0.41 (c) 0.04 (d) 1.25 (e) 0.09
   (f) 4.1 (g) 3.5 (h) 1.025 (i) 0.00025 (j) 0.1025

5. 50% 6. 90% 7. 6.25% 8. 47.5% 9. 30%

10. 5%

8.2

1. (a) 200 (b) 564

2. રૂા. 2625 3. 175, 100, 125, 100 4. 25%

5. 56.25% 6. 500 7. 36 મિનિટ

8. 6000 9. રૂા. 40,રૂા. 32 10. 4% ઘટાડો

11. B 12. 10.8%

13. રૂા. 13200, રૂા. 12000, રૂા. 10000

8.3

1. $33\frac{1}{3}$% નફો	2. 10%	3. 25%	4. 120
5. રૂ. 2576	6. 21	7. 4% ખોટ	8. રૂ. 1108.80
9. 12% નફો	10. 15% નફો		

8.4

1. રૂ. 318.75	2. 20%	3. રૂ. 15390	4. 25%
5. રૂ. 724.50	6. 10% ખોટ	7. રૂ. 2185	8. 10.4%

8.5

1. રૂ. 16240	2. રૂ. 3744	3. રૂ. 5600	4. 11%
5. 4 વર્ષ	6. 10%	7. રૂ. 1100, 5%	8. $9\frac{5}{7}$%
9. 24 વર્ષ	10. b		

8.6

1. રૂ. 1951	2. રૂ. 1951	3. રૂ.. 2522	4. રૂ.. 24000
5. રૂ. 630	6. રૂ. 46875	7. રૂ. 80000	8. $1\frac{1}{2}$ વર્ષ
9. 20%	10. રૂ. 1600, 5%		

8.7

1. 316368	2. રૂ. 300186	3. રૂ. 291456
4. 4.2042 ટન/હેક્ટર	5. 3.2256×10^{8}	6. 49140

સત્રાંત સ્વાધ્યાયના જવાબો.

1. (a) 45%	(b) 70%	(c) 34%	(d) 6%
2. (a) 0.36	(b) 4.10	(c) 0.02	(d) 0.0035
3. (a) $\frac{3}{2500}$	(b) $\frac{1}{40}$	(c) $\frac{51}{200}$	(d) $\frac{51}{20}$
4. (a) 115	(b) 20	(c) 4	(d) 460
5. 42%	6. 25%	7. 320	8. 1800
9. 18	10. 25%	11. 70%	12. 50

13. 1 *લાખ*	14. Rs. 14000	15. *રતનની દુકાન*	16. 50
17. 20%	18. 36	19. 60% *નફો*	20. 25%
21. *રૂા.* 400	22. 20%	23. *રૂા.* 1650	24. *રૂા.* 25000
25. Rs. 2000	26. $3\frac{1}{3}$%	27. $2\frac{1}{2}$ years	28. Rs. 3000
29. Rs. 62500	30. Rs. 5000	31. Rs. 16000, 5%	32. Rs. 24000
33. 10%	34. Rs. 13500	35. 19800	

9

હપ્તાથી ખરીદી

તમે "હમણાં" 500 રૂપિયા આપી અને કલર ટી.વી. ઘરે ઘરે લઈ જાઓ, બાકીની રકમ સરળ હપ્તામાં ચુકવો અથવા રૂા. 50,000 આપી (ચુકવી) તમારી પસંદગીની કાર ખરીદો અને બાકીની રકમ સરળ હપ્તાઓમાં ચૂકવો જેવી જાહેરાતો જોઈ હશે આવી યોજનાઓ ગ્રાહકોને આકર્ષે છે મર્યાદાને લીધે કાર , સ્કૂટર,ફ્રીઝ, કલર ટી.વી જેવી યોજનાઓ હેઠળ ખરીદી શકતા નથી. આવી યોજના હેઠળ ખરીદતી વખતે ચોક્કસ રકમ આપવામાં આવે છે, અને બાકીની રકમ ગ્રાહક અને વેપારી વચ્ચે થયેલા કરાર મુજબ માસિક, ત્રિમાસીક, છ માસિક કે વાર્ષિક હપ્તાઓમાં ચૂકવવામાં આવે છે.

આમ હપ્તા ખરીદ પદ્ધતિ વ્યક્તિને અનુકુળ ચૂકવણીની શરતે મોંઘી વસ્તુઓ ખરીદવા શક્તિમાન બનાવે છે. આ યોજના હેઠળ ગ્રાહક શરૂઆતમાં આર્થિક ચુકવણી કરીને બાકીની રકમ હપ્તાઓમાં ચુકવવાના કરાર ઉપર સહી કરીને વસ્તુ પોતાના વપરાશ માટે લઈ જાય છે આવી યોજના ખરીદનારને હપ્તાઓ ચૂકવવા માટે નિયમિત સમયગાળા માટે બચત કરવા માટે પણ પ્રેરે છે.

આ પ્રકરણમાં આપણે વિવિધ પ્રકારની હપ્તા યોજનાઓનો અભ્યાસ કરીશું અને તે કેટલા સરળ છે તે બાબ આ યોજના ઓ નીચે ચુકવવા પડતાં વ્યાજની ગણતરી કરીને જોઈશું.

હેતુઓ

- *આ પ્રકરણનો અભ્યાસ કર્યો પછી તમે હપ્તા પદ્ધતિ હેઠળ વસ્તુની ખરીદીના ફાયદા / ગેરફાયદા સમજાવી શકશો.*
- *આપેલ વ્યાજ (સાદા વ્યાજ)ના દરે હપ્તા પદ્ધતિ હેઠળ જ્યારે માલ ખરીદવામાં આવે ત્યારે દરેક હપ્તાનીરકમ નક્કી કરી શકશો.*
- *જ્યારે (દરેક) સરખા હપ્તાની રકમ અને હપ્તાઓની સંખ્યા આપેલી હોય, ત્યારે વ્યાજનો દર નક્કી કરી શકશો.*
- *જ્યારે વાર્ષિક અર્ધવાર્ષિક કે ત્રિમાસિક ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ લેવામાં આવે ત્યારે હપ્તા પદ્ધતિ હેઠળ દરેક હપ્તાની રકમ નક્કી કરી શકશો.*

નોંધ

આશ્રિત પૂર્વજ્ઞાન

- *સાદું વ્યાજ તેમજ ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ*
- *વાર્ષિક, અર્ધવાર્ષિક, ત્રિમાસિક અથવા માસિક, વ્યાજની ગણતરી.*

9.1 હપ્તા ખરીદી યોજના- કેટલીક વ્યાખ્યાઓ

રોકડ કિંમત

વસ્તુની રોકડ કિંમત એટલે વસ્તુ ખરીદતી વખતે ગ્રાહકે વસ્તુ માટે ચુકવવી પડતી સંપૂર્ણ રકમ.

માલની સામે રોકડ ચુકવણી :

હપ્તા પદ્ધતિ હેઠળ વસ્તુની ખરીદી સમયે જે રકમ રોકડામાં ચુકવવામાં આવે તેને માલની સામે રોકડ ચૂકવણી (cash down paymen*) કહે છે તે ગ્રાહક દ્વારા કરાર પર સહી કરતી વખતે અને વપરાશ માટે વસ્તુને લઈ જતી વખતે કરેલી આંશિક ચૂકવણી છે.*

હપ્તાઓ *: હપ્તા એટલે વસ્તુની વેચાણ કિંમતના શેષ ભાગ સામે (બાકી રહેલી રકમ માટે) ગ્રાહક દ્વારા ચોક્કસ સમય ગાળામાં ચૂકવવામાં આવતી રકમ.*

હપ્તા પદ્ધતિ હેઠળ વ્યાજ હપ્તા યોજનામાં ખરીદતી વખતે ગ્રાહકદ્વારા કુલ કિંમતનો ફક્ત આંશિક ચૂકવણી કરવામાં આવે છે કિંમતનો બાકી રહેલો ભાગ પાછળની તારીખોમાં ચૂકવવામાં આવે છે અને તેથી વેચાણ કરનાર (વેચાણ કરાર) વિલંબિત ચૂકવણી માટે થોડીક વિશેષ રકમ વસુલ કરે છે. આ વિશેષ રકમ ગ્રાહક વિવિધ સમયે વેચાણ કારને હપ્તાઓથી ચૂકવે છે તે રકમ પર લેવામાં આવતું ખરેખરું વ્યાજ છે.

9.2 હપ્તા પદ્ધતિમાં વ્યાજની ગણતરી

એક ટેલીવીઝન સેટ રૂા. 20,000 *રોકડા અથવા રૂા.* 6,000 *માલ સામેથી રોકડા અને બાકીની રકમ છ માસ બાદ રૂા.* 16,800 *થી વેચાણમાં આવે છે તો હપ્તા યોજના હેઠળ વ્યાજનો દર શોધો.*

ટેલીવીઝનની રોકડ કિંમત = *રૂા.* 20000

માલની સામે રોકડ કિંમત = *રૂા.* 6000

ચુકવવાની બાકી રહેલી કિંમત = *રૂા.* 14000

છ માસ બાદ ચુકવવાની કિંમત = *રૂા.*16800

છ માસનું 14000 *રૂા. નું વ્યાજ* = 16800-14000

= 2800 *રૂપિયા*

*સાદું વ્યાજ રૂા.*2800

$$14000+14000\times\frac{r}{100}\times\frac{6}{12}=16800$$

$$\text{or } \frac{7r}{10} = 28 \text{ i.e., } r = 40,$$

એટલેકે વ્યાજનો દર $= 40\%$

ઉદાહરણ 9.2: *એક ટેબલ ફેનની રોકડ વેચાણ કિંમત રૂા. 450 છે. અથવા ખરીદતી વખતે આપવા પડતા રોકડા રૂા. 210 અને બાજુની રકમ રૂા. 125નો એક એવા બે માસિક હપ્તાથી ચુકવવામાં આવે છે તો હપ્તાની રીતે આપેલ વ્યાજ દર શોધો.*

ઉકેલ :

પંખાની રોકડ કિંમત = રૂા. 450

ખરીદતી વખતે આપવી પડતી રોકડ = રૂા. 210

પ્રથમ મહિનાની બાકી રકમ = રૂા. $(450 - 210)$ = રૂા. 240

1 મહિના માટેનું કુલ મુદ્દત = $(240 + 115)$ રૂા. 355

રૂા.355નું 1 માસનું વ્યાજ રૂા. 10 થાય છે.

$$= \text{રૂા. } 335 + \frac{r}{100} \times \frac{1}{12} = 10$$

$r = 33.8\,\%$

વ્યાજનો દર $33.8\,\%$

ઉદાહરણ 9.3: *એક આઈક્રોવેવ ઓવન રોકડેથી રૂા. 9600માં મળે છે. અથવા ખરીદતી વખતે રૂા. 4000 રોકડા ચઅને રૂા. 2000નો ચેક એવા 3 માસિક હપ્તા તો હપ્તા પદ્ધતિમાં લાગેલો વ્યાજનો દર શોધો.*

ઉકેલ :

હપ્તા યોજના હેઠળ ચુકવેલી કુલ રકમ

= રૂા. $(4000 + 6000)$ = રૂા. 10000

ચુકવેલ વ્યાજ = રૂા. $(10000 - 9600)$ = રૂા. 400

હપ્તાની સંખ્યા - 3

પ્રથમ માસ માટે (બાકી રકમ) = રૂા. $(9600 - 4000)$ = રૂા. 5600

બીજા માસ માટેનું મુદ્દલ = રૂા. $(5600 - 2000)$ = રૂા. 3600

ત્રીજા માસ માટેનું મુદ્દલ = રૂા. $(3600 - 2000)$ = રૂા. 1600

મહિના માટેનું કુલ મુદ્દલ = રૂા. $(5600 + 3600 + 1600)$ = રૂા. 10800

આમ,

$$10800 \times \frac{r}{100} \times \frac{1}{12} = 400 \Rightarrow 9r = 400 \text{ or } r = \frac{400}{9} \approx 44.4\%$$

તેથી લાગે લો વ્યાજનો દર $= 44.4\%$

ઉદાહરણ 9.4:

એક કોમ્પ્યુટર રોકડેથી રૂા. 30,000માં વેચાવામાં આવે છે અથવા ખરીદતી વખતે રૂા. 1800 રોકડા અને બાકીની રકમ રૂા. 2150 નો ચેક એવા 6 માસિક હપ્તાથી ચુકવવામાં આવે તો હપ્તા યોજના હેઠળ લાગે લો વ્યાજનો દર શોધો.

ઉકેલ:

કોમ્પ્યુટર ની રોકડ કિંમત = રૂા. 30000

ખરીદતી વખતે આપવી પડતી રોકડ = રૂા. 18000

6 હપ્તામાં ચુકવવાની રકમ = રૂા. (6×2150) = રૂા. 12900

હપ્તાની રીતે ચુકવેલ કુલ રકમ = રૂા. $(18000 + 12900)$

= રૂા. 30900

ચુકવાયેલ વ્યાજ = રૂા. $(30900 - 30000)$ = રૂા.900

પ્રથમ માસનું વ્યાજ મુદ્દલ = રૂા. $(30000 - 18000)$ = રૂા. 12000

બીજા માસનું વ્યાજ મુદ્દલ = રૂા. $(12000 - 2150)$ = રૂા. 9850

ત્રીજા માસનું વ્યાજ મુદ્દલ = રૂા. $(9850 - 2150)$ = રૂા. 7700

ચોથા માસનું વ્યાજ મુદ્દલ = રૂા. $(7700 - 2150)$ = રૂા. 5550

પાંચમા માસનું વ્યાજ મુદ્દલ = રૂા. $(5550 - 2150)$ = રૂા. 3400

છઠ્ઠા માસનું વ્યાજ મુદ્દલ = રૂા. $(3400 - 2150)$ = રૂા. 1250

1 મહિના માટેનું કુલ મુદ્દલ =

$(12000 + 9850 + 7700 + 5550 + 3400 + 1250)$

= રૂા. 39750

39750નું એક માસનું વ્યાજ રૂા. 900 છે.

$$39750 \times \frac{r}{100} \times \frac{1}{12} = 900 \Rightarrow r = \frac{900 \times 12 \times 100}{39750} = \frac{1440}{53}$$

$= 27.17\%$ છે

વ્યાજનો દર $= 27.17\%$ છે.

નોંધ : ઉદાહરણ 2 થી 5માં તમે જોશો કે છેલ્લા માસનું (છેલ્લા માસની બાકી રહેતી રકમ) એ હપ્તાની રકમથી

ઓછી હોય છે. જો વ્યાજની રકમ છેલ્લા મુદ્દલમાં ઉમેરવામાં આવશે સરવાળો હપ્તાની રકમ જેટલો થશે.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 9.1

1. એક ટેબલ રોકડેથી રૂા. 2000માં વેચવાનું છે અથવા ખરીદતી વખતે રૂા.600 રોકડા અને બાકીની રકમ 2 માસ પછી રૂા.1500 આપવા, તો હપ્તા પદ્ધતિમાં લાગેલા વ્યાજનો દર શોધો.
2. એક સાઈકલ રૂા. 2700માં વેચવાની છે અથવા ખરીદતી વખતે રૂા. 600 રોકડા અથવા 750 નો ચેક એવા 3(ત્રણ) માસિક હપ્તા તો હપ્તાની રીતે વ્યાજનો દર શોધો.
3. એક ટી.વી. સેટની વેચાણ કિંમત રૂા. 2100 છે અથવા ખરીદતી વખતે રૂા. 400 રોકડા અને રૂા. 3000નો ચેક એવા છ (6) માસિક હપ્તા. તો હપ્તા યોજના હેઠળ લગાડાયેલો (લગાડેલો) વ્યાજનો દર શોધો.
4. અનીલ રૂા. 6800ની કિંમતનું કોમ્પ્યુટર મોનીટર ખરીદતી વખતે રૂા. 2000 રોકડા અને રૂા. 1000નો ચેક એવા 5 માસિક હપ્તાથી હપ્તાની રીતે ખરીદ્યું તો હપ્તા યોજના હેઠળ આપેલ વ્યાજનો દર શોધો.
5. એક સ્કૂટર રૂા. 28,000 રોકડેથી ખરીદી શકાય છે અથવા રૂા. 7400 ખરીદતી વખતે રોકડા અને રૂા. 5200 નો એક એવા 4 માસિક હપ્તા તો હપ્તા યોજના હેઠળ આકારવામાં આવેલ વ્યાજનો દર શોધો.
6. એક એકકંડીશનર રૂા. 20,000માં રોકડેથી વેચવાનું છે અથવા ખરીદતી વખતે રૂા. 12,000 રોકડા અને રૂા. 2200નો ચેક એવા 4 માસિક હપ્તા તો હપ્તા યોજના હેઠળ આપવામાં આવેલ વ્યાજનો દર શોધો.
7. એક વસ્તુ રૂા. 25,000 રોકડેથી મળે છે અથવા ખરીદતી વખતે રૂા. 12,000 રોકડા અને રૂા. 3750નો ચેક એવા માસિક 6 હપ્તા તો હપ્તા પદ્ધતિ હેઠળ આપવામાં આવેલ વ્યાજનો દર શોધો.

9.3 હપ્તાની રકમ શોધવી.

હવે આ સમસ્યાને આપણે દુકાનદાર ની દૃષ્ટિ એ વિચારીએ દુકાનદાર (વેપારી) કેટલીક કિંમતે વસ્તુ ખરીદે છે. અને તેના ગ્રાહકોને હપ્તા પદ્ધતિથી આપવા ઈચ્છે છે. કારણ કે તે જાણે છે કે આ રીતે વધારે વસ્તુ વેચી શકાશે હવે તે ચોક્કસ વ્યાજનો દર આકારવાનું નક્કી કરે છે અને ખરીદતી વખતે આવપી પડતી રોકડ રકમ, સરખા હપ્તાની રકમ અને હપ્તાની સંખ્યા નક્કી કરવાનું ઈચ્છે છે. ઉદાહરણો જોઈએ.,

ઉદાહરણ 9.5 :

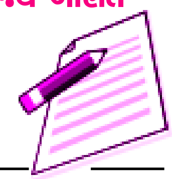
એક સોલીગ ફેનની રોકડ કિંમત રૂા. 1940 નક્કી કરેલી છે અથવા ખરીદતી વખતે રૂા. 420 રોકડા અને 3 સમાન માસિક હપ્તા જો વ્યાજનો દર વાર્ષિક 16% હોય, તો માસિક હપ્તાની રકમ શોધો.

ઉકેલ: રોકડ કિંમત = રૂા.1940

ખરીદતી વખતે આપવી પડતી રકમ = રૂા. 420

પાંચ સરખા હપ્તામાં ચૂકવવાની બાકી રકમ = રૂા. 14,000

ધારોકે દરેક હપ્તાની રકમ = રૂા. x



પાંચ સરખા હપ્તામાં ચૂકવાતી બાકી રકમ = રૂા.14000

ધારોકે દરેક હપ્તાની રકમ રૂા.= x

હપ્તા યોજનામાં ચૂકવાયેલું વ્યાજ = રૂા. [5*x* -14000]

ગ્રાહક વેપારીને નીચે પ્રમાણે ચૂકવે છે .

5= રૂા. (420 + 3x – 1940)

= રૂા. (3x – 1520)

ગ્રાહક પહેલે મહિને વેપારીને = રૂા. 1520 ચૂકવે છે.

ગ્રાહક બીજે મહિને વેપારીને = રૂા. (1520 – x) ચૂકવે છે.

ગ્રાહક ત્રીજે મહિને વેપારીને = રૂા. (1520 – 2x) ચૂકવે છે.

ગ્રાહક ચોથે મહિને વેપારીને = રૂા. [4560 – 3x] ચૂકવે છે.

1 મહિના માટેનું કતુલ મુદ્દલ =

રૂા.[1520 x1520-*x* x1520-2*x*] = [4560-3*x*]

વ્યાજનો દર = 16% વાર્ષિક

I = PTR

$76x = 39520$

$$\therefore (3x - 1520) = (4560 - 3x)\frac{16}{100}.\frac{1}{12}$$

$$25(3x - 1520) = (1520 - x)$$

$$x = 520$$

તેથી દરેક હપ્તાની રકમ રૂા. 520

ઉદાહરણ 9.6: એક કોમ્પ્યુટર રોકડેથી રૂા. 34000માં મળે છે અથવા ખરીદતી વખતે રૂા. 20,000 રોકડા અને માસિક 5 હપ્તા જો હપ્તા યોજના હેઠળ વ્યાજનોદર 30% આકારવામાં આવ્યો હોય, તો માસિક હપ્તાની રકમ શોધો.

ઉકેલ : રોકડ કિંમત = રૂા. 34000

ખરીદતી વખતે આપવી પડતી રકમ = રૂા. 20000

પાંચ સરખા હપ્તામાં ચૂકવવાની બાકી રકમ = રૂા. 14000

ધારોકે દરેક હપ્તાની રકમ રૂા. *x*

હપ્તા યોજનામાં ચૂકવાયેલું વ્યાજ = રૂા $(5x - 14000)$

ગ્રાહક વેપારીને નીચે પ્રમાણે ચૂકવે છે.

પ્રથમ મહિનો	બીજો મહિનો	ત્રીજો મહિનો	ચોથો મહિનો	પાંચમો મહિનો
રૂ.14000	રૂ.(14000 –x)	રૂ. (14000 –2x)	રૂ.(14000 –3x)	રૂ.(14000–4x)

એક મહિના માટેનું કુલ મુદ્દલ = રૂ. 70000 − 10x

(70000 − 10x) રૂપિયાનું 1 માસનું વ્યાજ

$$40\,(5x - 14000) = 10(7000 - x)$$

$$20x - 56000 = 7000 - x$$

$$21x = 63000$$

$$x = 3000$$

આમ દરેક સરખા હપ્તાની રકમ = રૂ. 3000

ઉદાહરણ 9.7:

વોશિંગ મશીનની કિંમત રૂ. 12,000 છે. કંપની એડવાન્સ માં રૂ. 5200 માગે છે અને બાકીની રકમ માસિક સરખા હપ્તામાં ચૂકવવાની હોય છે. જો વ્યાજનો દર વાર્ષિક 12% આકારવામાં આવે છે.

જો ગ્રાહક દર મહિને રૂ. 1400 આપી શકે તો તેને કેટલા હપ્તા ચૂકવવા પડે ?

ઉકેલ: ધારોકે હપ્તાની સંખ્યા n છે.

વોશિંગ મશીનની રોકડ કિંમત = રૂ. 12000

હપ્તાયોજના હેઠળ ચુકવવાની કુલ રકમ = રૂ. (5200 + 1400હ)

વસૂલ કરવામાં આવતું વ્યાજ = રૂ. (5200 + 1400હ − 12000)

= રૂ. (1400હ − 6800)

દરેક મહિને ચૂકવવાનું મુદ્દલ

પહેલો મહિનો = રૂ. 6800

બીજો મહિનો = રૂ. 5400

ત્રીજો મહિનો = રૂ. 4000

ચોથો મહિનો = રૂ. 2600

પાંચમો મહિનો = રૂ. 1200

છઠ્ઠો મહિનો = nil

1 મહિના માટેનું કુલ મુદ્દલ = રૂ. 20000

$$20000 \times \frac{12}{100} \times \frac{1}{12} = (1400n - 6800)$$

$$1400\,n = 7000,$$

$$n = 5$$

આમ હપ્તાની સંખ્યા $= 5$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 9.2

1. એક સ્ટૂકર રૂા. 30,000માં રોકડેથી મળે છે અથવા ખરીદતી વખતે રૂા. 1500 રોકડા અને 4 (ચાર) સરખા માસિક હપ્તા. હપ્તા યોજના હેઠળ આકરવામાં આવેલ વ્યાજનો દર જો $33\frac{1}{3}\%$, હોય તો દરેક હપ્તાની રકમ શોધો.

2. એક માઈક્રો ઓવન રૂા. 9600માં રોકડેથી મળે છે અથવા ખરીદતી વખતે રૂા. 4000 રોકડા અને ત્રણ માસિક સરખા હપ્તામાં મળે છે જો વ્યાજનો વાર્ષિકદર $22\frac{2}{9}\%$ આકરવામાં આવેતો દરેક હપ્તાની રકમ શોધો.

3. એક વસ્તુ રૂા. 5000માં રોકડેથી વેચાય છે અથવા ખરીદતી વખતે રૂા. 1500 અથવા 5 સરખા માસિક હપ્તાથી વેચાય છે જો વ્યાજનો દર વાર્ષિક 18% આકારવામાં આવે તો દરેક હપ્તાની રકમની ગણતરી કરો.

4. એક વસ્તુ રોકડેથી રૂા. 500માં વેચવાની છે અથવા ખરીદતી વખતે રૂા. 150 રોકડા અને 5 સરખા માસિક હપ્તામાં વેચવાની છે જો વ્યાજનો દર વાર્ષિક 18% આકારવામાં આવેતો માસિક હપ્તાની રકમની ગણતરી કરો,

9.4 રોકડ કિંમત શોધવી

ચાલો આપણે એવી સમસ્યાઓ જોઈએ કે જ્યારે હપ્તા યોજનાઓમાં દરેક સમાન હપ્તાની રકમ, વ્યાજનોદર,હપ્તાની સંખ્યા અને ખરીદતી વખતે આપવી પડતી રકમ આપવામાં આવ્યા હોય ત્યારે વસ્તુની રોકડ કિંમત શોધવી.

ઉદાહરણ 9.8: એક સાયકલ ખરીદતી વખતે રૂા. 500 અને એડાવાન્સ પછી રૂા. 610માં વેચવામાં આવેછે જો વ્યાજનો દર વાર્ષિક 20% આકરવામાં આવ્યો હોય,તો સાઈકલની રોકડ કિંમત શોધો.

ઉકેલ : ખરીદતી વખતે ચૂકવવી પડતી રોકડ રકમ $=$ રૂા.500

એક મહિના પછી હપ્તાની ચૂકવાયેલી રકમ $=$ રૂા. 610

વ્યાજનો દર $= 20\%$ (વાર્ષિક)

આમ 1 મહિના પછી ચુકવવેલ રૂા. 610નું મુદ્દલ શોધવાનું છે.

$$610 = \left[(\text{Principal})\times\frac{20}{100}\times\frac{1}{12}+\text{Principal}\right]$$

$$\Rightarrow 610 = \text{Principal}\left(1+\frac{20}{1200}\right) \text{or Principal} = \text{રૂા. } \frac{610\times1200}{1220}$$

$$= \text{રૂા. } 600$$

સાઈકલની રોકડ કિંમત = રૂા. $(500+600)$ = રૂા. 1100

ઉદાહરણ 9.9: એક કેમેરો ખરીદતી વખતે રોકડ રૂા. 2500 અને ત્રણ (3) માસ પછી રૂા.2100 માં વેચવામાં આવે છે જો વ્યાજનો દર વાર્ષિક 20% આકારવામાં આવે છે તો કેમેરાની રોકડ કિંમત શોધો.

ઉકેલ : ખરીદતી વખતે ચુકવવી પડતી કિંમત = રૂા. 2500

3 માસ પછી હપ્તા પેટે ચૂકવાયેલી રકમ = રૂા. 2100

વ્યાજનો દર વાર્ષિક = 20%

તેથી રૂા. 2100 માટેનું મુદ્દલ =

= રૂા. = રૂા.

= રૂા. 2000

તેથી રોકડ કિંમત = રૂા. $(2500+2000)$ = રૂા. 4500

બીજી પદ્ધતિ: (બીજી રીતે)

ધારોકે રોકડ કિંમત રૂા. x

ખરીદતી વખતે ચૂકવવી પડતી રોકડ રકમ = રૂા. 2500

હપ્તા પેટે ચુકવણી = રૂા. 2100

વ્યાજ = રૂા. $(4600-x)$

= રૂા. $(x-2500)$

$$I = P.R.T$$

$$20(4600-x) = x-2500$$

$$21x = 92000+2500$$

$$21x = 94500$$

$$x = 4500$$

તેથી રોકડ કિંમત = રૂા. 4500

ઉદાહરણ 9.10: એક મિક્ચર ખરીદતી વખતે રૂા. 360 અને રૂા. 390નો એક એવા 3 સરખા માસિક હપ્તાથી ખરીદવામાં આવ્યું હપ્તા યોજના હેઠળ વ્યાજનો વાર્ષિક દર 16% આકારવામાં આવે, તો મિક્ચર ની રોકડ કિંમત શોધો.

ઉકેલ : ધારોકે ની રોકડ કિંમત x રૂપિયા છે.

ખરીદતી વખતે ચુકવવી પડતી રોકડ કિંમત = રૂા. 360

3 હપ્તામાં ચુકવાયેલી રકમ = (3×390) = રૂા. 1170

કુલ ચુકવાયેલી રકમ = રૂા. $(360 + 1170) = 1530$

વ્યાજની રકમ = રૂા.$(1530 - x)$

પહેલા મહિના માટેનું મુદ્દલ = રૂા. $(x - 360)$

બીજા મહિના માટેનું મુદ્દલ = રૂા. $(x - 360 - 390)$ = રૂા. $(x - 750)$

ત્રીજા મહિના માટેનું મુદ્દલ = રૂા. $(x - 750 - 390)$ = રૂા.

રૂા. $(x - 1140)$

1 મહિના માટેનું કુલ મુદ્દલ = રૂા. $[x - 360 + x - 750 + x - 1140]$

= રૂા. $[3x - 2250]$ નું 1 માસનું વ્યાજ =

$$(1530 - x) = (3x - 2250) \times \frac{1}{12} \times \frac{16}{100} = \frac{(x - 750)}{25}$$

$$25(1530 - x) = x - 750$$

$$26x = 38250 + 750 = 39000$$

$$x = \frac{39000}{26} = 1500$$

$$x = 1500$$

રોકડ કિંમત = રૂા. 1500

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 9.3

1. એક ટેબલ ખરીદતી વખતે ચુકવવા પડતા રોકડા રૂા. 750 અને 6 માસ પછી રૂા. 436 ચુકવવમાં આવ્યા જો વ્યાજનો દર વાર્ષિક 18% હોય તો ટેબલની કિંમત શું હશે ?
2. એક રેફ્રીજરેટર ખરીદતી વખતે રોકડા રૂા. 7000 અને 3 માસ પછી રૂા. 3180 આપી ખરીદ્યું જો વ્યાજનો દર વાર્ષિક 24% આકારવામાં આવેતો રેફ્રીજરેટરની રોકડ કિંમત શોધો.
3. એક રસોઈ સેટ ખરીદતી વખતે રોકડા રૂા. 520 અને ત્યારબાદ રૂા. 520નો એવા 4 માસિક હપ્તાથી કરીદી શકાય છે. જો વ્યાજનો દર વાર્ષિક 25% હોય તો રસોઈ સેટની (રોકડ કિંમત) તો કિંમત શોધો.
4. એક સીલીંગ પંખો ખરીદતી વખતે રૂા. 210 રોકડા અને 260નો એવા માસિક ત્રણ સરખા હપ્તાઆપી ખરીદવામાં આવ્યો જો હપ્તા પદ્ધતિ યોજનામાં વ્યાજનો દર 16.1 વાર્ષિક આકરવામાં આવ્યો હોય, તો શિલીંગ ફેન (પંખા)ની રોકડ કિંમત શોધો.
5. એક ઈલેક્ટ્રિકલ ઓવન ખરીદતી વખતે ચુકવવા પડતા રોકડા રૂા. 1500 અને રૂા. 440નો એક એવા 5 સરખા માસિક હપ્તાથી ખરીદવામાં આવ્યું જો હપ્તા પદ્ધતિ યોજનામાં વ્યાજનોદર 24% વાર્ષિક હોય તો ઓવનની રોકડ કિંમત શોધો.

9.5 ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજનો સમાવેશ થતો હોય તેવી સમસ્યાઓ

હપ્તા ખરીદીમાં જ્યાં હપ્તો માસિક લેવાતો હોય અને કુલ સમય 1 વર્ષ કરતાં ઓછા હોય અને કુલ સમય 1 વર્ષ કરતાં ઓછા હોય, હોય ત્યાં સાદું વ્યાજ ગણવામાં આવતું

કેટલીક વાર વ્યક્તિ ઘર ખરીદવા, ગાડી ખરીદવા કે ફેક્ટરી સ્થાપવા જેવી બાબત માટે લાંબા સમયગાળા માટેનું ધિરાણ લે છે આવા કિસ્સાઓમાં વાર્ષિક હપ્તા લાંબા સમય સુધી ચૂકવવાના હોય છે અને તેથી તેમાં ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ ગણવામાં આવે છે હપ્તા ખરીદીમાં સમયગાળો 1 વર્ષથી ઓછો હોય તો પણ કેટલીક વાર વેચાણકાર જ્યારે હપ્તો ત્રિમાસિક કે અર્ધમાસિક કે અર્ધવાર્ષિક હોય ત્યારે ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ વસૂલ કરે છે.

હવે આપણે ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ ગણાતું હોય તેવી સમસ્યાઓ (કુટ પ્રશ્નો) સમજીએ

ઉદાહરણ 9.11: રેફ્રીજરેટર રોકડેથી રૂા.12,000 અથવા ખરીદતી વખતે આપવા પડતા રોકડા રૂા.3600 અને છ માસિક બે સરખા હપ્તા માં મળે છે જો વેપારી વ્યાજ છ માસિક રીતે સંજોજાય તે રીતે 20% ના વાર્ષિક દર આકારે (ગણો) તો હપ્તા યોજના હેઠળ દરેક હપ્તાની રકમ શોધો.

ઉકેલ :

રેફ્રીજ રેટરની રોકડ કિંમત = રૂા. 12000

ખરીદતી વખતે આપવી પડતી રોકડ કિંમત = રૂા. 3600

બાકી રકમ = રૂા. 8400

વ્યાજનો દર = 20% અથવા અર્થવાર્ષિક 10% ધારોકે દરેક અર્થવાર્ષિક હપ્તાની રકમ રૂપિયા છે આ પિરિસ્થિતિમાં આપણે દરેક હપ્તાની રકમ (મુદ્દલ) શોધીશું.

ધારોકે P_1, P_2 એ અનુક્રમે પહેલા અને બીજી

પરિવર્તન ગાથા માટેની હાલની કિંમત છે (મુદ્દલ છે)

$$\therefore \quad x = P_1\left(1+\frac{10}{100}\right)^1 \text{ and } x = P_2\left(1+\frac{10}{100}\right)^2$$

$$P_1 = \frac{10}{11}x \text{ and } P_2 = \left(\frac{10}{11}\right)^2 x$$

$$\frac{10}{11}x + \frac{100}{121}x = 8400$$

$$x = \frac{8400 \times 121}{210} = 4840$$

દરેક હપ્તાની રકમ = રૂા. 4840.

ઉદાહરણ 9.12:

એક વોશિંગ મશીન રૂા. 1500 રોકડામાં મળે છે પરંતુ ખરીદતી વખતે આપવી પડતી કિંમત રૂા. 2250 અને ૨ (બે) સરખા છ માસિક હપ્તા ભરીને હપ્તા પદ્ધતિ યોજના હેઠળ ખરીદવામાં આવ્યું જો વ્યાજનો વાર્ષિકદર 8% આકારવામાં આવે અને વ્યાજ 6, છ માસે ઉમેરવામાં આવે તો દરેક હપ્તાની રકમ શોધો.

ઉકેલ : *વોશિંગ મશીની રોકડ કિંમત* $=$ *રૂા.* 15000

ખરીદતી વખતે આપવી પડતી રોકડ રકમ $=$ *રૂા.* 2250

ચૂકવવાની બાકીની રકમ $=$ *રૂા.* $(15000 - 2250) =$ *રૂા.* 12750

વ્યાજનો દર $= 8\% = 4\%$ *અર્ધવાર્ષિક*

ધારોકે દરેક અર્ધવાર્ષિક હપ્તાની રકમ રૂા. x *છે.*

$$\therefore\ x = P_1\left(1+\frac{4}{100}\right)^1 \text{ and } x = P_2\left(1+\frac{4}{100}\right)^2$$

$$P_1 = \frac{25}{26}x \text{ and } P_2 = \left(\frac{25}{26}\right)^2 x$$

P_1, P_2 *એ અનુક્રમે પ્રથમ અને દ્વિતીય હપ્તાની હાલની (મુદ્દલ) છે.*
તેથી,

$$12750 = \frac{25}{26}x + \left(\frac{25}{26}\right)^2 x = \frac{25}{26}x\left(1+\frac{25}{26}\right) = \frac{25}{26}\cdot\frac{51}{26}x$$

$$\Rightarrow x = 12750 \times \frac{26}{25} \times \frac{26}{51} = 6760$$

આમ દરેક હપ્તાની રકમ $=$ *રૂા.* 6760 *છે.*

ઉદાહરણ 9.13: *એક જ્યુસર રૂા.* 3500 *રોકડામાં મળે છે પરંતુ તે હપ્તા પદ્ધતિ યોજના હેઠળ વેચવામાં આવ્યું જ્યાં ખરીદનાર ખરીદતી વખતે રોકડા રૂા.* 1500 *અને* 3 *(ત્રણ) સરખા ત્રિમાસિક હપ્તા ચુકવવા સંમત થાય છે જો વેપારી* 12 *(વ્યાજ દર ત્રણ માસે સંયોજાય છે) તો દરેક હપ્તાની રકમ શોધો.*

ઉકેલ : *જ્યુસરની રોકડ કિંમત* $=$ *રૂા.* 3500

ખરીદતી વખતે ચૂકવેલ રોકડ રકમ $=$ *રૂા.* 1500

ચુકવવાની બાકી રકમ $=$ *રૂા.* $(3500 - 1500) =$ *રૂા.* 2000

વ્યાજનોદર $= 12\%$ *વાર્ષિક* $= \frac{12}{4} = 3\%$ *ત્રિમાસિક*

ધારોકે દરેક હપ્તાની રકમ x *છે. અને* P_1, P_2, P_3 *અનુક્રમે પ્રથમ અને દ્વિતિય અને તૃતિય હપ્તાનું મુદ્દલ છે.*

$$x = P_1\left(1+\frac{3}{100}\right),\quad x = P_2\left(1+\frac{3}{100}\right)^2 \text{ and } x = P_3\left(1+\frac{3}{100}\right)^3$$

$$P_1 = \frac{100}{103}x, \quad P_2 = \left(\frac{100}{103}\right)^2 x \quad \text{and} \quad P_3 = \left(\frac{100}{103}\right)^3 x$$

$$\frac{100}{103}x + \left(\frac{100}{103}\right)^2 x + \left(\frac{100}{103}\right)^3 x = 2000 \Rightarrow \frac{100}{103}x\left[1 + \frac{100}{103} + \left(\frac{100}{103}\right)^2\right] = 2000$$

$$x = 2000 \times \frac{103}{100} \times \frac{(103)^2}{30909} = \text{રૂા. } 707$$

દરેક ત્રિમાસિક હપ્તાની રકમ = *રૂા.* 707 *છે.*

ઉદાહરણ 9.14: *એક ટેલીવિઝન સેટ રૂા.7110 રોકડા અને રૂા.5581નો ચેક એવા 2 સરખા માસિક હપ્તાથી વેચવામાં આવે છે જો વેપારી હપ્તા યોજના નીચે વાર્ષિક વ્યાજ 20% (વ્યાજદર માસે સંયોજાય છે) ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ આકારે તો કેટલી ટેનિવિઝન સેટની રોકડ કિંમત શોધો.*

ઉકેલ : *ઝફજર ર્હુંહૅફઅદ્વીહં* = *રૂા.* 7110

છર્દ્વેહં કિ ૃેફજર ર્દ્વહંરક્ષઅૈ હજંફક્ષદ્વીહં = *રૂા.* $5581.50 = \text{રૂા. } \frac{11163}{2}$

વ્યાજનોદર $= 20\% = \frac{20}{12}\%$ *માસિક*

ધારોકે P_1, P_2 *એ અનુક્રમે પ્રથમ અને દ્વિતિય હપ્તાનું મુદ્દલ છે.*

$$\frac{11163}{2} = P_1\left(1 + \frac{20}{1200}\right) \quad \text{and} \quad \frac{11163}{2} = P_2\left(1 + \frac{20}{1200}\right)^2$$

$$P_1 = \frac{11163}{2} \times \frac{60}{61} = \text{Rs.}5490 \quad \text{and} \quad P_2 = \frac{11163}{2} \times \frac{60}{61} \times \frac{60}{61} = \text{Rs.}5400$$

રોકડ કિંમત = *રૂા.* (7110 + 5490 + 5400)

= *રૂા.* 18000

ટેલિવિઝન સેટની રોકડ કિંમત = *રૂા.* 18,000

ઉદાહરણ 9.15: *એક વેપારી માઈક્રો ઓવન રૂા. 5800 રોકડેથી વેચવાનું નક્કી કરે છે. ગ્રાહક રોકડા રૂા. 1800 અને 3 વાર્ષિક હપ્તા આપવા સહમત થાય છે જો વેપારી વાર્ષિક 12%2 ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ આકારવાનું નક્કી કરે તો દરેક હપ્તાની રકમ શોધો.*

ઉકેલ : *માઈક્રો ઓવનની રોક કીંમત* = *રૂા.* 5800

ખરીદતી વખતે ચૂકવવાની રોક કિંમત = *રૂા.* 1800

ચૂકવવાની બાકી રકમ = *રૂા.* 4000

વ્યાજનો દર વાર્ષિક = 12% *(જે દર વર્ષે ઉમેરાય છે)*

ધારોકે દરેક હપ્તાની 234 x *રૂપિયા છે અને* P_1, P_2, P_3 *અનુક્રમે દરેક હપ્તાનું મુદ્દલ છે.*

$$\therefore\ x = P_1\left(1+\frac{12}{100}\right),\quad x = P_2\left(1+\frac{12}{100}\right)^2 \text{ and } x = P_3\left(1+\frac{12}{100}\right)^3$$

$$\Rightarrow P_1 = \frac{25}{28}x,\ P_2 = \left(\frac{25}{28}\right)^2 x \text{ and } P_3 = \left(\frac{25}{28}\right)^3 x$$

$$\therefore \frac{25}{28}x + \left(\frac{25}{28}\right)^2 x + \left(\frac{25}{28}\right)^3 x = 4000$$

$$\frac{25}{28}x\left(1+\frac{25}{28}+\frac{625}{784}\right) = 4000$$

$$x = 4000\times\frac{28}{25}\times\frac{784}{2109} = \text{રૂા. } 1665.40$$

દરેક હપ્તાની રકમ $=$ રૂા. 1665.40

ઉદાહરણ 9.16: *એક ફ્લેટ રૂા. 16,00,000 રોકડેથી મળે છે અથવા ખરીદતી વખતે રોકડા રૂા. 5,85,500 અને 3 સરખા છ માસિક હપ્તાથી મળે છે. જો વ્યાજનો દર વાર્ષિક છ માસિક હપ્તાથી મળે છે. જો વ્યાજનો દર વાર્ષિક 16% દર છ, માસે ઉમેરવામાં આવે તો દરેક હપ્તાની રકમ શોધી અને વસુલ કરવામાં આવેલું કુલ વ્યાજ શોધો.*

ઉકેલ :

ફ્લેટની રોકડ કિંમત $=$ રૂા. 1600000

ખરીદી વખતે ચુકવેલ રોકડ રકમ $=$ રૂા. 585500

ચુકવવાની બાકી રકમ $=$ રૂા. 1014500

વ્યાજનો દર $= 16\%$ વાર્ષિક $= 8\%$ અર્ધવાર્ષિક

ધારોકે દરેક હપ્તાની રકમ રૂા. x છે અને P_1, P_2 અને P_3 એ અનુક્રમે દરેક હપ્તાનું મુદ્દલ છે.

$$,\ x = P_1\left(1+\frac{8}{100}\right) \text{ or } x = P_1\left(\frac{27}{25}\right) \text{ or } P_1 = x\left(\frac{25}{27}\right)$$

તેજ રીતે $P_2 = x\left(\frac{25}{27}\right)^2$ and $P_3 = x\left(\frac{25}{27}\right)^3$

$$P_1 + P_2 + P_3 = 1014500$$

$$x\left(\frac{25}{27}\right) + x\left(\frac{25}{27}\right)^2 + x\left(\frac{25}{27}\right)^3 = 1014500$$

$$x\left(\frac{25}{27}\right)\left[1+\frac{25}{27}+\left(\frac{25}{27}\right)^2\right] = 1014500$$

$$x.\frac{25}{27}.\frac{2029}{729}=1014500$$

$$x=\frac{1014500\times27\times729}{25\times2029}$$

દરેક હપ્તાની રકમ રૂા. 393660

ચુકવેલ વ્યાજ = રૂા. $(3,93,660\times3-1014500)$

= રૂા. $(1180980-1014500)$

દરેક હપ્તાની રકમ = રૂા. 1,66,480.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 9.4

1. એક સાઈકલ રોકડેથી રૂા. 1661માં અથવા ખરીદતી વખતે રોકડા રૂા.400 અને બાકીની રકમ 3 સરખા અર્ધવાર્ષિક હપ્તાઓમાં ચુકવવાથી મળે છે જો વ્યાજનો દર વાર્ષિક % હોય અને વ્યાજ દર 0 માસે સંયોજાતું હોય, તો હપ્તાની રકમ શોધો.

2. એક વોશિંગ મશીન રોકડેથી રૂા. 15,000 અથવા ખરીદતી વખતે રૂા. 2000 રોકડા અને બે સરખા અર્ધવાર્ષિક હપ્તા ચુકવવાથી મળે છે. જો વ્યાજનો દર વાર્ષિક 16% હોય અને વ્યાજ દર છ માસે સંયોજાતું હોય તો હપ્તાની રકમ શોધો.

3. પ્રકાશે એક કોમ્પ્યુટર હપ્તા પદ્ધતિથી રોકડા રૂા. 1512.50 આપીને તથા રૂા. 8788નો ચેક એવા ત્રણ ત્રિમાસિક હપ્તાથી ખરીદ્યું જો વ્યાજનો દર વાર્ષિક 16% અને વ્યાજ ત્રિમાસિક સંયોજાય કોમ્પ્યુટરની રોકડ કિંમત શોધી વળી કુલ વ્યાજ કેટલું ચૂકવવું તે શોધો.

4. એક કાર 70,000 રોકડેથી અથવા ખરીદતી વખતે રોકડા રૂા. 21200 અને ત્રણ સરખા વાર્ષિક હપ્તાથી મળે છે જો વેપારી વાર્ષિક વ્યાજનોદર 25% આકારે અને વ્યાજ વાર્ષિક સંયોજાયતો દરેક હપ્તાની રકમ શોધો.

5. એક માઈક્રોવેવ ઓવન ખરીદતી વખતે રોકડા રૂા. 2800 અને રૂા. 2420 નો ચેક એવા 2 સરખા વાર્ષિક હપ્તા આપી ખરીદ્યું જો હપ્તા પદ્ધતિ યોજના હેઠળ વ્યાજનો વાર્ષિક દર 10% અને વ્યાજ વાર્ષિક સંયોજાતું હોય તો માઈક્રોવેવની રોકડ કિંમત શોધો.

સારાંશ

. આ યોજના હેઠળ ગ્રાહક શરૂઆતમાં આર્થિક ચુકવણી કરીને અને બાકીની રકમ હપ્તાઓમાં ચુકવવાના કરાર ઉપર સહી કરીને વસ્તુ પોતાના વપરાશ માટે લઈ જાય છે .

. હપ્તા યોજનામાં ખરીદનાર થોડીક વિશેષ રકમ ચૂકવે છે જે બાકી રહેલ ચૂકવણી પરંતુ વ્યાજ છે.

. હપ્તા યોજના ખરીદનારને હપ્તાઓ ચૂકવવા માટે નિયમિત સમય ગાળા માટે બચત કરવા માટે પણ પ્રેરે છે.

. જે કિંમતે વસ્તુ મળતી હોય અને જો પૂરેપૂરી રકમ રોકડામાં ચૂકવવામાં આવે તો તેને વસ્તુની રોકડ કિંમત કહે છે.

. હપ્તા યોજના હેઠળ ખરીદતી વખતે જે આંશિક રોકડ રકમ ચૂકવવામાં આવે છે તેને માલની સામે રોકડ ચુકવણી કહે છે.

. ગ્રાહક દ્વારા ચોક્કસ સમય ગાળામાં આપવી પડતી રકમને હપ્તાઓ કહેવાય છે.

સત્રાંત સ્વાધ્યાય

1. સીવવાનો સંચો રૂા. 2600 રોકડેથી અથવા ખરીદતી વખતે ચુકવવાના રોકડા રૂા. 1000 અને રૂા. 550 નો ચેક એવા 3 માસિક સરખા હપ્તા ચૂકવવાથી મશે છે તો હપ્તા યોજના હેઠળ આકારવામાં આવેલ વ્યાજનો દર શોધો.

2. પ્રકાશ રૂા. 8000ની રોકડ કિંમતનું એક ટાઈપ રાઈટર હપ્તા યોજના હેઠળ રોકડા રૂા. 3200 અને રૂા.1000નો ચેક એવા 5 માસિક સરખા હપ્તા આપીને ખરીદે છે તો હપ્તા યોજના હેઠળ આકારવામાં આવેલ વ્યાજનો દર શોધો.

3. એક ટેબલ રૂા. 2000 રોકડેથી અથવા ખરીદતી વખતે રોકડા 500 અને રૂા. 400નો એક એવા 4 સરખા માસિક હપ્તાથી વેચવામાં આવે છે તો હપ્તા યોજના હેઠળ આકારવામાં આવેલ વ્યાજનો દર શોધો.

4. એક ટીવી સેટની રોકડ કિંમત 7500 અથવા રૂા. 2000 રોકડા અને રૂા. 1000નો એક એવા માસિક 6 હપ્તાથી મળે છે જો વ્યાજનો દર દર મહિને આકરવામાં આવે તો દરેક હપ્તાના રકમ શોધો.

5. એક વસ્તુ રૂા. 700 રોકડેથી અથવા ખરીદતી વખતે રોકડા રૂા. 1900અને 6 માસ સરખા માસિક હપ્તા ઓ છે તો હપ્તા યોજના હેઠળ આકારવામાં આવેલ વ્યાજનો દર શોધો.

6. એક વસ્તુ રૂા.1000 રોકડેથી અથવા ખરીદતી વખતે રૂા. 650 રોકડા અને 5 સરખા માસિક હપ્તાથી વેચાવામાં આવે છે જો વ્યાજનો દર વાર્ષિક 18% આકારવામાં આવે તો સામિસક હપ્તાની (રકમની) ગણતરી કરો.

7. એક વોશિંગ મશીનની વેચાણ કીંમત રૂા. 14000 છે કંપની અગાઉથી રૂા. 14000નો એચ એવા સરખા માસિક હપ્તાથી આવવાના હોય છે જો વ્યાજનો દર વાર્ષિક 12% હોય તો હપ્તાની સંખ્યા શોધો.

8. એક સ્કૂટર રૂા. 30,000 રોકડેથી અથવા વખતે રૂા.15,000 રોકડા અને 4 સરખા માસિક હપ્તાથી મળે છે જો હપ્તા યોજના હેઠળ વ્યાજનો દર $33\frac{1}{3}$,આકારવામાં આવે તો દરેક હપ્તાની રકમ શોધો.

9. જમીનનો એક પ્લોટ રૂા.2,00,000 રોકડેથી અથવા ખરીદતી વખતે રૂા.1,00,000 રોકડા રૂા.21,000નો ચેક એવા 5 માસિક હપ્તાથી મળે છે તો હપ્તા યોજના હેઠળ આકારાયેલ વ્યાજનો દર શોધો.

10. સ્ટીલની એક અલમરીની કિંમત રૂા. 3575 રોકડા અથવા ખરીદતી વખતે રોકડા રૂા. 1600 અને રૂા. 420નો ચેક એવા 5 માસિક હપ્તા યોજના હેઠળ આકારાયેલ વ્યાજનો દર શધો.

11. એક ઘડીયાળની કિંમત રૂા. 1000 રોકડા અથવા ખરીદતી વખતે રોકડા રૂા. 300 અને 5 માસિક હપ્તાથી વેચવામાં આવે તો જો વ્યાજનો દર વાર્ષિક 18% આકારાવામાં આવે તો માસિક હપ્તાની રકમની ગણતરી કરો

12. એક કોમ્પ્યુટર રૂા. 34,000 રોકડાથી અથવા ખરીદતી વખતે રોકડા રૂા. 20,000 અને 5 માસિક હપ્તાથી વેચવામાં આવે તો જો વ્યાજનો દર વાર્ષિક 30% આકારાવામાં આવે તો હપ્તાની રકમની ગણતરી કરો

13. રીટાએ એક વોશીંગ મશીન ખરીદતી વખતે રૂા. 4000 અને 4 સરખા માસિક હપ્તાથી ખરીદ્યું વળી વોશિંગ મશીન કએક ઘડીયાળની કિંમત રૂા. 1000 રોકડા અથવા ખરીદતી વખતે રોકડા રૂા. 300 અને 5 માસિક હપ્તાથી રૂા. 15000 રોકડેથી મળતું હતું. હપ્તા યોજના હેઠળ વ્યાજનો દર વાર્ષિક 18% લેખે આકરવામાં આવતો દરેક હપ્તાની રકમ શોધો.

14. એક સીંગગ ફોન ની રોકડેથી કિંમત 970 અથવા ખરીદતી વખતે રોકડા રૂા. 210 અને 3 સરખા માસિક હપ્તા નક્કી કરવામાં આવે જો વ્યાજનો દર વાર્ષિક 16% હોય, તો માસિક હપ્તા (હપ્તાની રકમ) શોધો.

15. એક એક ઘડીયાળ રોકડેથી કિંમત 970 અથવા ખરીદતી વખતે રોકડા રૂા. 350 અને 3 સરખા માસિક હપ્તા નક્કી કરવામાં આવે જો વ્યાજનો દર વાર્ષિક 24% હોય, તો માસિક હપ્તા (હપ્તાની રકમ) શોધો.

16. એક એક ગ્રાહક દ્વારા ડીવીડી પ્લેયર ખરીદતી વખતે રોકડેથી કિંમત 2750 અને રૂા. 331નો ચેક એવા અને

3 સરખા માસિક હપ્તા નક્કી કરવામાં આવે જો વ્યાજનો દર વાર્ષિક 20% હોય, તો ડીવીડી પ્લેયરની રોકડેથી વેચાણ કિંમત શોધો.

17. એક હાઉસિંગ સોસાયટીમાંથી ફ્લેટ રોકડેથી કિંમત રૂા. 2,00,000 માં અથવા ખરીદતી વખતે રોકડા રૂા. 67600 રોકડા અને 3 સરખા અર્ધવાર્ષિક સંયોજાય છે જો પલેટ હપ્તા યોજના હેઠળ ખરીદવામાં આવે તો દરેક હપ્તાની રકમ શોધો.

18. દુકાન દાર દ્વારા એક સ્ટૂકર ખરીદતી વખતે રૂા. 11,000 રોકડા રૂા. 6250 નો ચેક એવા બે સરખા વાર્ષિક હપ્તાથી વેચવામાં આવ્યું જો વ્યાજનો વાર્ષિક દર 25% હોય અને વ્યાજ વાર્ષિક સંયોજાનું હોય,તો સ્કૂટરની રોકડ વેચાણ કિંમત શોધો.

19. એક એક કોમ્પ્યુટર રોકડેથી કિંમત રૂા. 78600 અથવા ખરીદતી વખતે રોકડા રૂા.25640 અને 3 સરખા ત્રિમાસિક મળે છે જો વેપારી વ્યાજનોદર વાર્ષિક 20% આકારે અને વ્યાજદર ત્રણ માસ સંયોજાતું હોય,તો દરેક હપ્તાની રકમ શોધો.

20. એક બાંધકામનો કાંન્ટ્રાક્ટર રોકડા રૂા. 30,00,000 અથવા ખરીદતી વખતે રોકડા રૂા. 10,31,600 અને 3 સરખા ત્રિમાસીક હપ્તાથી વેચવાની જાહેરાત કરે છે જો વ્યાજનો દર વાર્ષિક 10% અને વ્યાજદર ત્રણ માસે સંયોજાતુ હોય,તો હપ્તા યોજના હેઠળ દરેક હપ્તાની રકમની ગણતરી કરો, વળી કુલ વ્યાજ પણ શોધો.

તમારી પ્રગતિ ચકાસોના જવાબો

9.1

1. 42.87% 2. $44\frac{4}{9}$ 3. $21\frac{1}{19}$% 4. $17\frac{1}{7}$% 5. 4.69%

6. 51.1% 7. 47.06%

9.2

1. રૂા. 4000 2. $\frac{200}{9}$ 3. રૂા. 775.77

4. રૂા. 1934.55 4. રૂા. 77.6 લગભગ,

9.3

1. રૂા. 1150 2. રૂા. 10,000 3. રૂા. 2500

4. રૂા. 970 5. રૂા. 3580

9.4

1. રૂા. 463.05 2. રૂા. 7290 3. રૂા. 30,000, રૂા. 1976.50

4. રૂા. 25000 5. રૂા. 7000

સ્ત્રાંત સ્વાધ્યાના જવાબો

1. $19\frac{1}{21}$% 2. $17\frac{1}{7}$% 3. $33\frac{1}{3}$ 4. $33\frac{1}{3}$

5. રૂા. 920 6. રૂા. 63.35 7. 5 8. રૂા. 4000

9. 20.7% 10. 26.43% 11. રૂા. 146.12 12. રૂા. 3000

13. રૂા. 2850.86 14. રૂા. 366 (છૂટ) 15. ’220 16. રૂા. 6060

17. રૂા. 53240 18. રૂા. 20,000 19. ’19448

20. રૂા. 689210, રૂા. 99230

માધ્યમિક અભ્યાસક્રમ
ગણિત

મહાવરો - વાણિજ્ય ગણિત

મહતમ ગુણ : 25 **સમય : 45 મિનિટ**

સુચનાઓ :

1. *બધાજ પ્રશ્નોના જવાબ અલગ પત્રકમાં આપો.*
2. *નીચે આપેલ માહિતી તમારી ઉત્તરવહીમાં આપો.*

   નામ

   એનરોલમેન્ટ નંબર

   વિષય

   મહાવરાનો વિષય

   સરનામુ
3. *તમારો મહાવરો તમારા અભ્યાસકેન્દ્રના શિક્ષકને બતાવો અને તમારી કામગીરીનો હકારાત્મક અભિપ્રાય મેળવો.*

મહાવરો રાષ્ટ્રીય મુક્ત વિદ્યાલયી શિક્ષણ સંસ્થામાં મોકલશો નહીં.

1. *દુકાનદાર રૂા.* 660 *ની એક સ્કૂલ બેગ વેચતા* 10 % *નફો કરે છે, તો સ્કૂલ બેગની પડતર કિંમત શોધો.*

   (A) 625 (B) 600

   (C) 575 (D) 550

2. *ગ્રાહક રૂા.*5400 *માં એક રેડિયો વેચાણ કિંમતના* 10 % *વળતરથી ખરીદે છે, તો તે રેડિયાની વેચાણ કિંમત શોધો.* 1

   (A) ₹ 5050 (B) ₹ 5800

   (C) ₹ 5950 (D) ₹ 6000

3. *એક ચોપડીની વેચાણ કિંમત* 300 *રૂપિયા છે એક વિદ્યાર્થી એ બુક* 234 *માં ખરીદે છે, તો તેને કેટલા રૂપિયા વળતર મળ્યુ હશે ?* 1

   (A) 25 (B) 24

   (C) 22 (D) 20

4. 35 સે.મી. થી 2 મીટર નો ગુણોત્તર.. 1

   (A) 35: 2 (B) 35:200

   (C) 7:40 (D) 40:7

5. રૂા.2000 નો 10 ટકા લેખે 2 વર્ષનો સાદુ અને ચક્રવૃત્તિ વ્યાજનો વાર્ષિક તફાવત કેટલો થાય. 1

   (A) ₹ 20 (B) ₹ 200

   (C) ₹ 400 (D) ₹ 0

6. 20 : k :: 25 : 450 હોય તો k ની કિંમત શોધો. 2

7. જો 120 ને 96 સુધી ઘટાડવામાં આવે તો કેટલા ટકા ઘટાડો થયો છે ? 2

8. જો 15 લેખોની પડતર કિંમત 12 લેખોની વેચાણ કિંમત જેટલી હોય તો આ વ્યવહારમાં નફો અથવા નુકશાન (ટકા%) માં શોધો. 2

9. વટાવ શ્રેણી 20 % 15% અને 10 % સમકક્ષનો એક વટાવ શોધો. 2

10. એક રકમ છ મહિનામાં 8 % વાર્ષિક વ્યાજે રૂા. 26010 થાય તો તે રકમ શોધો, જ્યારે તેનું વ્યાજ ત્રિમાસિક છે. 2

11. એક સીવણ મશીન રૂા.2600 રોકડા અથવા પ્રથમ રૂા.1000 રોકડ ચુકવણી અને પછી રૂા.550 ના 3 માસિક હપ્તા થઈ મળે છે.તો માસિક હપ્તા ખરીદીમાં ગણેલ વ્યાજ શોધો. 4

12. એક વૃક્ષ મહિનાના પ્રારંભમાં હતી તેનાથી 2 % ના દરે ઉંચાઈ મેળવે છે, જો તેની ઉંચાઈ જાન્યુઆરી 2010 ની શરૂઆતમાં 1.5 % હોય તો એપ્રિલ 2010 મહિનાના અંતમાં તેની ઉંચાઈ કેટલી હોય.

મોડ્યુલ 1

બીજગણિત

જ્યારથી સંસ્કૃતિની શરૂઆત થઈ ત્યારથી માનવ તેના વડે વપરાતા અથવા તેના જીવન સાથે સંકળાયેલ વસ્તુઓ, પથ્થરો, પ્રાણીઓ, વૃક્ષો વગેરેનો હિસાબ રાખતો થયો. જેટલા પ્રાણીઓને ચારવા લઈ જવાતા તેટલા નિશાન પથ્થર પર લગાડવામાં આવતા, જેથી કેટલા પ્રાણીઓ બહાર ગયા તેનો ખ્યાલ રહે. જ્યારે પ્રાણીઓ પાછા આવે ત્યારે દરેક નિશાનને ભૂસી નાંખવામાં આવતા. બધા નિશાનો ભૂસાઈ જાય તો બધા જ પ્રાણીઓ પાછા ફર્યા છે તેનો ખ્યાલ આવી જાય. આ રીત વડે ગણતરી ન આવતી હોય તો પણ હિસાબ રાખી શકાય. ધીરે ધીરે સંસ્કૃતિ આગળ વધી અને ગણતરીથી આ કાર્ય થવા લાગ્યું. તમને જાણીને ખુશી થશે કે અત્યારે વપરાતા આંકડાઓ 0,1,2,3....9 અને સ્થાન કિંમત એ આ પૌરાણિકત લોકોની જ ખોજ છે. ભારતની આ ખોજ અરબિયન રાજા પાસે પહોચીં. અરબિયન રાજા અલ-મંસુર ના ઈમાનદાર માણસ અલ-ખ્વારીઝમી વડે આ કામને તેમની ભાષામાં ભાષાંતર કરવામાં આવ્યું. અરબિયનથી આ આંકડાકીય જ્ઞાન પશ્ચિમી દુનિયામાં પહોચ્યું તેથી તેને હિન્દુ અરેબિક આંકડાકીય કહેવામા આવે છે.

બીજગણિતએ અંકગણિતનો વિશેષ સ્વરૂપ છે.જેમાં ચલએ આંકડાઓની જગ્યાએ વપરાય છે. આર્યભટ્ટ (ઈ.સ.476) અને બ્રહ્માગૃપ્તા (ઈ.સ.578) એ પ્રથમ ગણિતશાસ્ત્રી હતા. જેમને ચલ આંકડાઓ માટે વાપર્યા અને તેને 'યવાત-તવાત' કહેવાયું. તેમને ચલ વાડી પદાવલીઓના તફાવત, ગુણાકાર-ભાગાકાર માટે ઉદાહરણ આપ્યા. તેને તે પદાવલીઓનો વર્ગ, ઘન, વર્ગમૂળ, ઘનમૂળ માટે પણ ઉદાહરણ આપ્યા. આર્યભટ્ટ અને બ્રહ્મગૃપ્તાએ સુરેખ સમીકરણ, દ્વિઘાત સમિકરણ, નિશ્ચાયકી સમીકરણને ઉકેલવા માટે કાર્ય કર્યું. આ સમીકરણની ઉકેલને "ચક્વાલ અને બીજગણિત" ને અમર ગણિત આપ્યું. ભાસ્કરાચાર્ય્ ને મહાવીર આચાર્યે પણ આ ગણિતને ઘણું બધુ આપ્યું. ખાસ કરી પ્રમાણ અને સમપ્રમાણ વડે આ કામને અગાઉના ગણિતશાસ્ત્રી કરતા ઘણું આગળ લઈ ગયા. ઘાતાંક અને અસંયમ આ ગણિતને નામ બીજગણિત ભાસ્કરાચાર્યે આપ્યું. બીજગણિતને કહેવાનો શ્રેય અલી મસૂરના ઈમાનદાર માણસ અલી ખ્વારીજમીને જાય છે. આ મોડ્યુલમાં આપણે સંખ્યાપદ્ધતિઓ, બહુપદીઓ, બીજગણિતીય પદાવલીનો, અવયવીકરણ, સંમેય પદાવલીનું સાદુરૂપ, સુરેખ અને દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ, ઘાતાંક અને અસંમેય સંખ્યા, સમાંતર અને ભૂમિતીય શ્રેણીનો અભ્યાસ કરીશું.

મોડ્યુલ 2

વાણિજ્ય ગણિત

વડીલોની કહેવત છે કે તમારો ખર્ચ તમારી આવકથી ઓછો હોવો જોઈએ. આનો અર્થ એમ થાય છે કે સંકટ સમય માટે કંઈક સંગ્રહ કરવું. તમે પક્ષીઓ અને પ્રાણીઓને ખોરાક ભેગા કરતાં જોયા હશે. જે તેમને ચોમાસામાં મદદરૂપ થાય છે. આ મોડ્યુલમાં વિદ્યાર્થીને બચતના મહત્વ અને જરૂરીયાત વિશે કહેવામાં આવ્યું છે.

ઘણા ભારતીયશાસ્ત્રીઓ એ વાણિજ્ય ગણિત વિષય પર કામ કરેલ છે. યોડોક્સુ (370 બી.સી.) એ અપૂર્ણાંક અને પ્રમાણ અને સમપ્રમાણ પર કામ કરેલ છે. અશોકા અને ચંદ્રગૃપ્તના સમયે તેમના વિસ્તારમાં કર જારી કરવા વિશે વિસ્તૃત સમજ છે. ઘણા બધા ગણિતશાસ્ત્રીઓના પ્રયોગો અને સપ્રમાણતા પરના કાર્યની સમજ છે. (આર્યભટ્ટ, મહાવીર, બ્રહ્મગુપ્ત, શ્રીધર આચાર્ય) 900 એ.ડી. માં બખશાલી સંક્ષિપ્તનોંધ શોધાઈ. જેમાં ઘણી મુસ્કેલીઓ વાણિજ્ય ગણિત પર હતી.

આપણી બચતને સાચવવીએ બીજુ મુશ્કેલ કાર્ય છે. બેંક અને બીજી નાંણાકીય સંસ્થા ગ્રાહકના નાણાં રાખે છે અને મુદ્દત પુરી થતાં વધારાના રૂપિયા આપે છે. જેને વ્યજ કહેવામા આવે છે. જે નાગરિકને રૂપિયા રોકવામાં પ્રેરે છે. તેથી વ્યાજની ગણતરી ગણવામાં શિખવાડવામા આવે છે.

સરકાર નાગરીકોને ઘણીબધી સવલતો આપે છે. તે માટે સરકાર નાગરીકો ઉપર વેરો નાંખે છે. આ પ્રકારનો એક વેરો વેચાણ વેરો છે. જે અભ્યાસ કરતાં તમે આ મોડ્યુલમાં ભણસો. વેચાણ અને ખરીદી માટે નાંણાકીય લેવડ-દેવણ નફો કરવાના હેતુથી કરાય છે. જો માલનો વધુ પડતો જથ્થો આવી જાય કે જથ્થો બરાબર ન હોય તો તેને ખાદ ખાઈને પણ વેચવો પડે છે. ઘણીવાર આપણા પાસે નાણાંકીય સગવડ ન હોય તો વસ્તુઓ હપ્તા પદ્ધતિથી ખરીદવી પડે છે તેથી વિદ્યાર્થીઓ હપ્તા પદ્ધતિના વ્યાજની ગણતરી શીખવાડવામાં આવે છે. ઘણી વખત આપણે લોન ન ચુકવી શકીએ ત્યારે વ્યાજ પર પણ વ્યાજ ગણાય છે. જેને ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ કહેવાય છે. તેથીજ આ મોડ્યુલમાં ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ લેવામાં આવેલ છે. ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજના સુત્ર વડે વસ્તુની કિંમતમાં ભાવ વધારો કે ઘટાડો શોધવામાં આવે છે. જે તેજી અને મંદીમાં ભણાવવામાં આવે છે.

મોડ્યુલ 3

ભૂમિતી

ભૂમિતીએ ગણિતનો એવો ભાગ છે જે વિવિધ આકૃત્તિઓ અને તેની લાક્ષણિકતાઓ વિશે સમજ પુરી પાડે છે ભૂમિતી એટલે ભૂમિનું માપન એટલે પૃથ્વીનું માપન. જુના જમાનામાં માનવે ઘર કે ખેતરની હદ નક્કી કરવા માટે માપવાનું શરૂ કર્યું ત્યારથી ભૂમિતી અસ્તિત્વમાં આવી. આવી ભૂમિતીય આકૃત્તિના ક્ષેત્રફળ શોધવા બેબેલીનિય અને ઈજીપ્તીયનોએ ઘણા સૂત્રો શોધ્યા.

ભારતે ગણિતશાસ્ત્રીઓએ પણ ભૂમિતીના વિકાસમાં મહત્વની ભૂમિકા ભજવી છે. જે હડપ્પા અને માર્હે-જો-દડો સંસ્કૃતિ પરથી જાણવા મળે છે.સુલભસુત્ર જે વૈદિક સમયે વપરાતા અને ગણિતશાસ્ત્રી બૌદ્ધાયાને પણ બહુ ઊંચુ કાર્ય કર્યું જેને કહ્યું અને સાબિત કર્યું. પાયથાગોરસ પ્રમેય અને ભૂતકાળ ભારતમાંથી ભૂમિતીને બહુ બધુ મળ્યું.

ગ્રીક ગણિતશાસ્ત્રી યુકિલેડે તેના સમયે (330 બી.સી.) સુધીનું બધુજ ભૂમિતીનું જ્ઞાન ભેગુ ક્યું અને તેને વ્યવસ્થિત રીતે ગોઠવી એક તાર્કિક અભિગમ આપ્યો પછી તેને પૂર્ણ તાર્કિક આકાર આપ્યો.

પૂર્ણ તાર્કિક રીતમાં ભૂમિતીનો અભ્યાસ મૂકેલ છે. આપણે ભૂમિતી સહજ રીતે ભણીએ છીએ. વ્યવસ્થિત ઉદાહરણ વડે વ્યાખ્યાને સમજાવવી, લાક્ષણિકતા અને તાર્કિક તારણો વડે સમજ આપવી તેને પ્રમેય કહેવાય.

આ ભૂમિતીના મોડ્યુલમાં આપણે રેખાઓ, ખૂણાઓ, ત્રિકોણો, ચતુષ્કોણો અને વર્તુળો વિશે અને તેના ગુણધર્મો વિશે અભ્યાસ કરીશું.

મોડ્યુલ 4

માપદંડ

બધા જ ગણિતશાસ્ત્રીમાં વિચાર રોજીંદા જિંદગીના અનુભવથી ઉદ્ભવે છે. પ્રથમ જરૂરીયાત વસ્તુને ગણવાની પડી. જેથી આંકડાઓ અસ્તિત્વમાં આવ્યા. જ્યારે મનુષ્યે ખેતીવાડી શીખી ત્યારે નીચે જણાવેલ મુશ્કેલીઓ પડી.

(1) જ્યાં છોડ ઉગાડવાના હોય તે ખેતર કે જમીન ફરતે વાડ કે કાંટાળા તાર લગાડવાની જરૂર પડી.

(2) અલગ અલગ પ્રકારના પાક માટે અલગ માપનની જમીનની જરૂર પડી.

(3) પાક પેદાશોને સંગ્રહ કરવાની વ્યવસ્થિત જગ્યા જેથી પરિમિતિ, ક્ષેત્રફળ કે ઘનફળના માપનની જરૂર પડી. જેથી ગણિતમાં મેનસ્યુરેશનનો ઉદ્ભવ થયો. જેમાં આપણે ખેતર ફરતે વાયર લગડવાનો ખર્ચ, લાદી પર ટાઈલ્સનો ખર્ચ, દિવાલ બનાવવા વપરાતી ઈંટોનો ખર્ચ, ખેતર ખેડવાનો ખર્ચ, પાણીની ટાંકી બનાવવાનો ખર્ચ, ટેબલને પોલીસ કરવાનો ખર્ચ, દરવાજા પોલીશ કરવાનો ખર્ચ વગેરે આવરી લીધેલ છે. ઉપરના પ્રશ્નો પરથી આપણે મેનસ્યુરેશનને "ફર્નિચર અને દિવાલ" નું વિજ્ઞાન કહેવાય છે.

ઉપર પ્રમાણેના દાખલા ગણવા માટે આપણે બંધ આકૃત્તિઓની પરિમિતિ અને ક્ષેત્રફળ શોધવું પડે અને ઘન આકૃત્તિઓનું પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ શોધવું પડે. તમે પરિમિતિ ક્ષેત્રફળ પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ વિશે પહેલેથી જ જાણતા હશો. આ મોડ્યુલમાં આપણે ઉપરના એકમોનો વિસ્તુત અભ્યાસ પરિણામ અને સૂત્રો પરથી કરીશું.

મોડ્યુલ 5

ત્રિકોણમિતિ

ધારોકે એક વ્યક્તિ પર્વતના પાયા પાસે ઊભો છે અને તેને ટોચ પર આવેલ મંદિર જોવે છે. ઉપર ચડવાનું ચાલુ કર્યા પહેલા તેને તે મંદિરનું નીચેથી અંદાજીત અંતર શોધવું છે. આપણે જાણિએ છીએ કે આવા એકમોને જે વિજ્ઞાન વડે ગણાય તેને ત્રિકોણમિતિ કહેવાય છે.

પહેલુ સોપાન આ ક્ષેત્રમાં હિપારકસસે 140 *બી.સી. માં સર કર્યુ. જ્યારે તેને ન પહોંચી શકાય તેનો વસ્તુઓ વચ્ચેનું અંતર અને ઉચાઈ શોધવાની શક્યતાઓ વતાવવી.* 150 *એ.ડી. માં ટોલમી એ ફરીથી આજ શક્યતાઓ કાટકોણ ત્રીકોણ વડે બતાવી. પણ તે આર્યભટ્ટા* (476 AD *) હતો જેના પ્રસ્થાવનાથી નામ જ્યાં આવ્યું તે પરથી* 'Sine' *આવ્યું . આ વિષય ભાષ્કર આચાર્ય* (1114 AD*) વડે પૂર્ણ કરાયું તે દરમ્યાન તેનું લખાણ કાર્ય ગોલાદ યાય પર ચાલતું હતું જેમાં તેને શબ્દ જ્યા, કોતીજ્યા અને સ્પશીયા વાપર્યા જે અત્યારે* Sine, Cosine *અને* Tangent *તરીકે વપરાય છે. પણ ખરેખર તો શ્રેય નીલકુન્થ સોમસ્તુવાનને જાય છે. જેને આ વિજ્ઞાનને પ્રગતિ આપી અને ઉત્સેધ અને અવસેધ જેવા એકમોને ઉદાહરણ વડે સમજાવવા અંતર અને ઉંચાઈના દાખલા આપ્યા.*

આ પાઠમાં આપણે ખૂણો ધન કે ઋણની વ્યાખ્યા કીરણના ભ્રમણ મુળસ્થિતિ પરથી વડે આપરી શકીએ. ત્રિકોણ મિતીય વિધાનોની વ્યાખ્યા, ત્રિકોણ મિતીય સૂત્રો, અંતર ઉંચાઈના દાખલા, વધુમાં વધુ બે કાટકોણ ત્રિકોણો વડે 30,45,60,*નો ખૂણો વાપરીને દાખલા ગણી શકાય.*

મોડ્યુલ 6

આંકડાશાસ્ત્ર

અત્યારનો નવો સમાજ માહિતી આધારિત છે તે નક્કી કરવું મુશ્કેલ છે કે આપણી જીંદગીનું કોઈ પાસુ સમાચાર પત્ર,જાહેરાત, મેગેઝીન, સાપ્તાહિક અને બીજા જાહેરાતના એકમો રેડીયો,ટેલીવીઝન,ઈન્ટરનેટ વેગેરેને સ્પર્શ કર્યા વગર ચાલે નહીં. આ માહિતીનો સંબંધ મોરીટેલીટી દર, શિક્ષણ દર,ક્રિકેટ સરેરાશ,જુદા જુદા શહેરોમાં વરસાદ,જુદા જુદા શહેરોના તાપમાન,પાંચવર્ષિય પ્લાન પર ખર્ચ, વગેરે પર છે. તેથી તે મહત્ત્વનું છે કે આ માહિતી પરથી જરૂરી અને અર્થ પૂર્ણ માહિતી કેવી રીતે કાઢી શકાય જરૂરી અને અર્થ પૂર્ણ માહિતી કાઢવાના ગણિતના ભાગને આંકડાશાસ્ત્ર કહેવાય છે.

" માહિતી અને તેનું પૃથ્થકરણ " પાઠમાં અભ્યાસ કરતો વિવિધ માહિતી અને તેનું પૃથ્થકરણ આવૃત્તિ,આવૃત્તિ વિતરણ,સંચીય આવૃત્તિ વિતરણ, ગ્રાફ વડે,બાર ગ્રાફ વડે, હિસ્ટોગ્રામ અને આવૃત્તિ બહુકોણ વિશે માહિતગાર થાય.

ઘણી વખત આપણને માહિતીને અંકોની રીતે દર્શાવવા મધ્યક, મધ્યસ્થ,બહુલક,સરેરાશ, જેવા એકમોનો ઉપયોગ કરવો પડે છે. તેથી જ આપણને ચોક્કસ માપ શોધવું પડે છે. જે માહિતીને સંક્ષીપ્ત કરે છે. 'મધ્ય્થ સ્થિતિમાનનું માપન' પાઠમાં વિકાસ કરતા મધ્યક, મધ્યસ્થ, બહુલક જેવા એકમો શીખી શકે.

'સંભાવના ' પાઠમાં અભ્યાસ કરતા અચોક્કસ માપની સંભાવનાનો અભ્યાસ સિક્કો ઉચાળવો, ડાઈનાખવી, કોઈ એક પત્તુ પસંદ કરવું વગેરે રમત વડે શીખી શકે.

...ક્રિયા અને પાઠો

...	પાઠનું નામ	વિષયવસ્તુ			ભાષા		ચિત્ર		તમે શું શીખ્યા	
		મુશ્કેલ	મનોરંજક	મુંઝવતું	સાદી	જટિલ	ઉપયોગી	બિન ઉપયોગી	ખુબ જ ઉપયોગી	બિન ઉ...

---ચોથું ફોલ્ડ---

---ત્રીજો ફોલ્ડ---

...મિત્રો,

...ખા સ્વાધ્યાય પુસ્તકને ચોકકસપણે આનંદથી માણ્યું હશે. અહીં અમારો પ્રયત્ન ...સ સામગ્રીને સુસંગત, અસરકારક અને રસપ્રદ બનાવવાનો રહ્યો છે. અભ્યાસ ...યાર કરવી એ દ્વિમાગી પ્રક્રિયા છે. તમારા પ્રતિભાવો અમને આ અભ્યાસ ... સુધારવામાં મદદરૂપ થશે. થોડો સમય કાઢીને અહીં આપેલ પ્રતિભાવપત્રક ...થી વધુ રસપ્રદ અને ઉપયોગી સામગ્રી બનાવી શકાય.

...નેટર

...ાન)

પ્રતિક્રિયા ઉપર પ્રશ્નો

પાઠ નં.	પાઠનું નામ	Intext પ્રશ્નો		ટમિર્નલપ્રશ્નો		
		ઉપયોગી	બિનઉપયોગી	સહેલા	મુશ્કેલ	ખુબ મુ...
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						
7.						
8.						
9.						
10.						
11.						
12.						
13.						

બીજો ફોલ્ડ

શું તમે મનોવિજ્ઞાનના અભ્યાસ માટે બીજા કોઈ પુસ્તકનો ઉપયોગ કર્યો ?

હા / ના

જો હા, તો ઉપયોગ કરવાનું કારણ આપો.

નામ : ______________________

એનરોલમેન્ટ નં. ____________________

સરનામું : ______________________

____

વિષય : ____________________

પુસ્તક નં. : ____________________

ટપાલ
ટિકિટ

રાષ્ટ્રીય મુક્ત વિદ્યાલય શિક્ષણ સંસ્થાન
(MHRD), ભારત સરકાર હસ્તક (સ્વાયત્ત) સંસ્થા)
એ-૨૪-૨૫, ઇન્સ્ટિટ્યૂશનલ વિસ્તાર, સેક્ટર- ૬૨, નોઈડા-
૨૦૧૩૦૯ (યુ. પી.)

માધ્યમિક અભ્યાસક્રમ

211 - ગણિત

પુસ્તક - 2

અભ્યાસક્રમ સહયોજક
નિરજ પ્રતાપ સિંઘ

ભાષાંતર સહયોજક
ડૉ. રાજેશ કુમાર

રાષ્ટ્રીય મુક્ત વિદ્યાલયી શિક્ષણ સંસ્થાન
(એમ.એચ.આર.ડી, ભારત સરકાર હેઠળની એક સ્વાયત સંસ્થા)
એ - 24-25, ઈન્સ્ટિટ્યુશનલ, એરીયા સેક્ટર - 62 નોઈડા -201309 (ઉ.પ્ર)
વેબસાઈટ : www.nios.ac.in, ટોલ ફ્રી નં. 18001809393

(કોપી)

સચિવ, રાષ્ટ્રીય મુક્ત વિદ્યાલયી શિક્ષણ સંસ્થાન, એ-૨૪-૨૫, ઈન્સ્ટિટ્યૂશનલ એરિયા નેશનલ હાઈવે ૨૪, સેક્ટર-૬૨, નોઈડા-૨૦૧૩૦૯ દ્વારા પ્રકાશિત અને મુદ્રિત

સલાહકાર સમિતિ

ડૉ.સિતાંશુ એસ.જેના
અધ્યક્ષ
રાષ્ટ્રીય મુક્ત વિદ્યાલયી શિક્ષણ સંસ્થાન

ડૉ.કુલદીપ અગ્રવાલ
નિયામક (શૈક્ષણિક)
રાષ્ટ્રીય મુક્ત વિદ્યાલયી શિક્ષણ સંસ્થાન

કુમારી ગોપા બિસવાસ
સંયુક્ત નિયામક (શૈક્ષણિક)
રાષ્ટ્રીય મુક્ત વિદ્યાલયી શિક્ષણ સંસ્થાન

અભ્યાસક્રમ સમિતિ

અધ્યક્ષ
પ્રો. મોહન લાલ
સચિવ, દેવ કોલેજ મેનેજિંગ કમિટી,
ઈ-182, ન્યુ રાજેન્દ્ર નગર, નવી દિલ્હી, પિન-110060

શ્રી જી.ડી. ઢાલ
રીડર (નિવૃત), એન.સી.ઇ.આર.ટી.,
કે-171, એલઆઈસી કોલોની,
પશ્ચિમ વિહાર, નવી દિલ્હી, પિન-110087

શ્રી. જે.સી. નીજાહવન
ઉપ આચાર્યશ્રી (નિવૃત),
સર્વોદય વિદ્યાલય, સી બ્લોક,

પ્રો. રામવતર
પ્રોફેસર (નિવૃત્ત), એન.સી.ઇ.આર.ટી.,
533, સેક્ટર 7, અર્બન એસ્ટેટ,
ગુડગાંવ, હરિયાણા, પિન-122001

શ્રી. પી.કે. ગર્ગ
નિવૃત. આચાર્યશ્રી-રામજસ શાળા,
169, પુન્દ્રીક વિહાર, સરસ્વતી વિહાર,
નવી દિલ્હી, પિન-110034

શ્રી. મહેન્દ્ર શંકર
લેક્ચરર (નિવૃત), સિલેકશન ગ્રેડ, NCERT.,
ડીપી-203, મૌર્ય વિદેશી થાણું, પ્રિતમપુર,
નવી દિલ્હી, પિન-110088

શ્રી. ઈશ્વર ચંદ્ર
રીડર (નિવૃત), NCERT,
એચ. નં.-WZ 1427D, નંગલ રાયા,
નવી દિલ્હી, પિન-110046

શ્રી સુવેન્ધુ શેખર દાસ
સહાયક નિયામક (શૈક્ષણિક),
નેશનલ ઇન્સ્ટિટ્યૂટ ઓફ ઓપન સ્કૂલ,
એ-24/25, સંસ્થાકીય વિસ્તાર, સેક્ટર 62,
નોઈડા, પિન-201309

શ્રી નીરાજ પ્રતાપ સિંઘ
સિનિયર એક્ઝિક્યુટિવ ઓફિસર (ગણિત),
નેશનલ ઇન્સ્ટિટ્યૂટ ઓફ ઓપન સ્કૂલ,
એ-24/25, સંસ્થાકીય વિસ્તાર, સેક્ટર 62,
નોઈડા, પિન-201309

પાઠ લેખકો અને સમીક્ષકો

શ્રી પી.કે. ગર્ગ
નિવૃત આચાર્યશ્રી-રમજસ શાળા,
169, પુન્દ્રીક વિહાર, સરસ્વતી વિહાર,
નવી દિલ્હી

અધ્યાપક રામવતર
પ્રોફેસર (નિવૃત્ત), NCERT,
533, સેક્ટર 7, અર્બન એસ્ટેટ,
ગુડગાંવ, હરિયાણા, પિન-122001

શ્રી. મહેન્દ્ર શંકર
લેક્ચરર (નિવૃત), સિલેકશન ગ્રેડ,
NCERT, ડીપી-203, મૌર્ય વિદેશી થાણું,
પ્રિતમપુરા, નવી દિલ્હી, પિન-110088

સંપાદકો

પ્રો. મોહન લાલ
સચિવ દેવ કોલેજ મેનેજીંગ
સમિતિ, ઈ 182, નવી રાજેન્દ્ર નગર,
નવી દિલ્હી, પિન-110060

શ્રી જે.સી. નીજવાહન
ઉપ આચાર્યશ્રી (નિવૃત),
સર્વોદય વિદ્યાલય, સી બ્લોક,
સરસ્વતિ વિહાર, નવી દિલ્હી, પિન-110087

ડૉ. રાજપાલ સિંઘ
લેક્ચરર ગણિત,
રાજકીય પ્રતિભા વિકાસ વિદ્યાલય,
18, મૈત્રી એપા., પ્રતાપનગર
નવી દિલ્હી, પિન-110092

ડૉ. આઈ.કે. બાંસલ
પ્રોફેસર અને વડા (નિવૃત્ત), NCERT
પ્રાથમિક શિક્ષણ વિભાગ,
129, પોકેટ સી -13, સેક્ટર -3, રોહીણી,
નવી દિલ્હી, પિન-110085

ડૉ કે.કે. વશિષ્ઠા
પ્રોફેસર (નિવૃત્ત), NCERT
15/107 વિભાગ, HIG ડુપ્લેક્સ, વસુંધરા,
ગજીયાબાદ, ઉત્તર પ્રદેશ, પિન-201012

ડૉ કે.એમ. ગુપ્તા
પ્રોફેસર (નિવૃત્ત), NCERT
15/107, આશિર્વાદ, સી 29, સુલતાનપુર
કોલોની, નવી દિલ્હી, પિન-110030

શ્રી જી.ડી.ઢાલ
રીડર (નિવૃત), એન.સી.ઇ.આર.ટી.,
કે-171, એલઆઈસી કોલોની,
પશ્ચિમ વિહાર, નવી દિલ્હી, પિન-110087

શ્રી સુવેન્ધુ શેખર દાસ
સહાયક નિયામક (શૈક્ષણિક),
નેશનલ ઇન્સ્ટિટ્યૂટ ઓફ ઓપન સ્કૂલ,
એ-24/25, સંસ્થાકીય વિસ્તાર, સેક્ટર 62,
નોઈડા, પિન-201309

શ્રી નીરજ પ્રતાપ સિંઘ
સિનિયર એક્ઝિક્યુટિવ ઓફિસર (ગણિત),
નેશનલ ઇન્સ્ટિટ્યૂટ ઓફ ઓપન સ્કૂલ,
એ-24/25, સંસ્થાકીય વિસ્તાર, સેક્ટર 62,
નોઈડા, પિન-201309

ગ્રાફિક્સ આર્ટિસ્ટ

શ્રી મહેશ શર્મા
ગ્રાફિક્સ આર્ટિસ્ટ
રાષ્ટ્રીય મુક્ત વિદ્યાલયી શિક્ષણ સંસ્થાન,
નોઈડા

ગ્રાફિક અને ડેટા સિસ્ટમ દ્વારા ટાઈપસેટીંગ લેસર

અધ્યક્ષશ્રીનો સંદેશ

પ્રિય અભ્યેતા / વિદ્યાર્થી

સતત પરિવર્તિત થતા જતા જન-સમાજની જરૂરીયાતો કેટલાંક જૂથોની સમય સાથે પરિવર્તિત થવાની પધ્ધતિ અને આવડતને પરિપૂર્ણ કરવા માટે જરૂરી અપેક્ષાઓ અનુસાર બદલાય તે અનિવાર્ય બાબત ગણાય. શિક્ષણએ પરિવર્તન માટેનું એક અદકું ઓજાર છે. યોગ્ય સમયનું અને યથાયોગ્ય શિક્ષણ જ સમાજની મહત્વાકાંક્ષાઓની આપૂર્તિ કરવા ઉપરાંત નવીન સમસ્યાઓનો સામનો કરવા તેમજ તે માટે જોઈતી હિંમત કેળવવા સારૂ વ્યાવહારિક પરિવર્તનની આવશ્યકતા હોય છે. અવાર નવાર તેમજ તબક્કાવાર રીતે પાઠ્યક્રમોમાં જરૂરી ફેરફારો દ્વારા અસરકારક રીતે આવું સઘળું પરિવર્તન કરી શકાય. કોઈ પણ જડ (અપરિવર્તન શીલ) પાઠ્યક્રમ આવો કોઈજ હેતુ પાર પાડી શકે નહી. કારણ કે તે આવી કોઈ વૈયક્તિક અથવા સામાજિક (સામૂહિક) જરૂરીયાતને પોષાતો હોતો નથી.

એકમાત્ર ઉક્ત હેતુસર સમગ્ર રાષ્ટ્રના કેળવણીકારોએ સમયાન્તરે એકઠા થઈને આવા પરિવર્તન માટે જરૂરી ચર્ચા-વિચારણાઓ કરવી જોઈએ. આથી જ એક ચર્ચા-વિચારણાની ફલશ્રુતિ રૂપે રાષ્ટ્રીય પાઠ્યક્રમ માળખા (NCF 2005) ની રચના કરવામાં આવી છે. તેણે વિવિધ કક્ષાઓ જેવી કે પાયાની પ્રાથમિક, માધ્યમિક તેમજ ઉચ્ચ માધ્યમિક શિક્ષણ સંદર્ભે વિષદ ચર્ચા- વિચારણાઓને અંતે એક ભૂમિકા તૈયાર કરી છે.

ઉક્ત તમામ -રાષ્ટ્રીય તથા સામાજિક બાબતોને ધ્યાનમાં રાખી ને અમે તાજેતરમાં માધ્યમિક કક્ષાનો પાઠ્યક્રમ અદ્યતન તેમજ જરૂરીયાત અનુસારનો બની રહે એ રીતે સુધાર્યો છે આમ તો અભ્યાસ સામગ્રીનું ઉત્પાદન એ NIOS કાર્યક્રમો મુક્ત વિદ્યાલયી કે દૂરવર્તી શિક્ષણનો એક સર્વાંગી તથા અતિઆવશ્યક ભાગ ગણાય. એ ન્યાયે અમે ખાસ કાળજી રાખીને આ અભ્યાસ સામગ્રી તમારા જેવા ઉપયોગ કર્તા (અભ્યેતાઓ) માટે તે મૈત્રીપૂર્ણ, રસપ્રદ તથા અતિઆવશ્યક બની રહે તે માટે પૂરતો પ્રયાસ કર્યો છે.

આ સંદર્ભે અત્રેઆ અભ્યાસ સામગ્રીને રસપ્રદ તથા તમારી જરૂરીયાત મુજબની બનાવવામાં મદદકર્તા તમામ વિખ્યાત વિતજનોનો આભાર માનું છું. આશા રાખું કે તમને પણ તે અસરકારક તેમજ તન્મય કરી દેનાર બની રહેશે.

રાષ્ટ્રીય મુક્ત વિદ્યાલયી શિક્ષણ સંસ્થાન વતી અત્રે હું આપ સર્વે ને અત્યંત ઉજ્જવળ તેમજ સફળ ભાવી માટે શુભકામનાઓ પાઠવુ છું.

ડો. એસ. એસ. જેના

અધ્યક્ષશ્રી, NIOS

નિયામકશ્રીની નોંધ

પ્રિય અભ્યેતાઓ / વિદ્યાર્થીઓ

રાષ્ટ્રીય મૂકત વિદ્યાલયી સંસ્થાન (NIOS) *નો એ હંમેશનો પ્રયત્ન છે કે તે તમને અવાર નવાર નવો તેમજ તમારી જરૂરીયાતને પહોંચી વળે તેવો અભ્યાસક્રમ આપે. હવે અમે માધ્યામિક કક્ષાના તમામ વિષયોના અભ્યાસક્રમ સુધારી રહયા છીએ. આ સંદર્ભે તમને નવો અભ્યાસક્રમ આપવાના હેતુસર અમે CBSE (સેંટ્રલ બોર્ડ ઓફ સ્કૂલ એજયુકેશન)તેમજ વિવિધ રાજયોના માધ્યમિક શિક્ષણ બોર્ડ સાથે જુદા જુદા વિષયો સંદર્ભે મસલતો યોજી છે. રાષ્ટ્રીય અભ્યાસક્રમનું માળખું શૈક્ષણિક સંશોધન અને તાલીમ માટેની રાષ્ટ્રીય સંસ્થાને આધારે ઘડાય છે. આમ વ્યાપક અને તુલનાત્મક અભ્યાસ બાદ અમે જીવનને સુસંગત તેમજ સરળ એવાં અભ્યાસક્રમ ઘડીએ છીએ. રાષ્ટ્રના જાણીતા શિક્ષણવીદો / કેળવણીકારોને સાથે લઈને તેમના માર્ગદર્શન અંતર્ગત અમે અભ્યાક્રમોને સુધારીને અદ્યતન બનાવતા રહીએ છીએ.*

આ ઉપંરાત અમે શૈક્ષણિક-અભ્યાસક્રમ સાગ્રી પર પણ નજર રાખતા હોઈએ છીએ. અમે એમાંની જૂનીપૂરાણી તથા નકામી થઈ ગયેલી માહિતી રદ કરીને તેની જગ્યાએ નવીન તથા સુસંગત બાબતો તેમાં ઉમેરીને આ અભ્યાસક્રમને આકર્ષક તેમજ અસરકારક બનાવતા રહીએ છીએ. ભારતીય સંસ્કૃતિ અને વારસાનો વિષય વાસ્તવમાં રસપ્રદ અને આનંદદાયક છે જેનાથી તમને નવાંનવાં ક્ષેત્રોમાં આપણા દેશના પ્રદાનનો ખ્યાલ આવશે.

મને આશા છે કે અત્રે તમારા માટે ઘડાઈ રહેલ આ અભ્યાસ સામગ્રી સાચેજ રસપ્રદ અને નવું જાણવાની ઉત્કંઠાવાળી બની રહેશે. આ સંદર્ભે તમારા કોઈપણ સૂચન આવકાર્ય છે.

મારા તરફથી આપ સર્વને સુખી એન સફળભાવીની અભ્યર્થના.

(ડૉ.કુલદિપ અગ્રવાલ)

નિયામક શૈક્ષણિક

આપની સાથે બે બોલ

પ્રિય વાંચક,

1 નંબરની પુસ્તિકામાં તમે બીજ ગણિત અને ધંધાકીય ગણિત વિશે શિખ્યા. આ પુસ્તકમાં તમે ચાર ભાગ ભૂમિતી, મિશ્રણ...... અને આંકડાશાસ્ત્ર વિશે માહિતગાર થશો.

ભૂમિતી વિશેના અંકમાં, તમે પાયાની બાબતો જેવી કે બિંદુ, રેખા, ખૂણા વગેરે અંગે શીખશો. જેથી તમે ભૂમિતીની આકૃત્તિઓ જે આપણી વચ્ચે છે તેને અલગ પાડી શકશો. તમે તે થકી એક સરખી આકૃત્તિઓ અને અલગ આકૃતિનો તફાવત જાણી શકશો. કેટલાંક પાયાના પ્રમેય પણ પસંદ કરેલા પ્રકરણમાં આપવામાં આવ્યા છે. આ પ્રમેય તમને તમારી તર્ક શક્તિ વધારવામાં મદદરૂપ થશે.

મિશ્રણ અંગેના અંકમાં આપણી રોજિંદી ક્રિયાઓ સાથે જોડાયેલા ઉદાહરણ આપવાનો પ્રયત્ન કર્યો છે. જો તમે આ અંકનો અભ્યાસ કરશો. તમે એક લંબચોરસ બગીચાને બંધ કરવા જોઈતો વાયર, તમારા ઘરની ફરતે દિવાલ કરવા માટે વપરાતું અંદાજીત ચણતર, તમારા ચાર ઘરની દિવાલનું ક્ષેત્રફળ, તમારા ઘરને રંગકામ કરવા માટે થતો ખર્ચ, એક પાણીની ટાંકીની ક્ષમતા વગેરેને ગણવા માટે સક્ષમ થઈ શકશો.

આપણે ઘણી વખત એવા પ્રશ્નો જોઈએ છે જેવા કે પીલ્લરની ઉંચાઈ, વિરુદ્ધ નદીના કિનારા પરથી દેખાતા લેમ્પ પોસ્ટની ઉંચાઈ, એક પર્વતની ટોચ કે જે કોઈ પણ મેદાન કે બીજી ઉંચી જગ્યાએથી જોઈ શકાતી હોય. Trignometric *અંગેના એકની મદદથી તમે આ બધા જ પ્રશ્નોના ઉત્તર ખૂણાઓના સૂત્રો,* Depression *અને* Trignometric *પ્રમાણથી આપી શકશો.*

ખૂબ જ મોટા પ્રમાણમાં આપેલી માહિતીનો અસરકારક રીતે ઉપયોગ કેવી રીતે કરવો તે અંગે તમે આંકડાશાસ્ત્રના અંકમાંથી શીખી શકશો. તમે આ અંકની મદદથી માહિતીને સ્તંભ આલેખમાં કેવી રીતે દર્શાવી શકાય તે શીખી શકશો અને તેના પરથી તેનો સાર પણ શીખી શકશો.

બધા જ અંકમાં વધારે ઉદાહરણ આપીને વધુ સારી રીતે સમજ પડે તેવો પ્રયત્ન કરવામાં આવ્યો છે. તો તમને કોઈપણ સમસ્યા થાય તો, મહેરબાની કરી મને તે વિશે લખવામાં કોઈ ક્ષોભ અનુભવશો નહીં. તમારી સલાહ આવકાર્ય છે.

તમારા ઉજ્જવળ ભવિષ્ય માટે શુભકામનાઓ.

અભ્યાસ સામગ્રીના ઉપયોગની રીત

તમારે નોંધ લેવી કે NIOS માં પ્રવેશ લીધા બાદ તમે એક એવી પ્રક્રિયામાં પ્રવેશ કર્યો છે કે જે સામાન્ય શાળા શિક્ષક કરતાં ખૂબ જ અલગ છે.

હવે તમે સ્વ અભ્યાસી છો :

સામાન્ય રીતે શાળાઓમાં હંમેશા વર્ગ લેવા માટે, તમારી શંકાઓ દૂર કરવા માટે તેમજ તમને માર્ગદર્શન અને હિંમત પૂરી પાડવા માટે શિક્ષક હોય છે. ત્યાં તમે ચોક્કસ પણે તમારા સમૂહ સાથે ચર્ચા કરીને, લાયબ્રેરીમાં જઈને, પુનરાવર્તન કરીને, અન્ય સાંસ્કૃતિક કાર્યક્રમોમાં ભાગ લઈને, બીજા ટી.વી., રેડિયો કાર્યક્રમો જોઈને વગેરે આ બધુ જ તમને અભ્યાસમાં મદદરૂપ થાય છે.

જ્યારે, NIOS માં કોઈ શિક્ષક ઉપલબ્ધ નથી. તમારે જાતે જ અભ્યાસ કરવો પડે છે. એનો મતલબ એ થાય છે કે અહીં તમે સ્વ. અભ્યાસી બની જાઓ છો. એક સ્વ. અભ્યાસીની જવાબદારીઓ અન્ય સામાન્ય અભ્યાસી કરતાં ઘણી જ વધારે હોય છે કે જે શિક્ષક ઉપર નિર્ભર છે. પણ સાથે જ સ્વઅભ્યાસી હોવું ઘણું જ પડકાર રૂપ છે.

અહીં તમે એક જ તમારા અભ્યાસ માટે જવાબદાર છો. તેનો મતલબ કે તમારે તમારા અભ્યાસનું આયોજન મતે જ કરવું પડે છે. નિયમિત ભણવું પડે છે અને જાતે જ તમારું લક્ષ્ય ધ્યાનમાં રાખી પ્રોત્સાહિત રહેવું પડે છે.

તમારા અભ્યાસના સાહિત્યની સમજણ :

NIOS તમને અભ્યાસનું સાહિત્યનું પૂરુ પાડીને તમારી મદદ કરે છે.જેનો એક ભાગ અત્યારે તમારા હાથમાં છે. અને તેને અભ્યાસનું સાહિત્ય કહીએ છી કારણ કે આ સાહિત્ય તમે તમારી શાળામાં ભણી ગયેલા પાઠ્ય પુસ્તકો કરતા ખૂબ જ અલગ છે. અહીં પાઠ્યપુસ્તક અને શિક્ષક બંને સાથે મુકવામાં આવે છે. તમારે અહીં તેના સંપર્કો અને એકમો એવી રીતે શોધવા પડશે કે જાણે તમને વર્ગખંડમાં ભણાવવમાં આવતું હોય. અહીં તમને પુરતા ઉદાહરણ આપવામાં આવશે જે તમને તમારા અભ્યાસમાં મદદરૂપ થશે અને તેની સારી રીતે સમજી શકશો.

આજ કારણ છે કે તમને તે બોજરૂપ લાગશે પણ ચાલો તમને વધુ ડરાવતા નથી. તમે કેટલોક વિભાગ તમારા પ્રકરણમાં જોઈ શકશો. ચાલો તેનો હેતુ સમજીએ.

પરિચય :

હેતુઓ : *અહી તમે કેટલાંક હેતુઓની યાદી જોઈ શકશો, કે જે તમે પ્રકરણ સમજ્યા પછી સમજી શકશો. અહીં તમે ચકાસી શકશો કે તમે આ હાંસલ કર્યું છે કે કેમ કારણ કે આ માપી શકાય તેવી રીતે પૂરુ પાડવામાં આવ્યું છે.*

તમારી પ્રગતિ જાણો : *દરેક પ્રકરણ પૂર્ણ થયા બાદ તમે આ વિભાગ જોઈ શકશો. તેમાં હેતુઓ, ખૂબ જ ટૂંકા જવાબો, ટૂંકા જવાબો અને લાંબાં પ્રશ્નોનો સમાવેશ થાય છે. આ તમને તમે પ્રકરણ ભણ્યા છો કે કેમ તેમાં મદદરૂપ થશે. તમે આ પ્રશ્નોની ચાવી પ્રકરણના અંતમાં જાણી શકશો. જો તમે બધા જ જવાબો આપવામાં સફળ રહેશો તો તમે આગળ વધી શકશો નહિંતર તમારે આ વિભાગ ફરીથી વાંચવો જોઈએ.*

તમે શું શીખ્યા : *અહીં તમે પાઠમાં આવેલ મુખ્ય હેતુઓનો સારાંશ વધુ સંક્ષેપમાં અને પુનરાવર્તન માટે લઈ શકશો.*

સત્રાંત સ્વાધ્યાય : *અહીં આપવામાં આવેલા ટૂંકા જવાબો અને લાંબાં પ્રશ્નોના ઉત્તર તમને તમારો અભ્યાસ વધારે સારો કરવામાં મદદ કરશે અને પરીક્ષા અંગે વધારે મહેનત કરવાની તક પૂરી પાડશે.*

જવાબો : *અહીં આપવામાં આવેલ "તમારી પ્રગતિ ચકાસો અને સત્રાંત સ્વાધ્યાય" દરેક પ્રશ્નોના અંતે આપવામાં આવે છે. અઘરા પ્રશ્નો વખતે તમને કેટલાક સંકેત પણ આપવામાં આવેલ છે.*

પુસ્તકો અને અન્ય સાહિત્ય સિવાય, તમે આદર્શ પ્રશ્નપત્ર, જૂના પાછળના વર્ષોમાં પૂછાયેલા પ્રશ્નપત્ર વગેરે પણ મેળવી શકો છો, જે તમને તમારી પરીક્ષા માટે ખૂબ જ ઉપયોગી નિવડશે.

રૂબરૂ વાતચીતનો કાર્યક્રમ :

કેટલાક અગત્યના વર્ગો અને કેન્દ્રો દ્વારા પૂરા પાડવામાં આવશે. છતાં પણ ધ્યાન દોરવું કે તે વર્ગો સામાન્ય શાળામાં ભણાવવામાં આવે છે તેવા કે તેના ઉદ્દેશથી નથી. અહીં આ વર્ગો દ્વારા તમને એક તક આપવામાં આવે છે, તમારા સંદેહ દૂર કરવા, તમારા પ્રશ્નો હલ કરવા અને તમને પૂરતુ માર્ગદર્શન પૂરુ પાડવા, તેમજ પુસ્તકો અંગેની સલાહ આપવા. જેથી વર્ગમાં તૈયારી સાથે જાઓ કે તમે તેનો મહત્તમ લાભ લઈ શકો.

ગાણિતિક પ્રવૃત્તિઓ :

તમારા શિક્ષા કેન્દ્ર પર તમને એક તક આપવામાં આવશે. જેમાં તમે કેટલીક ગાણિતિક પ્રવૃત્તિો કરશો. તમારા સારા શિક્ષણ માટે કે જે પ્રાયોગિક મોં એન.આઈ.ઓ.એસ. દ્વારા પુરુ પાડવામાં આવ્યું છે.

--- : -

એન.આઈ.ઓ.એસ. દ્વારા કેટલાંક ઓડિયો અને વિડીયો કાર્યક્રમ વિકસિત કર્યા છે કે જે તમારા માટે ખૂબ જ રસપ્રદ છે અને તમને તમારા અભ્યાસમાં પણ મદદરૂપ થશે. તમે તેની નકલ તમારા કેન્દ્ર પાસેથી લઈ શકશો.

તમારા અભ્યાસનું આયોજન

ે અહીં, ચાલો તમને તમારા અભ્યાલનું આયોજન કરવા કેટલીક સલાહ આપીશ.

સૌ પ્રથમ, તમારે સમજવું પડશે કે સખત મહેનતનો કોઈ વિકલ્પ નથી. ''જેટલી વધુ મહેનત તેટલી વધુ સફળતા'' સફળતા માટે કોઈ ટૂંકો રસ્તો નથી. જો તમને કોઈ દ્વારા બાંહેધરી આપવામાં આવી હોય પાસ થવ I માટે તો તે તદ્દન નકામું છે કારણ કે અહીં પરીક્ષામાં ખૂબ જ કડક ચકાસણી કરવામાં આવે છે. જો તમે તેમાંથી પસાર થઈ પણ જાઓ, તેનો કોઈ ફાયદો અભ્યાસમાં થશે નહીં. સફળ થવા માટે પ્રામાણિક રસ્તો અપનાવીએ અને અભ્યાસનો મહત્તમ લાભ તમારા જીવનમાં ઉતારો. ભાગવું જરૂરી છે.

હવે, તમારે સમજવું ખૂબ જ આવશ્યક છે કે એન.આઈ.ઓ.એસ. તમને ઘણી સ્વતંત્રતા અને તમારા અભ્યાસમાં પૂરી પાડે છે. ઉદાહરણ તરીકે, બધા જ વિષયોની પરીક્ષા એક સાથે લેવી જરૂરી નથી. જેથી સૌ પ્રથમ તમારી પાસે જે સયમ છે તેમાં વિચારો અને નક્કી કરો કે તમારે બધા જ વિષયોનો અભ્યાસ એકસાથે કરવો છે કે તમારે બધા જ વિષયોનો અભ્યાસ એકસાથે કરવો છે કે તમારી ઈચ્છા એક પછી એક વિષયને ભણવાની છએ. બધા જ વિષયોને એકસાથે ભેગા કરવાથી તમે એવી સ્થિતિમાં મુકાઈ જશો કે તમે કોઈ પણ એક વિષય પર પૂરતું ધ્યાન કેન્દ્રીત કરી શકશો નહિં.

અભ્યાસનાં સમય નક્કી કરી રાખો. સાંજ, સવાર કે દિવસ જે સમય તમારી માટે વધુ અનૂકુળ હોય તેનું સમયપત્રક બનાવી દો તમે નક્કી કરેલા વિષયને તેમાંથી પૂરતો સમય ફાળવો અને બને તેટલું સમયપત્રકને અનુસરવાનો પ્રયત્ન કરો. જ્યારે તમે અભ્યાસ કરતા હોવ, તમને જરૂરી લાગતી બાબતો નીચે લીટી દોરો. તમે એન.આઈ.ઓ.એસ. ના સાહિત્યનો અભ્યાસ કરી શકો. વધારામાં જો જતમારી પાસે સમય હોય તો અન્ય પુસ્તક પણ વાંચી શકો. છતાંપણ તમારા હેતુથી આ સાહિત્ય પૂરતું છે. તમે જે વિષય તૈયાર કરો છો તેની એક કોપી તમારી પાસે રાખો. તમને સમજમાં જ આવી હોય તેવી બાબતો લખી રાખો. આ અંગેની ચર્ચા તમારા માતા-પિતા, મિત્રો શિક્ષકો સાથે કેન્દ્ર પર કરી શકો.

તમારા અંકમાં આવેલ સાહિત્યમાંથી પ્રશ્નોને હલ કરો અને તેનું પુનરાવર્તન કરો. આ તમને ફક્ત અભ્યાસમાં જ નહીં તમારી પરીક્ષાના પુનરાવર્તનમાં પણ મદદરૂપ થશે. તમારે પાછળના વર્ષોના પ્રશ્નપત્રો અને અન્ય આદર્શ પ્રશ્નપત્રો પણ હલ કરવા જોઈએ. તમારા જવાબો તમારા માતા-પિતા અને મિત્રોને બતાવો અને તેની ચર્ચા કરો.

આ માર્ગદર્શન તમને મદદરૂપ થશે. કેટલીક બીજી યુક્તિઓ પણ તમને તમારા અભ્યાસમાં મદરૂપ થશે. મને ખાતરી છે તમે તારા અભ્યાસમાં સફળ રહેશો.

અભ્યાસક્રમ સૂચિ

પુસ્તક - 1

મોડ્યૂલ - 1 : બીજગણિત

પાઠ 1 સંખ્યા સંહતિઓ

પાઠ 2 ઘતકી અને કરણી

પાઠ 3 બૈજિક પદાવલીઓ અને બહુપદીઓ

પાઠ 4 વિશિષ્ટ ગુણનફળ અને અવયવીકરણ

પાઠ 5 સુરખ સમીકરણ

પાઠ 6 દ્વિઘાત સમીકરણ

પાઠ 7 સમાંતર શ્રેણીઓ

મોડ્યૂલ - 2 : વાણિજ્ય ગણિત

પાઠ 8 ટકા અને તેના ઉપયોગો

પાઠ 9 હપ્તાથી ખરીદી

કરીકુલ્લમ

પુસ્તક - 2

મોડ્યૂલ - 3 : અવકાશમાં રેખા

પાઠ 10 રેખાઓ અને કોણ (ખૂણાઓ)

પાઠ 11 ત્રિકોણની એકરૂપતા

પાઠ 12 સંગામી રેખાઓ

પાઠ 13 ચતુષ્કોણો

પાઠ 14 ત્રિકોણની સમરૂપતા

પાઠ 15 વર્તુળો

પાઠ 16 વર્તુળમાં ખૂણાઓ અને ચક્રીય સતુષ્કોણ

પાઠ 17 છેદીકાઓ, સ્પર્શકો અન તેમના ગુણધર્મો

પાઠ 18 રચનાઓ

પાઠ 19 યામ ભૂમિતિ

મોડ્યૂલ - 4 : ક્ષેત્રફળ

પાઠ 20 સમતલીય આકૃત્તિની પરિમિતિ ક્ષેત્રફળ

પાઠ 21 ઘન પદાર્થોની સપાટીનાં ક્ષેત્રફળ અને ઘનફળ (કદ)

મોડ્યૂલ - 5 : ત્રિકોણમિતિ

પાઠ 22 ત્રિકોણમિતિનો પરિચય

પાઠ 23 કેટલાક વિશિષ્ટ ખૂણાઓ મોના ત્રિ- ગુણોતરો

મોડ્યૂલ - 6 : આંકડાકિય માહિતી

પાઠ 24 માહિતી અને તેની રજૂઆત

પાઠ 25 મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં માપો

પાઠ 26 સંભાવનાનો પરિચય

નમૂનાનું પ્રશ્નપત્ર

વિષયસૂચિ

10

રેખાઓ અને કોણ (ખૂણાઓ)

તમારા ડેસ્ક કે ટેબલની ટોચ જુઓ. હવે તમારા ટેબલના મથાળાની સપાટી પર તમારો હાથ ફેરવો. તે સમતલનો ખ્યાલ આપે છે. તેની કિનારીઓ રેખાનો ખ્યાલ આપે છે . તેનો ખૂણો બિંદુનો ખ્યાલ આપે છે અને ખૂણા આગળ મળતી કિનારીઓ કોણોનો ખ્યાલ આપે છે.

હેતુઓ :

આ પાઠ શીખ્યા પછી, અધ્યેતા

- બિંદુ, રેખા, સમતલ, કોણ, સમાતર રેખાઓ, છેદક રેખાઓ અને તેથી બનતા કોણની જોડની સંકલ્પનાઓ દર્શાવી શકશે.
- સમાંતર રેખાઓના ગુણધર્મો દર્શાવી શકશે અને ચકાસી શકશે.
- ત્રિકોણના કોણનો સરવાળો 180 હોય છે તે સાબિત કરી શકાશે.
- બિદુપથની સંકલ્પના સમજાવી શકશે અને અમુક શરતો હેઠળ બિદુંનો બિદુપથ શોધી શકશે.

અપેક્ષિત પૂર્વજ્ઞાન

- અમે માનીએ છીએ કે અધ્યેતા ભૌમિતક સંકલ્પનાઓ અને આકૃતિઓથી પરિચિત છે, જેમ કે ,

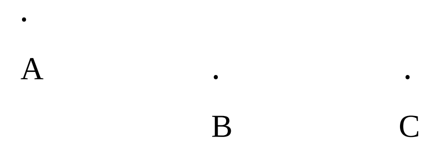
  બિદું, રેખા, સમતલ, છેદક રેખાઓ, કિરણો અને કોણ
- સમાંતર રેખાઓ

10.1 બિદુંઓ રેખા અને કોણ

- અગાઉના ધોરણમાં તમે બિદું રેખા, સમતલ અને કોણ વિશે શીખી ગયા છો. ચાલો, તે સંકલ્પનાઓ ઝડપથી યાદ કરી લઈએ.

બિદું :

જો આપણે પેન કે પેન્સિલની અણી કાગળ પર દબાવીએ, તો આપણને સ્પષ્ટ ટપકું મળે છે. જેને બિદું કહે છે.



આકૃતિ 10.1

બિંદું સ્થાન દર્શાવવા વપરાય છે અને કેપિટલ અક્ષરો A,B,C, વગેરે દ્વારા દર્શાવાય છે.

10.4.1 રેખા

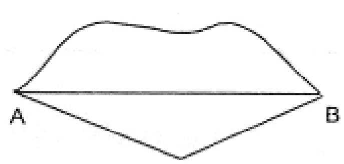
હવે બે બિંદુંઓ A અને B નાં નિશાન કરો. તેમને સીધી પટ્ટી કે માપ પપટ્ટી વડે જોડો અને બંને બાજુએ લાંબાવો. આનાથી આપણને સીધી રેખા (સુરેખા) અથવા જેને માત્ર રેખા કહે છે તે મળે છે.

આકૃતિ. 10.2

ભૂમિતિમાં રેખા બેન્ને બાજુઓએ અનંત રીતે વિસ્તારાય છે અને તેવા ખ્યાલ આપવા તીરથી અંકિત કરવામાં આવે છે. રેખાને તેના પરના કોઈ પણ બે બિંદુંઓ દ્વારા નામ આપવામાં આવે છે જેમ કે AB, અથવા કોઈ એક નાના અક્ષર વગેરે.l,m (જુઓ આકૃતિ 10.3)

આકૃતિ . 10.3

બે બિંદુંઓ A અને B વચ્ચેના રેખાના ભાગને રેખાખંડ કહે છે અને તેને AB નામ આપવામાં આવે છે. જુઓ કે રેખાખંડ એ બે બિંદુંઓ A અને B વચ્ચેનો ટૂંકો માર્ગ છે. (જુઓ આકૃતિ 10.4)



આકૃતિ. 10.4

10.4.2 કિરણ

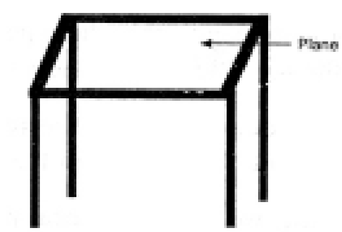
જો આપણે એક બિંદું X અંકિત કરીએ અને એક રેખા તેમાંથી શરૂ થતી અને માત્ર એક દિશામાં અનંત રીતે વિસ્તરતી દોરીએ, તો આપણને XY કિરણ મળે છે.

આકૃતિ . 10.5

X ને *કિરણ* XY *નું ઉદ્ગમ (મુળ) બિદું કહે છે.*

10.1.3 સમતલ

જો આપણે આપણી હથેળી ટેબલના મથાળે ફેરવીએ, તો આપણને સમતલનો ખ્યાલ મળે છે.



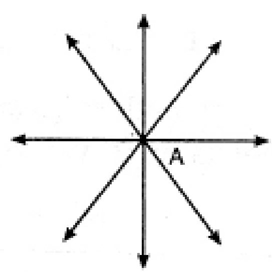
આકૃતિ . 10.6

તેવી જ રીતે ઓરડાનું ભોંયતળિયું પણ સમતલના ખંડનો ખ્યાલ આપે છે.

સમતલ પણ લંબાઈ અને પહોળાઈ બંને રીતે અનંત સુધી વિસ્તરે છે.

બિદું કાગળ પર A *અંકિત કરો.*

આ બિદુંમાંથી પસાર થતી કેટલી રેખાઓ દોરી શકશો ? તમે ઈચ્છો તેટલી.



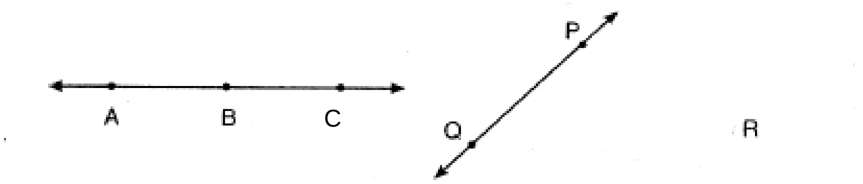
આકૃતિ . 10.7

ખરેખર તો આપણે એક બિદુંમાંથી અનંત સંખ્યામાં રેખાઓ દોરી શકીએ.

બીજું બિદું B *(બિદું) થી અમુક અતરે લો ફરીથી આપણે* B *માંથી પસાર થતી અનંત રેખાઓ દોરા શકીએ.*

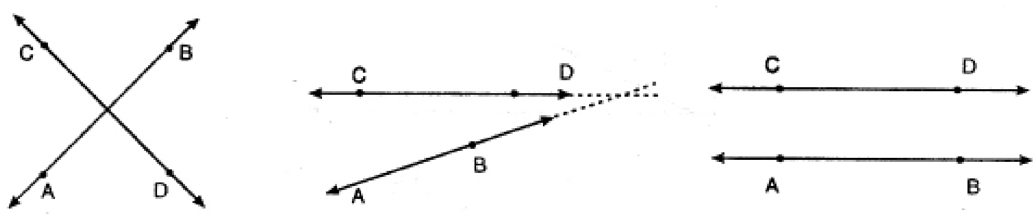
આકૃતિ . 10.8

આ રેખાઓ પૈકી A અને B બંને બિંદુઓમાંથી કેટલીક રેખાઓ પસાર થશે ? માંથી પસાર થતી તમામ રેખાઓ પૈકી માત્ર એક રેખા માંથી પસાર થશે. આમ બંને બિંદુઓ અને માંથી માત્ર એક રેખા પસાર થાય છે. આપણે તારવીએ કે બે આપેલ બિંદુઓમાંથી એક અને માત્ર એક રેખા દોરી શકાય.
હવે આપણે સમતલમાં ત્રણ બિંદુઓ લઈએ.



આકૃતિ. 10.9

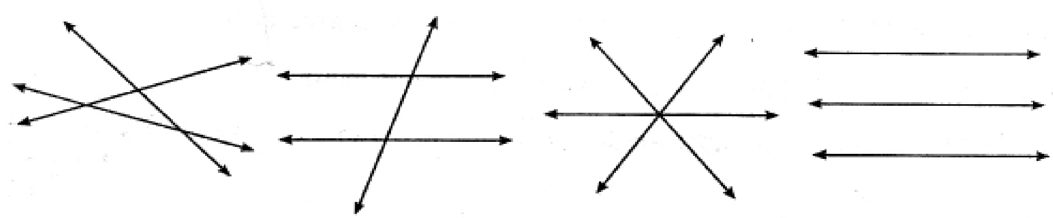
આપણે જોઈએ છીએ કે ત્રણ આપેલ બિંદુઓમાંથી રેખી પસાર થાય કે ન પણ થાય.
જો એક રેખા ત્રણ કે વધારે બિંદુઓમાંથી પસાર થઈ શકે તો તે બિંદુઓ સમરેખ બિંદુઓ કહેવાય છે ઉદાહરણાર્થ , આકૃત્તિ 10.9માં બિંદુઓ P,Q અને અસમરેખ R બિંદુઓ છે.
બે બિંદુઓ હમેંશા એક રેખા પર પડે છે તેથી આપણે સમરેખ બિંદુઓનો ઉલ્લેખ ત્યારે કરીએ છીએ, જ્યારે તેમની હવે આપણે સમતલમાં બે ભિન્ન રેખાઓ AB અને CD લઈએ .



આકૃતિ. 10.10

કેટલાક બિંદુ કેટલા બિંદુઓ તેમનામાં સામાન્ય હશે ? આપણે જોઈએ છીએ કે આ રેખાઓ-

(i) *આકૃતિ* 10.10 (a) *અને* (b) *પ્રમાણે એક બિંદું સામાન્ય ધરાવી શકે (એવા કિસ્સામાં તેમને છેદક રેખાઓ કહે છે) અથવા* (ii) *આકૃતિ* 10.10 (c) *પ્રમાણે કોઈ સામાન્ય બિંદું ન હોય. આવા કિસ્સામાં તેમને સમાંતર રેખાઓ કહે છે.*
હવે સમતલમાં ત્રણ (કે વધુ) વિભિન્ન રેખાઓ જુઓ.



(a) (b) (c) (d)

આકૃતિ . 10.11

શક્યતાઓ કઈ કઈ છે ?

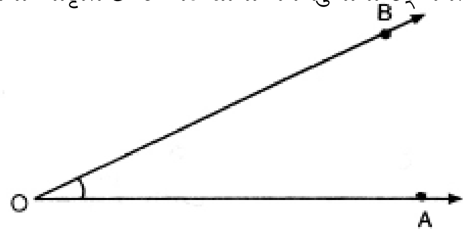
(i) આકૃતિ 10.10 (a) અને 13.11 (b) પ્રમાણે તે એક કરતાં વધુ બિદુંઓમાં છેદે .

અથવા (ii)આકૃતિ 10.11 (c) પ્રમાણે તે માત્ર એક બિદુંમાં છેદે. આવા કિસ્સામાં તેમને સંગામી રેખાઓ કહે છે.

અથવા (iii) આકૃતિ 10.11 (d) પ્રમાણે તે એકબીજીને છેદે નહી તેવી સમાંતર રેખાઓ હોય.

૧૦.૪.૪ કોણ

એક બિદું O અંકિત કરો અને O માંથી ઉદ્‌ભવતા બે કિરણો AO અને BO દોરો. આપણને જે આકૃતિ મળે છે તેને કોણ કહે છે. આમ કોણ એ એવી આકૃતિ છે જે એક સામાન્ય બિદુંમાંથી ઉદ્‌ભવતાં બે કિરણોથી બને છે.



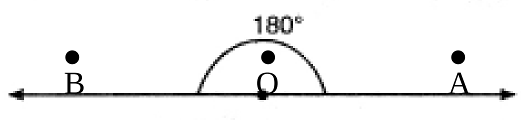
આકૃતિ . 10.11

કિરણ (OA) અને (OB) કોણની (ખુણાની) બાજુઓ છે અથવા ભુજાઓ છે.

આ કોણને કોણ AOB અથવા કોણ BOA અથવા માત્ર કોણ O નામ અપાય; અને તે આમ લખાય : $\angle AOB$

$\angle BOA$ અથવા અથવા (જુઓ) આકૃતિ 10.11)

કોણ અંશમાં મપાય થે. જો આપણે એક બિદું 0 લઈએ અને તેમાંથી ઉદ્‌ભવતા બે કિરણો વિરુદ્ધ દિશામાં દોરીઓ, તો આ કોણનું માપ 180^0 લેવામાં આવે છે, જેને આમ લખાય : 180^0

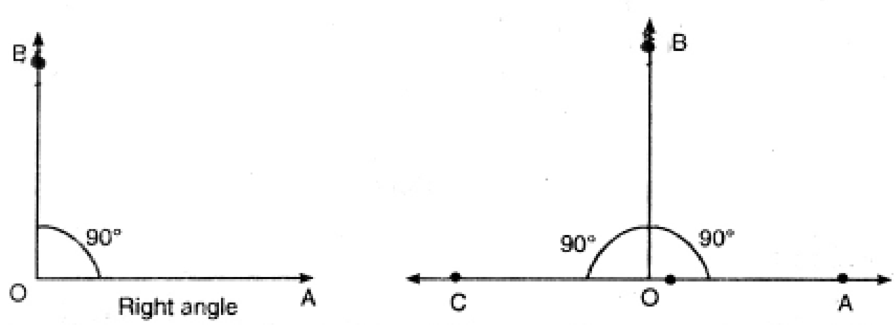


આકૃતિ . 10.12

180 સમાન ભાગમાં વહેંચાયેલ આ માપ એક અંશ (1^o) કહેવાય છે.

બે વિરૂદ્ધ કિરણોથી મળતા કોણને **સરળ કોણ** કહે છે.

90ના કોણને કાટકોણ કહે છે, અથવા

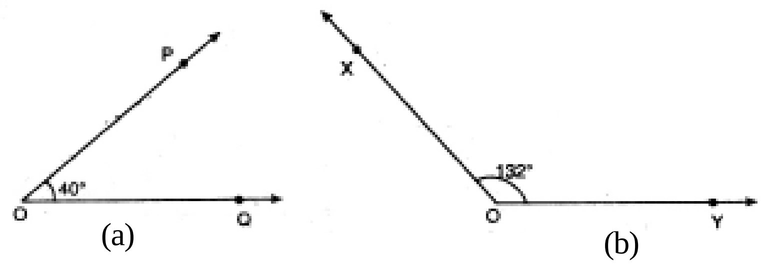


આકૃતિ . 10.13

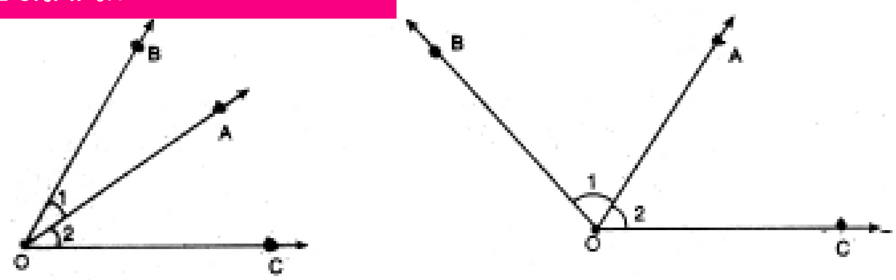
બે રાખાઓ કે કિરણો જે એકબીજાને કાટકોણબનાવે તે લંબ રેખાઓ કહેવાય છે. આકૃતિ 10.13માં આપણે કહી શકીએ કે OA,OB ને લંબ છે અથવા OB,OA ને લંબ છે.

90^0 થી નાના કોણને લઘુકોણ કહે છે. ઉ.દા. આકૃતિ 10.14 (A) માં લઘુકોણ છે.

90^0 થી મોટા, પણ 180^0થી નાના કોણને ગુરુકોણ કહે છે. ઉ.દા.આકૃતિ 10.14 (B) માં ગુરુકોણ છે.

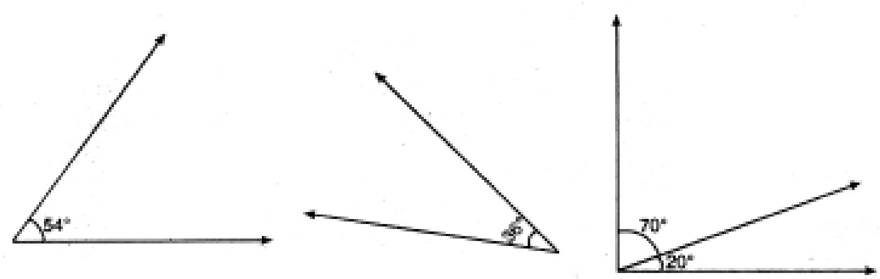


10.2 કોણની જોડ



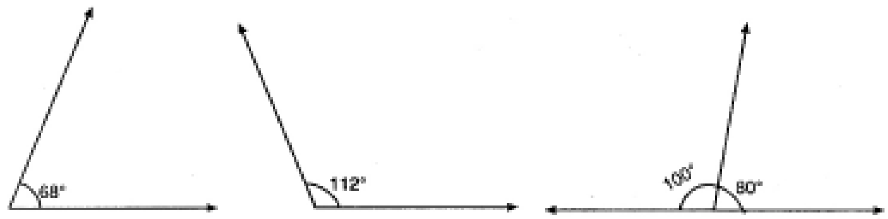
આકૃતિ. 10.15

આકૃતિ 10.15 દરેકમાં બેકોણ અને જુઓ. દરેક જોડને સામાન્ય ઉદ્ભવ જોડને સામાન્ય ઉદ્ભવ બિદું Oઅને OB અને OC વચ્ચેની સામાન્ય બાજુ OA છે. કોણની આવી જોડને આસન્ન કોણની જોડ કહે છે.



આવૃત્તિ. 10.16

આકૃત્તિ 10.16 (a) અને (b) માં કોણની દરેક જોડ જુઓ. તે કોણનો સરવાળો 90° થાય છે. કોણની જોડ જેનો સરવાળો 90^0 હોય તેમને **કોટિકોણની જોડ** કહે છે. દરેક કોણ બીજા કોણનો કોટિકોણ કહે છે.



આકૃતિ . 10.17

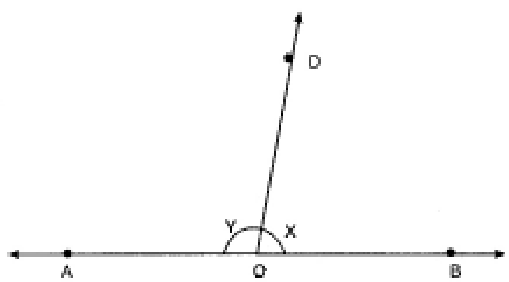
આકૃતિ 10.17 () અને () માં કોણની દરેક જોડ જુઓ તેમનો સરવાળો 180°. થાય છે.

કોણની જોડ જેમનો સરવાળો 180° હોય તેને પૂરક કોણની જોડ કહેવાય છે.

દરેક ખૂણો બીજા ખુણાનો પૂરક હોય છે.

AB રેખા દોરો. તેની પરના બિદું C માંથી <x અને <Y અને એમ બે ખૂણા બનાવતું કિરણ દોરો.

∠BCD



આકૃતિ . 10.18

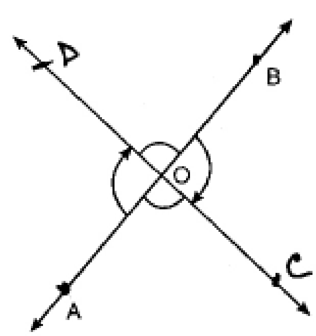
જો આપણે અને માપએ અને તેમનાં માપનો સરવાળો કરીએ, તો આપણને સરવાળો હંમેશા 180°. મળશે, પછી ની ગમે તે સ્થિતિ હોય. આપણે તારવીએ.

જો કિરણ એક રેખા પર ઊભું રહે, તો તેથી બનતા 180°.

તે રીતે બનતી ખૂણાઓની જોડ આકૃત્તિ 10.18 પ્રમાણે ખૂણાઓની રૈખિક જોડ કહેવાય છે.

નોંધો કે તે પૂરક ખૂણાઓની જોડ પણ બનાવે છે.

બે છેદક રેખાઓ AB અને CD દોરો, જે એકબીજીને O છેદે.



આકૃતિ . 10.19

અને એકબીજાને સામસામેના ખુણાઓ છે. આનાથી અભિકોણની જોડ બને છે. તેમને માપો. હમંશા આમ મળશે.

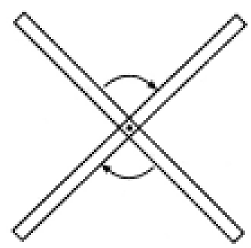
અને એ અભિકોણની બીજી જોડ છે. તે માપતાં તમને મળશે

આપણએ તારવીએ :

જો બે રેખાઓ એકબીજીને છેદે, તો બનતા અભિકોણનાં માપ સરખાં હોય છે.

તમારે માટે પ્રવૃત્તિ :

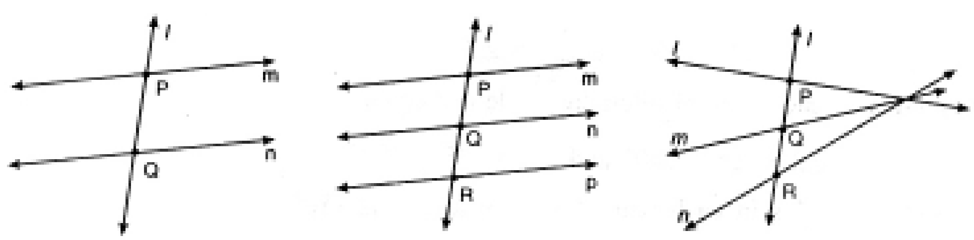
બે પટ્ટીઓને ખીલી અથવા પિન દ્વારા આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ જોડો.



આકૃત્તિ 10.20

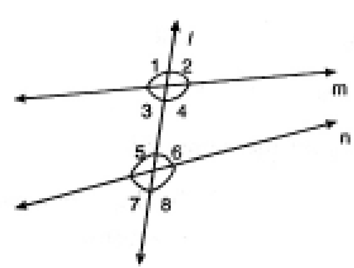
એક પટ્ટી સ્થિર રાખીને બીજી પટ્ટીને ગોળ ફેરવો. તમે જોશો કે આ રીતે બનતા અભિકોણના માપ હમેંશા સમાન હોય છે.

જે રેખા બે કે વધુ રેખાઓને ભિન્ન બિંદુઓમાં છેદે છે તે છેદિકા કહેવાય છે. ઉદાહરણ તરીકે આકૃતિ 10.21માં રેખા છેદિકા છે.



આકૃત્તિ . 10.21

જ્યારે છેદિકા બે રેખાઓને છેદે છે ત્યારે આઠ ખૂણાઓ રચાય છે.



આકૃત્તિ . 10.22

ખૂણાઓની આ જોડ એ સમાંતર રેખાઓના ગુણદર્મોના અભ્યાસ અતિ મહત્ત્વની છે. તેમાંની કેટલીક ઉપયોગી જોડ નીચે પ્રમાણે છે.

(A) $\angle 1$ અને 5 એ અનુકોણ (સંગત કોણ)ની જોડ છે. 2 અને 6, 3 અને 7 અને 4 અને 8 એ પણ અનુકોણની અન્ય જોડ છે.

(B) 3 અને 6 એ યુગ્મકોણની જોડ છે 4 અને 5 એ યુગ્મકોણની બીજી જોડ છે.

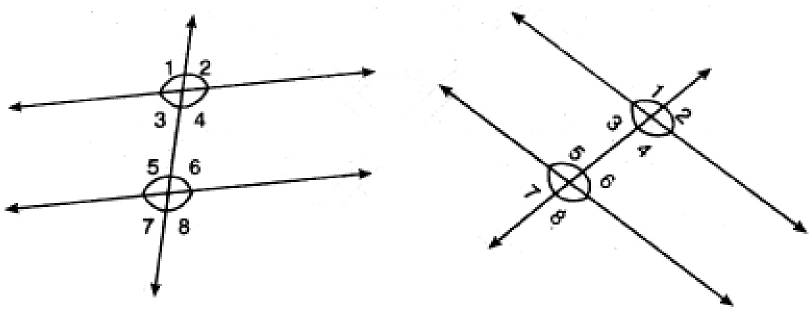
(C) 3 અને 5 એ છેદિકાની એક જ બાજુએ આવેલ અંતઃ કોણની જોડ છે.

4 અને 6 એ અંતઃકોણની બીજી જોડ છે.

ઉપર આકૃતિ 10.22માં, રેખા m અને સમાંનતર નથી એટલે ઉપર જણાવેલ કોઈ પણ જોડના ખુણાઓ વચ્ચે કોઈ સંબંધ ન હોય જો કે રેખાઓ જ્યારે સમાંતર હોય છે ત્યારે આ જોડ વ્ચેચ કેટલાક અતિ ઉપયોગી સંબંધો છે, જે આપણે નીચે શીખીશું.

જ્યારે કોઈ છેદિકા બે સમાંનતર રેખાઓને છેદે છે, ત્યારે આઠ ખૂણા બને છે ભલેને સમાંતર રેખાઓ કે છેદિકાની કોઈ પણ સ્થિતિ હોય .

$\angle$



આકૃત્તિ . 10.23

આપણે ખૂણાઓ માપીશું, તો જણાશે કે :

1 = 5, 2 = 6, 3 = 7 અને 4 = 8

અર્થાત્, અનુકોણોની દરેક જોડના ખૂણાઓ સમાન હોય છે.

વળી, 3 = 6 અને 4 = 5

અર્થાત્,યુગ્મકોણની દરેક જોડના ખૂણાઓ સમાન હોય છે.

વળી, 3 + 5 = 180° અને 4 + 6 = 180^{0}

અર્થાત્ અંતઃકોણોની દરેક જોડના ખૂણાઓના માપનો સરવાળો 180°

તેથી આપણે તારવીએ છીએ કે :

જ્યારે કોઈ છેદિકા બે સમાંતર રેખાઓને છેદે, ત્યારે

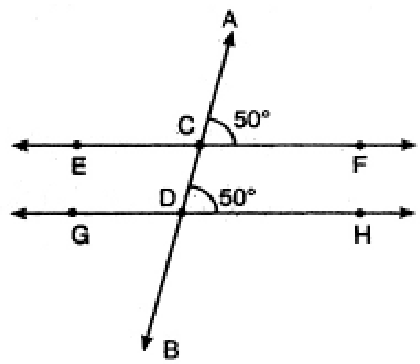
(i) અનુકોણોની દરેક જોડ ના ખૂણા સમાન હોય છે.

(ii) યુગ્મકોણોની દરેક જોડ ના ખૂણા સમાન હોય છે.

(iii) છેદિકાની એક જ બાજુએ આવેલ અંતઃકોણોની દરેક જોડના ખૂણા પૂરક હોય છે.

(તમારી માપપટ્ટીની સમાંતર કિનારીઓનો ઉપયોગ કરીને) સમાંતર રેખાઓની જોડ તેમજ એક છેદિકા દોરીને અને આ દરેક જોડના ખૂણાઓ માપીને આ પરિણામોનું સત્ય પણ તમે ચકાસી શકશો.

આ પરિણામોનું પ્રતિપ્રમેય પણ સાચું છે . પ્રથમ પ્રતિપ્રમેયનું સત્ય ચકાસવા, આપણે એક રેખા AB દોરીશું અને તેની પર બે બિંદુઓ C અને D અંકિત કરીશું.



આકૃત્તિ. 10.24

C અને D બિંદુએ આકૃતિ 10.24માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે, આપણે બે ખૂણાઓ ACF અને CDH એકબીજાને સમાન, કહો કે 50° દોરીએ EF અને GH બંને બાજુએ લંબાવતાં આપણે જણાશે કે તેઓ એકબીજીને છેદતા નથી અર્થાત્ તે સમાંતર છે.

તે જ રીતે, આપણે અન્ય બે પ્રતિપ્રમેયનું સત્ય ચકાસી શકીશું

તેથી આપણે તારવીએ કે :

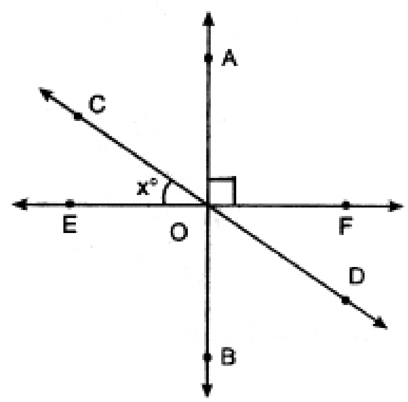
જ્યારે કોઈ છેદિકા બે રેખાઓને એવી રીતે છેદે કે,

(i) અનુકોણોની કોઈ પણ એક જોડ સમાન બને,

અથવા (ii) યુગ્મકોણની કોઈ પણ જોડ સમાન બને

અથવા (iii) છેદિકાની એક જ બાજુએ આવેલા અંતઃ કોણોની કોઈ પણ એક જોડ પૂરક હોય, તો બે રેખાઓ સમાંતર હોય.

ઉદાહરણ 10.1 : નીચેના બહુવિકલ્પ પ્રશ્નોમાં વિકલ્પો પૈકી સાચો જવાબ પસંદ કરો :



આકૃત્તિ . 10.25

(i) આકૃતિ 10.25માં FOD અને BOD જવાબ

(A) પૂરક ખૂણા છે. (B) કોટિકોણ છે.

(C) યુગ્મકોણ છે. (D) ખૂણાની રૈખિક જોડ છે. જવાબ (B)

(ii) આકૃતિ 10.13 COE અને BOE

(A) કોટિકોણ છે. (B) પૂરકકોણ છે.

(C) રૈખિક જોડ છે. (D) ત્રિકોણ છે. જવાબ (D)

(iii) આકૃતિ 10.25 માં, BOD નીચેના માપનો છે.

(A) x^o (B) $(90 + x)^o$

(C) $(90 - x)^o$ (D) $(180 - x)^o$ જવાબ (C)

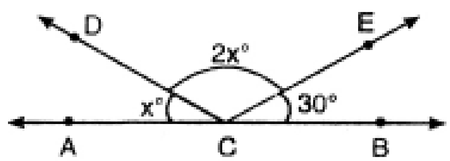
(iv) એક ખૂણો પૂરક કોણ કરતાં 4 ગણો છે, તે ખૂણો નીચે પ્રમાણે છે.

(A) 39^o (B) 72^o

(C) 108^o (D) 144^o જવાબ (D)

(v) આકૃતિ 10.26માં Xની કઈ કિંમત AB ને સરળ કોણ બનાવશે ?

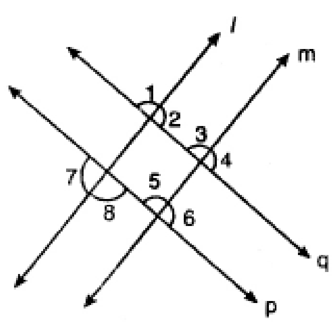
∠



આકૃતિ . 10.26

(A) 30^o (B) 40^o

(C) 50^o (D) 60^o જવાબ (C)



આકૃતિ . 10.27

ઉપરની આકૃતિમાં l,mને સમાંતર છે અને p, q ને સમાંતર છે .

(vi) 3 અને 5 નીચેની જોડે રચે છે.

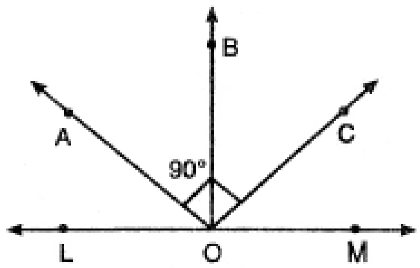
(A) યુગ્મકોણ (B) અંત : કોણ

(C) vertically opposite (D) અનુકોણ જવાબ (D)

(vii) આકૃતિમાં 10.27માં જો 1 = 80^{o}, હોય, તો 6 is નું માપ કેટલું ?

(A) 80^{o} (B) 90^{o}

(C) 100^{o} (D) 110^{o} જવાબ (C)



આકૃતિ . 10.28

(viii) આકૃતિ 10.28માં , OA LOB, ને દુભાગે છે, OC MOB ને દુભાગે છે, AOC = 90^{0}. છે. દર્શાવો કે બિદુંઓ LO અને M રેખીય છે.

ઉકેલ : BOL = 2 BOA ...(i)

અને ÐBOM = 2 BOC ...(ii)

(i) અને (ii), નો સરવાળો કરતાં BOL + BOM = 2 BOA + 2 BOC

LOM = 2[BOA + BOC]

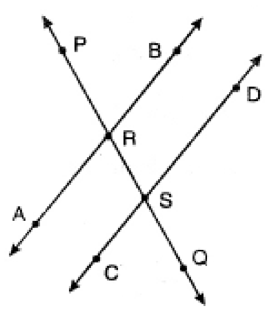
= 2 90^{o}

= 180^{o} = સરળ કોણ

L, O અને M રેખીય છે.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 10.1

1. નીચેના બહુવિકલ્પ પ્રશ્નોમાં આપેલ વિકલ્પોમાંથી સાચો જવાબ શોધો.



આકૃતિ . 10.29

આકૃતિ 10.29, માં AB || CD અને PQ તેમને અનુક્રમે R અને S માં છેદે છે.

(i) ARS અને BRS રચે છે.

(A) યુગ્મકોણની જોડ (B) રૈખિક જોડ

(C) અનુકોણની જોડ (D) અભિકોણની જોડ

(ii) ARS અને RSD નીચેની જોડ રચે છે.

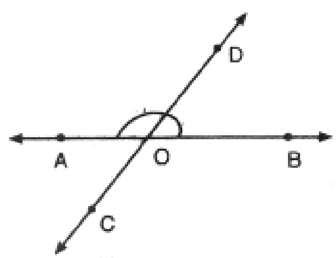
(A) યુગ્મકોણ (B) અભિકોણ

(C) અનુકોણ (D) અંતઃકોણ

(iii) જો PRB = 60^o, તો QSC

(A) 120^o (B) 60^o

(C) 30^o (D) 90^o



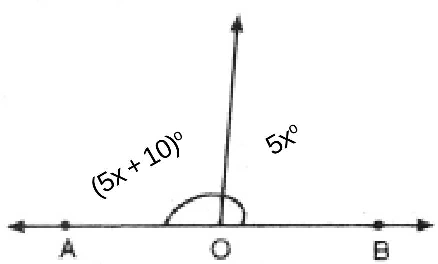
∠

આકૃતિ . 10.30

(iv) આકૃતિ 10.30 માં AB અને CD O. માં છેદે છે જો BOD= 72^0 હોય, તો COB બરાબર કેટલા ?

(A) 36^o (B) 72^o

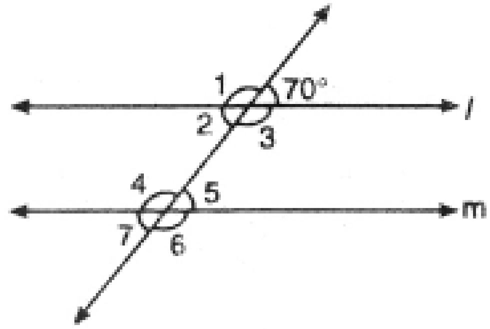
(C) 108^o (D) 144^o



આકૃતિ . 10.31

2. ઉપરરની આકૃતિમાં 10.31માં AB સુરેખા છે તો x શોધો.

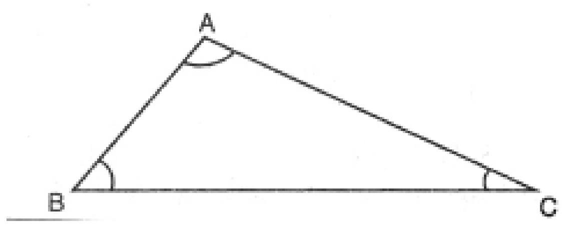
3. નીચેની આકૃતિ 10.32માં , *l m.* ને સમાંતર છે, તો ખૂણા 1 થી 7 ના માપ જણાવો.



આકૃતિ . 10.32

10.3 ત્રિકોણ, તેના પ્રકાર અને ગુણધર્મો

ત્રિકોણ એ ત્રણ રેખાખંડોથી સમતલમાં રચાયેલ બંધ આકૃતિઓણાં સૌથી સરળ છે.



આકૃતિ . 10.33

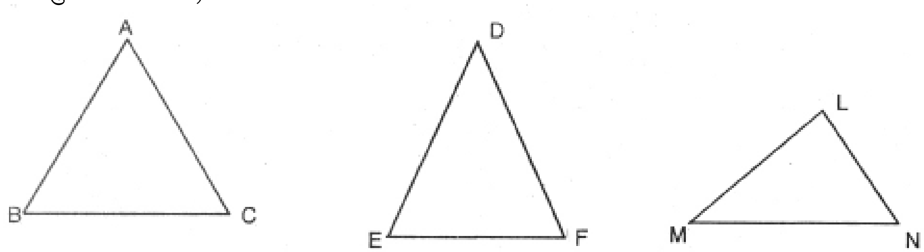
તે ત્રણ રેખાખંડોથી રચાયેલ બંધ આકૃતિ છે, જે છ અંગો છે જેમ કે ત્રણ ખૂણા (i) ABC *અને* B (ii) ACB *અથવા* C (iii) CAB *અથવા* A *અને ત્રણ બાજુઓ* (iv) AB (v) BC (vi) CA

તેને D ABC *અથવા* D BAC *અથવા* D CBA *ત્રિકોણ* ABC *કે ત્રિકોણ* BAC *કે ત્રિકોણ* CBA.

10.3.1 ત્રિકોણના પ્રકારો :

ત્રિકોણોને બે રીતે વિવિધ પ્રકારોમાં વર્ગીકૃત કરી શકાય.

(a) *બાજુઓના આધારે,*



(i) (ii) (iii)

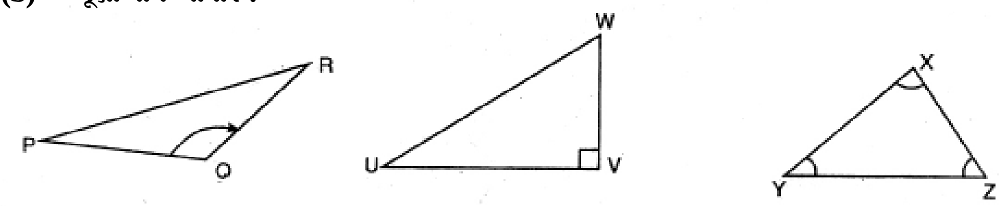
આકૃતિ . 10.34

(i) **સમબાજુ ત્રિકોણ :** *જે ત્રિકોણમાં તમામ ત્રણે બાજુઓ સમાન હોય, તેને સમબાજુ ત્રિકોણ કહે છે .* [*આકૃતિ* 10.34 (i) ABC]

(ii) **સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ :** *જે ત્રિકોણમાં બે બાજુઓ સમાન હોય તેને સમદ્વિ બાજુ ત્રિકોણ કહે છે.* [*આકૃતિ* 10.34(ii) UVW]

(iii) **વિષયબાજુ ત્રિકોણ** *:જે ત્રિકોણમાં તમામ બાજુઓ ભિન્ન લંબાઈની હોય તેને વિષયબાજુ ત્રિકોણ કહે છે.* [*આકૃતિ* 10.34 (iii) XYZ]

(b) ખૂણાઓને આધારે :



(i) (ii) (iii)

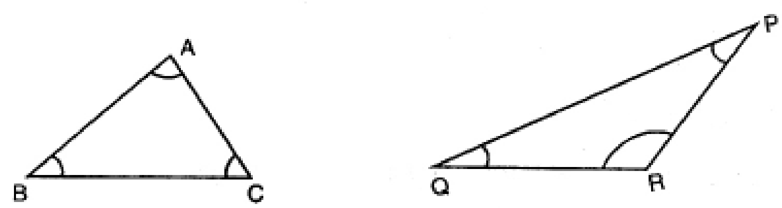
આકૃતિ . 10.35

(i) **ગુરુકોણ ત્રિકોણ :** *જે ત્રિકોણમાં એક ખૂણો ગુરુકોણ હોય, તેને ગુરુકોણ ત્રિકોણ અથવા ગુરુ-ત્રિકોણ કહે છે* [*આકૃતિ* 10.35 (i) ABC]

(ii) **કાટકોણ ત્રિકોણ :** *જે ત્રિકોણમાં એક ખૂણાઓ કાટકોણ હોય, તેને કાટકોણ ત્રિકોણ અથવા કાટ ત્રિકોણ કહે છે.* [*આકૃતિ* 10.35 (ii) UVW]

(iii) **લઘુકોણ ત્રિકોણ** *: જે ત્રિકોણમાં તમામ ત્રણે ખૂણાઓ લઘુકોણ હોય, તેને લઘુકોણ ત્રિકોણ અથવા લઘુ ત્રિકોણ કહે છે.* [*આકૃતિ* 10.35 (iii) XYZ]

હવે આપણે ત્રિકોણના ખૂણાઓના કેટલાક મહત્ત્વના ગુણધર્મો શીખીએ. આરણે બે ત્રિકોણો દોરીએ અને તેમના ખૂણા માપીએ.



આકૃતિ . 10.36

આકૃતિ 10.36 (a), ÐA = 80^o, ÐB = 40^o and ÐC = 60^o

ÐA + ÐB + ÐC = $80^o + 40^o + 60^o = 180^o$

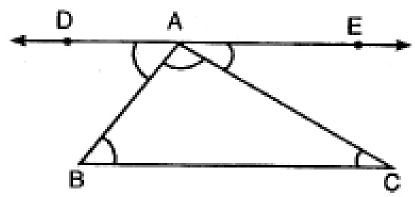
આકૃતિ 10.36(b), ÐP = 30^o, ÐQ = 40^o, ÐR = 110^o

ÐP + ÐQ + ÐR = $30^o + 40^o + 110^o = 180^o$

તમે શું જોઓ છો ? દરેક કિસ્સામાં ત્રિકોણના ખૂણાઓનો સરવાળો 180^0 *છે.*

આપણે આ પરિણામને તાર્કિક રીતે પ્રમેયનું નામ આપીને સાબિત કરીએ.

પ્રમેય : ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણાઓનાં માપનો સરવાળો 180^0 છે.



આકૃતિ . 10.37

પક્ષ : *ત્રિકોણ* ABC

સાધ્ય : A + ÐB + ÐC = 180^0

રચના : A, *માંથી* DE *સમાંતર રેખા* BC *દોરો*

સાબિતી :DE i,BC*ને સમાંતર રેખા અને* AB *છેદિકા છે*

B = DAB (*યુગ્મકોણની જોડ*)

તેજ પ્રમાણે C = EAC (*યુગ્મકોણની જોડ*)

B + C = DAB + EAC ...(1)

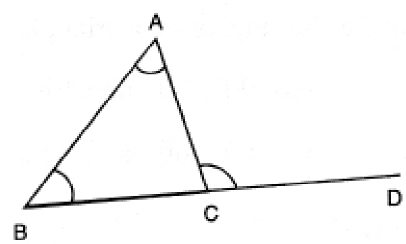
હવે (I) *ની બંને બાજુએ* A *ઉમેરતાં,*

A + B + C = A + DAB + EAC

= 180^o (*સરળ કોણ બનાવતા ખૂણા*)

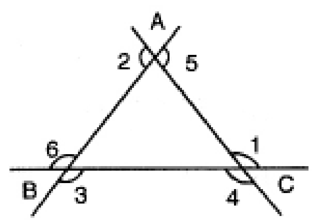
10.3.3 ત્રિકોણનો બાહ્યકોમ (બહાર ખૂણો)

A *ની બાજુ* BC *ને* D *સુધી લંબાવીએ તો.* ABD *એ* ABC *નો બહારનો ખૂણો થશે.*



આકૃતિ. 10.38

આકૃતિ 10.39*માં જુઓ કે* ABC *એ ને છ બહારના ખૂણા છે : જેમ કે* 1, 2, 3, 4, 5 *અને* 6.



આકૃતિ . 10.39

આકૃતિ . 10.38માં આમ મેળવેલ , ABC, ABC નો બાહ્યકોણ કહેવાય છે. આમ,

ત્રિકોણની લંબાવેલ એક બાજુ અને ત્રિકોણની બીજી બાજુથી બનતા ખૂણાને ત્રિકોણનો બ્રાહ્યકોણ

ત્રિકોણના બહારને ખૂણાને અનુરૂપ બે અંત : સમ્મુખ કોણ હોય છે.

અંત સમ્મૂખ કોણ એ ત્રિકોણના એવા ખૂણા છે જે આપેલ બ્રાહ્યકોણ માટે રૈખિક જોડ બનાવતા નથી.

ઉદાહરણ તરીકે ACD માં A અને B બાહ્ય કોણ ACD ને અનુરૂપ બે અંત સમ્મુખ કોણ આપણે ખૂણા માપીએ.

A = 60°

B = 50°

અને ACD = 110°

આપણે જોઈશું કે ACD = A + B.

આ અવલોકન સામાન્ય રીતે સાચું છે.

આમ આપણે તારવીએ કે :

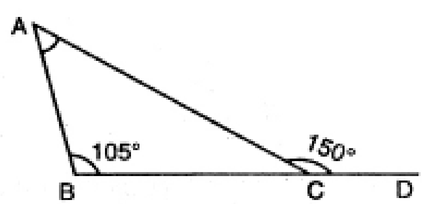
ત્રિકોણનો બાહ્ય કોણ બે અંતઃ સમ્મુખ કોણના સરવાળા બરાબર થાય છે.

ઉદાહરણ 10.3 : *નીચેના બહુવિકલ્પ પ્રશ્નોમાં આપેલ વિકલ્પોમાંથી સાચો વિકલ્પ પસંદ કરો.*

(i) *નીચેના પૈકી ત્રિકોણના ખૂણા હોઈ શકે ?*

(A) 65°, 45° and 80° (B) 90°, 30° and 61°

(C) 60°, 60° and 59° (D) 60°, 60° and 60°. જવાબ (D)



આકૃતિ . 10.40

(ii) *આકૃતિ 10.40માં, ÐA બરાબર કેટલા ?*

(A) 30° (B) 35°

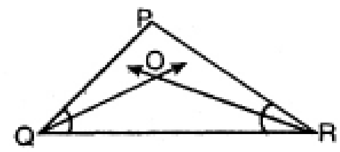
(C) 45° (D) 75° *જવાબ* (C)

(iii) *એક ત્રિકોણમાં, એક ખૂણો બીજા કરતાં બમણો છે અને ત્રીજો ખુણો 60° થે તો ત્રિકોણનો સૌથી મોટો ખૂણો શોધો.*

(A) 60° (B) 80°

(C) 100° (D) 120° *જવાબ* (B)

ઉદાહરણ **10.4:**



આકૃતિ . 10.41

આકૃતિ 10.41, માં PQR અને PRQ માં છેદે છે. સાબિત કરો કે O

QOR = 90º + ∠P.

ઉદાહરણ : QOR = 180º – [∠PQR + PRQ)]

= 180º – (∠PQR + PRQ)

= 180º – (180º — ∠P)

= 180º – 90º + ∠P = 90º + ∠P

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 10.2

1. નીચેની બહુવિકલ્પ પ્રશ્નોમાં આપેલ વિકલ્પોમાંથી સાચો જવાબ પસંદ કરો :

(i) ત્રિકોણમાં નીચે પ્રમાણે હોઈ શકે :

(A) બે કાટકોણ (B) બે ગુરુકોણ

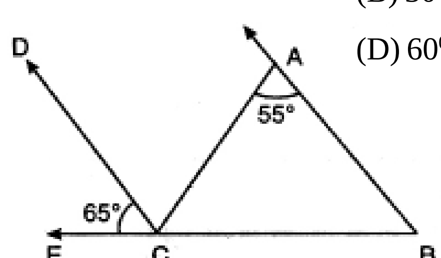
(C) વધુમાં વધુ બે લઘુકોણ (D) તમામ ત્રણે લઘુકોણ

(2) કાટકોણ ત્રિકોમમાં એક બાહ્યકોણ 120^0 છે. આ ત્રિકોણનો નાનામાં નાનો ખુણો કેટલો હોય ?

(A) 20º (B) 30^0

(C) 40º (D) 60^0

(iii)



આકૃતિ . 10.42

આકૃતિ 10.42માં CD,BA ને સમાંતર છે ACB શોધો.

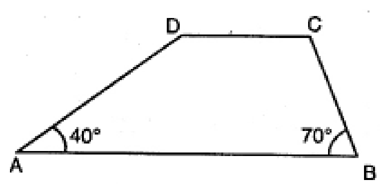
(A) 55^o (B) 60^0

(C) 65^o (D) 70^0

2. ત્રિકોણના ખુણાઓ 2 : 3 : 5ના પ્રમાણમાં છે, તો ત્રણ ખૂણા શોધો.

3. સાબિત કરો કે ચતુષ્કોણના ચારે ખુણાના માપનો સરવાળો 360°

4. આકૃતિ 10.43માં ABCD સમલંબ ચતુષ્કોણ જેમાં AB // DC તો D અને C નાં માપ શોધો અને ચકાસો કે ચાર ખૂણાઓનાં માપનો સરવાળો 360°

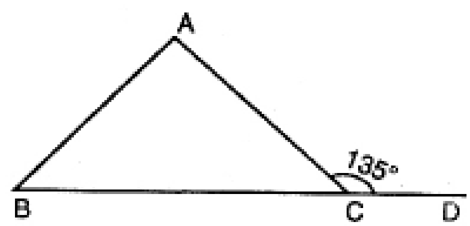


આકૃત્તિ . 10.43

5. સાબિત કરો કે જો ત્રિકોણનો એક ખૂણો બીજા બે ખૂણાઓના માપના સરવાળા બરાબર હોય, તો તે કાટકોણ ત્રિકોણ હોય.

6. આકૃતિ 10.44માં, ABC એક એવો ત્રિકોણ છે જેમાં ABC = ACB તો ત્રિકોણના ખૂણાઓ ના માપ શોધો.

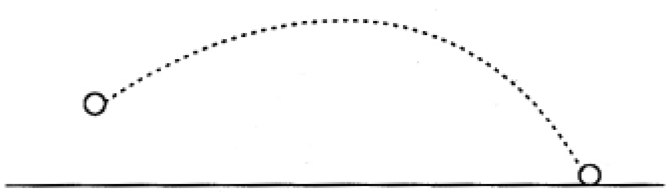
$\angle$



આકૃતિ . 10.44

10.4 બિદુંપથ

ક્રિકેટની રમતમાં, જ્યારે ખેલાડી બોલને ફટકો મારે છે ત્યારે તે કોટ થાય કે જમીનને અડે તે પહેલાં તે પથ કંડારે છે.

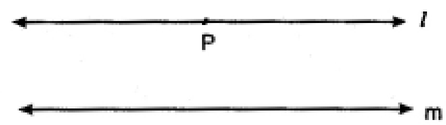


આકૃતિ . 10.44

કંડારેલ પથને **બિદુંપથ** કહે છે.

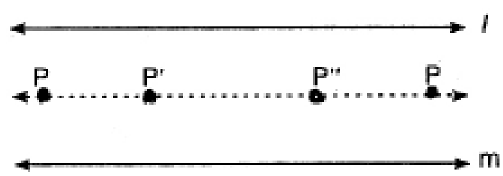
ભૂમિતિમાં આકૃતિ એ બિદું (અથવા અતિ નાનો કણ) જે અમુક સંજોગોમાં ગતિ કરે છે તેના દ્વારા કંડારાતા પથનું પરિણામ છે. ઉદાહરણ તરીકે,.

(1) બે સમાંતર રેખા l અને m તેમજ તેમની વચ્ચે બિદું o જે બંને રેખાઓથી સમાન અંતરે છે તે આપેલ છે.



આકૃતિ . 10.45

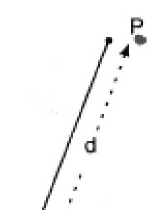
જો કણ એવી રીતે ગતિ કરે કે જેથી તે બંને રેખાઓથી સમાન અંતરે હોય, તો તેના પથ (માર્ગ) શો હશે ?



આકૃત્તિ . 10.46

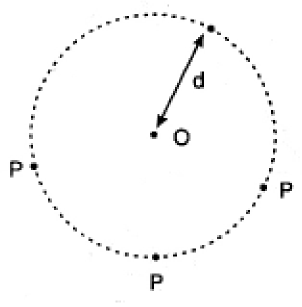
.. એ કંડારેલો પથ એક એવી રેખા હશે જે આકૃતિ 10.46 પ્રમાણે બંને રેખાઓને બંને રેખાઓને સમાંતર અને બરાબર તેમની મધ્યમાં હશે.

(2) સ્થિર બિંદુ o અને બિદું p વચ્ચેનું નિશ્ચિત અંતર d હોય.



આકૃતિ . 10.47

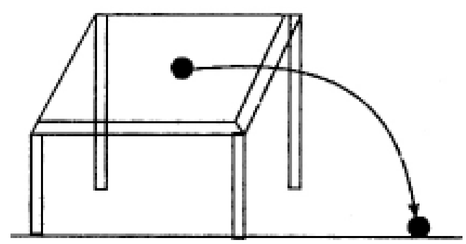
જો બિદું p સમતલમાં એવી રીતે ગતિ કરે, જેથા તે સ્થિર બિદું o થી હમેશા o અંતરે હોય તો તેના પથ શો ?



આકૃતિ . 10.48

ગતિ કરતા P બિંદુંનો પથ આકૃતિ 10.48માં દર્શાવ્યા મુજબ વર્તુળ હશે.

(3) ટેબલ ઉપર ચોકનો નાનો ટુકડો અથવા કાંકરો મૂકો. તેને પેન્સિલ કે સળી વડે જોરથી ફટકો આપો જેથી તે ટેબલ પરથી અમુક નિશ્ચિત ગતિ ... તેનું અવલોકન કરો.



≠

આકૃતિ . 10.49

કાંકરાએ કંડારેલો પથ આકૃતિ 10.49માં દર્શાવ્યા મનુજબ એક વક્ર જેને પરવલયનો ભાગ કહે છે હશે. આમ, અમુક શરતો હેઠળ ગતિ કરતા બિદુંનો બિદું પથ એ ભૌમિતિક આકૃતિનો પથ હશે, જેનું દરેક બિદું આપેલ શરત (શરતો) નું સમાધાન કરે છે.

10.4.1 બે આપેલ બિદુંઓથી સમાન અંતરે રહેતા બિદુંનો પથ

A અને B બે આપેલ બિંદુઓ છે.

.
P

A

.
B

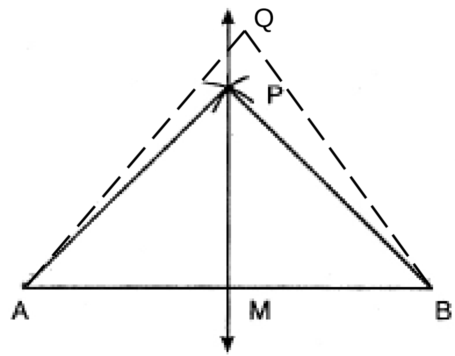
આકૃતિ . 10.50

આપણે બિંદુ P *નો બિંદુપથ શોધવો છે, જેથી* PA = PB *થાય.*

AB *જોડો* AB *નું માધ્યમ* M *અંકિત કરો, બીજુ બિદું* P *કંપાસનો ઉપયોગ કરીને અંકિત કરો જેથી* PA = PB PM *જોડો અને તેને બંને બાજુ લંબાવો . ડિવાઈડર અથવા માપપટ્ટીનો ઉપયોગ કરીને એ સહેલાઈથી ચકાસી શકાય કે* PM *ઉપરનું દરેક બિદું* A *અને* B *થી સમાન અંતરે છે. વળી આપણે* PM *પરને હોય એવું કોઈ બિદું* Q *લઈએ તો* QA QB

વળી AMP = BMP = 90°

એટલે કે PM એ AB નો લંબ



આકૃતિ . 10.51

આમ, આપણે નીચે પ્રમાણે તારવી શકીએ.

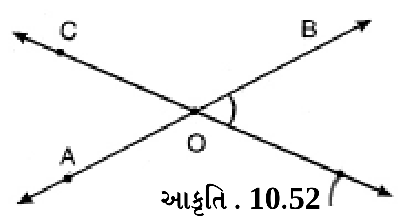
બે આપેલ બિદુંઓથી સમાન અંતરે રહેલ બિદુંનો બિદું પથ તે બે બિદુંઓને જોડતા રેખાખંડનો લંબદુભાજક છે.

તમારા માટે પ્રવૃત્તિ :

કાગળ પર A અને B બે બિદુંઓ અંકિત અને કરો અને તેમને જોડો AB ના માધ્યબિદુંએ કાગળની ગડી વાશો. જેથી A,B પર પડે ગાડીની રેખાએ સળ પાડો. આ સળ એ સુરેખા છે. આપેલ બિદુંઓ A અને B થી સમાન અંતરે રહેલ બિદુંનો આ બિદુપથ છે. તેના ઉપરનું દરેક બિદું A અને B થી સમાન અંતરે છે તે સહેલાઈથી ચકાસી શકાશે.

10.4.2 માં છેદતી બે રેખાઓથી સમાન અંતરે લરહેલ બિંદુનો બિંદુપથ.

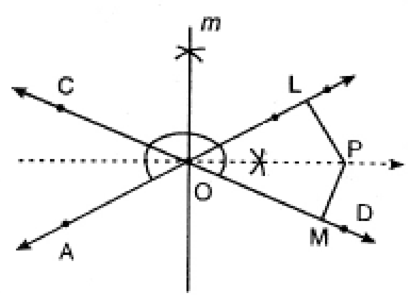
AB અને CD બે આપેલ રેખાઓ, જે O માં છેદે છે.



આકૃતિ . 10.52

આપણે AB અને CD બંન્નેથી સમાન અંતરે રહેતા બિંદુ P નો બિંદુપથ શોધવો છે.

BOD અને BOC નાદ્વિભાજકો દોરો. ધારોકે BOD નો દ્વિભાજક l અને BOC નો m દ્વિભાજક છે.



આકૃતિ . 10.53

જો આપણે કોઈ બિંદુ P કોઈ દુભાજક l અથવા m પર લઈએ, તો આપણે જોઈશું કે P નું AB અને CD થી લંબ અંતર PL અને PM સમાન હોય છે.

અર્થાત   PL = PM

જો આપણે કોઈ અન્ય બિદું Q એવું લઈએ કે જે દ્વિભાજક l ઉપર ન હોય તો m થાય આમ , આપણે તારવીએ કે QL   QM

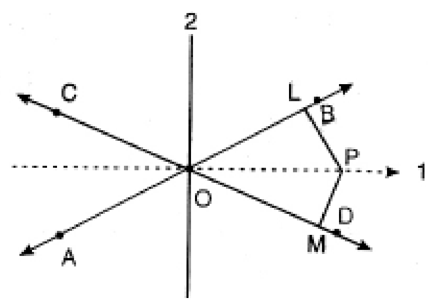
આમ, આપણે તારવીએ કે :

બે છેદતી રેખાઓથી સમાન અંતરે હોય તેવા બિદુંનો બિંદુપથ એ આપેલ રેખાઓથી રચાયેલ ખૂણાઓને દુભાગતી રેખાઓની જોડ છે.

તમારે માટે પ્રવૃત્તિ :

કાગળ પર 0 બિદુંએ એકબીજાને છેદતી બે રાખાઓ AB અને CD દોરો O માથી કાગળને એવી રીતે વાળો કે જેથી AO,CO પર પડે અને OD, OB પર પડે અને ગડી આગળ સળ પાડો. આ સળ પર P બિદું લો, જે   BOD નો દુભાજક છે અને કાટખૂણિયાના ઉપયોગ દ્વારા ચકાસો કે PL = PM

≠



આકૃતિ. 10.54

તે જ રીતે ફરીથી વાળીને અને સળ લ2 મેળવીને બીજો દુભાજક શોધો . આ સળ 2 પરનું કોઈ બિદું પણ બને રેખાઓથી સમાન અંતરે છે.

ઉદાહરણ 10.5 : *બે આપેલ બિંદુઓમાંથી પસાર થતા વર્તુળના કેન્દ્રનો બિંદુ પર શોધો.*

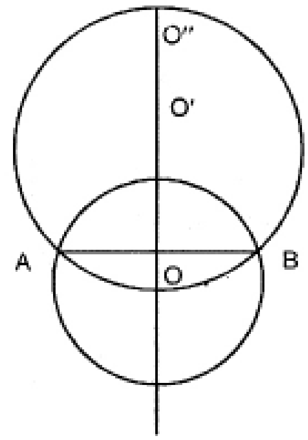
ઉકેલ : A *અને* B *બે આપેલ બિદુઓ છે* A *અને* B *બિદુંમાંથી પસાર થતા વર્તુળના કેન્દ્રો* 0 *ની સ્થિતિ કે સ્થિતિઓ શોધવાની છે.*

Ȯ

Ȧ   Ḃ

આકૃતિ . 10.55

A અને B થી બિંદુ O સમાન અંતરે હોવું જોઈએ આપણે શીખી ગયા કે બ્દુ 0 નો બિંદુપથ .. નો લસંબદુભાજક હશે.



આકૃતિ. 10.56

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 10.3

1. ત્રણ આપેલ બિંદુંઓ A, B અને C જે અસમરેખ છે તેમાંથી પસાર થતા વર્તુળના કેન્દ્રનો બિંદુપથ શોધો.
2. અમુક અંતરે દૂર બે ગામ આવેલા છે. એક કૂવો એવી રીતે ખોદવાનો છે જેથી તે બંન્ને ગામથી સમાન અંતરે હોય, એવી રીતે કે દરેક ગામથી તેનું અંતર બંન્ને ગામ વચ્ચે અંતર કરતાં વધુ ન હોય. ગામને બિંદુંઓ A અને B વડે દેમજ કુવાને બિદું P વડે દર્શાવી , બિદુ P નો બિંદુપથ આકૃતિ દ્વારા દર્શાવો.
3. બે સીધા રસ્તા AB અને CD, O બિંદુમાં છેદે છે એક નિરીક્ષણ કેન્દ્ર O બિંદુથી 1 કિમી અંતરે અને માર્ગ AB અને CDથી સમાન અંતરે ઉભું કરવાનું છે. કેન્દ્રનાં શક્ય સ્થાન દર્શાવતી આકૃતો દોરો .
4. બિંદુ કે જે આપેલ રેખા AB થી હંમેશા 5 સેમી અંતરે હોય તેના બિંદુપથ શોધો.

સારાંશ :

- રેખા બંને બાજુએ અનંત વિસ્તરે છે અને રેખાખંડ એ તેનો બે બિંદુઓ વચ્ચેનો માત્ર એક ભાગ છે.
- સમતલમાં બે સ્પષ્ટ રેખાઓ એકબીજીને છેદતી હોય અથવા તો સમાંતર હોય.
- જો ત્રણ કે વધુ રેખાઓ માત્ર એક બિંદુમાં છેદે તો તે સંગામી રેખાઓ કહેવાય .
- જો કોઈ રેખા 6ણ કે વધુ બિંદુઓમાંથી પસાર થાય તો તે સમરેખ બિંદુઓ કહેવાય .
- ખુણાઓની જોડ , જેનો સરવાળો 90^0 હોય તો તે કોટિકોણ કહેવાય
- ખુણાઓની જોડ , જેનો સરવાળો 180^0 હોય તો તે પૂરક કોણ કહેવાય .
- જો એક કિરણ રેખા ઉપર ઊભું રહે, તો તેથી બનતા તે આસન્ન કોણોનો સરવાળો 180^0 થાય.

- જો બે રેખાઓ એકબીજીને છેદે તો અભિકોણ સમાન બને.
- જો કોઈ છેદિકા બે સમાંતર રેખાઓને છેદે તો,

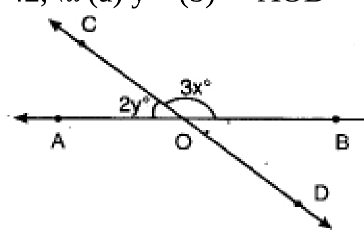
  (૧) અનુકોણની પ્રત્યેકના ખૂણા સમાન થાય

  (૨) યુગ્મ કોણ સમાન હોય.

  (૩) છેદિકાની એક જ બાજુએ આવેલ અંત : કોણ પૂરક હોય છે.
- ત્રિકોણના ખૂણાઓનાં માપનો સરવાળો 180° થાય છે.
- ત્રિકોણનો બાહ્યકોણ એ બે અંતઃઅભિમુખ કોણના સરવાળા બરાબર થાય છે.

સત્રાંત સ્વાધ્યાય

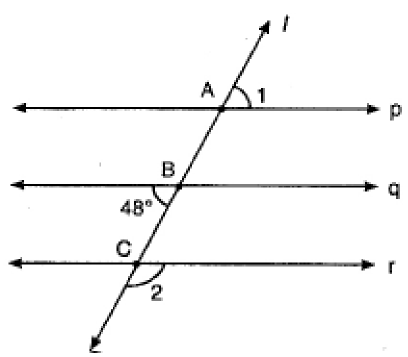
1. આકૃતિ 10.57 માં , જો x = 42, તો (a) y (b) AOD



∠

આકૃત્તિ . 10.57

2.

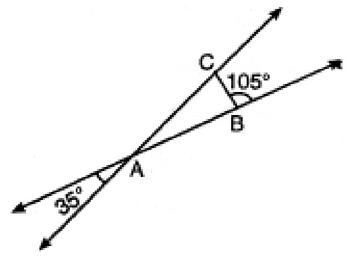


આકૃત્તિ . 10.58

ઉપરની આકૃત્તિમાં P.q અને.. એવી સમાંતર રેખાઓ છે જે છેદિકા *l* વડે A,B અને C માં છેદાય છે 1 અને 2 શોધો.

3. ત્રિકોણના બે ખૂણાઓનો સરવાળો ત્રીજા ખૂણા બરાબર છે, તો ત્રીજો ખૂણો શોધો. આ ત્રિકોણ ક્યા પ્રકારનો છે. ?

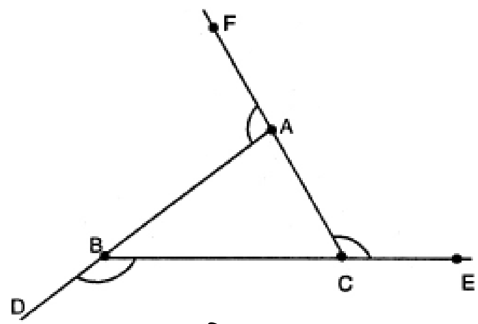
4.



આકૃત્તિ . 10.59

આકૃતિ 10.59*માં* ABC *ની બાજુઓ દર્શાવ્યા મુજબ લંબાવેલ છે. ત્રિકોણના ખૂણાઓ શોધો.*

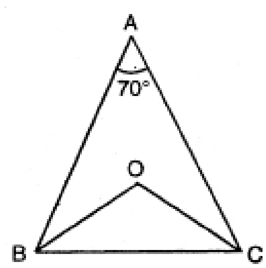
5.



આકૃત્તિ . 10.60

આકૃતિ 10.60*માં* ABC *ની બાજુઓ દર્શાવ્યા મુજબ લંબાવેલ છે. દર્શાવો કે બનતા બાહ્યાકોણનો સરવાળો* 360° *થાય છે.*

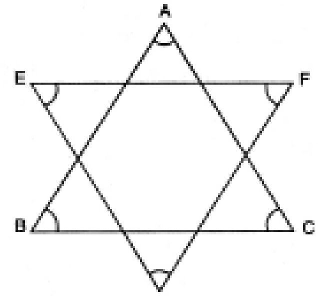
6.



આકૃત્તિ. 10.61

આકૃતિ 10.61*માં* ABC *એક ત્રિકોણ છે, જેમાં ની બાજુઓ દર્શાવ્યા મુજબ લંબાવેલ છે. ત્રિકોણના ખૂણાઓ શોધો.*

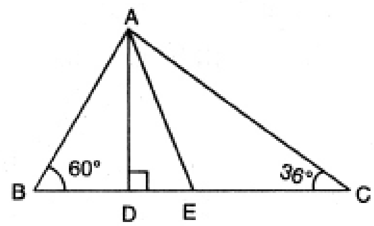
7.



આકૃત્તિ . 10.62

ઉપર આકૃતિ 10.62માં ખૂણાઓ A , F , C , D , B અને E.

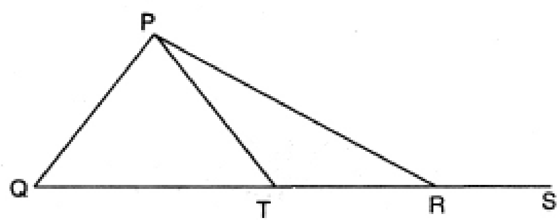
8.



આકૃત્તિ. 10.63

આકૃતિ 10.63માં ABC માં AD,BC, ને લંબ છે અને AE, BAC નો દુભાજક છે DAEશોધો.

9.



∡

ઉદાહરણ . 10.64

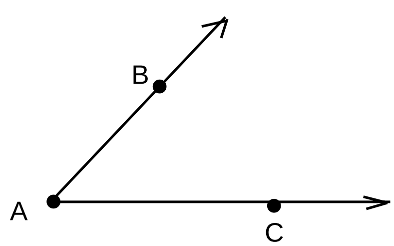
આકૃતિ 10.64 માં D PQR માં PT P નો દજુભાજક છે અને QR ને S સુધી લંબાવેલ છે દર્શાવો કે

PQR + PRS = 2 PTR.

10. પંચકોણના (આંતરિક) અંતઃ ખૂણાઓનો સરવાળો 540^0 હોય છે એમ સાબિત કો.

11. સમાંતર રેખાઓ l અને m વચ્ચેનું અંતર 5 સે.મી છે. આ રેખાઓથી સમરેખ અંતરે રહીને ગતિ કરતા બિંદુનો બિદુંપથ જણાવો,

12. આકૃતિ 10.65માં બિદુઓ A અને B થી સમરેખ અંતરે રહેતા બિદુનો બિદુપથ જણાવો તેમજ કિરણ AB અને AC કિરણથી સમરેખ અંતરે રહેતા બિંદુનો બિદુપથ જણાવો.



આકૃત્તિ 10.65

ઉત્તરો

નોંધ

તમારી પ્રગતિ ચકાસો

10.1

1. (i) (B) (ii) (A) (iii) (B) (iv) (C)

2. $x = 17^0$.

3. 1 = 3 = 4 = 6 = 110°

જવાબ : 2 = 5 = 7 = 70°.

10.2

1. (i) (D) (ii) (B) (iii) (B)

2. 36°, 54° અને 90° 4. D = 140° અને C = 110°

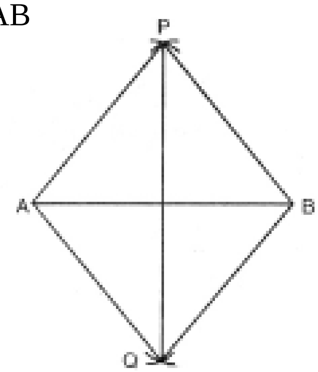
6. ABC = 45°, ACB = 45° અને A = 90°

10.3

1. માત્ર એક બિંદુ જે AB અને BC ના લંબ દુભાજકોનું છેદનબિંદુ છે.

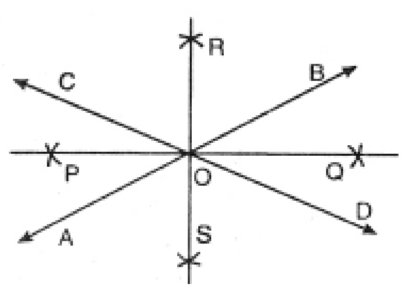
2. A અને B ગામ છે. બિંદુપથ એ રેખાખંડ હશે. જે AB નો એવો લંબદુભાજક હશે, જેથી

AP = BP = QA = QB = AB



આકૃત્તિ . 10.65

3. શક્ય સ્થાન ચાર બિંદુઓ હશે : બે બિંદુઓ P અને Q AOC ના દુભાજક ઉપર અને બે બિંદુઓ R અન S, BOC ના દુભાજક પર.



આકૃત્તિ . 10.66

4. બે AB ની બંને બાજુએ અને AB ને સમાંતર રેખાઓ પર AB થી 5 સેમી ના દર અંતરે

સત્રાંત સ્વાધ્યાય

1. (a) y = 27 (b) = 126°

2. 1 = 48° અને 2 = 132°

3. ત્રીજો ખૂણો = 90°, કાટકોણ

4. A = 35°, B = 75° C = 70°

7. 360°

8. 12°

11. A અને *m* બંનેથી 2.5 સેમીનું અંતર રાખીને અને બંનેને સમાંતર હોય તેવી રેખા બિંદુપથ થશે.

12. AB નો લંબદ્વિભાજક અને BAC ના દ્વિભાજકનું છેદબિંદુ

$\angle$

11

ત્રિકોણોની એકરૂપતા

પરિચય :

તમે જોયું હશે કે જુદાં જુદાં વૃક્ષોને જુદા જુદા આકારના પાન હોય છે, પણ એક જ વૃક્ષનાં પાન લગભગ સરખો આકાર ધરાવે છે. જો કે તેમનાં કદ જુદાં હોય. એક જ આકાર અને એક જ કદની ભૌમિતિક આકૃતિઓ એકરૂપ કહેવાય છે અને આ ગુણધર્મને એકરૂપતા કહે છે.

આ પાઠમાં તમે બે ત્રિકોણોની એકરૂપતા, તેમની બાજુઓ અને ખૂણાઓ વચ્ચેના સંબંધો વિશે શીખશો.

હેતુઓ :

આ પાઠ શીખ્યા પછી, અધ્યેતા :

- બે આપેલ આકૃતિઓ એકરૂપ છે કે નહિ તે ચકાસી અને સમજાવી શકશે.
- બે ત્રિકોણોની એકરૂપતા માટેની શરતો જણાવી શકશે અને કૂટપ્રશ્નો ઉકેલવામાં તેનું ઉપયોજન કરી શકશે.
- ત્રિકોણની સમાન બાજુઓની સામેના ખૂણા સમાન હોય છે તે સાબિત કરી શકશે.
- ત્રિકોણના સમાન ખૂણાઓની સામેની બાજુઓ સમાન હોય છે તે સાબિત કરી શકશે.
- જો ત્રિકોણની બે બાજુઓ અસમાન હોય, તો મોટી બાજુની સામેનો ખૂણો મોટો હોય છે તે સાબિત કરી શકશે.
- ત્રિકોણની અસમાનતાઓ જણાવી શકશે અને ચકાસી શકશે.
- ઉપર્યુક્ત પરિણામો આધારિત કૂટપ્રશ્નો ઉકેલી શકશે.

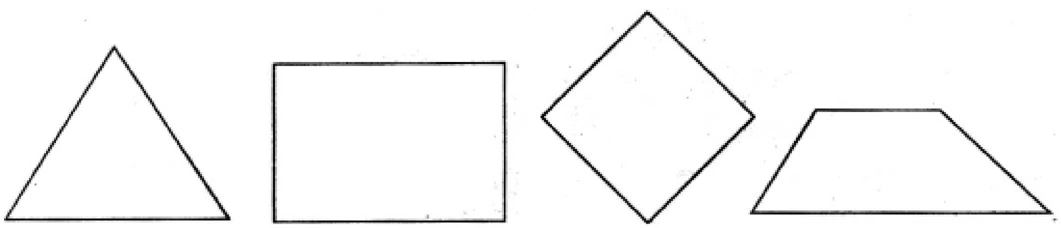
અપેક્ષિત પૂર્વજ્ઞાન :

- સમતલીય ભૌમિતિક આકૃતિઓની ઓળખ.
- રેખાઓ અને ખૂણાઓની સમાનતા
- ખૂણાઓના પ્રકાર
- ત્રિકોણના ખૂણાઓના સરવાળાનો ગુણધર્મ
- કાગળ કાપવા અને વાળવા

11.1 એકરૂપતાની સંકલ્પના :

રોજબરોજના જીવનમાં તમે વિવિધ આકૃતિઓ અને વસ્તુઓ જુઓ છો. આ આકૃતિઓ કે વસ્તુઓ આકાર અને કદને આધારે નીચેની રીતે વર્ગીકૃત કરી શકાય.

1. આકૃતિ 11.1માં બતાવ્યા પ્રમાણે જુદા જુદા આકાર અને કદ હોય તેવી આકૃતિઓ



આકૃતિ 11.1

2. આકૃતિ 11.2 માં બતાવ્યા પ્રમાણે એક જ આકાર પણ જુદાં કદ હોય તેવી આકૃતિઓ

આકૃતિ 11.2

3. આકૃતિઓ 11.3, 11.4 અને 11.5માં દર્શાવ્યા મુજબ એક જ આકાર અને એક જ કદ હોય તેવી આકૃતિઓ

(અ) એક રૂપિયાની બે સિક્કા

આકૃતિ 11.3

(બ) બે ટપાલ-ટિકિટો કે પોસ્ટ કાર્ડ

આકૃતિ 11.4

(ક) એક જ નેગેટિવમાંથી એક જ કદવાળી બે ફોટો પ્રિન્ટ

આકૃતિ 11.5

એક જ આકાર અને એક જ કદવાળી આકૃતિઓની આપણે ચર્ચા કરીશું.

બે આકૃતિઓ જે સમાન આકાર અને સમાન કદ ધરાવે છે તેમને એકરૂપ આકૃતિઓ કહે છે અને આ ગુણધર્મને એકરૂપતા કહે છે.

11.4.1 તમારે માટે પ્રવૃતિ

એક કાગળ લો. તેને વચ્ચેથી વાળો અને બંને ગડી વચ્ચે કાર્બન (પેપર) મૂકો. હવે પાન કે ફૂલ કે તમને ગમતી વસ્તુની આકૃતિ કાગળના ઉપલા ભાગમાં દોરો. તમને તેની કાર્બન કોપી નીચેના કાગળ પર મળશે.

તમે દોરેલ આકૃતિ તેમજ તેની કાર્બન કોપી એક જ આકાર અને એક જ કદ ધરાવે છે. આમ, આ એકરૂપ આકૃતિઓ છે. પતંગિયાને બંને પાંખો ભેગી કરતા જુઓ. તે સમાન લાગે છે.

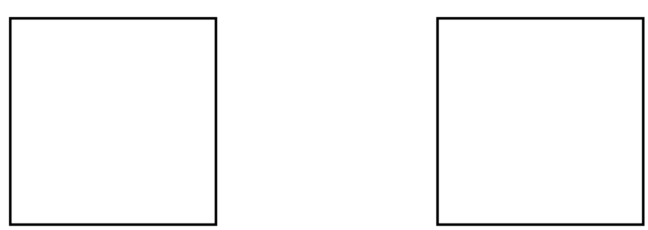
11.4.2 કેટલીક આકૃતિઓની એકરૂપતા માટેની શરતો

એકરૂપ આકૃતિઓ એક ઉપર બીજી મૂકવામાં આવે ત્યારે એકબીજી સાથે અનુરૂપ થાય છે અથવા એકબીજીને ઢાંકે છે. બીજા શબ્દોમાં, જો એક આકૃતિના ભાગ બીજી આકૃતિના અનુરૂપ ભાગ સમાન હોય, તો તે બે એકરૂપ આકૃતિઓ હશે. ઉદાહરણાર્થે,

1. બે રેખાખંડો, જ્યારે સમાન લંબાઈના હોય ત્યારે એકરૂપ હોય છે.

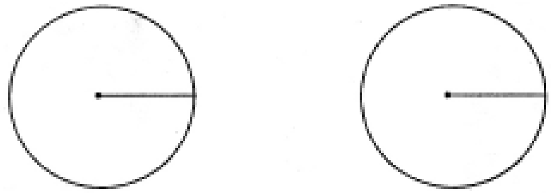
આકૃતિ 11.6

2. બે વર્તુળ, જો તેમની ત્રિજ્યા સમાન હોય, જેથી તેમના પરિઘ પણ સમાન હોય તો તે એકરૂપ હોય છે.



આકૃતિ 11.7

3. બે વર્તુળ, જો તેમની ત્રિજ્યા સમાન હોય, જેથી તેમના પરિઘ પણ સમાન હોય તો તે એકરૂપ હોય છે.



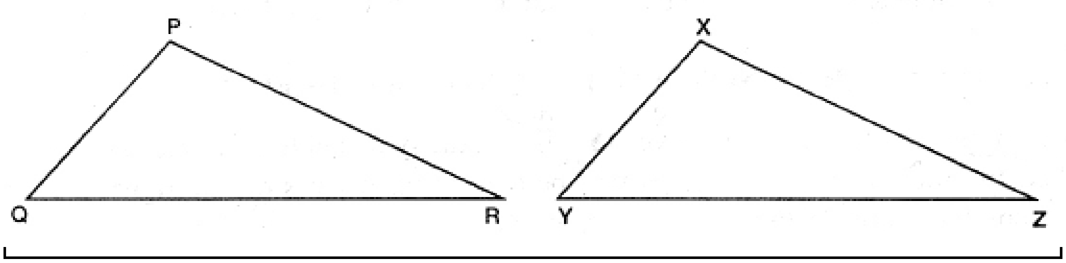
આકૃતિ 11.8

11.2 ત્રિકોણોની એકરૂપતા

ત્રિકોણ એ ભૂમિતિમાં મૂળભૂત સુરેખ આકૃતિ છે, જે લઘુતમ બાજુઓ ધરાવે છે. તેથી ત્રિકોણોની એકરૂપતા ઘણા ઉપયોગી પરિણામો સાબિત કરવા માટે અતિ અગત્યની ભૂમિકા ભજવે છે, તેથી તેનો વિસ્તૃત અભ્યાસ જરૂરી છે.

જો એક ત્રિકોણની તમામ બાજુઓ અને તેના તમામ ખૂણા બીજા ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓ અને તેના અનુરૂપ ખૂણાઓ બરાબર હોય, તો તે બે ત્રિકોણો એકરૂપ હોય છે.

ઉદાહરણાર્થ, આકૃતિ 11.9માં ત્રિકોણ PQR અને XYZ માં,



આકૃતિ 11.9

$$PQ = XY, PR = XZ, QR = YZ$$

$$\angle P = \angle X, \angle Q = \angle Y \text{ and } \angle R = \angle Z$$

આમ, આપણે કહી શકીએ કે :

Δ PQR અને Δ XYZ એકરૂપ છે અને આપણે આમ લખીએ :

$\Delta PQR \cong \Delta XYZ$

બે ત્રિકોણો વચ્ચેની એકરૂપતાનો સંબંધ હંમેશાં અનુરૂપ કે મળથાં આવતાં અંગોને યોગ્ય ક્રમમાં દર્શાવીને લખાય છે.

અહી $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$ નો અર્થ એ પણ છે કે P, X ને અનુરૂપ છે, Q, Y ને અનુરૂપ છે અને R, Z ને અનુરૂપ છે.

આ એકરૂપતા આમ પણ લખાય $\Delta QRP \cong \Delta YZX$ જેનો અર્થ છે કે Q, Y ને અનુરૂપ છે, R, Z ને અનુરૂપ છે અને P, X ને અનુરૂપ છે. તેનો અર્થ એ પણ છે કે અનુરૂપ અંગો (તત્ત્વો) સમાન છે, જેમ કે

$$QR = YZ, RP = ZX, QP = YX, \angle Q = \angle Y, \angle R = \angle Z$$

અને $\angle P = \angle X$

આ એકરૂપતા આમ પણ લખાય :

$$\Delta RPQ \cong \Delta ZXY$$

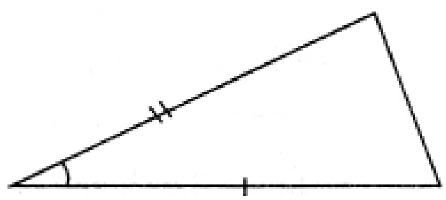
પણ આમ નહિ : $\Delta PQR \cong \Delta YZX$.

અથવા આમ પણ નહિ : $\Delta PQR \cong \Delta ZXY$.

11.3 ત્રિકોણની એકરૂપતા માટેની શરતો :

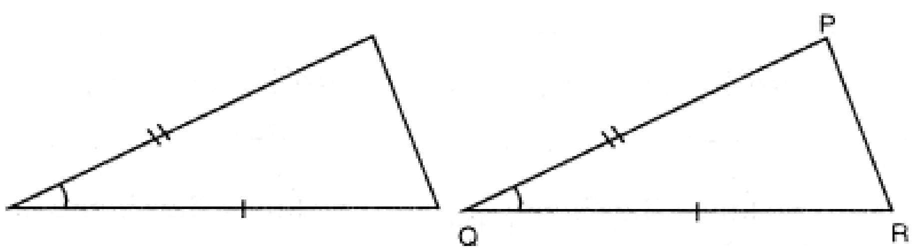
બે ત્રિકોણો એકરૂપ છે કે નહિ તે સાબિત કરવા માટે, એક ત્રિકોણનાં છ અંગો બીજી ત્રિકોણનાં અનુરૂપ છ અંગો બરાબર છે તે જાણવું જરૂરી છે. આપણે હવે શીખીશું કે જો આપણે અનુરૂપ ત્રણ અંગોની સમાનતા જાણી શકીએ તો પણ બે ત્રિકોણોની એકરૂપતા સાબિત કરવી શક્ય છે.

આકૃતિ 11.10 માંનો ત્રિકોણ ABC વિચારો.



આકૃતિ 11.10

બીજો ત્રિકોણ PQR રચો, જેથી QR = BC, $\angle Q = \angle B$ અને PQ = AB (આકૃતિ 11.11 જુઓ)



આકૃતિ 11.1

જો આપણે ત્રિકોણ ABC ટ્રેસ કરીએ અથવા કાપીએ અને તેને ત્રિકોણ PQR પર મૂકીએ, તો આપણે જોઈશું કે એક બહીજા પર બરાબર પડે છે. આમ, આપણે કહીએ કે તેઓ એકરૂપ છે.

વૈકલ્પિક રીતે, આપણે બાકીનાં અંગો માપી પણ શકીએ અને જોઈ શકીએ કે

$AC = PR$, $\angle A = \angle P$ and $\angle C = \angle R$ થાય છે.

જે દર્શાવે છે કે $\Delta PQR \cong \Delta ABC$

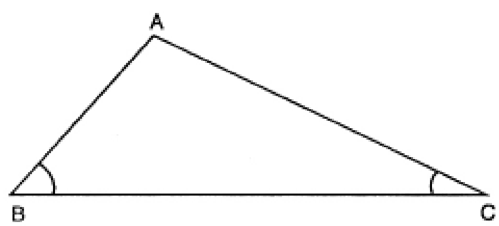
એ પણ અહીં નોંધવુ જોઈએ કે, ΔABC ને એકરૂપ ΔPQR રચવા માટે આપણે માત્ર બાજુઓની બે જોડ, $PQ = AB$, $OR - BC$ અને તેમની વચ્ચેનો ખૂણો $\angle Q = \angle B$ લીધાં છે.

આનો અર્થ એ છે કે આ ત્રણ અનુરૂપ અંગોની સમાનતા એકરૂપ ત્રિકોણોમાં પરિણામે છે. આમ, આપણને મળે કે :

શરતો-1 : જો એક ત્રિકોણની બે બાજુઓ અને તેમની વચ્ચેનો ખૂણો બીજા ત્રિકોણની અનુરૂપ બે બાજુઓ અને વચ્ચેના ખૂણા બરાબર હોય, તો તે બે ત્રિકોણ એકરૂપ બને છે.

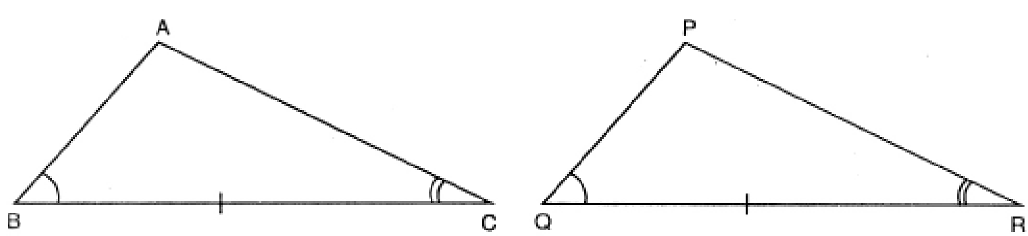
આ શરત બાખૂબા (બાજુ-ખૂણો-બાજુ) તરીકે ઓળખાય છે.

વળી આકૃતિ 11.12 માં ΔABC વિચારો.



આકૃતિ 11.12

બીજો ΔPQR એવો રચો કે $OR = BC$, $\angle Q = \angle B$ અને $\angle R = \angle C$ થાય (જુઓ આકૃતિ 11.13)



આકૃતિ 11.13

એકબીજા પર ગોઠવણ દ્વારા અથવા બાકીનાં અનુરૂપ અંગો માપીને આપણે જોઈએ છીએ કે $\angle P = \angle A$, $PQ = AB$ અને $PR = AC$ થાય જે દ્વારા પ્રસ્થાપિત થાય છે કે $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ જેનો એ પણ અર્થ છે કે બે ત્રિકોણનાં ત્રણ અનુરૂપ અંગો (બે ખૂણા અને વચ્ચેની બાજુ)ની સમાનતા એકરૂપ ત્રિકોણોમાં પરિણામે છે.

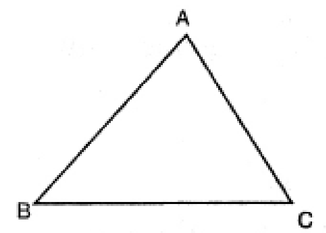
આપણે એ પણ જાણીએ છીએ કે ત્રિકોણના ત્રણ ખૂણાઓનો સરવાળો 180^0 હોય છે, તેથી જો એક ત્રિકોણના બે ખૂણા બીજા ત્રિકોણના અનુરૂપ ખૂણાઓની બરાબર હોય, તો ત્રીજા ખૂણા પણ સમાન બનશે. આમ, વચ્ચેની બાજૂને બદલે આપણને અનુરૂપ બાજુઓની કોઈ પણ જોડ સમાન મળશે. આમ આપણને મળશે.

શરત-2 : જો એક ત્રિકોણના બે ખૂણા અને એકબાજુ બીજા ત્રિકોણના અનુરૂપ ખૂણા અને અનુરૂપ બાજુ બરાબર હોય, તો બંને ત્રિકોણ એકરૂપ બને છે.

આ શરત ખૂબાખૂ અથવા ખૂખૂબા તરીકે ઓળખાય છે. (ખૂણો-બાજુ-ખૂણો અથવા ખૂણો-ખૂણો-બાજુ)

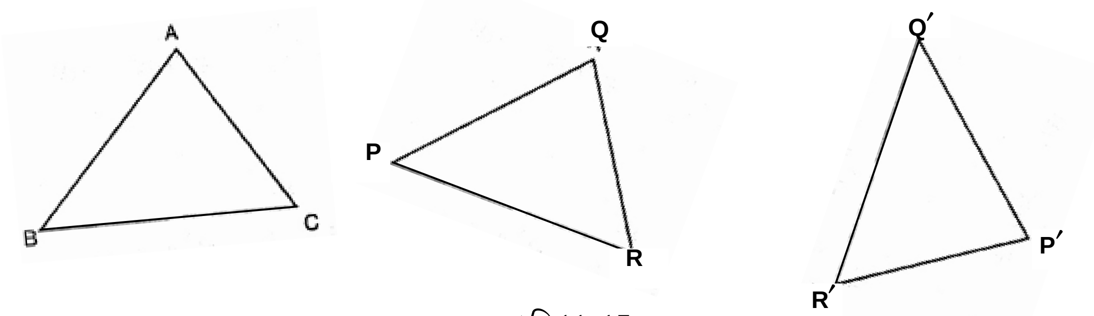
11.3.1 તમારે માટે પ્રવૃતિ :

અન્ય શરત શોધવા આપણે ફરીથી ત્રિકોમ ABC લઈએ. (જુઓ આકૃતિ 11.14)



આકૃતિ 11.14

હવે આપણે ΔABC ની બાજુઓ AB, BC અને CA ની લંબાઈ ત્રણ પાતળી સળીઓ લઈએ. તેમને ગમે તે ક્રમમાં ગોઠવો જેથી ΔABC પાસે ΔPQR અથવા $\Delta P'Q'R'$ રચાય (આકૃતિ 11.15)



આકૃતિ 11.15

અનુરૂપ ખૂણો માપીને આપણે જાણી શકીએ કે : $\angle P = \angle P' = \angle A$, $\angle Q = \angle Q' = \angle B$ અને $\angle R = \angle R' = \angle C$, થાય છે જે દ્વારા પ્રસ્થાપિત થાય છે કે

$$\Delta PQR \cong \Delta P'Q'R' \cong \Delta ABC$$

જેનો અર્થ છે કે, બે ત્રિકોણોની ત્રણ અનુરૂપ બાજુઓની સમાનતા એકરૂપ ત્રિકોણોમાં પરિણમે છે. આમ આપણને મળે છે.

શરત-3 : જો એક ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓ બીજા ત્રિકોણની ત્રણ અનુરૂપ બાજુઓ બરાબર હોય તો બે ત્રિકોણો એકરૂપ હોય છે.

આ શરત બાબાબા (બાજુ, બાજુ, બાજુ) તરીકે ઓળખાય છે.

તે જ પ્રમાણે, આપણે એક વધુ શરત પ્રસ્થાપિત કરી શકીએ, જે બે કાટકોણ ત્રિકોણોને લાગુ પડે.

શરત-4 : જો એક કાટકોણ ત્રિકોણના કર્ણ અને એક બાજુ બીજા કાટકોણ ત્રિકોણના અનુક્રમે કર્ણ અને એક બાજુ બરાબર હોય, તો તે બે કાટકોણ ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.

આ શરત કાકબા (કાટકોણ ત્રિકોમ, કર્ણ, બાજુ) તરીકે ઓળખાય છે. આ શરતનો ઉપયોગ કરીને માત્ર ત્રણ અનુરૂપ અંગો જાણીને ત્રિકોણ એકરૂપ છે કે કેમ તે સહેલાઈથી સાબિત કરી શકીએ અને બાકીનાં અનુરૂપ અંગોની સમાનતા પ્રસ્થાપિત કરી શકીએ.

ઉદાહરણ 11.1 : નીચેની પૈકી કઈ શરતમાં આપેલ બે ત્રિકોણો એકરૂપ નથી ?

(અ) તમામ અનુરૂપ બાજુઓ સમાન હોય.

(બ) તમામ અનુરૂપ ખૂણા સમાન હોય.

(ક) બે અનુરૂપ બાજુઓ અને તેમની વચ્ચેના ખૂણા સમાન હોય.

(ડ) તમામ અનુરૂપ ખૂણા અને અનુરૂપ બાજુઓની કોઈ પણ જોડ સમાન હોય.

જવાબ (બ)

ઉદાહરણ 11.2 : બે સુરેખ આકૃતિઓ એકરૂપ હોય, જો તેઓ માત્ર ધરાવે :

(અ) તમામ અનુરૂપ બાજુઓ સમાન

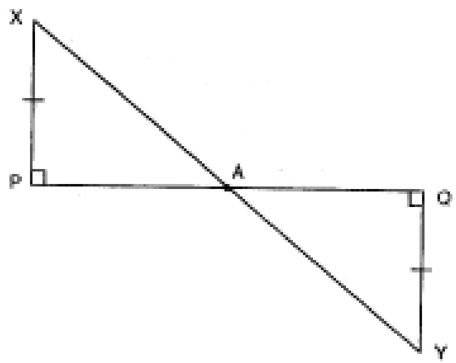
(બ) તમામ અનુરૂપ ખૂણા સમાન

(ક) તમામ અનુરૂપ ખૂણા સમાન

(ડ) તમામ અનુરૂપ ખૂણા અને અનુરૂપ બાજુઓ સમાન

જવાબ : (ડ)

ઉદાહરણ 11.3 *આકૃતિ* 11.16 *માં* PX *અને* QY, PQ *ને લંબ છે અને* PX = QY. *દર્શાવો કે* AX = AY.



આકૃતિ 11.16

ઉકેલ :

ΔPAX *અને* ΔQAY *માં,*

$\angle XPA = \angle YQA$ *(દરેક* 90^0 *છે.)*

$\angle PAX = \angle QAY$ *(અભિકોણ)*

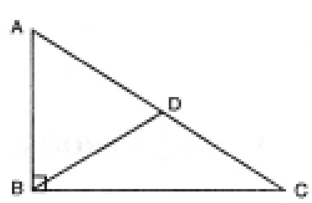
અને PX = QY

$\therefore$ D PAX $\cong$ D QAY *(ખૂખૂબા)*

$\therefore$ AX = AY.

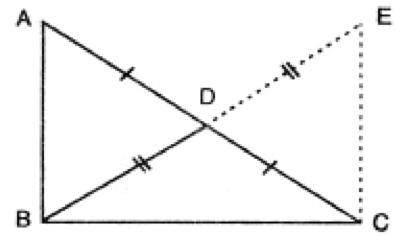
ઉદાહરણ 11.4 *: આકૃતિ* 11.17 *માં* ΔABC *કાટકોણ ત્રિકોણ છે, જેમાં* $\angle B = 90^0$ *અને* D, AC *નું મધ્યબિંદુ છે.*

સાબિત કરો કે BD = 1/2 AC



આકૃતિ 11.17

ઉકેલ BD ને E સુધી લંબાવો, જેથી BD = DE થાય. CE જોડો.



આકૃતિ 11.18

ΔADB અને ΔCDE માં,

AD = CD (D, AC નું મધ્યબિંદુ હોવાથી)

DB = DE (રચના દ્વારા)

and $\angle ADB = \angle CDE$ (અભિકોણ)

$\therefore$ $\Delta ADB \cong \Delta CDE$ (બાખૂબા) .... (i)

$\therefore$ AB = EC

વળી $\angle DAB = \angle DCE$

પરંતુ તે યુગ્મકોણોની જોડ બનાવે છે.

$\therefore$ AB, BC ને સમાંતર છે.

$\therefore$ $\angle ABC + \angle ECB = 180^0$ (અંતઃકોણની જોડ)

$\therefore$ $\angle 90^0 + \angle ECB = 180^0$

$\therefore$ $\angle ECB = 180^0 - 90^0 = 90^0$

હવે ΔABC અને Δ ECB માં,

AB = EC [(i) ઉપરથી]

BC = BC (સામાન્ય)

અને $\angle ABC = \angle ECB$ (દરેક 90^0)

$\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta ECB$

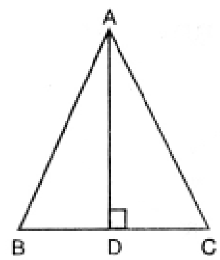
$\therefore \quad AC = EB$

પરંતુ $\quad BD = \frac{1}{2} EB$

$\therefore \quad BD = \frac{1}{2} AC$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 11.1

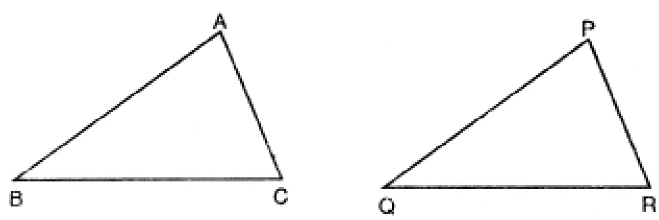
1. ΔACB માં, (આકૃતિ 11.19) જો $\angle B = \angle C$ અને $AD \perp BC$ હોય, તો $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ નીચેની શરત દ્વારા :



આકૃતિ 11.19

(અ) કાકબા (બ) ખૂબાખૂ (ક) બાખૂબા (ડ) બાબાબા

2. આકૃતિ 11.20માં, $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ આ એકરૂપતા આ રીતે પણ લખી શકાય :



આકૃતિ 11.20

(a) $\Delta BAC \cong \Delta RPQ$ (b) $\Delta BAC \cong \Delta QPR$

(c) $\Delta BAC \cong \Delta RQP$ (d) $\Delta BAC \cong \Delta PRQ$.

3. આપેલ બે ત્રિકોણ એકરૂપ થાય તે માટે, બે અનુરૂપ ખૂણાની સમાનતા સાથે, આપણે નીચેનાની

પણ સમાનતા જાણવી જોઈએ :

(અ) અનુરૂપ બાજુ કોઈ નહિ (બ) ઓછામાં ઓછી એક અનુરૂપ બાજુ

(ક) ઓછામાં ઓછી બે અનુરૂપ બાજુ (ડ) તમામ ત્રણે અનુરૂપ બાજુઓ

4. બે ત્રિકોણો એકરૂપ થાય, જો

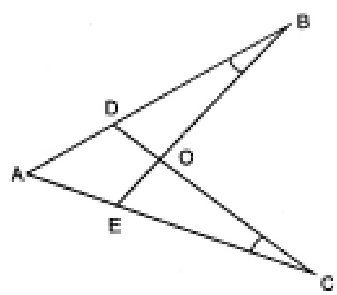
(અ) તમામ ત્રણે અનુરૂપ ખૂણા સમાન હોય

(બ) એક ત્રિકોણના બે ખૂણા અને એક બાજુ બીજા ત્રિકોણના બે ખૂણા અને એક બાજુ બરાબર હોય.

(ક) એક ત્રિકોણના બે ખૂણા અને એક બાજુ બીજા ત્રિકોણના બે ખૂણા અને અનુરૂપ બાજુ બરાબર હોય

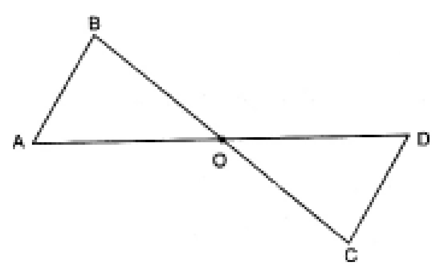
(ડ) એક ત્રિકોણનો એક ખૂણો અને તેની બે બાજુઓ બીજા ત્રિકોણનો એક ખૂણો અને તેની બે બાજુઓ બરાબર હોય.

5. આકૃતિ 11.21માં $\angle B = \angle C$ અને AB - AC સાબિત કરો કે $\Delta ABE \cong \Delta ACD$. તેથી દર્શાવો કે CE = BE.



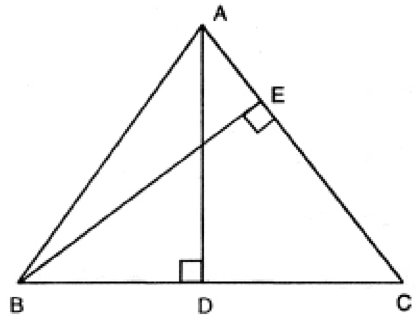
આકૃતિ 11.21

6. આકૃતિ 11.22માં, AB, CD ને સમંતર છે. જો O, BC નું મધ્યબિંદુ હોય તો, દર્શાવો કે તે AD નું પણ મધ્યબિંદુ છે.



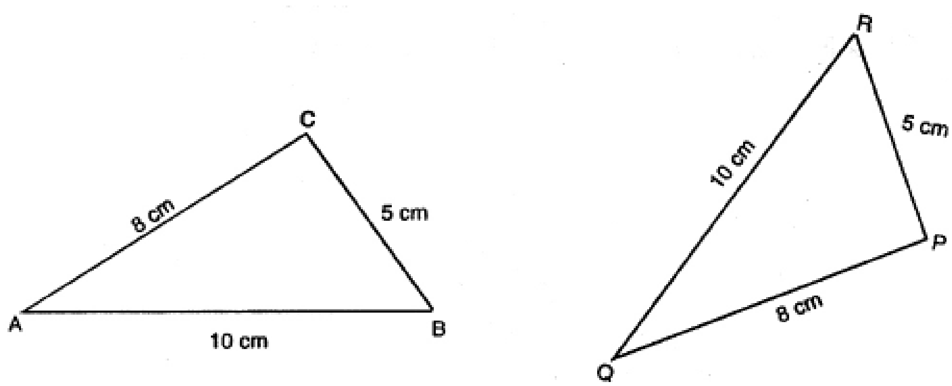
આકૃતિ 11.22

7. ΔABC માં (આકૃતિ 11.23) $AD \perp BC, BE \perp AC$ અને $AD = BE$ સાબિત કરો કે $AD = BE$



આકૃતિ 11.23

8. આકૃતિ 11.24 પરથી દર્શાવો કે તે ત્રિકોણો એકરૂપ છે અને સમાન ખૂણાઓની જોડ બનાવો.

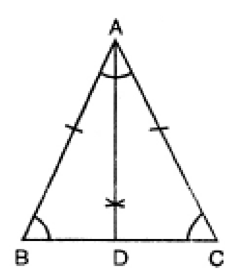


આકૃતિ 11.24

11.7 ત્રિકોણની સમાન બાજુઓ સામેના ખૂણા અને સમાન ખૂણાઓની સામેની બાજુઓ.

ત્રિકોણોની એકરૂપતાની શરતોનો ઉપયોગ કરીને આપણે હવે કેટલાક મહત્ત્વનાં પ્રમેયો સાબિત કરીશું.

પ્રમેય : ત્રિકોણની સમાન બાજુઓ સામેના ખૂણા સમાન હોય છે.



પક્ષ : ત્રિકોણ ABC, જેમાં $AB = AC$

સાધ્ય : $\angle B = \angle C$

રચના : $\angle BAC$ નો દુભાજક દોરો, જે BC ને D માં મળે.

સાબિતિ : ΔABD અને ΔACD માં,

$AB = AC$ (પક્ષ)

$\angle BAD = \angle CAD$ (રચના દ્વારા)

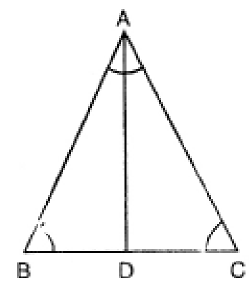
અને $AD = AD$ (સામાન્ય)

$\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (બાખૂબા)

તેથી $\angle B = \angle C$

ઉપરના પ્રમેયનું પ્રતિપ્રમેય પણ સાચું છે. આપણે તેને પ્રમેય તરીકે સાબિત કરીએ.

11.7.1 *ત્રિકોણના સમાન ખૂણાઓ સામેની બાજુઓ સમાન હોય છે.*



પક્ષ : *ત્રિકોણ* ABC, *જેમાં* $\angle B = \angle C$ *છે.*

સાધ્ય : $AB = AC$

રચના : $\angle BAC$ *નો દુભાજક દોરો, જે* BC *ને* D *માં મળે.*

સાબિતી : ΔABD *અને* ΔACD *માં,*

$\angle B = \angle C$ (પક્ષ)

$\angle BAD = \angle CAD$ (રચના દ્વારા)

અને $AD = AD$ (સામાન્ય)

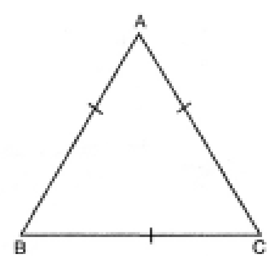
$\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (ખૂખૂબા)

તેથી $AB = AC$

ઈતિ સિદ્ધમ્

ઉદાહરણ 11.5 *: સાબિત કરો કે સમબાજુ ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણાઓ સમાન હોય છે.*

ઉકેલ :



પક્ષ : *સમબાજુ* ΔABC

સાધ્ય : $\angle A = \angle B = \angle C$

સાબિતી : $AB = AC$ (પક્ષ)

$\therefore$ $\angle C = \angle B$ (સમાન બાજુઓ સામેના ખૂણા) ...(i)

વળી, $AC = BC$ (પક્ષ)

$\angle B = \angle A$ ...(ii)

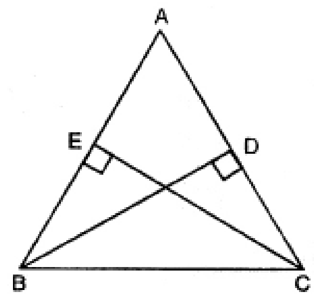
(i) અને (ii) પરથી,

$\angle A = \angle B = \angle C$

ઈતિ સિદ્ધમ્

ઉદાહરણ 11.6 : ABC એ *સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે, જેમાં* AB = BC *(આકૃતિ 11.28) જો* BD ⊥ AC *અને* CE ⊥ AB *હોય તો સાબિત કરો કે* , BD = CE

ઉકેલ : ΔBDC *અને* ΔCEB *માં,*



11.28

∠BDC = ∠CEB (*દરેક* 90^0 *છે*)

∠DCB = ∠EBC (Δ *ની સમાન બાજુઓ સામેના ખૂણા*)

અને BC = CB (*સામાન્ય*)

ΔBDC ≅ Δ CEB (*ખૂખૂબા*)

તેથી BD = CE

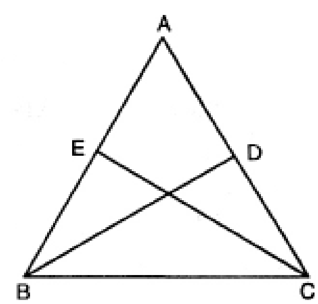
આ પરિણામ નીચેની રીતે લખી શકાય :

સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની સામેના શિરોબિંદુઓમાંથી સમાન બાજુઓ પર દોરેલા લંબ (વેધ) સમાન હોય છે.

આ પરિણામ સમબાજુ ત્રિકોણ સુધી વિસ્તારીએ તો કહી શકાય કે સમબાજુ ત્રિકોણના તમામ ત્રણે વેધ સમાન હોય છે.

ઉદાહરણ 11.7 : ΔACB *માં (આકૃતિ 11.29)* D *અને* E *અનુક્રમે* AC *અને* AB *ના મધ્યબિંદુઓ છે. જો* AB = AC *તો સાબિત કરો કે* BD - CE.

ઉકેલ : BE = AB



અને CD = $\frac{1}{2}$ AC

∴ BE = CD ...(i)

Δ BEC and Δ CDB,

BE = CD

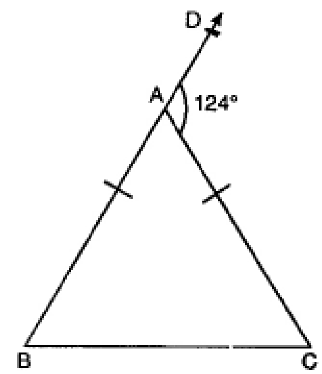
BC = CB

અને ∠EBC = ∠DCB (AB = AC)

Δ BEC ≅ Δ CDB (*બાખૂબા*)

તેથી, CE = BD

ઉદાહરણ 11.8 : ΔABC *માં (આકૃતિ 11.30),* $AB = AC$ *અને* $\angle DAC = 124^0$ *તો ત્રિકોણના ખૂણાઓ શોધો.*



ઉકેલ : $\angle BAC = 180^o - 124^o = 56^o$

$\angle B = \angle C$

(*ત્રિકોણની સમાન બાજુઓ સામેના ખૂણા*)

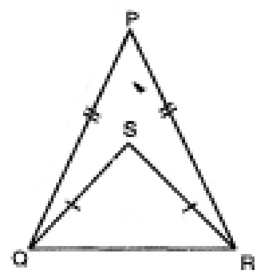
વળી, $\angle B + \angle C = 124^o$

$\angle B = \angle C =$

તેથી $\angle A = 56^o$, $\angle B = 62^o$, and $\angle C = 62^o$

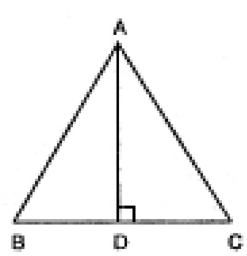
તમારી પ્રગતિ ચકાસો 11.2

1. *આકૃતિ 11.31 માં,* $PQ = PR$ *અને* $SQ = SR$ *સાબિત કરો કે* $\angle PQS$ - $\angle PRS$

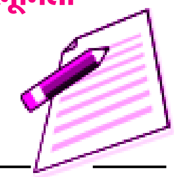


આકૃતિ 11.31

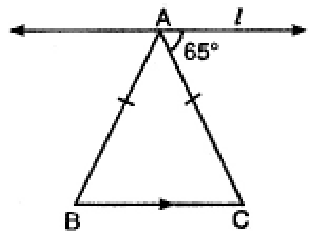
2. *સાબિત કરો કે જો વેધ AD પાયા BC ને દુભાગે (આકૃતિ 11.32) તો* ΔABC *એ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ હોય.*



આકૃતિ 11.32

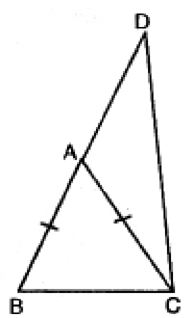


3. જો રેખા l આકૃતિ 11.33 માં સમદ્વિબાજુ ΔABC ના પાયા BC ને સમાંતર હોય, તો ત્રિકોણના ખૂણા શોધો.



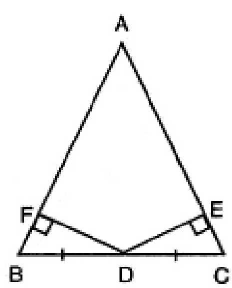
આકૃતિ 11.33

4. ΔABC એ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે જેમાં $AB = AC$. બાજુ BA બિંદુ D સુધી લંબાવવામાં આવી છે, જેથી $AB = AD$ સાબિત કરો કે $\angle BCD$ કાટકોણ છે.



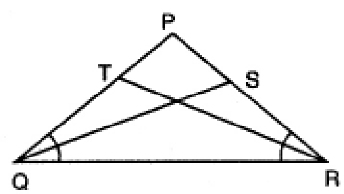
આકૃતિ 11.34

5. આકૃતિ 11.35 માં D, BC નું મધ્યબિંદુ છે અને બાજુઓ AB અને AC ને લંબ અનુક્રમે DF અને DE લંબાઈમાં સમાન છે. સાબિત કરો કે ΔABC સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.



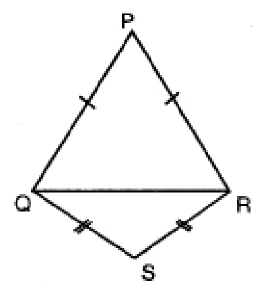
આકૃતિ 11.35

6. આકૃતિ 11.36 માં PQ = PR. QS અને RT એ અનુક્રમે $\angle Q$ અને $\angle R$ ના કોણ દુભાજકો છે. સાબિત કરો કે QS = RT.



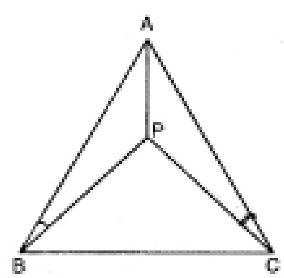
આકૃતિ 11.36

7. ΔPQR અને ΔSQR એ એક જ પાયા QR પર સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણો છે. (આકૃતિ 11.37) સાબિત કરો કે $\Delta PQS = \Delta PRS$



આકૃતિ 11.37

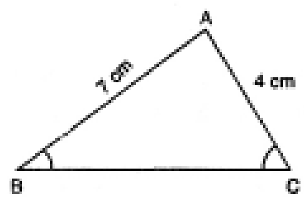
8. ΔABC માં, AB =AC (આકૃતિ 11.38) ત્રિકોણની અંદરના ભાગમાં P એક બિંદુ છે, જેથી $\angle ABP = \angle ACP$ સાબિત કરો કે AP, $\angle BAC$ ને દુભાગે છે.



આકૃતિ 11.38

11.8 ત્રિકોણમાં અસમાનતાઓ

ત્રિકોણની બાજુઓ અને ખૂણાઓ સરખાં હોય ત્યારે તેમની વચ્ચેનો સંબંધ આપણે શીખ્યા. હવે આપણે ત્રિકોણની બાજુઓ અને તેના ખૂણાઓ અસમાન હોય ત્યારે તેમની વચ્ચેના કેટલાંક સંબંધ જોઈએ.



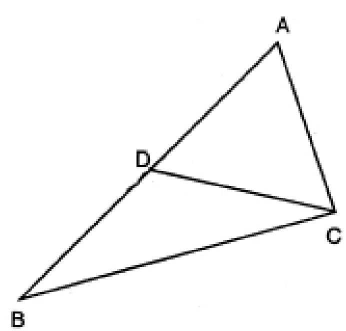
આકૃતિ 11.39

આકૃતિ 11.39 *માં, ત્રિકોણ* ABC *ની* AB *બાજુ* AC *કરતાં મોટી છે.* $\angle B$ *અને* $\angle C$ *માપો. તમે જોશો કે આ ખૂણા સરખા નથી.* $\angle C$ *એ* $\angle B$ *કરતાં મોટો છે. તમે આ પ્રયોગ ફરી શકશો તો તમે હંમેશાં જોશો કે આ અવલોકન સાચું છે. આ નીચે પ્રમાણે સાબિત થઈ શકે.*

11.8.1 પ્રમેય

∴ *જો ત્રિકોણની બે બાજુઓ અસમાન હોય, તો મોટી બાજુની સામેનો ખૂણો મોટો હોય છે.*

પક્ષ : *ત્રિકોણ* ABC, *જેમાં* $AB > AC$.



સાધ્ય : $\angle ACB > \angle ABC$

રચના : AB *બાજુ પર, એક બિંદુ* D *અંકિત કરો,*

જેથી $AD = AC$ *થાય* DC *જોડો.*

સાબિતી : ΔACD *માં,*

$AD = AC$

∴ $\angle ACD = \angle ADC$ (*સમાન બાજુની સામેના ખૂણા*)

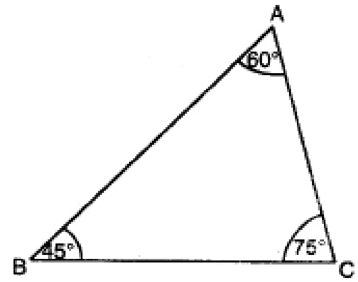
પરંતુ $\angle ADC > \angle ABC$

(*બાહ્યકોણ સંમુખ અંતઃકોણથી મોટો હોય છે.*)

વળી, $\angle ACB > \angle ACD$ (*બિંદુ* D $\angle ACB$ *ના અંદરના ભાગમાં પડે છે.*).

$\angle ACB > \angle ABC$

આ પ્રમેયના પ્રતિપ્રમેય વિશે આપણે શું કહી શકીએ ? ચાલો જોઈએ.



ΔABC *માં (આકૃતિ 11.41)* $\angle C$ *અને* $\angle B$ *સરખાવો. એ સ્પષ્ટ છે કે* $\angle C$, $\angle B$ *કરતાં મોટો છે. હવે આ ખૂણાની સામેની બાજુઓ માપીને સરખાવો, આપણે જોઈશુ કે AB, AC કરતા મોટી છે.*

ફરીથી $\angle C$ *અને* $\angle A$ *સરખાવો અને આ ખૂણાની સામેની બાજુઓ AB અને AC માપો. આપણે જોઈશુ કે* $\angle C > \angle A$ *અને AB > BC અર્થાત્ મોટા ખૂણાની સામેની બાજુ મોટી હોય છે.*

$\angle A$ *અને* $\angle B$ *સરખાવતાં, આપણે સરખું પરિણામ જોઈશું.* $\angle A > \angle B$ *અને BC > AC અર્થાત્ મોટા ખૂણાની સામેની બાજુ મોટી હોય છે.*

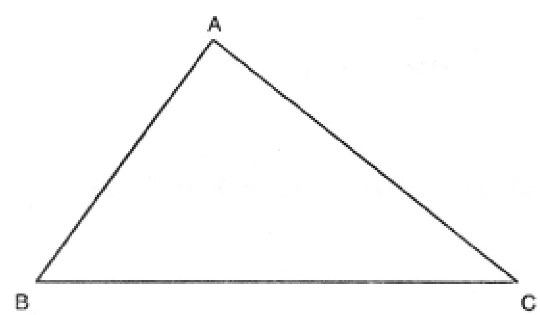
તમે કોઈપણ પ્રકારનો ત્રિકોણ, પછી તે કાટકોમ ત્રિકોણ હોય કે ગુરુકોણ ત્રિકોણ હોય, દોરીને આ ગુણધર્મ ચકાસી શકશો.

ત્રિકોણમાં ખૂણાઓની કોઈ પણ જોડ માપો. તેમને સરખાવો અને પછી તેમની સામેની બાજુઓ માપીને સરખાવો. તમે જોશો કે ઉપરનું પરિણામ હંમેશાં સાચું હોય છે, તેને આપણે ગુણધર્મ તરીકે લખીશું.

ત્રિકોણમાં મોટા ખૂણાની સામેની બાજુ મોટી હોય છે.

જુઓ કે ત્રિકોણમાં જો એક ખૂણો કાટકોણ કે ગુરુકોણ હોય, તો તે ખૂણાની સામેની બાજુ સૌથી મોટી હોય છે. તમે ત્રિકોણના ત્રણ ખૂણાઓ વચ્ચેનો સંબંધ શીખી ગયા છો કે : ત્રિકોણમાં ત્રણે ખૂણાઓનાં માપનો સરવાળો 180^0 *હોય છે, હવે આપણે શીખીશું કે ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓ વચ્ચે કોઈ સંબંધ છે કે કેમ.*

ત્રિકોણ ABC દોરો.



આકૃતિ 11.42

તેની ત્રણ બાજુઓ AB, BC અને CA માપો.

હવે જુદી જુદી જોડનો સરવાળો AB + BC, BC + CA અને CA + AB અલગ રીતે શોધો અને દરેક જોડનો સરવાળો ત્રીજી બાજુ સાથે સરખાવો. આપણે જોઈશું કે

(i) AB + BC>CA

(ii) BC + CA > AB and

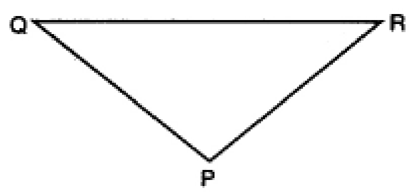
(iii) CA + AB > BC

આમ, આપણે તારવીએ કે

ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુઓનો સરવાળો ત્રીજી બાજુ કરતાં મોટો હોય છે.

તમારે માટે પ્રવૃતિ

લાકડાના બોર્ડ કે તેવી કોઈ સપાટી પર ત્રણ ખીલા P, Q, R લગાવો.



આકૃતિ 11.43

દોરીનો એક ટુકડો QR જેટલી લંબાઈનો અને બીજો ટુકડો QR + PR જેટલી લંબાઈનો લો. બંને લંબાઈ સરખાવો. તમે જોશો કે QP + PR ની લંબાઈ > QR ની લંબાઈ, જે ઉપરોક્ત ગુણધર્મને પુષ્ટિ આપે છે.

ઉદાહરણ 11.9 : નીચેના ચાર કિસ્સો પૈકી ક્યા કિસ્સામાં, આપેલ માપ પ્રમાણે ત્રિકોણ રચના શક્ય છે ?

(અ) 5 સેમી, 8 સેમી અને 3 સેમી

(બ) 14 સેમી, 6 સેમી અને 7 સેમી

(ક) 3.5 સેમી, 2.5 સેમી અને 5.2 સેમી

(ડ) 20 સેમી, 25 સેમી અને 48 સેમી

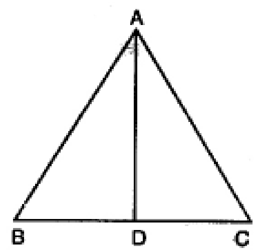
ઉકેલ : (a) માં, 5 + 3   8,   (b) માં 6 + 7   14

(c) માં, 3.5 + 2.5 > 5.2, 3.5 + 5.2 > 2.5 અને 2.5 + 5.2 > 3.5 અને

(d) 20 + 25   48.

જવાબ : (c)

ઉદાહરણ 11.10 : આકૃતિ 11.44 માં, ΔABC ની મધ્યગા છે. સાબિત કરો કે $AB + BC > 2AD$



આકૃતિ 11.44

ઉકેલ : AD ને E સુધી લંબાવો, જેથી $AD = DE$ અને C ને E સાથે જોડો.

ΔABD અને ΔECD વિચારો

અહીં $BD = CD$

$\angle ADB = \angle EDC$

અને $AD = ED$

$\Delta ABC \cong \Delta ECD$

$AB = EC$

હવે ΔACE માં,

$EC + AC > AE$

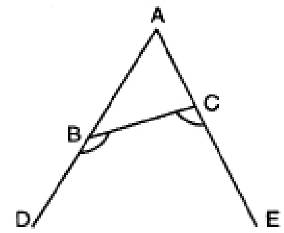
અથવા $AB + AC > 2AD$ ($AD = ED$ $AE = 2AD$)

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 11.3

1. PQRS એક ચતુષ્કોણ છે જેમાં વિકર્ણ PR અને QS, O માં છેદે છે. સાબિત કરો કે $PQ + QR + RS + SP > PR + QS$.

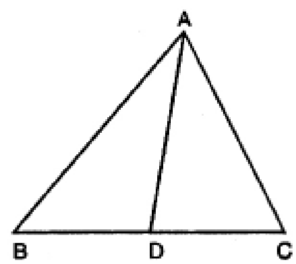
2. ત્રિકોણ ABC માં $AB = 5.7$ સેમી, $BC = 6.2$ સેમી અને $CA = 48$ સેમી, તો સૌથી મોટા અને સૌથી નાના ખૂણાનું નામ જણાવો.

3. આકૃતિ 11.46માં, જો $\angle CBD > \angle BCE$ તો સાબિત કરો કે $AB > AC$



આકૃતિ 11.46

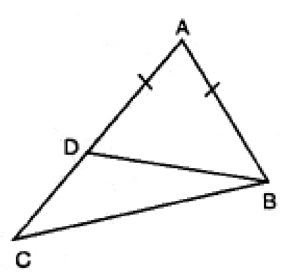
4. આકૃતિ 11.47માં D એ ΔABC ના BC પાયા પર કોઈ બિંદુ છે. જો $AB > AC$, તો સાબિત કરો કે $AB > AD$.



આકૃતિ 11.47

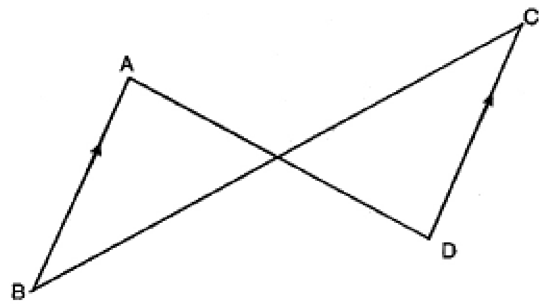
5. સાબિત કરો કે ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓનાં માપનો સરવાળો તેની ત્રણ મધ્યગાઓના માપના સરવાળા કરતાં મોટો હોય છે. (ઉદાહરણ 11.10નો ઉપયોગ કરો.)

6. આકૃતિ 11.48માં, જો $AB = AD$ તો સાબિત કરો કે $BC > CD$ (માર્ગદર્શન : $\angle ADB = \angle ABD$)



આકૃતિ 11.48

7. આકૃતિ 11.49માં AB, CD ને સમાંતર છે, જો $\angle A > \angle B$ તો સાબિત કરો કે $BC > AD$.



આકૃતિ 11.49

સારાંશ :

- જે આકૃતિઓ સમાન કદ અને સમાન આકાર ધરાવે છે, તેમને એકરૂપ આકૃતિઓ કહે છે.
- એકરૂપ આકૃતિઓને જ્યારે એક ઉપર બીજી એમ ગોઠવવામાં આવે છે ત્યારે તે એકબીજીને બંધ બેસે છે. એક આકૃતિનાં તમામ અંગો બીજી આકૃતિનાં અનુરૂપ અંગો બરાબર હોય છે.
- બે ત્રિકોણોને એકરૂપ સાબિત કરવા માટે, માત્ર ત્રણ અનુરૂપ અંગોની સમાનતા જાણવી જરૂરી છે. આ અનુરૂપ અંગો ચાર શરતો પૈકીની કોઈ એકનું સમાધાન કરે તેમ હોવું જોઈએ.

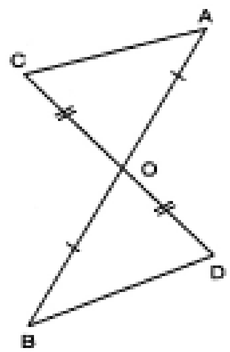
  (અ) બાખૂબા (બ) ખૂબાખૂ અથવા ખૂખૂબા

  (ક) બાબાબા (ડ) કાકબા
- ત્રિકોણની સમાન બાજુઓ સામેના ખૂણા સમાન હોય છે.
- ત્રિકોણના સમાન ખૂણાઓ સામેની બાજુઓ સમાન હોય છે.
- ત્રિકોણની બે બાજુઓ અસમાન હોય, તો મોટી બાજુની સામેનો ખૂણો મોટો હોય છે.
- ત્રિકોણમાં મોટા ખૂણાની સામેની બાજુ મોટી હોય છે.
- ત્રિકોણની બે બાજુઓનો સરવાળો ત્રીજી બાજુ કરતાં મોટો હોય છે.

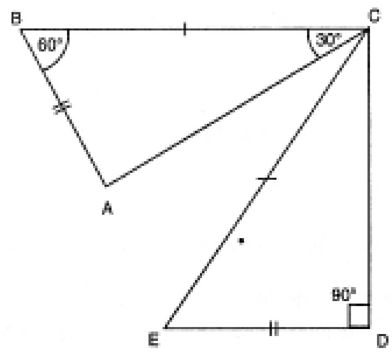
સત્રાંત સ્વાધ્યાય

1. બે રેખાઓ AB અને CD એકબીજીને O માં દુભાગે છે. સાબિત કરો કે $CA = BD$ (આકૃતિ 11.50)

2. ΔABC માં, જો મધ્યગા AD પાયા BC ને લંબ હોય, તો સાબિત કરો કે તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.



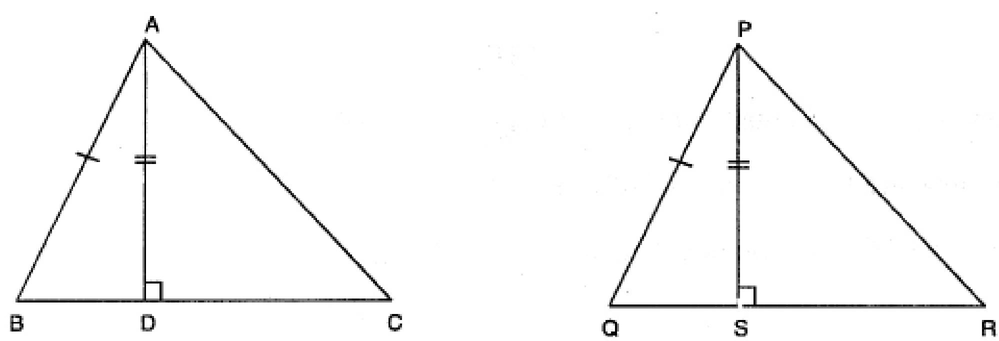
આકૃતિ 11.50



આકૃતિ 11.51

3. આકૃતિ 11.51 માં ΔABC અને ΔCDE એવા છે કે $BC = CE$ અને $AB = DE$. જો $\angle B = 60^0$, $\angle ACB = 30^0$ અને $\angle D = 90^0$ હોય તો બે ત્રિકોણો એકરૂપ છે, એમ સાબિત કરો

4. આકૃતિ 11.52 માં ΔABC ની બે બાજુઓ AB અને BC તેમજ વેધ AD ΔPQR બાજુઓ PQ અને QR તેમજ વધે PS ને અનુક્રમે સમાન છે. સાબિત કરો કે $\Delta ABC \cong \Delta PQR$.

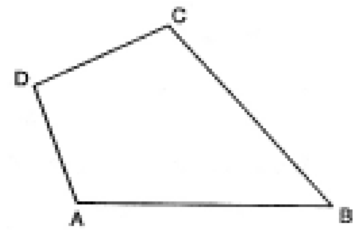


આકૃતિ 11.42

5. કાટકોણ ત્રિકોણમાં, એક લઘુકોણ 30^0 છે. સાબિત કરો કે કર્ણ એ 30^0 ખૂણાની સામેની બાજુના બે ગણા જેટલો છે.

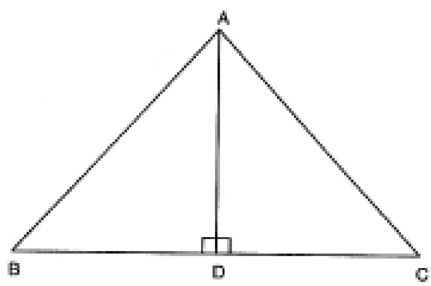
6. રેખાખંડ AB અને CD એકબીજાને O માં એવી રીતે છેદે છે કે O, AB નું મધ્યબિંદુ છે. જો AC, DB ને સમાંતર હોય, તો સાબિત કરો કે O, CD નું પણ મધ્યબિંદુ છે.

7. આકૃતિ 11.53માં, ABCD ચતુષ્કોણમાં AB સૌથી મોટી બાજુ અને DC સૌથી નાની બાજુ છે. સાબિત કરો કે $\angle C > \angle A$ અને $\angle D > \angle B$. (માર્ગદર્શન : AC અને BD જોડો)



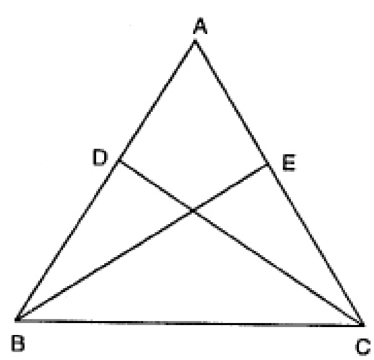
આકૃતિ 11.53

8. ABC એ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે, જેમાં AB = AC અને AD એ A માંથી પાયા BC ઉપર વેધ છે. સાબિત કરો કે BD =DC.



આકૃતિ 11.54

9. સાબિત કરો કે સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની સમાન બાજુઓ દુભાગતી મધ્યગાઓ પણ સમાન હોય છે. (માર્ગદર્શન : દર્શાવો કે $\Delta DBC \cong \Delta ECB$)



આકૃતિ 11.55

ઉત્તરો

1. *(અ)* 2. *(બ)* 3. *(બ)* 4. *(ક)*

8. $\angle P = \angle C$ $\angle Q = \angle A$ *અને* $\angle R = \angle B$.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 11.2

3. $\angle B = \angle C = 65^{o}$, $\angle A = 50^{o}$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 11.3

2. *સૌથી મોટો કોણ* A *અને સૌથી નાનો કાણ* B.

12

સંગામી રેખાઓ

પરિચય

રેખા અને ખૂણાના પ્રકરણમાં તમે સંગામી રેખાઓ વિશે શીખી ગયા છો. વળી તમે ત્રિકોણો અને કેટલીક વિશિષ્ટ રેખાઓ જેમ કે મધ્યગા, બાજુઓના લંબદ્વિભાજકો, કોણદ્વિભાજકો અને વેધ જે ત્રિકોણમાં દોરી શકાય તે વિશે શીખી ગયા છો. આ પાઠમાં, આપણે એવી રેખાઓના સંગામી ગુણધર્મ વિશે શીખીશું, જે બહુ ઉપયોગી છે.

હેતુઓ

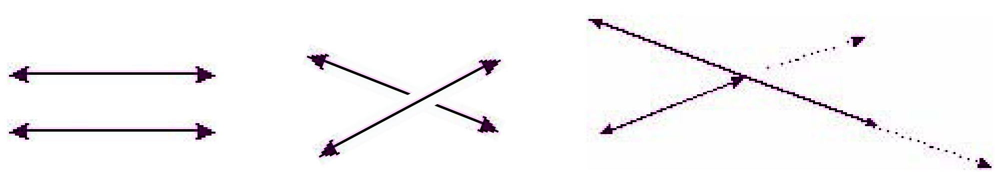
આ પાઠ શીખ્યા પછી, અધ્યેતા :

- ત્રિકોણની મધ્યગાઓ, ત્રિકોણના ખૂણાના વિભાજકો અને ત્રિકોણની બાજુઓનાં લંબ દ્વિભાજકો, સંગામી હોય છે - એ અંગેની સમજ અને વ્યાખ્યા આપી શકશે.
- ત્રિકોણની મધ્યગાઓ, ત્રિકોણના વેધ, ત્રિકોણના ખુણાના દ્વિભાજકો અને ત્રિકોણની બાજુઓની

અપેક્ષિત પૂર્વજ્ઞાન

છેદક રેખાના ગુણધર્મો જેમ કે :

- સમતલમાં બે રેખાઓ સમાંતર હોઈ શકે [જુઓ આકૃતિ 12.1(a)] અથવા એકબીજીને છેદક હોઈ શકે [જુઓ આકૃત્તિ 12.1 (a) અને (b)]



આકૃતિ 12.1

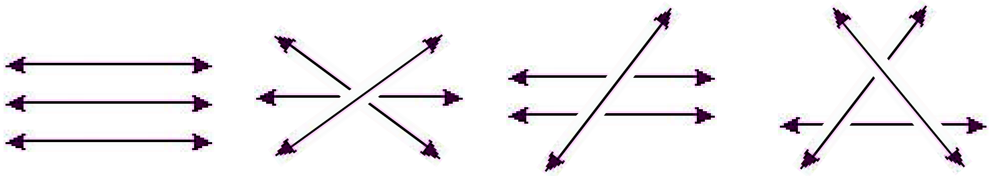
- સમલતમાં ત્રણ રેખાઓ :

(1) એકબીજીને સમાંતર હોય અર્થાત્ કોઈ બિંદુમાં મળે નહીં. [જુઓ આકૃતિ 12.2(a)] અથવા

(2) એકબીજીને બરાબર એક બિંદુમાં છેદે [આકૃતિ 12.2(b)] અથવા

(3) એકબીજીને બે બિંદુઓમાં છેદે [આકૃતિ 12.2(c)] અથવા

(4) એકબીજીને વધુમાં વધુ ત્રણ બિંદુઓમાં છેદે [આકૃતિ 12.2(d)]

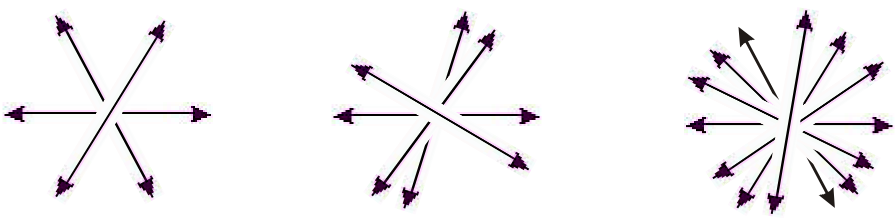


(a) (b) (c) (d)

આકૃતિ. 12.2

12.1 સંગામી રેખાઓ

સમતલમાં ત્રણ કે વધુ રેખાઓ જે એબીજીને બરાબર એક બિંદુમાં છેદે છે અથવા એક જ બિંદુમાંથી પસાર થાય છે તેમને સંગામી રેખાઓ કહે છે અને સામાન્ય બિંદુને સંગમ બિંદુ કહે છે. (જુઓ આકૃતિ 12.3)

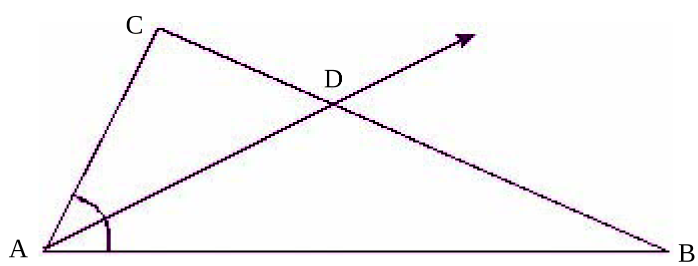


(a) (b) (c)

આકૃતિ. 12.3

12.1.1 ત્રિકોણના કોણદ્વિભાજકો

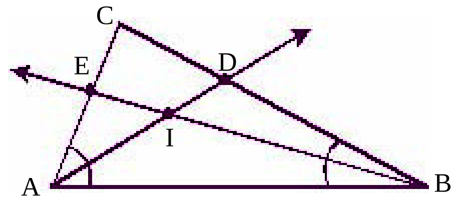
ત્રિકોણ ABC માં રેખા AD ત્રિકોણના $\angle A$ ને દુભાગે છે. (જુઓ આકૃતિ 12.4)



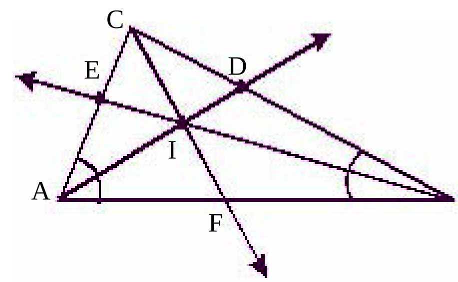
આકૃતિ. 12.4

જે રેખા ત્રિકોણના કોણને દ્વિભાગે છે તેને ત્રિકોણનો કોણદ્વિભાજક કહે છે.

ત્રિકોણમાં કેટલા કોણ દ્વિભાજકો હોઈ શકે? ત્રિકોણમાં ત્રણ ખૂણાઓ હોઈ આપણે તેમાં ત્રણ કોણદ્વિભાજકો દોરી શકીએ. AD એ Δ ABC ના ત્રણ કોણદ્વિભાજકો પૈકીનો એક છે. આપણે $\angle B$ નો બીજો કોણ દ્વિભાજક BE દોરીએ (જુઓ આકૃતિ 12.5)



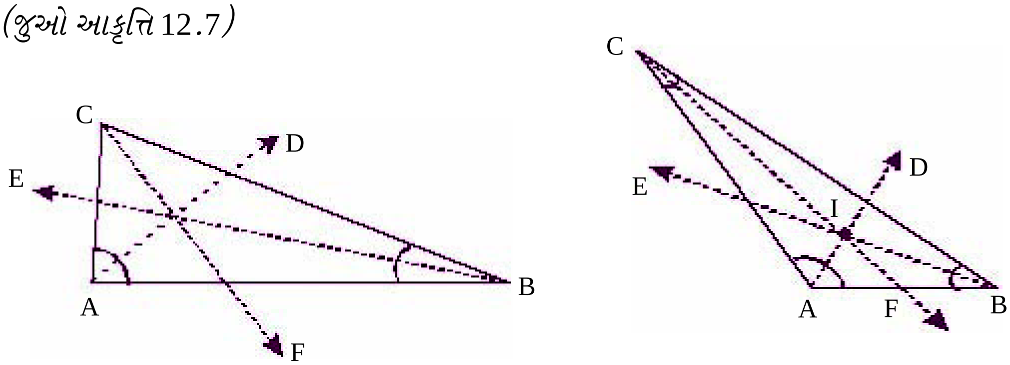
આકૃતિ. 12.5



આકૃતિ. 12.6

Δ ABC ના બે કોણદ્વિભાજકો એકબીજાને I માં છેદે છે. હવે આપણે $\angle$C નો ત્રીજો કોણદ્વિભાજક CF દોરીએ. (જુઓ આકૃત્તિ 12.6) આપણે જોઈશું કે ત્રિકોણનો આ કોણદ્વિભાજક પણ I માંથી પસાર થાય છે. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો, તેઓ સંગામી છે અને તેમનું સંગમ બિંદુ I છે.

આપણે કોઈ પણ પ્રકારનો ત્રિકોણ લઈએ - લઘુકોણ, કાટકોણ કે ગુરુકોણ ત્રિકોણ, અને તેના કોણદ્વિભાજકો દોરીએ, તો આપણે હંમેશાં જોઈશું કે ત્રિકોણના ત્રણ કોણદ્વિભાજો સંગામી હોય છે. (જુઓ આકૃત્તિ 12.7)



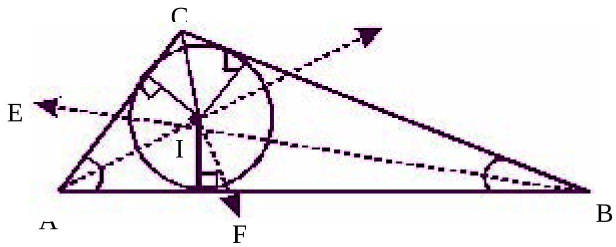
આકૃતિ. 12.7

આમ, આપણે નીચે મુજબ તારવીએ :

ત્રિકોણના કોણદ્વિભાજકો એક જ બિંદુમાંથી પસાર થાય છે, અર્થાત્ તેઓ સંગામી છે. **સંગમ બિંદુ -- ને ત્રિકોણનું અંતઃકેન્દ્ર કહે છે.**

તમે તર્ક કરી શકો કે આ બિંદુનું નામ અંતઃકેન્દ્ર શા માટે ?

યાદ કરો કે બે છેદક રેખાઓથી સમાન અંતરે રહેલ બિંદુનો બિંદુપથ રેખાઓથી રચાતા ખૂણાઓના દ્વિભાજકોની જોડ છે. I, $\angle$ BAC ના દ્વિભાજક પુરું બિંદુ હોઈ તે તેમનાથી સરખે અંતરે હોય, વળી I, $\angle$ABC ના દ્વિભાજક પરનું બિંદુ છે. (જુઓ આકૃતિ 12.8), તે તેમનાથી પણ સરખે અંતરે હોય. આમ, આ સંગમ બિંદુ I ત્રિકોણની ત્રણેય બાજુઓથી સમાન અંતરે હોય છે.



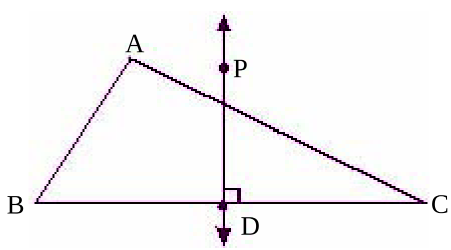
આકૃતિ. 12.8

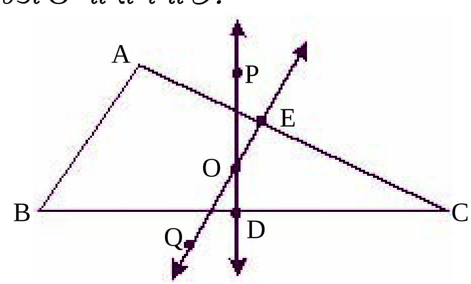
આમ, IL = IM = IN *(આકૃતિ 12.8)* I *ને કેન્દ્ર તરીકે અને* IL *ને ત્રિજ્યા તરીકે લઈ ત્રિકોણની ત્રણે બાજુઓને સ્પર્શ કરતું વર્તુળ, જેને ત્રિકોણનું અંતઃવર્તુળ કહે છે તે આપણે દોરી શકીએ.* L *એ અંતઃવર્તુળનું કેન્દ્ર હોઈ અંતઃકેન્દ્ર કહેવાય છે.* IL *અંતઃવર્તુળ ત્રિજ્યા હોઈ ત્રિકોણની અંતઃત્રિજ્યા કહેવાય છે.*

નોંધ : તે અંતઃકેન્દ્ર હંમેશા ત્રિકોણના અંદરના ભાગમાં હોય છે.

12.1.2: ત્રિકોણની બાજુઓના લંબદ્વિભાજકો

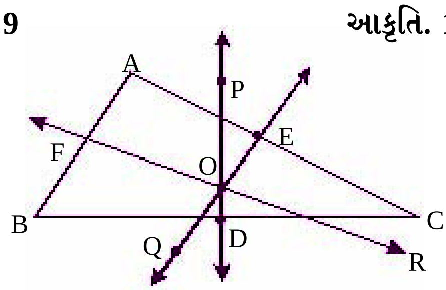
ABC *ત્રિકોણ છે,* DP *રેખા* BC *બાજુને કાટખૂણે દુભાગે છે. જે રેખા ત્રિકોણની બાજુએ કાટખૂણે દુભાગે છે તેને બાજુનો લંબદ્વિભાજક કહે છે. ત્રિકોણને ત્રણ બાજુઓ હોઈ આપણે ત્રણ લંબદ્વિભાજકો દોરી શકીએ.* DP *એ* Δ ABC *ના ત્રણ લંબદ્વિભાજકો પૈકીનો એક છે. (જુઓ આકૃતિ 12.9) આપણે બીજો લંબદ્વિભાજ* EQ, DP *ને* O *છેદતો દોઈએ. (આકૃતિ 12.10) હવે જો આપણે ત્રીજો લંબદ્વિભાજક પણ દોરીએ, તો આપણે જોઈએ કે તે પણ બિંદુ* O *માંથી પસાર થાય છે. (આકૃતિ 12.11) બીજા શબ્દોમાં* H, *આપણે કહી શકીએ કે બીજુઓના ત્રણે લંબદ્વિભાજકો* O *માં સંગમી છે.*





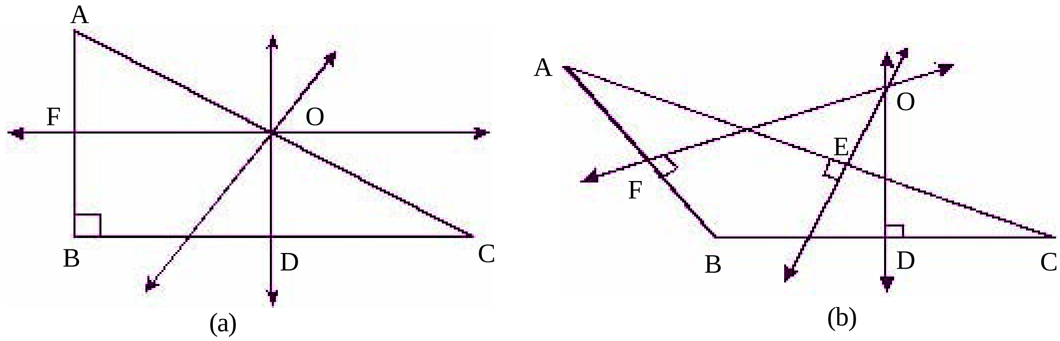
આકૃતિ. 12.9

આકૃતિ. 12.10



આકૃતિ. 12.11

આપણે આ પ્રયોગ કોઈ પણ પ્રકારના ત્રિકોણમાં ફરી ફરી કરીએ, તો પણ આપણને હંમેશા દેખાશે કે ત્રિકોણની બાજુઓના ત્રણે લંબદ્વિભાજકો એક જ બિંદુમાંથી પસાર થાય છે.



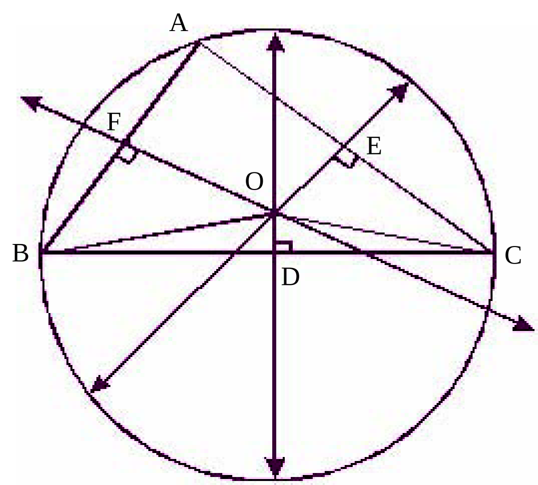
અકૃતિ. 12.12

આમ, આપણે તારવીએ કે :

ત્રિકોણની બાજુઓના ત્રણે લંબદ્વિભાજકો એક જ બિંદુમાંથી પસાર થાય છે, અર્થાત્ તે સંગામી છે. સંગમ બિંદુ O ત્રિકોણનું 'પરિકેન્દ્ર' કહેવાય છે.

તમે તર્ક કરીને કહી શકશો કે આ બિંદુને પરિકેન્દ્ર નામ શા માટે ?

યાદ તર્ક કે આપેલ બે બિંદુએથી સમાન અંતરે રહેલ બિંદુનો બિંદુપથ તે બે બિંદુઓને જોડતી રેખાનો લંબદ્વિભાજક હોય છે. O, BC ના લંબદ્વિભાજક ઉપર હોઈ, તે બંને બિંદુ B અને C થી સમાન અંતરે હોવું જોઈએ, જેથી BO = CO. (આકૃતિ 15.13)



આકૃતિ. 12.13

O બિંદુ AC ના લંબદ્વિભાજક પર પણ છે. તેથી તે બંને બિંદુઓ A અને C થી સમાન અંતરે હોવું જોઈએ.

અર્થાત AO = CO. આમ, AO = BO = CO મળે છે.

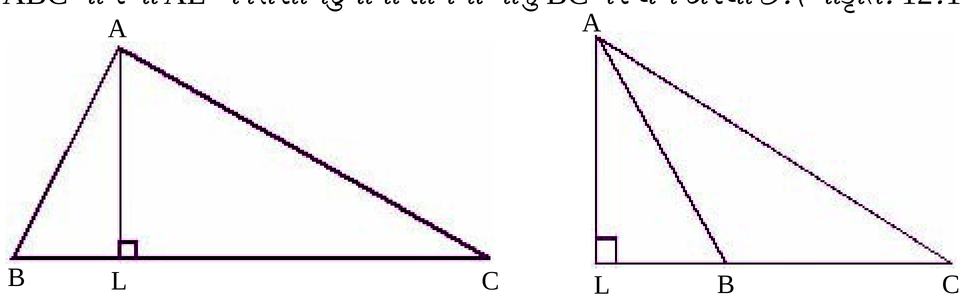
જો આપણે O ને કેન્દ્ર તરીકે અને AO ને ત્રિજ્યા તરીકે લઈએ, તો આપણે ત્રિકોણના ત્રણે શિરોબિંદુઓ A,B અને C માંથી પસાર થતું પસાર થતું વર્તુળ, જેને ત્રિકોણનું 'પરિવર્તુળ' કહે છે. તે દોરી શકીએ અને AO. પરિકેન્દ્રની ત્રિજ્યાને ત્રિકોણની પરિત્રિજ્યા કહે છે.

નોંધ લો કે પરિકેન્દ્ર ત્રિકોણનું સ્થાન.....

1. *લઘુકોણ ત્રિકોણ માટે ત્રિકોણના અંદરના ભાગમાં (અકૃતિ. 12.11) હોય છે.*
2. *કાટકોણ ત્રિકોણ માટે કર્ણ માટે કર્ણ ઉપર (આકૃતિ 12.12 (a)) હોય છે.*
3. *ગુરુકોણ ત્રિકોણ માટે ત્રિકોણના બહારના ભાગમાં (આકૃતિ 12.12 (b))હોય છે.*

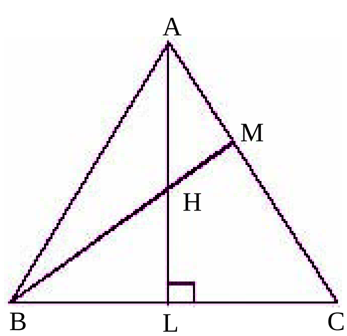
12.1.3 ત્રિકોણના વેધ

Δ ABC માં રેખા AL એ શિરોબિંદુમાંથી સામેની બાજુ BC પર લંબ દોરેલો છે. (આકૃતિ. 12.14)

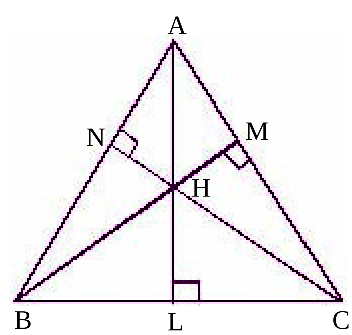


આકૃતિ. 12.14

ત્રિકોણના શિરોબિંદુમાંથી સામેની બાજુએ દોરેલ લંબ વેધ કહેવાય છે. ત્રિકોણમાં કેટલા વેધ દોર શકાય ? ત્રિકોણને ત્રણ શિરોબિંદુઓ હોય છે. તેથી આપણે ત્રણ વેધ દોરી શકીએ. AL તે પૈકીનો એક વેધ છે. હવે આપણે બીજો વેધ BM દોરીએ ; જે પ્રથમ વેધને બિંદુ H માં છેદે છે. (જુઓ આકૃતિ 12.15) આપણે ત્રીજો વેધ CN પણ દોરીએ અને જોઈશું કે તે પણ H બિંદુમાંથી પસાર થાય છે. (જુઓ આકૃતિ 12.16). આ દર્શાવે છે કે ત્રિકોણના ત્રણ વેધ એક જ બિંદુમાંથી પસાર થાય છે.

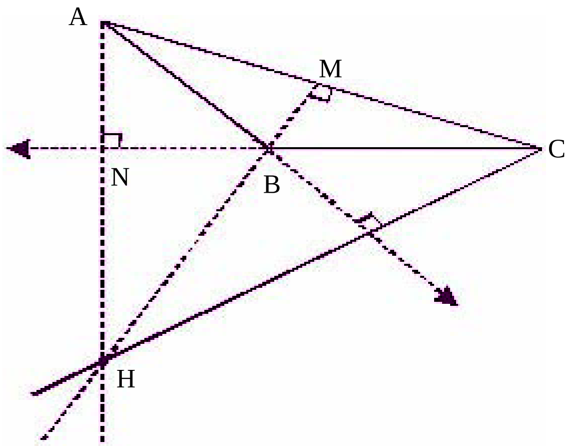


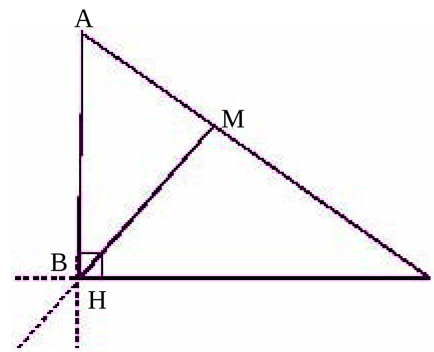
આકૃતિ. 12.15



આકૃતિ. 12.16

આપણે કોઈ પણ પ્રકારનો ત્રિકોણ લઈએ અને તેના ત્રણે વેધ દોરીએ. આપણે હંમેશા જોઈશું કે ત્રિકોણના ત્રણે વેધ સંગામી હોય છે.





આકૃતિ. 12.17 **આકૃતિ. 12.18**

આમ આપણે તારવીએ કે :

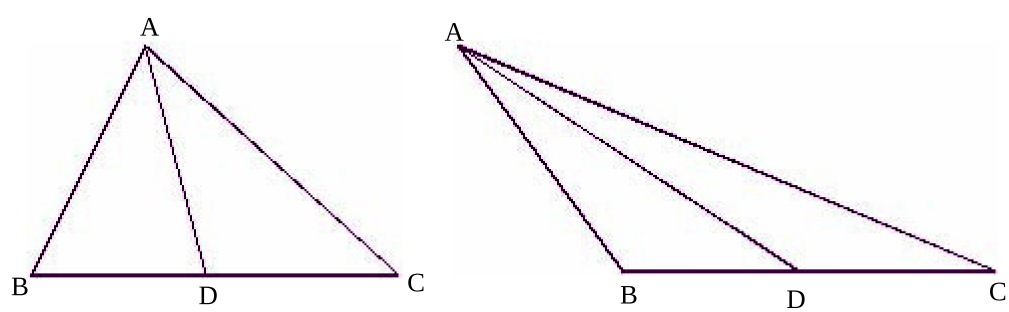
> **ત્રિકોણના ત્રણે વેધ એક જ બિંદુમાંથી પસાર થાય છે, અર્થાત્ તે સંગામી હોય છે.**
> **સંગમ બિંદુને ત્રિકોણનું 'લંબકેન્દ્ર' કહે છે.**

ફરીથી જુઓ કે લંબકેન્દ્રનું સ્થાન.......

1. *લઘુકોણ ત્રિકોણ માટે ત્રિકોણના અંદરના ભાગમાં (આકૃતિ. 12.16) હોય છે.*
2. *ગુરુકોણ ત્રિકોણ માટે ત્રિકોણના બહારના ભાગમાં (આકૃતિ. 12.17) હોય છે.*
3. *કાટકોણ ત્રિકોણ માટે કાટકોણ ધરાવતા શિરોબિંદુ પર (આકૃતિ. 12.18) હોય છે.*

12.4.4 ત્રિકોણની મધ્યગાઓ

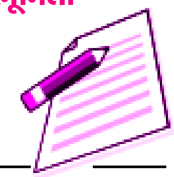
Δ ABC *માં,* AD *શિરોબિંદુ* A *ને સામેની બાજુ* BC *ના મધ્યબિંદુ* D *સાથે જોડે છે. (આકૃતિ. 12.19)*



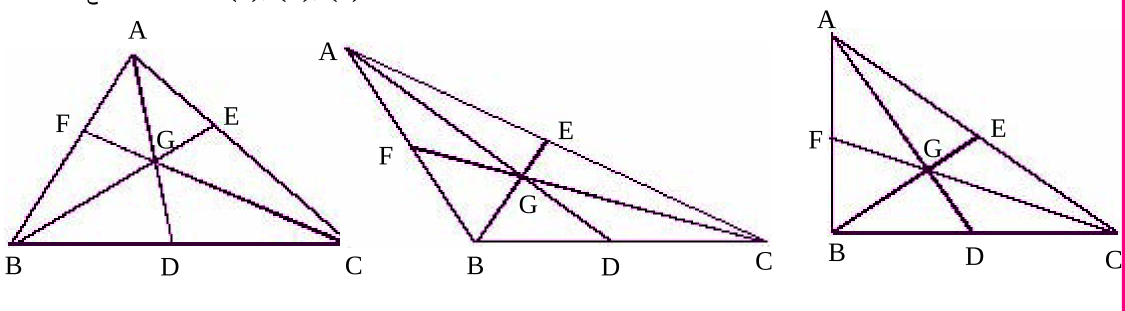
(a) (b)

આકૃતિ. 12.19

ત્રિકોણમાં શિરોબિંદુની સામેની બાજુના મધ્યબિંદુ સાથે જોડતી રેખાને તેની મધ્યગા કહે છે. સ્પષ્ટ છે કે ત્રિકોણમાં ત્રણ મધ્યગાઓ દોરી શકાય. AD *તે પૈકીની એક મધ્યગા છે. આપણે જો કોઈ પણ ત્રિકોણમાં*



તમામ ત્રણ મધ્યગાઓ દોરીએ, તો હંમેશા જણાશે કે ત્રણ મધ્યગાઓ એક જ બિંદુમાંથી પસાર થાય છે. આકૃતિ. 12.20 (a), (b), (c)]



આકૃતિ. 12.20

અહીં ઉપર આપેલ દરેક ત્રિકોણ ABC માં (આકૃત્તિ 12.20) ત્રણે મધ્યગાઓ AD, BE અને CF, G આગળ સંગામી છે. દરેક ત્રિોકણમાં G દરેક મધ્યાગાને બે ભાગમાં વહેચેં છે તે આપણે માપીએ, તો નીચેનો સંબંધ જોવા મળશે.

$AG = 2GD, BG = 2GE$

અને $CG = 2\ GF$

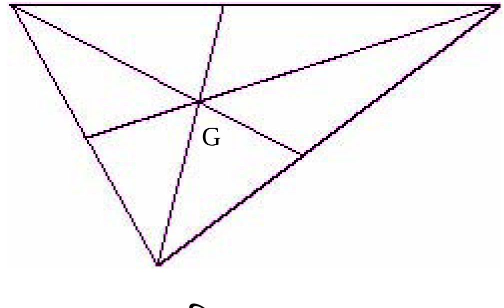
અર્થાત્ સંગમ બિંદુ G દરેક મધ્યગાને 2:1 પ્રમાણમાં વિભાગે છે.

આમ, આપણે તારવીએ કે :

> **ત્રિકોણની મધ્યગાઓ એક જ બિંદુમાંથી પસાર થાય છે, જે દરેક મધ્યગાને 2 : 1 પ્રમાણમાં વિભાગે છે.**
>
> **સંગમ બિંદુ G ને ત્રિકોણનું 'મધ્યકેન્દ્ર' કહે છે.**

તમારા માટે પ્રવૃત્તિ :

કાર્ડ બોર્ડના ટુકડામાંથી એક ત્રિકોણ કાપો. તેની ત્રણ મધ્યગાઓ દોરો ત્રિકોણનું મધ્યકેન્દ્ર અંકિત કરો. અણીદાર સળીની અણી કે કંપાસની સોયને બિંદુ G ની નીચે ગોઠવીને અથવા અણી ઉપર ગોઠવીને ત્રિકોણને સમતોલ કવાનો પ્રયત્ન કરો. જો G નું સ્થાન બરાબર અંકિત કર્યું હોય તો ત્રિકોણનું વજન G પર સમતોલ રહેશે. (આકૃતિ. 12.21).



આકૃતિ. 12.21

તમે તર્ક કરીને કહી શકશો કે ત્રિકોણની મધ્યગાઓનું સંગમ બિંદુ મધ્યકેન્દ્ર શા માટે કહેવા છે ? તે એવું બિંદુ છે, જ્યાં ત્રિકોણનું વજન કેન્દ્રિત થયેલું છે અથવા તે એવું બિંદુ છે જ્યાં ત્રિકોણનું વજન લાગે છે. આ સંકલ્પનાઓનો ઉપયોગ કરતાં કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 12.1: સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણમાં દર્શાવો કે સમાન બાજુઓથી રચાયેલ ખૂણાનો દ્વિભાજક ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓનો લંબદ્વિભાજક, ત્રીજી બાજુ પરનો વેધ, અને મધ્યગા પણ છે.

ઉકેલ: ΔABD અને ΔACD માં

$AB = AC$ (પક્ષ)

$\angle BAD = \angle CAD$ [$\because$ AD $\angle A$ નો દ્વિભાજક છે]

$AD = AD$

$\therefore$ ΔABD -- $\Delta DACD$

$\therefore$ $BD = CD$................. (1)

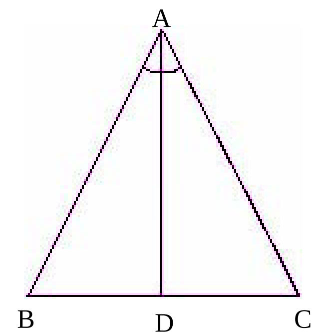
➡ AD મધ્યગા પણ છે

➡ વળી $\angle ADB = \angle ADC = 90^o$

➡ AD બાજુ BD, પરનો વેધ છે............ (2)

(1) અને (2) પરથી કહી શકાય કે,

AD, BC નો લંબદ્વિભાજક છે.



આકૃતિ. ૧૨.૨૨

ઉદાહરણ 12.2: સમબાજુ ત્રિકોણમાં, દર્શાવો કે ત્રણ કોણદ્વિભાજકોએ બાજુઓના લંબદ્વિભાજકો, ત્રિકોણના ત્રણ વેધ અને ત્રણ મધ્યગાઓ પણ છે.

ઉકેલ : AB = AC હોઈ

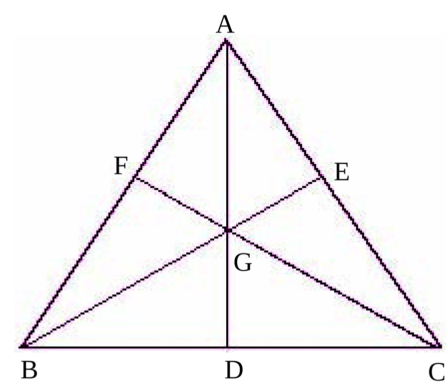
$\therefore$ AD, $\angle A$ નો દ્વિભાજક છે. BC નો લંબદ્વિભાજક છે,

Δ ABC નો વેધ તેમજ મધ્યગા પણ છે.

(જુઓ ઉપરનું ઉદાહરણ 12.1)

તે જ રીતે, AB=BC અને BC=AC હોઈ.

BE અને CF અનુક્રમે $\angle B$ અને $\angle C$ ના દ્વિભાજકો એ ત્રિકોણના લંબદ્વિભાજકો , વેધ અને મધ્યગાઓ પણ છે.

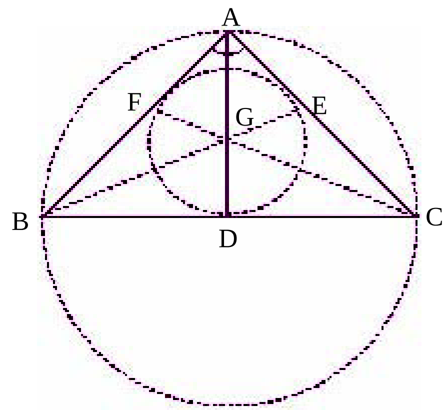


આકૃતિ. ૧૨.૨૩

ઉદાહરણ 12.3: a બાજુવાળા સમબાજુ ત્રિકોણના પરિવૃત્તની પરિત્રિજ્યા અને અતઃવૃત્તની અંતઃત્રિજ્યા શોધો.

ઉકેલ : શિરોબિંદુ A માંથી BC બાજુને આપણે લંબ દોરીએ.

AD $\angle A$ નો દ્વિભાજક, બાજુ BC નો લંબદ્વિભાજ અને શિરોબિંદુને BC ના મધ્યબિંદુ સાથે જોડતી મધ્યગા પણ છે.



આકૃતિ. 12.24

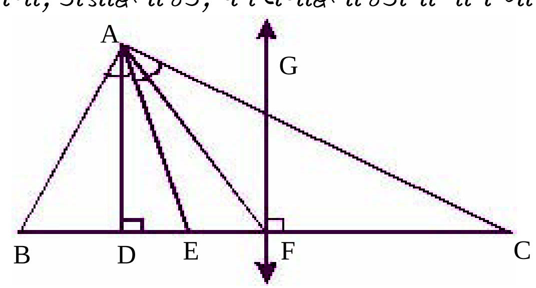
કારણ કે BC = a

➡ AG = *આ કિસ્સામાં પરિત્રિજ્યા* $= \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{3} a$

∴ $AD = \frac{\sqrt{3}}{2} a$ *અને* GD = *આ કિસ્સામાં અંતઃત્રિજ્યા* $= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{6} a$.

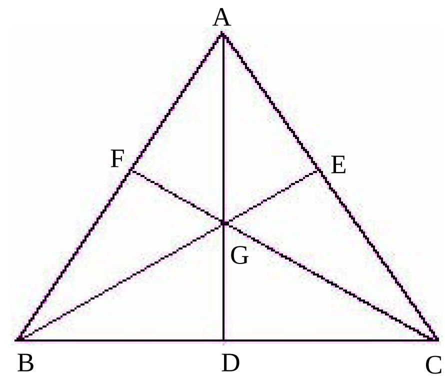
તમારી પ્રગતિ ચકાસો 12.1

1. *આપેલ આકૃત્તિમાં, જો* BF = FC, ∠ BAE = ∠ CAE *અને* ∠ ADE = ∠ GFC = 90^0 , *તો ત્રિકોણ* ABC *ના મધ્યગા, કોણદ્વિભાજક, વેધ લંબદ્વિભાજકોનાં નામ આપો.*



આકૃતિ. 12.25

2. *સમબાજુ ત્રિકોણમાં દર્શાવો કે અંતઃકેન્દ્ર, પરિકેન્દ્ર, લંબકેન્દ્ર અને મધ્યકેન્દ્ર એક જ બિંદુ છે.*
3. *સમબાજુ ત્રિકોણ* ABC *માં (આકૃતિ* 12.26*)* G *એ ત્રિકોણનું મધ્યકેન્દ્ર છે. જો* AG 4.8 *સેમી હોય, તો* AD *અને* BE *શોધો.*



આકૃતિ. ૧૨.૨૬

4. જો H એ Δ ABC નું લંબકેન્દ્ર હોય, તો દર્શાવો કે A, Δ HBC નું લંબકેન્દ્ર હોય.

5. નીચેના પ્રશ્નોમાં આપેલ વિકલ્પો પૈકી સાચો જવાબ પસંદ કરો.

(1) સમતલમાં, ત્રિકોણના શિરોબિંદુઓથી સમાન અંતરે રહેલ બિંદુ કયા નામે ઓળખાય છે.

(અ) મધ્યકેન્દ્ર (બ) અંતઃકેન્દ્ર (ક) પરિકેન્દ્ર (ડ) લંબકેન્દ્ર

(2) ત્રિકોણના સમતલમાં, ત્રિકોણના શિરોબિંદુઓથી સમાન અંતરે રહેલ બિંદુ કયા નામે ઓળખાય છે.

(અ) મધ્યકેન્દ્ર (બ) અંતઃકેન્દ્ર (ક) પરિકેન્દ્ર (ડ) લંબકેન્દ્ર

સારાંશ :

- સમતલમાં ત્રણ કે વધુ રેખાઓ જે એકબીજીને બરાબર એક બિંદુમાં છેદે છે તે સંગામી રેખાઓ કહેવાય છે.
- જે રેખા ત્રિકોણના કોણને દુભાગે છે તે ત્રિકોણનો કોણદ્વિભાજક કહેવાય છે.
- જે રેખા ત્રિકોણની બાજુને કાટખૂણે દુભાગે છે તે ભિકોણની બાજુનો લંબદ્વિભાજક વેધ કહેવાય છે.
- ત્રિકોણના શિરોબિંદુમાંખી તેની સામેની બાજુ પર દોરેલ લંબ ત્રિકોણનો વોધ કહેવાય છે
- રેખા કે જે ત્રિકોણના શિરોબિંદુને સામેની બાજુના મધ્યબિંદુ સાથે જોડે છે તે મધ્યગા કહેવાય છે.
- ત્રિકોણમાં

(1) કોણદ્વિભાજો સંગામી હોય છે અને સંગમ બિંદુને અંતઃકરણ કહે છે.

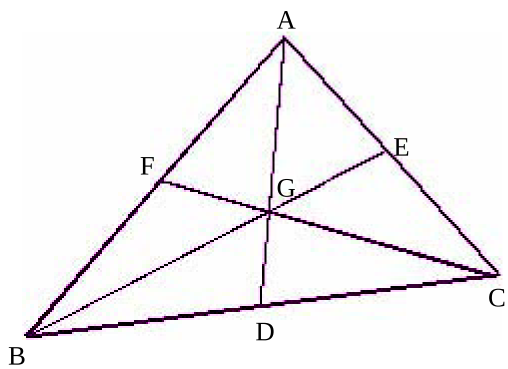
(2) બાજુઓના લંબદ્વિભાજકો સંગામી હોય છે અને સંગહમ બિંદુને પકેન્દ્ર કહે છે.

(3) વેધ સંગામી હોય છે અને સંગમ બિંદુને લંબકેન્દ્ર છે.

(4) મધ્યગાઓ સંગામી હોય છે અને સંગમ બિંદુને મધ્યકેન્દ્ર કહે છે, જે દરેક મધ્યગાને 2 : 1 ના પ્રમાણમાં વિભાગે છે.

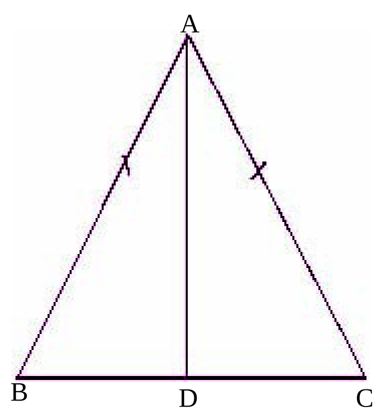
સત્રાંત સ્વાધ્યાય

1. આપેલ આકૃતિ 12.27 D માં, E અને F, Δ ABC ની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓ છે. દર્શાવો કે $BE + CF > \frac{3}{2} BC$.



આકૃતિ. 12.27

2. ABC આ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે, જેમાં AB = AC અને D એ BC નું મધ્યબિંદુ છે. દર્શાવો કે મધ્યકેન્દ્ર, અંતઃકેન્દ્ર, પરિકેન્દ્ર અને લંબકેન્દ્ર તમામ AD પર પડે છે.



આકૃતિ. 12.28

3. ABC સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે. જ્યાં AB=AC = 17 સેમી અને પાયો BC=16 સેમી. જો G, Δ ABC નું મધ્યકેન્દ્ર હોય, તો AG શોધો.

4. ABC એ 12 સેમી બાજુવાળો સમબાજુ ત્રિકોણ છે. જો G મધ્યકેન્દ્ર હોય, તો AG શોધો.

તમારે માટે પ્રવૃત્તિઓ :

1. *ત્રિકોણ* ABC *દોરો અને તેનું પરિકેન્દ્ર શોધો. વળી ત્રિકોણનું પ્રરિવૃત્ત દોરો.*
2. *સમબાજુ ત્રિકોણ દોરો. તેનું અંતકેન્દ્ર અને પરિકેન્દ્ર શોધો. તેનું અંતઃવૃત અને પરિવૃત દોરો.*
3. 5 *સેમી બાજુબાળા સમબાજુ ત્રિકોણનું પરિવૃત અને અંતઃવૃત દોરો.*

ઉત્તરો

પતંગાકાર ચતુષ્કોણ

1. *મધ્યગા* - AF , *કોણદ્વિભાજક* - AE

   વેધ - AD *અને લંબદ્વિભાજક* - GF

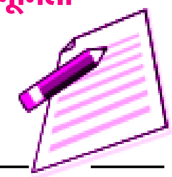
3. AD = 7.2 *સેમી વળી* BE = 7.2 *સેમી*

5. (i) (c)   (ii) (b)

સત્રાંત સ્વાધ્યાય

3. AG = 10 *સેમી*

4. AG = $4\sqrt{3}$ *સેમી*



13

ચતુષ્કોણો

પરિચય

તમે આસપાસ જોશો તો તમને ઘણી વસ્તુઓ ચાર રેખાઓથી ઘેરાયેલી જોવા મળશે. પુસ્તક, બારી-બારણું, બારીની જાળીના કેટલાક ભાગ, બ્રેડ-સ્લાઈસ, તમારા ઓરડાની લાદી એ બધાની સપાટીએ ચાર રેખાખંડોથી ઘેરાયેલ બંધ આકૃતિનાં ઉદાહરણો છે. આવી આકૃતિ ચતુષ્કોણ કહેવાય છે.

Quadrilateral શબ્દ બે શબ્દ 'quadric' એટલે ચાર તેમજ 'lateral' બાજુઓ પરથી ઉદ્ભવ્યો છે. આમ ચતુષ્કોણ એ એવી ભૌમિતિક આકૃતિ છે, જેને ચાર બાજુઓ છે જે સમતલના ખંડને ઘેરે છે.

આ પ્રકરણમાં ચતુષ્કોણના પદો તેમજ સંકલ્પનાઓ વિશે તેમના ગુણધર્મો સહિત શીખીશું.

હેતુઓ

આ પાઠ શીખ્યા પછી, અધ્યેતા :

- વિવિધ પ્રકારના ચતુષ્કોણો જેમ કે સમલંબ ચતુષ્કોણ, સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણ, લંબચોરસ, સમબાજુ ચતુષ્કોણ અને ચોરસ વિશે વર્ણન કરી શકશે.
- વિવિધ પ્રકારના ચતુષ્કોણના ગુણધર્મો ચકાસી શકશે.
- ત્રિકોણમાં કોઈ પણ બે બાજુઓના મધ્યબિંદુઓને જોડતો રેખાખંડ ત્રીજી બાજુને સમાંતર હોય છે. અને તેના કરતાં અડધો હોય છે તેની ચકાસણી કરી શકશે.
- ત્રિકોણની એક બાજુના મધ્યબિંદુમાંથી બીજી બાજુને દોરેલ સમાંતર રેખા ત્રીજી બાજુને દ્વિભાગે છે તે ચકાસી શકશે.
- જો ત્રણ કે વધુ સમાંતર રેખાઓ હોય અને છેદિકા પર તેમનાથી બનતા અંતરિત ખંડો સમાન હોય તો બીજી કોઈ છેદિકા પર અનુરૂપ અંતરિક ખંડો સમાન હોય છે તેની ચકાસણી કરી શકે.
- સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણનો વિકર્ણ તેને સમાન ક્ષેત્રફળવાળા બે ત્રિકોણમાં વિભાગે છે તે ચકાસણી શકે.
- સાબિત કરી શકે કે સમાન (કે એક જ) પાયા પર રહેલા અને તે જ સમાંતર રેખાઓ વચ્ચેના સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણ ક્ષેત્રફળમાં સમાન હોય છે.

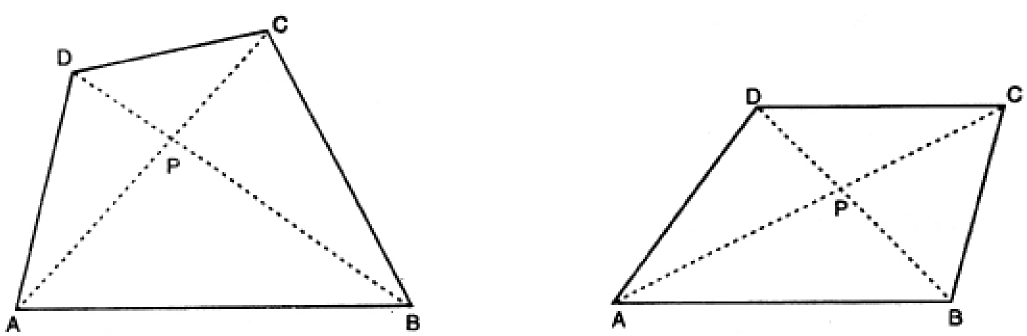
- એક જ અથવા સમાન પાયા પરના અને એકજ સમાંતર રેખાઓ વચ્ચેના ત્રિકોણ ક્ષેત્રફળમાં સમાન હોય છે અને તેનું પ્રતીપ ચકાસી શકશે.

અપેક્ષિત પૂર્વજ્ઞાન

- આપેલ માપના રેખાખંડ અને ખૂણા દોરવા.
- આપેલ ત્રિજ્યાનાં વર્તુળ / ચાપ દોરવા.
- સમાંતર અને લંબરેખાઓ દોરવી.
- સંખ્યાઓ પર ચાર મૂળભૂત પ્રક્રિયાઓ.

13.1 ચતુષ્કોણ

યાદ કરો કે જો સમતલમાં A,B,C અને D એવાં ચાર બિંદુઓ હોય, જેથી તેમાંના કોઈ પણ ત્રણ (બિંદુઓ) સમરેખ ન હોય અને રેખાખંડ AB,BC,CD અને DA તેમના અંત્ય બિંદુઓ સિવાય છેદતા નથી તો ચાર રેખાખંડોથી રચાયેલ બંધ આકૃતિ એ A,B,C અને D શિરોબિંદુઓવાળો ચતુષ્કોણ કહેવાય છે. A,B,C અને D શિરોબિંદુઓ સાથેનો ચતુષ્કોણ (સંકેતમાં)□ (ચતુષ્કોણ) ABCD એમ દર્શાવાય છે. આકૃતિ 13.1 () અને () માં, બંને ચતુષ્કોણને ચતુ. ABCD નામ આપી શકાય.



આકૃષિ. 13.1

(i) AB અને DC ; BC અને AD સામસામેની બાજુઓની બે જોડ છે.

(ii) ∠ A અને C ; B અને D એ સામસામેના ખૂણાઓની બે જોડ છે.

(iii) AB અને BC ; BC અને CD એ ક્રમિક બાજુઓ અથવા આસન્ન બાજુઓની બે જોડ છે. ક્રમિક ખૂણાઓની બાજી જોડનાં નામ તમે આપી શકશો ?

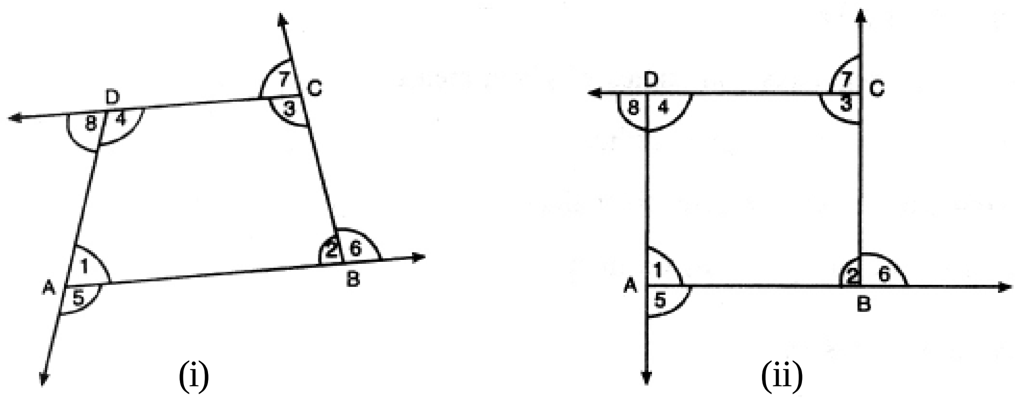
(iv) A અને B ; B અને C એ ક્રમિક ખૂણાઓ અથવા આસન્ન ખૂણાઓની બે જોડ છે. ક્રમિક ખૂણાઓની અન્ય જોડનાં નામ તમે આપી શકશો ?

(v) AC અને BD એ બે વિકર્ણો છે.

આકૃષિ 13.2, માં. 1, 2, 3 અને 4 થી દર્શાવાયેલ ખૂણાઓ એ ચતુ. ABCD. ના અંદરના ખૂણાઓ

અથવા ખૂણાઓ છે. 5,6,7 અને 8 દર્શાવાયેલ ખૂણા ચતુ. ABCD. ના બહારના ખૂણાઓ છે.

1, 2, 3 અને 4. માપો



આકૃતિ. 13.2

આ ખૂણાઓનો સરવાળો કેટલો થયો ? તમે જોશો કે . 1 + 2 + 3 + 4 = 360°.

અર્થાત્ ચતુષ્કોણના અંદરના ખૂણાઓનો સરવાળો 360^0 હોય છે.

વળી, ચતુષ્કોણ ABCD ના બહારના ખૂણાઓનો સરવાળો કેટલો ?

∠

તમે ફરીથી જોશો કે 5 + 6 + 7 + 8 = 360°

અર્થાત્ ચતુષ્કોણના બહારના ખૂણાઓનો સરવાળો પણ 360^0 હોય છે.

13.2 ચતુષ્કોણના પ્રકારો

તમે ચતુષ્કોણ અને તેમના વિવિધ આકારોથી પરિચિત છે, તમે એ પણ જાણો છે કે તમને કેવી રીતે નામ અપાય. જો કે, આપણે વિવિધ પ્રકારના ચતુષ્કોણો વિશે પદ્ધતિસર શીખીએ. નીચે આકૃતિ 13.3 માં ચતુષ્કોણનું કુટુંબ વૃક્ષ આપેલ છે.

ચતુષ્કોણ

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ સામલંબ ચતુષ્કોણ પતંગાકા

લંબચોરસ સમબાજુ ચતુષ્કોણ

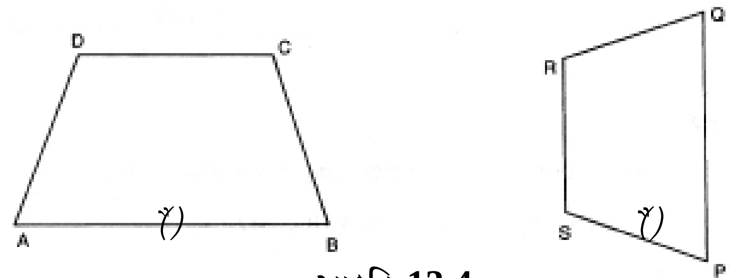
ચોરસ

આકૃતિ. 13.3

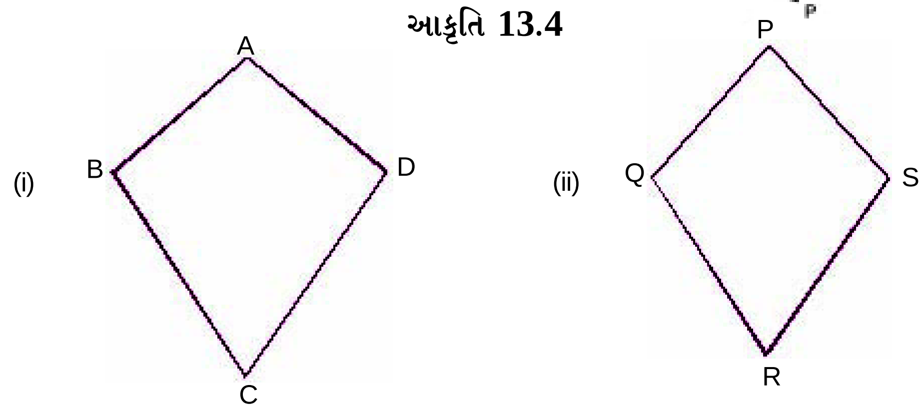
તેમનું એક પછી એક વર્ણન કરીએ.

13.5.1 સમલંબ ચતુષ્કોણ

જે ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુઓની એક જોડ સમાંતર હોય, તેને સમલંબ ચતુષ્કોણ કહે છે. આકૃતિ 13.4 (i) અને (ii) માં ABCD અને PQRS સમલંબ ચતુષ્કોણ છે, જેમાં અનુક્રમે AB || DC અને PQ || SR છે.



આકૃતિ 13.4

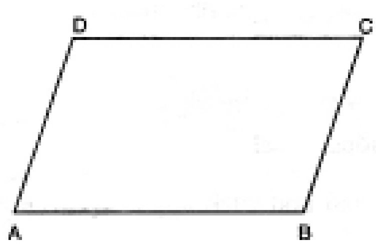


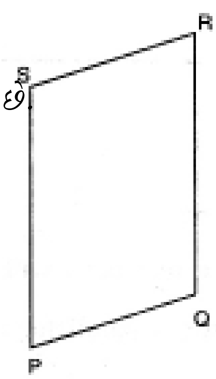
13.5.2 પતંગાકાર ચતુષ્કોણ

જે ચતુષ્કોણમાં સમાસામેની જોડ સમાંતર હોય, તેને સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણ કહે છે. આકૃતિ 13.5 (ii) માં ABCD અને PQRS સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણો છે, જેમાં AB || DC અને AD || BC છે. તેને સંકેતમાં ||gm ABCD (સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણ ABCD) પડે અને જેમાં PQ || SR અને SP || RQ છે તેને સંકેતમાં

નોંધ : 13.5.2 પતંગાકાર ચતુ. સાથે જોડેલા કાગળમાં છે.

||gm PQRS (સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણ PQRS) વડે દર્શાવાય છે.

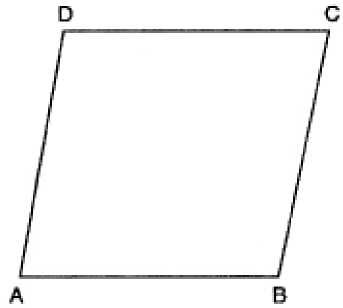




13.4 સમબાજુ ચતુષ્કોણ

સમબાજુ ચતુષ્કોણ એ એવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે, જેમાં આસન્ન બાજુઓની કોઈ પણ જોડ સમાન હોય છે. આકૃતિ 13.7 *માં* ABCD *સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે.*

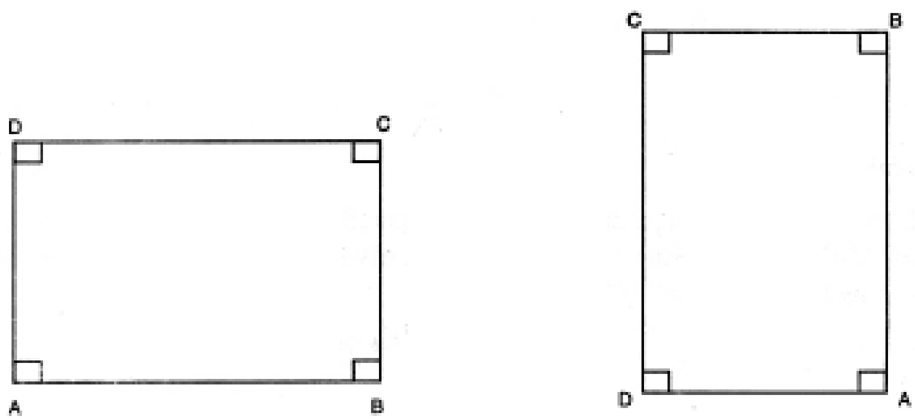
તમે નોંધ લો કે ABCD *એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે, જેમાં* AB = BC = CD = DA *અર્થાત્ આસન્ન બાજુઓની દરેક જોડ સમાન છે.*



આકૃતિ 13.7

13.5.4 લંબચોરસ

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ જેનો એક ખૂણો કાટકોણ હોય તેને લંબચોરસ કહે છે. આકૃતિ 13.8 *માં* ABCD *એ લંબચોરસ છે. જેમાં* AB || DC . AD || BD *અને* $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^0$

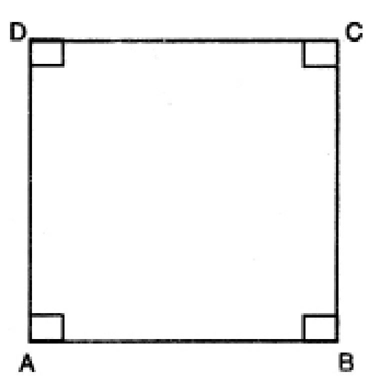


આકૃતિ 13.5

13.6 ચોરસ

ચોરસ એ એવો લંબચોરસ છે, જેમાં આસન્ન બાજુઓની જોડ સમાન હોય છે. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો, તમામ બાજુઓ સમાન અને દરેક ખૂણો કાટકોણ હોય તેવા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણને ચોરસ કહે છે.

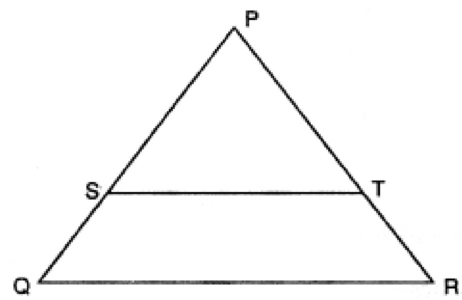
આકૃતિ -13.9



આકૃતિ 13.9 માં ABCD એ ચોરસ છે, જેમાં AB || DC, સ AD || BC અને AB = BC =DA અને A = B = C = D = 90^0

આ બધું દર્શાવવાં કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ,

ઉદાહરણ 13.1 : આકૃતિ 13.10માં, PQR એક ત્રિકોણ છે. S અને T અને T, PQ બાજુઓ પર બે બિંદુઓ છે, જેથી ST || QR આમ રચાયેલ ચતુષ્કોણ STRQ ના પ્રકારનું નામ આપો.



આકૃતિ 13.10

ઉકેલ : ચતુષ્કોણ STRQ સમલંબ ચતુષ્કોણ છે, કારણ કે ST || QR

ઉદાહરણ 13.૨ : ચતુષ્કોણના ત્રણ ખૂણા 100^0, ૫0^0 અને 70^0 છે. તો ચોથા ખૂણાનું માપ શોધો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે ચતુષ્કોણના ખૂણાઓનો સરવાળો 3600 છે.

ધારો કે ચોથો ખૂણો x છે.

$$\text{Then } 100^o + 50^o + 70^o + x^o = 360^o$$

$$220^o + x^o = 360^o$$

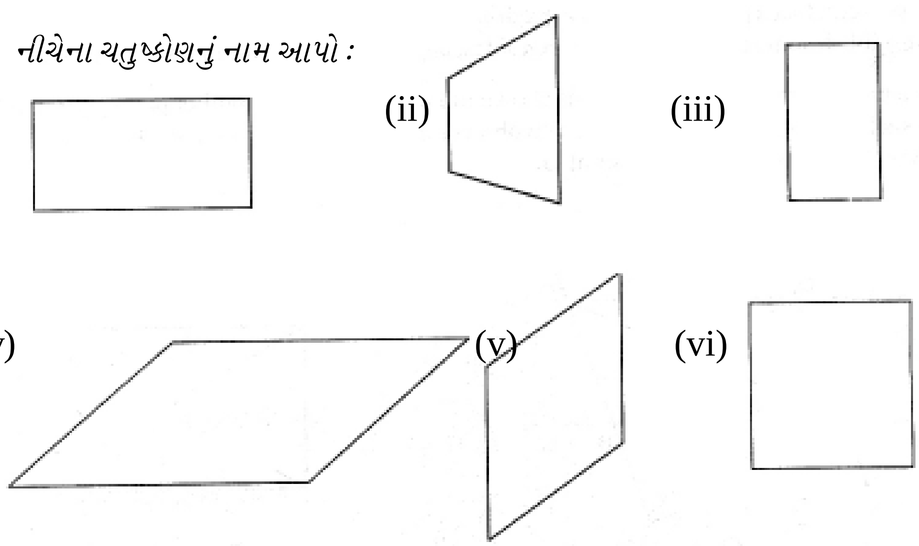
$$x = 140$$

તેથી, ચોથા ખૂણાનું માપ 140^0 થાય.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 13.1

1. નીચેના ચતુષ્કોણનું નામ આપો :

(i) (ii) (iii) (iv) (v) (vi)


આકૃતિ 13.11

2. નીચેનાં પૈકી ક્યાં વિધાન સાચાં છે તે જણાવો.

   (i) ચતુષ્કોણના અંદરના ખૂણાઓનો સરવાળો 3600 છે.

   (ii) તમામ લંબચોરસ ચોરસ હોય છે.

   (iii) લબંચોરસ એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

   (iv) ચોરસ એ સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

   (v) સમબાજુ ચતુષ્કોણ એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

   (vi) ચોરસ એ સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણ છે.

   (vii) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ એ સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

   (viii) સમલંબ ચતુષ્કોણ એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

   (ix) સમલંબ ચતુષ્કોણ એ લંબચોરસ છે.

   (x) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ એ સમલંબ ચતુષ્કોણ છે.

3. એક ચતુષ્કોણમાં તેના તમામ ખૂણા સમાન છે, તો દરેક ખૂણાનું માપ શોધો.

4. ચતુષ્કોણના ખૂણાઓનાં માપ 5:7:7:11 ના પ્રમાણમાં છે. દરેક ખૂણાનું માપ શોધો.

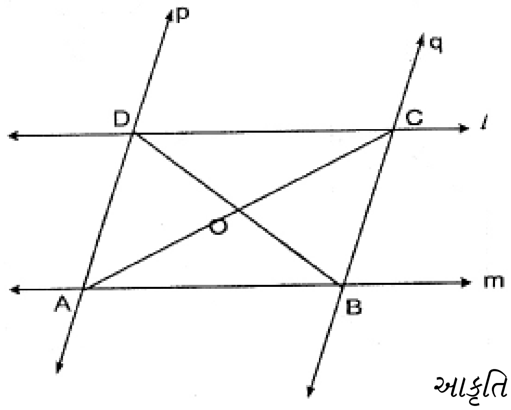
૫. જો ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણાઓની જોડ પૂરક હોય, તો ખૂણાઓની બીજી જોડ માટે તમે શું કહી શકશો ?

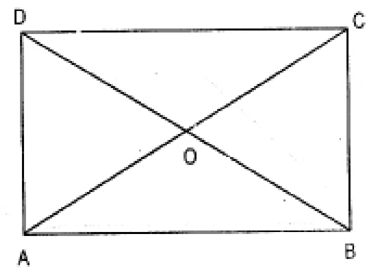
13.3 વિવિધ પ્રકારના ચતુષ્કોણના ગુણધર્મો

1 સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ગુણધર્મો

આપણે શીખી ગયા કે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ એ સાસામેની બાજુઓની બંને જોડ સમાંતર હોય તેવો ચતુષ્કોણ છે. હવે આપણે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની બાજુઓ, ખૂણા અને વિકર્ણો વચ્ચે કાંઈક સંબંધ પ્રસ્થાપિત કરીએ.

આકૃતિ 13.1૨ માં દર્શાવ્યા મુજબ, સમાંતર રેખાઓની જોડ l અને m દોરો. સમાંતર રેખાઓની બીજી જોડ p અને q દોરો, જે l અને m ને છેદે. તમે જોશો કે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD રચાયો છે. AC અને BD જોડો. તેઓ એકબીજાને O માં છેદે છે.





આકૃતિ 13.12

હવે બાજુઓ AB, BC, CD અને DA. માપો. તમે શું જુઓ છો ?

તમે જોશો કે AB = DC અને BC = AD.

વળી ABC, BCD, CDA અને DAB. માપો

તમે શું જુઓ છો ?

તમે જોશો કે DAB = BCD અને ABC = CDA

ફરીથી OA, OC, OB અને OD. માપો

તમે શું જુઓ છો ?

તમે જોશો કે OA = OC અને OB = OD

બીજો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો અને પ્રવૃત્તિ ફરીથી કરો. તમે જોશો કે :

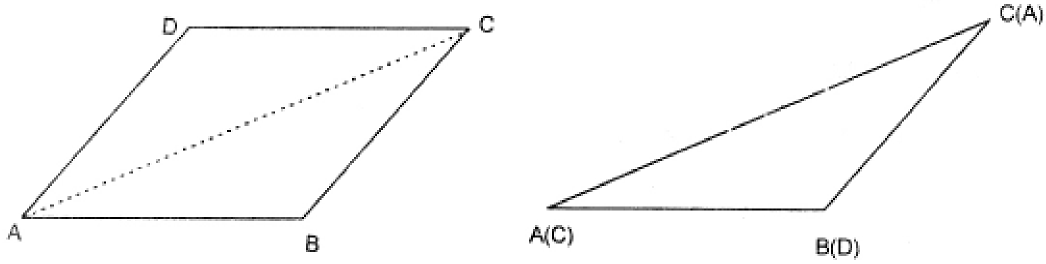
(i) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની સામેની બાજુઓ સમાન હોય છે.

(ii) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના સામેના ખૂણા સમાન હોય છે.

(iii) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો એકબીજાને દ્વિભાગે છે.

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ઉપર્યુક્ત ગુણધર્મો કાર્ડબોર્ડ મોડેલ દ્વારા ચકાસી શકાય, જે નીચે પ્રમાણે છે :

એક કાર્ડબોર્ડ લઈએ. તેના પર કોઈ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો. આકૃતિ 13.13 માં દર્શાવ્યા મુજબ તેનો વિકર્ણ AC દોરો. કાર્ડબોર્ડમાંથી સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD કાપો. હે આ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણને વિકર્ણ AC પર કાપો. આમ, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ બે ભાગમાં વિભાગાયેલ છે અને તે દરેક ભાગ ત્રિકોણ છે.



આકૃતિ -13.13

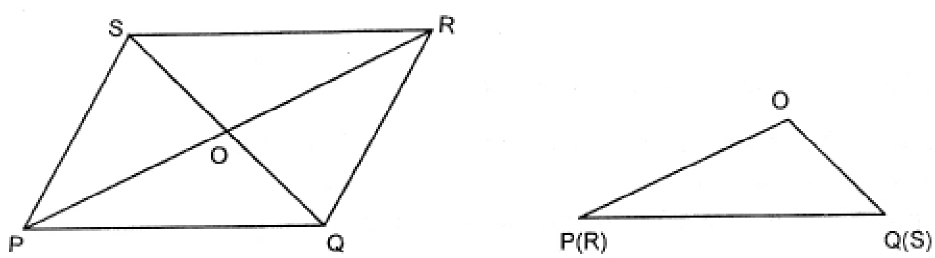
બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો, તમને બે ત્રિકોણો મળે છે, ABC અને ABC હવે ABC ને ABC પર મૂકો, એવી રીતે કે શિબરોબિંદુ D શિરોબિંદુ B પર પડે છે અને બાજુ CD બાજુ AB પર પડે છે.

બિંદુ C ક્યાં પડે છે ?

બિંદુ A ક્યું પડે છે ?

તમે જોશો કે ABC, ABC ને બંધ બેસે છે. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો ABC ABC વળી, AB = CD અને BC = AD અને B = D

તમે આ પ્રવૃત્તિ બીજા કેટલાક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ લઈને ફરીથી કરો. તમે હંમેશાં તે જ પરિણામો મેળવશો, જે અગાઉ ચકાસ્યાં છે, આમ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ઉપર્યુક્ત બે ગુણધર્મો સાબિત થાય છે. હવે તમે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો ત્રીજો ગુણધર્મ સાબિત કરી શકો અર્થાત્ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો એકબીજાને દ્વિભાગે છે. ફરીથી પાતળું કાર્ડબોર્ડ લો. તેની પર કોઈ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ PQRS દોરો. તેના વિકર્ણો PR અને QS દોરો. જે આકૃતિ 13.14 માં દર્શાવ્યા મુજબ એકબીજાને 0 માં છેદે છે. હવે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ PQRS ને કાપો.



આકૃતિ 13.14

વળી POQ અને ROS શોધો.

હવે ROS અને POQ એવી રીતે ગોઠવો કે જેથી શિરોબિંદુ R શિરોબિંદુ P પર બંધ બેસે છે અને RO બાજુ PO સુસંગત છે.

બિંદુ S ક્યાં પડે છે ?

બાજુ OS ક્યાં પડે છે ?

શું ROS $\cong$ POQ ? હા, તે છે.

તેથી, તમે શું જુઓ છો ?

આપણે જોઈશું કે RO = PO અને OS = OQ

તમે આ ગુણધર્મ ત્રિકોણોની બીજી જોડ અર્થાત્ POS અને POQ લઈને પણ ચકાસી શકો. ફરીથી તમે તે જ પરિણામ પર આવશો.

વળી તમે નીચેના ગુણધર્મો પણ ચકાસી શકશો જે અગાઉ સાબિત કરેલ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ગુણધર્મોના પ્રતીપ છે.

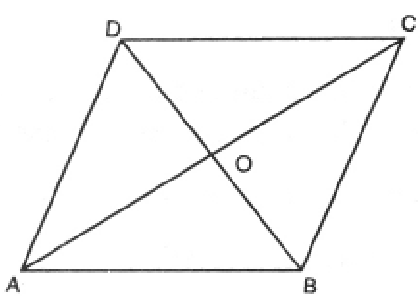
(i) ચતુષ્કોણ એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય, જો તેની સામસામેની બાજુઓ સમાન હોય.

(ii) ચતુષ્કોણ એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય, જો તેના સામસામેના ખૂણા સમાન હોય.

(iii) ચતુષ્કોણ એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય, જો તેના વિકર્ણો એકબીજાને દ્વિભાગે.

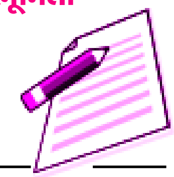
13. 2 સમબાજુ ચતુષ્કોણના ગુણધર્મો

અગાઉના વિભાગમાં આપણે સમબાજુ ચતુષ્કોણની વ્યાખ્યા કરી. આપણે જાણીએ છીએ કે સમબાજુ ચતુષ્કોણ એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે, જેમાં આસન્ન બાજુઓની જોડ સરખી હોય છે. આકૃતિ 13.1 માં ABCD એ સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે.



આકૃતિ 13.15

આમ, ABCD એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. જેમાં AB = BC દરેક સમબાજુ ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ



ચતુષ્કોણ હોઈ, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના તમામ ગુણધર્મો સમબાજુ ચતુષ્કોણ માટે સત્ય છે. અર્થાત્

(1) સામસામેની બાજુઓ સમાન હોય.

એટલે કે AB = DC અને AD = BC

(૨) સામસામેના ખૂણા સમાન હોય.

અર્થાત્ A = C અને B = D

(3) વિકર્ણો એકબીજાને દ્વિભાગે

અર્થાત્ AO = OC અને DO = OB

સમબાજુ ચતુષ્કોણની આસન્ન બાજુઓ સમાન હોઈ, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ગુણધર્મ પ્રમાણે,

AB = BC = CD = DA

આમ, સમબાજુ ચતુષ્કોણની તમામ બાજુઓ સમાન હોય છે.

AOB અને BOC માપો.

આ ખૂણાનાં માપ શાં ?

તમે જોશો કે દરેક ખૂણો 90^0 છે.

વળી, AOB = COD (દરેક જોડ અભિકોણ છે.)

∠

અને BOC = DOA

∴ AOB = COD = BOC = DOA = 90^0

આમ, સમબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો એકબીજાને કાટખૂણે દ્વિભાગે છે.

તમે આ પ્રયોગ વિવિધ સમબાજુ ચતુષ્કોણ લઈને ફરી ફરી કરો તો તમે દરેક કિસ્સામાં જોશો કે સમબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો એકબીજાને દ્વિભાગે છે.

આમ, આપણને સમબાજુ ચતુષ્કોણ નીચેના ગુણધર્મો મળે છે.

(1) સમબાજુ ચતુષ્કોણની તમામ બાજુઓ સમાન હોય છે.

(2) સમબાજુ ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણા સમાન હોય છે.

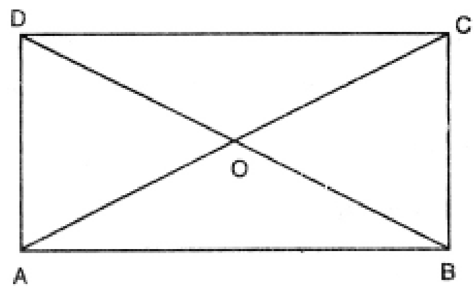
(3) સમબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો એકબીજાને કાટખૂણે દ્વિભાગે છે.

13.3 લંબચોરસના ગુણધર્મો

આપણે જાણીએ છીએ કે લંબચોરસ એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે જેનો એક ખૂણો કાટખૂણો છે. શું તમે કહી શકશો કે લંબચોરસ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના તમામ ગુણધર્મો ધરાવે છે કે નહિ ? હા, તે ધરાવે છે. ચાલો આપણે લંબચોરસના કેટલાક વધારાના ગુણધર્મો શીખીએ.

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD દોરો. જેમા $\angle B = 90^0$.......

આકૃત 13.1 માં દર્શાવ્યા મુજબ AC અને BD જોડો.



આકૃતિ 13.16

$\angle$ BAD, $\angle$ BCD અને $\angle$ ADC માપો; તમે શું જુઓ છો ?

આ ખૂણાઓનાં માપ શાં ?

દરેક કોણનું માપ 90^0 છે. આમ આપણે તારવછી શકીએ કે, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^0$ અર્થાત્ લંબચોરસનો દરેક ખૂણો 900 માપ છે. હવે વિકર્ણો AC અને BD માપો તમે જુઓ છો કે AC = BD ? હા, તે છે વળી, AO, OC, BO અને DO માપો તમે એ પણ જોશો કે AC = BD અને BO = DO

જુદાં જુદાં પરિમાણોના કેટલાક વધુ લંબચોરસ દોરો, ફરીથી તેમને ABCD તરીકે દર્શાવો. દરેક કિસ્સામાં AC અને BD જોડો. તેમને એકબીજાને O માં છેદવા દો. વળી, દરેક લંબચોરસ માટે AO, OC, OD માપો. દરેક કિસ્સામાં તમે જોશો કે : લંબચોલરસ્ના વિકર્ણો સમાન હોય છે. અને તેઓ એકબીજાને દ્વિભાગે છે. આમ, આપણને લંબચોરસના નીચેના ગુણધર્મો મળે છે.

(i) લંબચોરસની સામસામેની બાજુઓ સમાન હોય છે.

(ii) લંબચોરસનો દરેક ખૂણો કાટખૂણો હોય છે.

(iii) લંબચોરસના વિકર્ણો સમાન હોય છે.

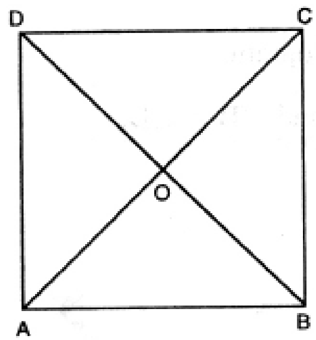
(iv) લંબચોરસના વિકર્ણો એકબીજાને દ્વિભાગે છે.

13.6. ચોરસના ગુણધર્મો

તમે જાણો છો કે ચોરસ એ લંબચોરસ છે, જેમાં આસન્ન બાજુઓની જોડ સમાન હોય છે. હવે, ચોરસની

વ્યાખ્યામાંથી શું તમે તારવી શકશો કે ચોરસ એ લંબચોરસ છે અને તે લંબચોરસના તમામ ગુણધર્મો ધરાવે છે ? હા, તમે છે. હવે આપણે ચોરસના કેટલાક વધુ ગુણધર્મો શીખીએ.

આકૃતિ 13.17 માં દર્શાવ્યા મુજબ ચોરસ ABCD દોરો



આકૃતિ 13.17

ABCD લંબચોરસ હોઈ, આપણને નીચેનાં પરિણામો મળે છે.

(i) $AB = DC, AD = BC$

(ii) $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^o$

(iii) $AC = BD$ અને $AO = OC, BO = OD$

પરંતુ ચોરસમાં $AB = AD$

$\therefore$ (i) ગુણધર્મ આધારે આપણને મળે :

$AB = AD = CD = BC.$

હવે $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$ અને $\angle AOD$ માપો.

તમે શું જુઓ છો ?

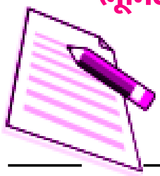
શું દરેક ખૂણાનું માપ 90^0 છે ? હા

આમ, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle AOC = 90^0$

આમ, આપણે તારવીએ કે ચોરસના વિકર્ણો AC અને BD એકબીજાને કાટખૂણે દ્વિભાગે છે. તમે એ પણ જોશો ચોરસ એ $AB = AD$ સાથે પણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોઈ, ચોરસ ABCD સમબાજુ ચતુષ્કોણ પણ છે.

આમ, આપણને ચોરસના નીચેના ગુણધર્મો મળે છે.

(i) ચોરસની તમામ બાજુઓ સમાન હોય છે.



નોંધ

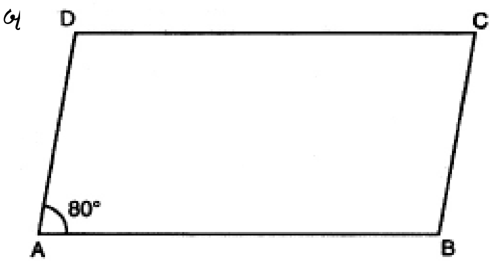
(ii) દરેક ખૂણાનું માપ 900 હોય છે.

(iii) ચોરસના વિકર્ણો સમાન હોય છે.

(iv) ચોરસના વિકર્ણો એકબીજાને કાટખૂણે દ્વિભાગે છે.

આ દર્શાવતાં કેટલાંક ઉદાહરણો શીખીએ :

ઉદાહરણ : 13.6 : આકૃતિ 13.18 ABCD સમાંતરબ ખૂણાનાં માપ શોધો.



આકૃતિ 13.18

ઉકેલ : ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોઈ,

$\angle A = \angle C =$ અને $\angle B = \angle D$

$\angle A = 80^0$

$\therefore\ C = 80^o$

વળી AB || DC

$\therefore\ \angle A + \angle D = 180^o$

$\therefore\ \angle D = (180 - 80)^o = 100^o$

$\therefore\ \angle B = \angle D = 100^o$

તેથી $\angle C = 80^o$, $\angle B = 100^o$ અને $\angle D\ \ 100^o$

ઉદાહરણ 13.4 : સમબાજુ ચતુષ્કોણના બે આસન્ન કોણ 4 : 5 ના પ્રમાણમાં છે. તેના તમામ ખૂણાનાં માપ શોધો .

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે સમબાજુ ચતુષ્કોણના બે આસન્ન ખૂણાનો સરવાળો 180^0 છે.

ધારો કે બે ખૂણાઓ 4x અને 5x છે.

હવે, $4x + 5x = 180$

અર્થાત્ $9x = 180$

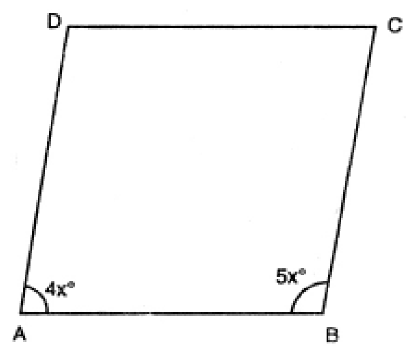
$\therefore x = 20$

$\therefore$ બે ખૂણા 80^o અને 100^o.

અર્થાત્ $\angle A = 80^o$ અને $\angle B = 100^o$

$\angle A = \angle C \Rightarrow \angle C = 100^o$

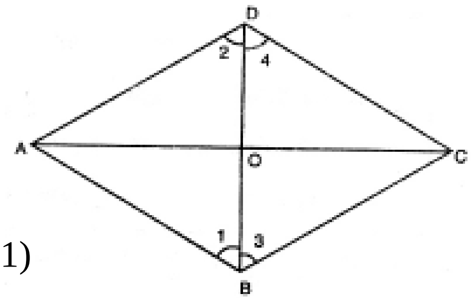
વળી, $\angle B = \angle D \Rightarrow \angle D = 100^o$



આકૃતિ 13.19

તેથી, સમબાજુ ચતુષ્કોણના ખૂણા 80^o, 100^o, 80^o and 100^o.

ઉદાહરણ 13.5 *: સમબાજુ ચતુષ્કોણનો એક વિકર્ણ તેની એક બાજુ બરાબર છે, તો સમબાજુ ચતુષ્કોણના ખૂણા શોધો.*



ઉકેલ : સમબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD *માં,*

$$AB = AD = BD$$

$\therefore$ ABD *સમબાજુ ત્રિકોણ છે.*

$\therefore \quad \angle DAB = \angle 1 = \angle 2 = 60^o \quad ....(1)$

તે જ પ્રમાણે, $\angle BCD = \angle 3 = \angle 4 = 60^o$ ....(2)

વળી, (i) અને (ii) માંથી

આકૃતિ 13.20

$$\angle ABC = \angle B = \angle 1 + \angle 3 = 60^o + 60^o = 120^o$$

$$\angle ADC = \angle D = \angle 2 + \angle 4 = 60^o + 60^o = 120^o$$

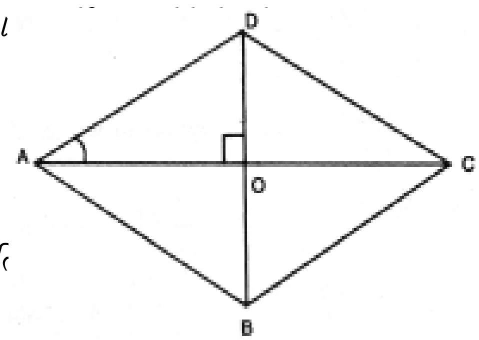
તેથી, $\quad \angle A = 60^o, \angle B = 120^o, \angle C = 60^o$ *અને* $\angle D = 120^o$

ઉદાહરણ 13.6 *: સમબાજુ ચતુષ્કોણ* ABCD *ના* *અને*
OD = 6 *સેમી, તો શોધો :*

(i) $\angle OAD$

(ii) *બાજુ* AB

(iii) *સમબાજુ ચતુષ્કોણ* ABCD *ની પરિમિ*



ઉકેલ : આપેલ છે કે

$$\angle ADC = 120^o$$

આકૃતિ **13.21**

અર્થાત્ $\quad \angle ADO + \angle ODC = 120^o$

પરંતુ $\quad \angle ADO = \angle ODC \qquad (DAOD \cong \Delta COD)$

$\therefore \quad 2\angle ADO = 120^o$

અર્થાત્ $\quad \angle ADO = 60^o \qquad ...(i)$

વળી, આપણે જાણીએ છીએ કે સમબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો 90^0 *ખૂણે દ્વિભાગે છે.*

$\therefore \quad \angle DOA = 90^o \qquad ...(ii)$

હવે ΔDOA *માં*

$$\angle ADO + \angle DOA + \angle OAD = 180^o$$

(i) અને (ii) પરથી આપણને મળે છે કે :

$$60^\circ + 90^\circ + \angle OAD = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle OAD = 30^\circ$$

$$\therefore \angle DAB = 60^\circ$$

$\therefore$ $\angle DAB$ એ સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

(ii) હવે OD = 6 સેમી [પક્ષ]

$\Rightarrow$ OD + OB = BD

$\therefore$ 6 સેમી + 6 સેમી = BD

$\Rightarrow$ BD = 12 cm

વળી, AB = BD = AD = 12 સેમી હોઈ

AB = 12 સેમી

(iii) હવે પરિમિતિ = 4 × બાજુ

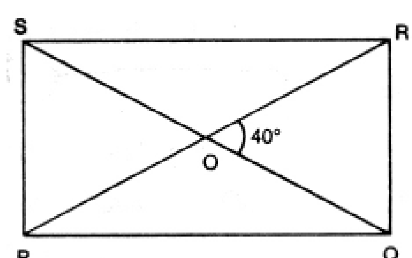
= (4 × 12) સેમી

= 48 સેમી

તેથી, સમબાજુ ચતુષ્કોણની પરિમિતિ = 48 સેમી

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 13.2

1. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD, ĐA = 62°. તો અન્ય ખૂણાનાં માપ શોધો.
2. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના બે સામસામેના ખૂણાનો સરવાળો 150° છે, તો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના તમામ ખૂણા શોધો.
3. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD, $\angle A = (2x + 10)^\circ$ અને $\angle C = (3x - 20)^\circ$. તો x ની કિંમત શોધો. .
4. ABCD એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે, જેમાં $\angle DAB = 70^\circ$ અને $\angle CBD = 55^\circ$. અને $\angle CDB$ અને $\angle ADB$.
5. ABCD એ સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે, જેમાં $\angle ABC = 58^\circ$. તો $\angle ACD$ નું માપ શોધો.
6. આકૃતિ 13.22 માં લંબચોરસ PQRS ના વિકર્ણો એકબીજાને O માં છેદે છે. જો $\angle ROQ = 40^\circ$, તો



આકૃતિ 13.22

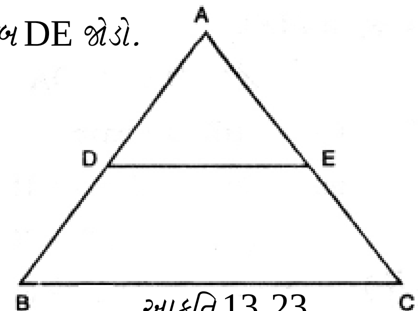
$\angle$OPS નું માપ શોધો.

7. AC એ ચોરસ ABCD નો એક વિકર્ણ છે, તો

   $\angle$CAB નું માપ શોધો.

13.4 મધ્યબિંદુ પ્રમેય

કોઈ એક ત્રિકોણ ABC દોરો. બાજુ AB અને AC ના મધ્યબિંદુઓ શોધો. તેમને અનુક્રમે D અને E તરીકે દર્શાવો. આકૃતિ 13.23 માં દર્શાવ્યા મુજબ DE જોડો.



આકૃતિ 13.23

BC અને DE ની લંબાઈ વચ્ચે તમે કયો સંબંધ જુઓ છો ?

અલબત્ત, DE = BC

ફરીથી $\angle$ADE અને $\angle$ABC. માપો

શું આપ ખૂણા સમાન છે ?

હા, તે સમાનછે, તમે જાણો છો કે આ ખૂણા અનુકોણની જોડ બનાવે છે. તમે જાણો છો કે જ્યારે અનુકોણની જોડ સમાન હોય, ત્યારે રેખાઓ સમાંતર હોય છે.

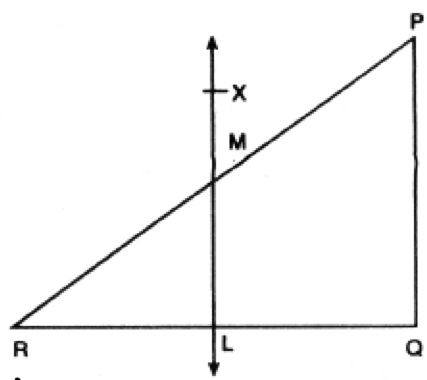
$\therefore$ DE || BC

તમે આ પ્રયોગ બીજા બે કે ત્રણ ત્રિકોણ લઈને ફરી ફરી કરો. તે દરેકને ત્રિકોણ ABC નામ આપો અને બાજુઓ AB અને AC ના મધ્યબિંદુઓને D અને E તરીકે નામ આપો. તમે હંમેશાં જોશો કે DE || BC મળે છે.

આમ, આપણે તારવીએ કે

ત્રિકોણમાં બે બાજુઓના મધ્યબિંદુઓને જોડતો રેખાખંડ ત્રીજી બાજુને સમાંતર છે અને તેના અડધા જેટલો છે.

આપણે ઉપર્યુક્ત પરિણામના પ્રતીપને પણ ચકાસી શકીએ.



આકૃતિ 13.24

કોઈ એક ત્રિકોણ PQR દોરો. બાજુ RQ નું મધ્યબિંદુ શોધો, અને તેને L તરીકે દર્શાવો. L માંથી રેખા LX || PQ દોરો, જે PM ને M માં છેદે છે.

PM અને PR માપો શું તે સમાન છે ? હા, તે સમાન છે.

તમે વિવિધ ત્રિકોણો સાથે ફરી ફરી કરો અને તે દરેકને PQR નામ આપીને અને દરેક વખતે RQ ના મધ્યબિંદુ તરીકે L લઈને અને રેખા LM || PQ દોરીને, તમે દરેક કિસ્સામાં જોશો કે RM = MP આમ, આપણે તારવીએ કે :

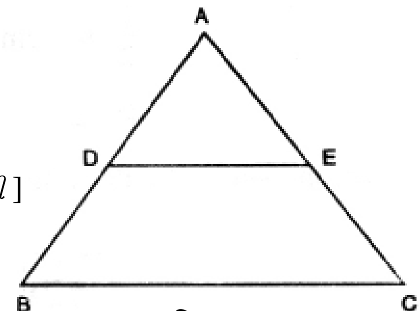
ત્રિકોણની એક બાજુના મધ્યબિંદુમાંથી બીજી બાજુને સમાંતર દોરેલ રેખા ત્રીજી બાજુને દ્વિભાગે છે.

આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો વિચારીએ.

ઉદાહરણ 13.7 : આકૃતિ 13.૨૫ માં D એ ∠ABC ની બાજુ AB નું મધ્યબિંદુ છે અને DE || BC જો AC = 8 સેમી, તો AE શોધો.

ઉકેલ : ABC માં DE || B અને D એ AB નું મધ્યબિંદુ છે.

∴ E એ AC નું પણ મધ્યબિંદુ છે.



આકૃતિ 13.25

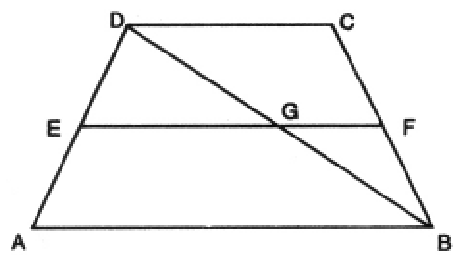
અર્થાત્ AE = AC

$= \left(\frac{1}{2}\times 8\right)$ સેમી [∵ AC = 8 સેમી]

= 4 સેમી

તેથી AE = 4 સેમી

ઉદાહરણ : 13.8 : આકૃતિ 13.26 માં ABCD એ સમલંબ ચતુષ્કોણ છે જેમાં AD અને BC અસમાંતર બાજુઓ છે અને E એ AD નું મધ્યબિંદુ છે. EF || AB દર્શાવો કે E એ BC નું મધ્યબિંદુ છે.



આકૃતિ 13.26

ઉકેલ : Δ ABC EG || AB અને AD નું મધ્યબિંદુ E હોઈ,

∴ G એ DB નું મધ્યબિંદુ છે.

Δ DBC માં GF || DC અને G એ DB નું મધ્યબિંદુ છે.

∴ F એ BC નું મધ્યબિંદુ છે.

ઉદાહરણ : 13.9 : ABC એક ત્રિકોણ છે, જેમાં P, Q અને R અનુક્રમે બાજુ AB, BC અને CA ના મધ્યબિંદુઓ છે. જો AB = 8 સેમી, BC = 7 સેમી અને CA = 6 સેમી હોય, તો ત્રિકોણ PQR ની બાજુઓ શોધો.

ઉકેલ : P એ AB નું મધ્યબિંદુ છે અને R એ AC નું મધ્યબિંદુ છે.

\ PR || BC અને PR $= \frac{1}{2}$ BC

$= \frac{1}{2} \times 7$ સેમી [∵ BC = સેમી]

$= 3.5$ *સેમી*

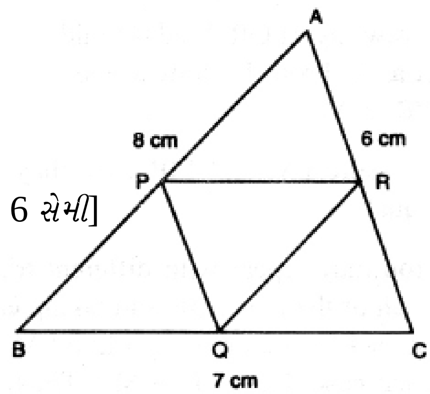
તે જ પ્રમાણે, PQ = AC

$= \frac{1}{2} \times 6$ *સેમી* [$\because$ AC = 6 *સેમી*]

$= 3$ *સેમી*

અને QR = AB

$= \frac{1}{2} \times 8$ *સેમી* [$\because$ AB = 8 *સેમી*]



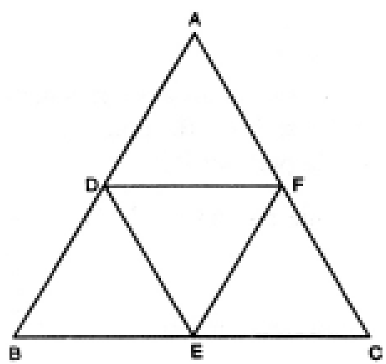
આકૃતિ 13.27

$= 4$ *સેમી*

તેથી, DPQR *ની બાજુઓ :* PQ = 3 cm, Mku{e QR = 4 cm and PR = 3.5 cm.

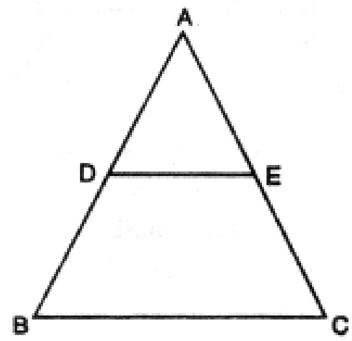
તમારી પ્રગતિ ચકાસો 13.3

$\frac{1}{2}$ 1. *આકૃતિ* 13.28, *માં* ABC *સમબાજુ ત્રિકોણ છે, જેમાં* D, E *અને* F *અનુક્રમે બાજુઓ* AB, BC *અને* CA *ના મધ્યબિંદુઓ છે. સાબિત કરો કે* DEF *પણ સમબાજુ ત્રિકોણ છે.*



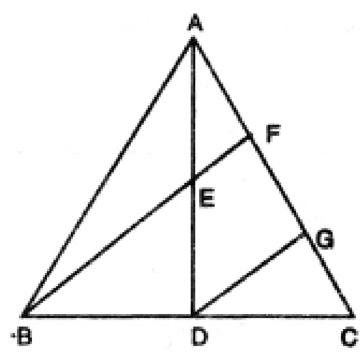
આકૃતિ 13.28

2. *આકૃતિ* 13.29, *માં* D *અને* E *એ* Δ ABC *ની બાજુઓ* AB *અને* AC *ના અનુક્રમે મધ્યબિંદુઓ છે. જો* BC = 10 *સેમી, તો* DE *શોધો*



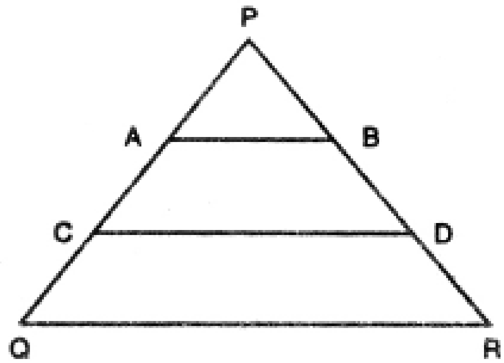
આકૃતિ 13.29

3. આકૃતિ 13.30, માં AD એ ΔABC ની મધ્યગા છે અને E અને AD નું મધ્યબિંદુ છે. BE ને લંબાવતાં AC ને F માં મળે છે. DG || EF, AC ને G માં મળે છે. જો AC = 9 સેમી AF શોધો.



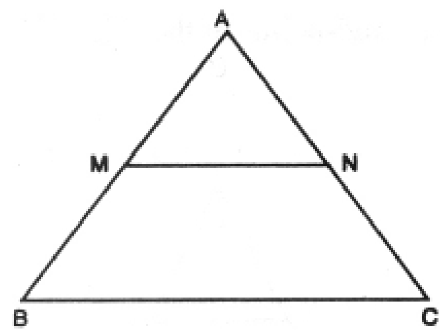
આકૃતિ 13.30

4. આકૃતિ. 13.31, માં A અને C એ Δ PQR ની બાજુ PQ ને ત્રણ સમાન ભાગમાં વિભાગે છે. AB||CD||QR. સાબિત કરો કે B અને D પણ PR ને ત્રણ સમાન ભાગમાં વિભાગે છે.



આકૃતિ 13.31

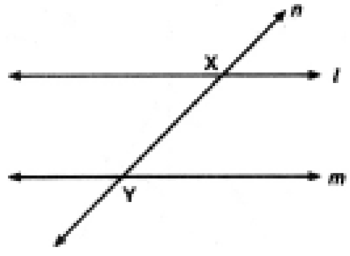
5. આકૃતિ 13.32, માં ABC એ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે જેમાં AB = AC. M એ AB નું મધ્યબિંદુ છે અને MN||BC. દર્શાવો કે ΔAMN પણ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.



આકૃતિ 13.32

13.5 આંતરિક ખંડ પ્રમેય

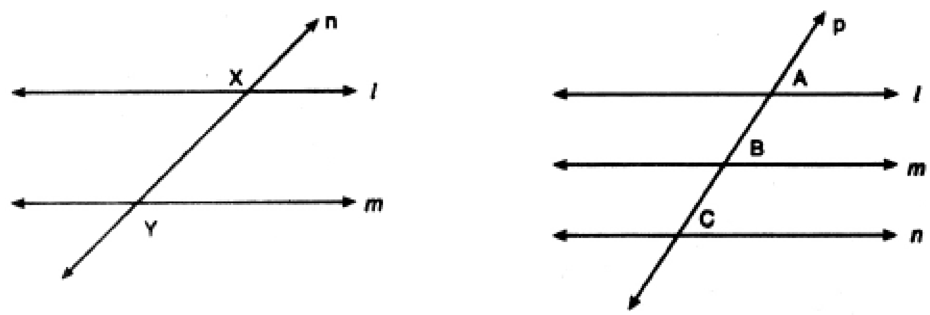
યાદ કરો કે જે રેખા બે કે વધુ રેખાઓને છેદે છે તેને છેદિકા કહે છે. છેદિકામાંથી રેખાઓની જોડ દ્વારા કપાયેલ ખંડ અંતરિક ખંડ કહેવાય છે. આમ, આકૃતિ, 13.33 માં XY એ રેખા l અને m થી છેદિકા n પર રચાયેલ અંતરિક ખંડ છે.



આકૃતિ 13.33

સમાંતર રેખાઓ દ્વારા છેદિકા પર રચાયેલ અંતરિક ખંડો કેટલાક વિશિષ્ટ ગુણધર્મો ધરાવે છે, જે હવે આપણે શીખીએ.

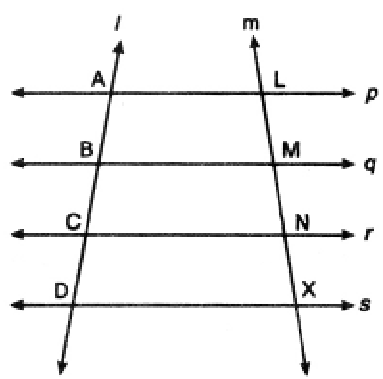
l અને m બે સમાંતર રેખાઓ છે અને XY એ છેદિકા n પર રચાયેલ અંતરિક ખંડ છે. જો ત્રણ સમાંતર રેઆઓ હોય અને તે છેદિકા વડે છેદાયેલ હોય, તો આકૃતિ 13.34 (ii) માં દર્શાવ્યા મુજબ AB અને BC બે અંતરિક ખંડો હશે.



(i) (ii)

આકૃતિ 13.34

હવે આપણે સમાંતર રેખાઓ વડે છેદિકા પર રચાયેલ અંતરિક ખંડોનો અગત્યનો ગુણધર્મ શીખીએ. તમારી નોટબુકના પાન પર કોઈ કે છેદિકાઓ l અને m દોરો, સમાન અંતરે આવેલી જે સમાંતર રેખાઓને આકૃતિ 13.3૫ માં દર્શાવ્યા મુજબ છેદે છે. આ છેદિકાઓ વિવિધ અંતરિત ખંડો રચે છે. અંતરિત ખંડ BC અને CD માપો. શું તે સમાન છે ? હા, તે સમાન છે.



આકૃતિ 13.35

વળી, LM, MN અને NX માપો. શું તમે જાણો છો કે તે પણ સમાન છે ? હા, તે સમાન છે.

ત્રણ કે વધુ સમાન અંતરે રહેલી સમાંતર રેખાઓનો બીજો ત્રણ લઈ આ પ્રયોગ ફરી કરો અને અગાઉ પ્રમાણે તેમના અંતરિત ખંડો માપો. તમે દરેક કિસ્સામાં જોશો કે રચાયેલ અંતરિત ખંડો સમાન હોય છે. આમ, આપણે નીચે મુજબ તારવીએ :

જો ત્રણ અથવા વધુ સમાંતર રેખાઓ હોય અને કોઈ છેદિકા પર તે દ્વારા રચાયેલ અંતરિત ખંડો સમાન હોય તો બીજી કોઈ છેદિકા પર રચાયેલ અનુરૂમ અંતરિત ખંડો પણ સમાન હોય છે.

આપણે તે કેટલાંક ઉદાહરણો દ્વારા દર્શાવીએ : આ પરિણામ સમાન અંતરિત ખંડ પ્રમેય તરીકે જાણીતું છું.

ઉદાહરણ : 13.10 *: આકૃતિ* 13.36 *માં,* $p \parallel q \parallel r$ *છેદિકા* l, m *અને* n *તેમને અનુક્રમે* L, M, N, A, B,C *અને* X, Y, Z *માં છેદે છે, જેથી* XY= YZ *તો સમાન અંતરિત ખંડોની અન્ય જોડનાં નામ લખો.*

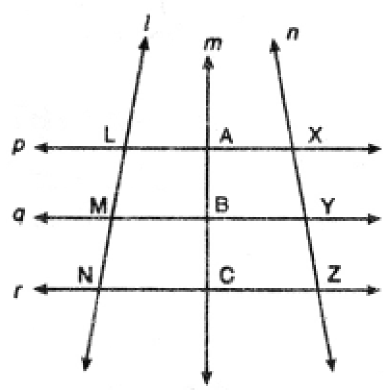
ઉકેલ : આપેલ છે કે XY = YZ

AB = BC *(અંતરિત ખંડ પ્રમેય)*

અને LM = MN

આમ સમાન અંતરિત ખંડોની અન્ય જોડ છે :

AB = BC *અને* KM = MN



આકૃતિ 13.36

ઉદાહરણ : 13.11 *આકૃતિ* 13.37 *માં,*

$l \parallel m \parallel n$ *અને* PQ = QR *જો* XZ = 20 *સેમી હોય, તો* YZ *શોધો.*

ઉકેલ : PQ = QR

અંતરિત ખંડ પ્રમેય મુજબ

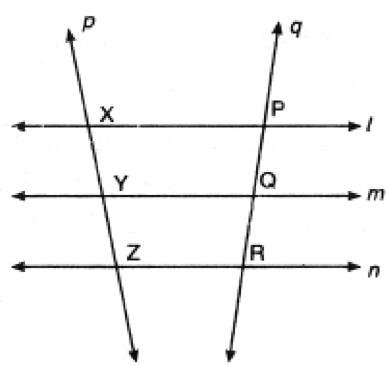
XY = YZ

વળી XZ = XY + YZ

= YZ + YZ

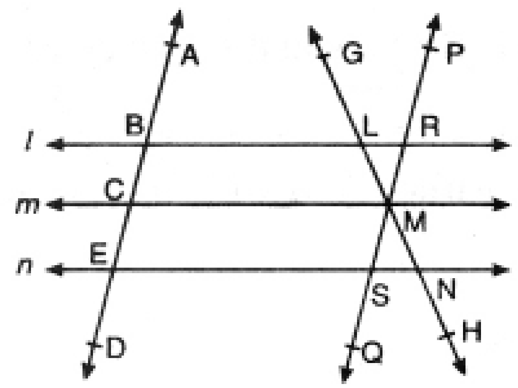
∴ 20 = 2YZ ⇒ YZ = 10 *સેમી*

તેથી YZ = 10 *સેમી*



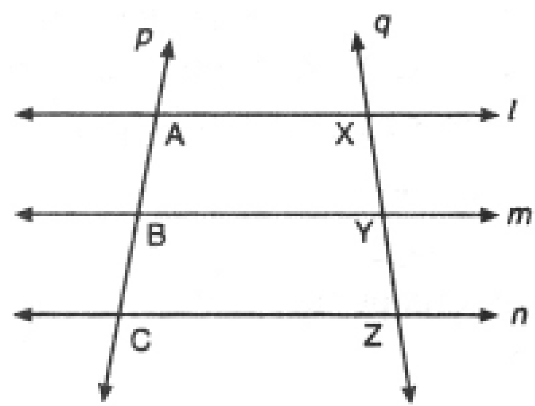
તમારી પ્રગતિ ચકાસો 13.4

1. *આકૃતિ* 13.38, *માં* l, m *અને* n *ત્રણ સમાન અંતરે સમાંતર રેખાઓ છે.* AD, PQ *અને* GH *ત્રણ છેદિકાઓ છે. જો* BC = 2 *સેમી,* LM = 2.5 *સેમી અને* AD || PQ, *તો* MS *અને* MN. *શોધો.*



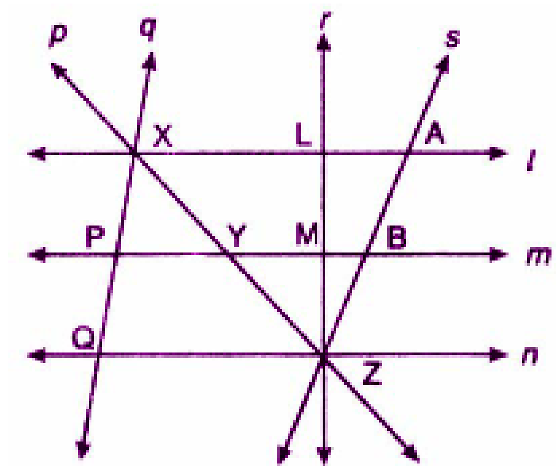
આકૃતિ 13.38

2 *આકૃતિ* 13.39, *થી તમે ક્યારે કહી શકો કે* AB = BC *અને* XY = YZ?



આકૃતિ 13.39

3. *આકૃત* 13.40, LM = MZ = 3 *સેમી,* XY, XP *અને* BZ *શોધો. આપેલ છે કે* l || m || n *અને* PQ = 3.2 *સેમી,* AB = 3.5 *સેમી અને* YZ = 3.4 *સેમી.*



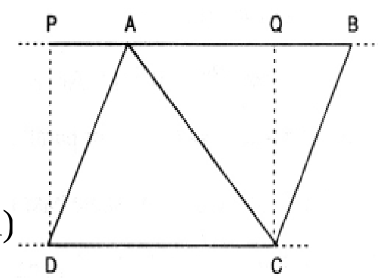
આકૃતિ 13.40

13.9 સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો વિકર્ણ અને તેના ક્ષેત્રફળ વચ્ચેનો સંબંધ :

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD. *દોરો તેનો વિકર્ણ* AC *જોડો.* DP ⊥ DC *અને* QC ⊥ DC. *દોરો*

બે ત્રિકોણ ADC *અને* ACB *વિચારો, જેમાં સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ* ABCD *વિકર્ણ* AC. *વડે વિભાગાયેલ છે.*

$\frac{1}{2}$



કારણ કે AB || DC,

PD = QC.

હવે, ΔADC *નું ક્ષેત્રફળ* = DC × PD ....(i)

ΔACB *નું ક્ષેત્રફળ* $= \frac{1}{2}$ AB × QC ....(ii) *આકૃતિ* 13.41

AB = DC *અને* PD = QC *હોઈ*

∴ *ક્ષેત્રફળ* (ΔADC) = *ક્ષેત્રફળ* (ΔACB)

આ, આપણે નીચે મુજબ તારવીએ :

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો વિકર્ણ અને સમાન ક્ષેત્રફળવાળાં બે ત્રિકોણમાં વિભાગે છે.

13.10 તે જ સમાંતર રેઆઓ વચ્ચે આવેલા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ અને ત્રિકોણો

બે સમાંતરબાજનું ચતુષ્કોણો કે ત્રિકોણો જે સમાન પાયા પર કે એકજ પાયા પર આવેલા હોય અને તેમનાં અન્ય શિરોબિંદુઓ તેમના પાયાને સમાંતર રેખા પર હોય તો તેઓ સમાન પાયા પર કે એકજ પાયા પર અને એકજ સમાંતર રેખાઓ વચ્ચે છે એમ કહેવાય.

આપણે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ અને તેમના ક્ષેત્રફળ વિશે અગત્યનો પ્રમેય સાબિત કરીએ :

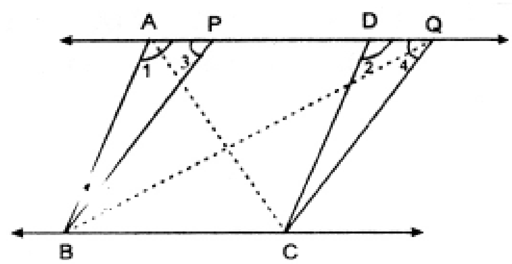
પ્રમેય : એક જ પાયા (અથવા સમાન પાયા) પરના અને તે જ સમાંતર રેખાઓ વચ્ચેના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણો ક્ષેત્રફળમાં સમાન હોય છે.

આપણે તે તાર્કિક રીતે સાબિત કરીએ.

પક્ષ : સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD અને PBCQ તે જ પાયા BC પર અને તે જ સમાંતર રેખાઓ BC અને AQ વચ્ચે આવેલા છે.

સાધ્ય : ક્ષેત્રફળ (ABCD) = ક્ષેત્રફળ (BCQR)

સાબિતી : બે ત્રિકોણ ABP અને DCQ વિચારો.



આકૃતિ 13.42

આપણી પાસે છે : AB = DC

(સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની સામેની બાજુઓ)

અને BP = CQ

(સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની સામેની બાજુઓ)

$\angle 1 = \angle 2$

$\therefore \quad \Delta ABP \cong \Delta DCQ$

$\therefore$ ક્ષેત્રફળ (ΔABP) = ક્ષેત્રફળ (ΔDCQ) ...(i)

હવે, ક્ષેત્રફળ ($\|^{gm}$ ABCD) = ક્ષેત્રફળ (ΔABP) + ક્ષેત્રફળ (સમલંબ ચ. BCDP) ...(ii)

ક્ષેત્રફળ ($\|^{gm}$ BCQP) = ક્ષેત્રફળ (ΔDCQ) + ક્ષેત્રફળ (સમલંબ ચ. BCDP) ...(iii)

(i), (ii) અને (iii), માંથી આપણને મળે છે કે :

ક્ષેત્રફળ ($\|^{gm}$ ABCD) = ક્ષેત્રફળ ($\|^{gm}$ BCQP)

નોંધ : $\|^{gm}$ અને સમલંબ ચ. અનુક્રમે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ અને સમલંબ ચતુષ્કોણ માટે છે.

પરિણામ : તે જ પાયા અને તે જ સમાંતર રેખાઓ વચ્ચેના ત્રિકોણો ક્ષેત્રફળમાં સમાન હોય છે.

આકૃતિ 13.42 વિચાર. બે સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણ BCQP અને ABCD ના વિકર્ણો અનુક્રમે Q અને AC જોડો. આપણે જાણીએ છીએ કે $\|^{gm}$ નો વિકર્ણ તેને સમાન ક્ષેત્રફળવાળા બે ત્રિકોણોમાં વિભાગે છે.

$\therefore$ ક્ષેત્રફળ (ΔBCQ) = ક્ષેત્રફળ (ΔPBQ)

અને ક્ષેત્રફળ (ΔABC) = ક્ષેત્રફળ (ΔCAD)

$\therefore$ ક્ષેત્રફળ (ΔABC) = ક્ષેત્રફળ (ΔBCQ)

તે જ પાયા (અથવા સમાન પાયા) પરના અને તે જ સમાંતર રેખાઓ વચ્ચેના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ

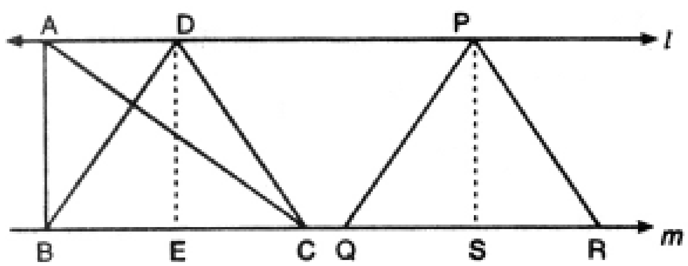
ક્ષેત્રફળમાં સમાન હોય છે.

આમ આપણે નીચે પ્રમાણે પણ તારવીએ :

તે જ પાયા (અથવા સમાન પાયા) પરના અને તે જ સમાંતર રેખાઓ વચ્ચેના ત્રિકોણ ક્ષેત્રફળમાં સમાન હોય છે.

13.11 તે જ અથવા સમાન પાયા પરના અને સમાન ક્ષેત્રફળ ધરાવતા ત્રિકોણના વેધ સમાન હોય છે.

યાદ કરો કે ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ = = $\frac{1}{2}$ (પાયો) × વેધ



આકૃતિ 13.43

અહીં $BC = QR$

અને ક્ષેત્રફળ (ΔABC) = ક્ષેત્રફળ (ΔDBC) = ક્ષેત્રફળ (ΔPQR) [પક્ષ] ..(i)

D અને P માંથી રેઆ m લંબ DE અને PS દોરો જે તેને અનુક્રમે E અને S માં મળે

હવે, ક્ષેત્રફળ (ΔABC) = $\frac{1}{2} BC \times DE$

ક્ષેત્રફળ (ΔDBC) = $\frac{1}{2} BC \times DE$ ...(ii)

અને ક્ષેત્રફળ (ΔPQR) = $\frac{1}{2} QR \times PS$

વળી, $BC = QR$ (પક્ષ) ...(iii)

(i), (ii) અને (iii), માંથી આપણને મળે છે કે :

$$\frac{1}{2} BC \times DE = \frac{1}{2} QR \times PS$$

અથવા $$\frac{1}{2} BC \times DE = \frac{1}{2} BC \times PS$$

$$\therefore \quad DE = PS$$

અર્થાત્ ΔABC, ΔDBC અને ΔPQR ના વેધ લંબાઈમાં સમાન છે.

નોંધ

આમ, આપણે નીચે મુજબ તારવીએ :
તે જ અથવા સમાન પાયા પરના અને સમાન ક્ષેત્રફળ ધરાવતા ત્રિકોણના વેધ સમાન હોય છે.

ઉદાહરણ 13.12 આકૃતિ 13.44માં, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD નું ક્ષેત્રફળ 40 ચો. સેમી છે. જો BC = 8 સેમી હોય, તો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ BCEF નો વેધ શોધો.

ઉકેલ: $||^{gm}$ BCEF નું ક્ષેત્રફળ = $||^{gm}$ ABCD નું ક્ષેત્રફળ = 40 ચો.સેમી ...... (i)

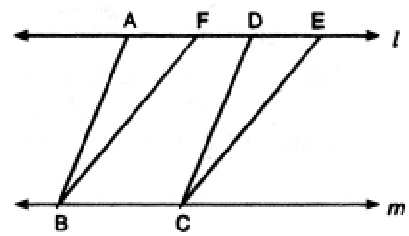
આપણે જાણીએ છીએ કે

ક્ષેત્રફળ ($||^{gm}$ BCEF) = EF × વેધ

અથવા 40 = BC × $||^{gm}$ BCEF નો વેધ

અથવા 40 =8 × $||^{gm}$ BCEF નો વેધ

$\therefore$ $||^{gm}$ BCEF નો વેધ = $\frac{40}{8}$ સેમી અથવા 5 સેમી



આકૃતિ 13.44

ઉદાહરણ 13.13: આકૃતિ 13.45, ΔABCનું ક્ષેત્રફળ 18 ચો સેમી આપેલ છે. જો વેધ 4.5 સેમી હોય, તો ΔBCD.

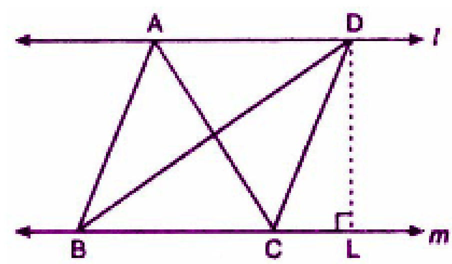
ઉકેલ : ક્ષેત્રફળ (ΔBCD) = ક્ષેત્રફળ (ΔABC) = 18 ચો સેમી^{2}
ΔBCD નો પાયો ધારો કે x સેમી છે.

$\therefore$ ΔBCD નું ક્ષેત્રફળ = $\frac{1}{2}$x × DL

$= \left(\frac{1}{2}x \times 4.5\right)$ ચો.સેમી^{2}

અથવા $18 = \left(\frac{9}{4}x\right)$

$\therefore$ $x = \left(18 \times \frac{4}{9}\right)$ સેમી = 8 સેમી



આકૃતિ 13.45

ઉદાહરણ 13.14: આકૃતિ 13.46, માં ΔBCD નો પાયો BC = 8 સેમી ABCD અને ACED બે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. જો ΔABC નું ક્ષેત્રફળ 12 ચો સેમી હોય અને CE અને BC ની લંબાઈ સમાન હોય, તો સમલંબ ચતુષ્કોણ ABED નું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : ક્ષેત્રફળ ($||^{gm}$ ABCD) = ક્ષેત્રફળ ($||^{gm}$ ACED)

વિકર્ણ AC $||^{gm}$ ABCD ને સમાન ક્ષેત્રફળવાળા બે ત્રિકોણોમાં વિભાગે છે.

$\therefore$ ક્ષેત્રફળ (ΔBCD) = $\frac{1}{2}$ ક્ષેત્રફળ ($||^{gm}$ ABCD)

$\therefore$ ક્ષેત્રફળ ($\|^{gm}$ ABCD) = ક્ષેત્રફળ ($\|^{gm}$ ACED) = 2 × 12 ચો.સેમી

= 24 ચો સેમી

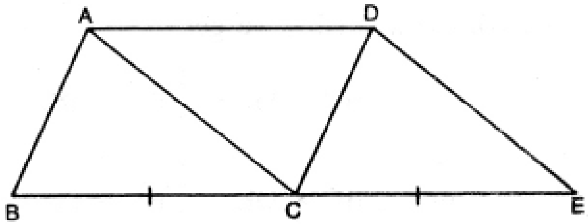
$\therefore$ સમલંબ ચતુષ્કોણ ABED નું ક્ષેત્રફળ

= ક્ષેત્રફળ (ΔABC) + ક્ષેત્રફળ

($\|^{gm}$ ACED)

= (12 + 24) ચો.સેમી

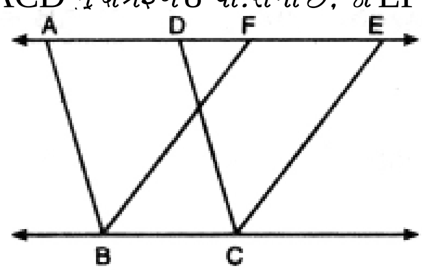
= 36 ચો.સેમી



આકૃતિ 13.46

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 13.5

1. તે જ પાયા (કે સમાન પાયા) પર રહેલા બે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ સમાન ક્ષેત્રફળવાળા ક્યારે હોય ?
2. $\|^{gm}$ ABCD ના વિકર્ણ AC ને જોડતાં રચાયેલ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 16 ચો સેમી છે. તો $\|^{gm}$ ABCD નું ક્ષેત્રફળ શોધો.
3. આકૃતિ 13.47 માં ΔACD નું ક્ષેત્રફળ 8 ચો.સેમી છે. જો EF = 4 સેમી તો, તો $\|^{gm}$ BCFE નો વેધ શોધો.



આકૃતિ 13.47

સારાંશ :

- ચતુષ્કોણ એ ચાર બાજુઓવાળી બંધ આકૃતિ છે, જે સમતલનું કેટલુંક ક્ષેત્રફળ ઘેરે છે.
- ચતુષ્કણોના અંદરના અથવા બહારના ખૂણાઓનો સરવાળો દરેક 360^0 હોય છે.
- ચતુષ્કોણ એ સમલંબ ચતુષ્કોણ હોય, જો તેની સામસામેની બાજુઓની એક જોડ સમાંતર હોય.
- ચતુષ્કોણ એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય, જો બાજુઓની બંને જોડ સમાંતર હોય.

- સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં

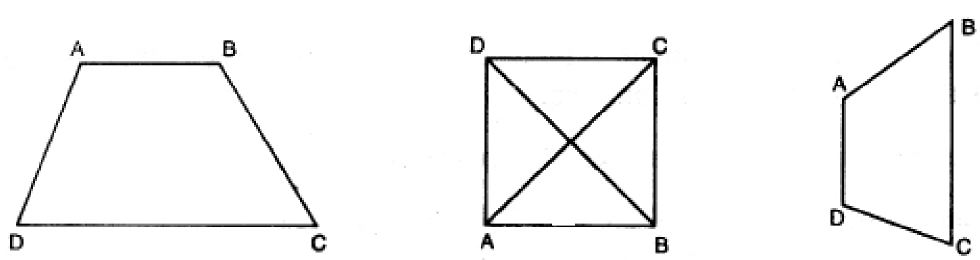
  (i) સામસામેની બાજુઓ સામ સામેના ખૂણાઓ સમાન હોય છે.

  (ii) વિકર્ણો એકબીજાને દ્વિભાગે છે.

- સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ એ સમબાજુ ચતુષ્કોણ હોય, જો તેની આસન્ન બાજુઓ સમાન હોય.
- સમબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો એકબીજાને કાટખૂણે દ્વિભાગે છે.
- સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ એ લંબચોરસ હોય, જો તેનો એક ખૂણો 90^0 હોય
- લંબચોરસના વિકર્ણો સમાન હોય છે.
- લંબચોરસ એ ચોરસ હોય, જો તેની આસન્ન બાજુઓ સમાન હોય.
- ચોરસના વિકર્ણો કાટખૂણે છેદે છે.
- સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો તેને સમાન ક્ષેત્રફળવાળા બે ત્રિકોણોમાં વિભાગે છે.
- એક જ પાયા (અથવા સમાન પાયા) પર અને તે જ સમાંતર રેખાઓ વચ્ચે રહેલ સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણ ક્ષેત્રફળમાં સમાન હોય છે.
- એક જ પાયા (અથવા સમાન પાયા) પર અને તે જ સમાંતર રેખાઓ વચ્ચે રહેલ ત્રિકોણો ક્ષેત્રફળમાં સમાન હોય છે.
- સમાન પાયા પરના સમાન ક્ષેત્રફળવાળા ત્રિકોણના વેધ સમાન હોય છે.

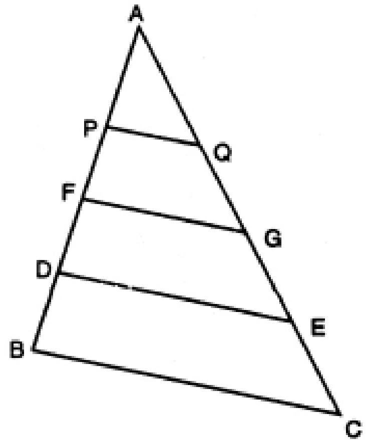
સત્રાંત સ્વાધ્યાય

1. નીચેના પૈકી કયા સમલંબ ચતુષ્કોણ છે.



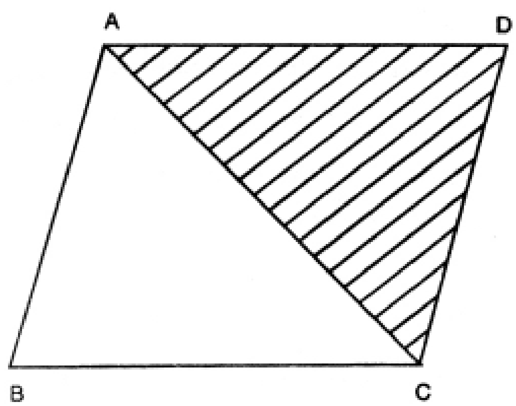
આકૃતિ 13.48

2. આકૃતિ 13.49, માં PQ || FG || DE || BC. આકૃતિમાં તમામ સમલંબ ચતુષ્કોણનાં નામ આપો.



આકૃતિ 13.49

3. આકૃતિ 13.50 માં ABCD એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે જેનું ક્ષેત્રફળ 48 ચો સેમી છે. (i) છાયાંકિત ભાગ (ii) છાયા વગરનું ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



આકૃતિ 13.50

4. નીચેના દરેકને સાચું વિધાન બનાવવા ખાલી જગ્યા પૂરો :

   (i) ચતુષ્ધકોણ એ સમલંબ ચતુષ્કોણ હોય. જો....

   (ii) ચતુષ્કોણ એ સમાંતરબાજુ ચુતષ્કોણ હોય, જો....

   (iii) લંબચોરસ એ ચોરસ હોય, જો.....

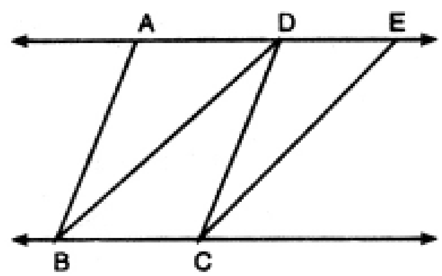
   (iv) ચતુષ્કોણના વિકર્ણો એકબીજાને કાટખૂણે દ્વિભાગે છે. જો ચતુષ્કોણનો કોઈ પણ ખૂણો કાટખૂણો ન હોય, તો તે છે....

(v) ચતુષ્કોણના બહારના ખૂણાઓના સરવાળો.....

5. જો ચતુષ્કોણના ખૂણાઓ $(x-20)^o$, $(x+20)^o$, $(x-15)^o$ અને $(x+15)^o$, હોય, તો x તેમજ ચતુષ્કોણના ખૂણા શોધો.

6. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણાઓનો સરવાળો 180^o છે. તો એ ક્યા ખાસ પ્રકારનો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે ?

7. આકૃતિ 13.51 માં ΔABC નું ક્ષેત્રફળ 24 ચો.સેમી છે. જો DE= 6 સેમી અને $AB \parallel CD$, $BD \parallel CE$, $AE \parallel BC$ હોય, તો શોધો :

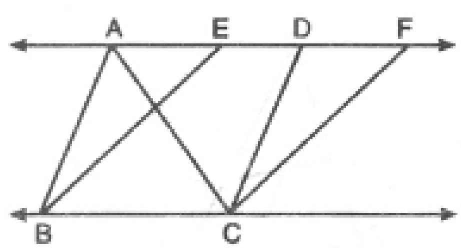


આકૃતિ 13.51

(i) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ BCED નો વેધ

(ii) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ BCED નું ક્ષેત્રફળ

8. આકૃતિ 13.52 માં સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD નું ક્ષેત્રફળ 40 ચો સેમી છે. EF = 8 સેમી હોય, તો ΔDCE નો વેધ શોધો.



આકૃતિ 13.52

ઉત્તરો

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 13.1

1. (i) લંબચોરસ (ii) સમલંબ ચતુષ્કોણ (iii) લંબચોરસ (iv) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ
   (v) સમબાજુ ચતુષ્કોણ (vi) ચોરસ
2. (i) સાચું (ii) ખોટું (iii) સાચું (iv) સાચું
   (v) સાચું (vi) સાચું (vii) સાચું (viii) સાચું
   (ix) ખોટું (x) ખોટું
3. 90^o 4. 60^o, 84^o, 84^o and 132^o
5. *સાસસામેની ખૂણાની બીજી જોડ પણ પૂરક હોય :*

તમારી પ્રગતિ ચકાસો : 13.2

1. $\angle B = 118^o$, $\angle C = 62^o$ *અને* $\angle D = 118^o$
2. $\angle A = 105^o$, $\angle B = 75^o$, $\angle C = 105^o$ *અને* $\angle D = 75^o$
3. 30 4. $\angle CDB = 55^o$ *અને* $\angle ADB = 55^o$
5. $\angle ACD = 61^o$ 6. $\angle OPS = 70^o$ 7. $\angle CAB = 45^o$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 13.3

2. 5 cm 3. 3 cm

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 13.4

1. MS = 2 *સેમી અને* MN = 2.5 *સેમી*
2. *1, m અને* n *એ ત્રણ સમાન અંતરે સમાંતર રેઆ હોય.*
3. XY = 3.4 *સેમી,* XP = 3.2 *સેમી અને* BZ = 3.5 *સેમી*

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 13.5

1. *જ્યારે તેઓ તે જ સમાંતર રેખાઓ વચ્ચે હોય.*
2. 32 *ચો સેમી* 3. 4 *સેમી*

સત્રાંત સ્વાધ્યાય

1. (i) *અને* (iii)
2. PFGQ, FDEG, DBCE, PDEQ, FBCG અને PBCQ

3. (i) 24 cm^2 (ii) 24 cm^2

4. (i) *સામસામેની બાજુઓની કોઈ એક જોડ સમાંતર હોય*

   (ii) *સામસામેની બાજુઓની બંને જોડ સમાંતર હોય*

   (iii) *આસન્ન બાજુઓની જોડ સમાન હોય*

   (iv) *આસન્ન બાજુઓની જોડ સમાન હોય*

   (iv) *સમબાજુ ચતુષ્કોણ*

   (v) 360^o

5. $x = 90^o$, *ખૂણોઓ અનુક્રમે* 70^o, 110^o, 75^o *અને* 105^o

6. *તે લંબચોરસ છે.*

7. (i) 8 *સેમી* (ii) 48 *સેમી*

8. 5 *સેમી*

14

ત્રિકોણની સમરૂપતા

14.1 પરિચય

આસપાસ તમે એવી ઘણી વસ્તુઓ જોશો, જે એક જ આકારની , પરંતુ તે જે અથવા જુદાં જુદાં કદની હોય. ઉદાહરણાર્થ, વૃક્ષનાં પાન લગભગ તે આકાર, પરંતુ એક જ અથવા વિવિધ કદ ધરાવે છે. તે જ પ્રમાણે, એક જ નેગેટિગમાંથી વિકસાવેલા વિવિધ કદના ફોટોગ્રાફ તે જ આકાર પણ વિવિધ કદ ધરાવે છે. મકાનનું નાનું મોડેલ અને મકાન પોતે એક જ આકારનાં છે, પણ વિવિધ કદનાં છે. આવી તમામ વસ્તુઓ જેમને તે જ આકાર પરંતુ વિવિધ કદ છે તે સમરૂપ વસ્તુઓ કહેવાય છે.

આપણે સમતલીય આકૃતિઓની સમરૂપતા તપાસીએ :

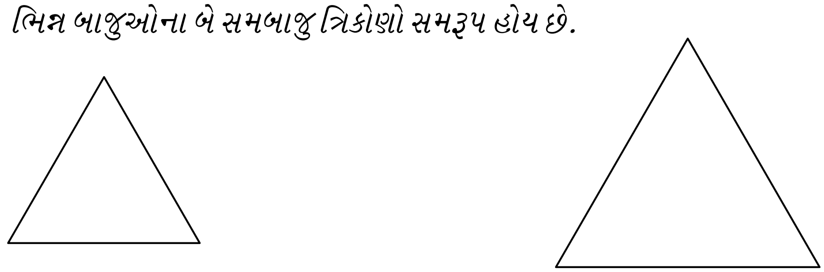
(1) સમાન લંબાઈના બે રેખાખંડ એકરૂપ હોય છે, પણ વિવિધ લંબાઈના રેખાખંડ સમરૂપ હોય છે.

આકૃતિ. 14.1 (i)

(2) સમાન ત્રિજ્યાનાં બે વર્તુળો એકરૂપ હોય છે, પણ જુદી જુદી ત્રિજ્યાનાં વર્તુળો સમરૂપ હોય છે.

આકૃતિ. 14.1 (ii)

(3) ભિન્ન બાજુઓના બે સમબાજુ ત્રિકોણો સમરૂપ હોય છે.



આકૃતિ. 14.1 (iii)

(4) ભિન્ન બાજુઓવાળા બે ચોરસ સમરૂપ હોય છે.

આકૃતિ. 14.1 (iv)

આ પ્રકરણમાં, આપણે સમરૂપતાની સંકલ્પના, ખાસ કરીને ત્રિકોણોની સમરૂપતા અને તે માટેની શરતો વિશે શીખીશું. આપણે તેમને સંબંધિક જુદા જુદા પરિણામો વિશે પણ શીખીશું.

હેતુઓ

આ પાઠ શીખ્યા પછી, આધ્યેતા :

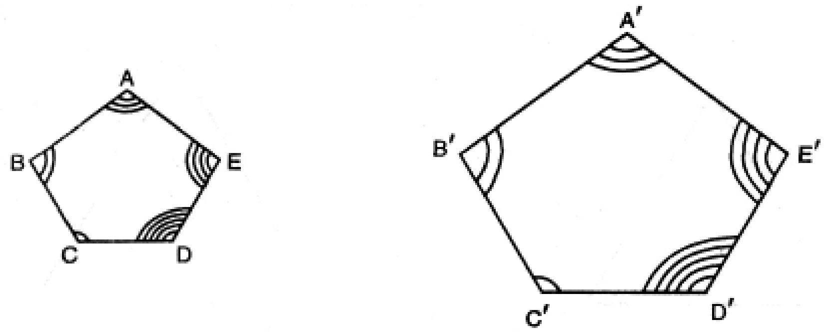
- *સમરૂપ આકૃતિઓ ઓળખી શકશો.*
- *એકરૂપ અને સમરૂપ સમતલીય આકૃતિઓ વચ્ચે ભેદ પારખી શકશો.*
- *ત્રિકોણોની સમરૂપતા માટેની શરતો જણાવી શકશે, જેમ કે* AAA, SSS *અને* SAS.
- *સમરૂપતા પર આધારિત અભ્યાસક્રમમાં આપેલ અજ્ઞાત (અતારાકિત) પરિણામો પ્રયોગાત્મક ચકાસી શકશે અને તેમનો ઉપયોગ કરી શકશે.*
- *બૌધાયન/પાયથોગોરસ પ્રમેય સાબિત કરી શકશે.*
- *સમરૂપ ત્રિકોણો પર આધારિત કૂટપ્રશ્નોને પ્રયોગાત્મક રીતે ચકાસવામાં (અથવા તાર્કિક રીતે સાબિત કરવામાં) આ પરિણામોનું ઉપયોજન કરી શકશે.*

અપેક્ષિત પૂર્વજ્ઞાન

નીચેનાનું જ્ઞાન,

- *સમતલીય આકૃતિઓ જેવી કે ત્રિકોણ, ચતુષ્કોણ, વર્તુળ, લંબચોરસ, ચોરસ વગેરે.*
- *ત્રિકોણોની એકરૂપતાની શરતો*
- *સંખ્યાઓના વર્ગ અને વર્ગમૂળ શોધવા.*
- *ગુણોત્તર અને પ્રમાણ*
- *ત્રિકોણના અંદરના ખૂણાઓ અને બાહ્ય ખૂણાઓ*

14.1 સમરૂપ સમતલીય આકૃતિઓ



આકૃતિ. 14.2

આકૃતિ 14.2 માં, બે પંચકોણ એક જ આકારના દેખાય છે.

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$ and $\angle E = E'$ *છે*

અને $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}$. *છે તેથી કહી શકીએ કે બે પંચકોણ સમરૂપ છે. આમ, આપણે કહીશુ કે,*

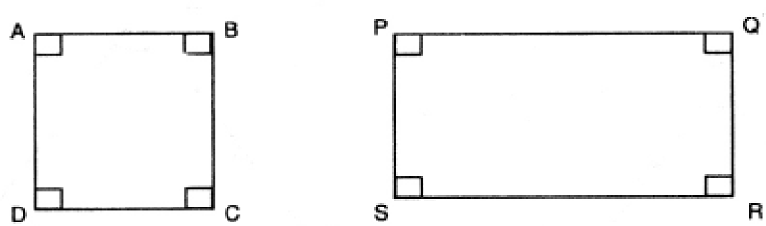
કોઈ બે બહુકોણના અનુરૂપ ખૂણા સમાન હોય અને અનુરૂપ બાજુઓ પ્રમાણમાં હોય તો તે સમરૂપ હોય છે.

આમ, બે બહુકોણ સમરૂપ હોય, જો તેઓ નીચેની બે શરતોનું સમાધાન કરે -

(1) અનુરૂપ ખૂણા માન હોય

(2) અનુરૂપ બાજુઓ પ્રમાણાં હોય

આમાંની એક પણ શરત ન પળાય, તો બહુકોણ સમરૂપ ન બને, જેમ કે આકૃતિ 14.3 માં લંબચોરસ અને ચોરસના કિસ્સામાં જુઓ કે તમામ અનુરૂપ ખૂણા સમાન છે પણ અનુરૂપ બાજુઓ પ્રમાણમાં નથી.



આકૃતિ. 14.3

14.2 મૂળભૂત પ્રમાણ પ્રમેય

આપણે મૂળભૂત પ્રમાણ નીચે મુજબ જણાવીએ :

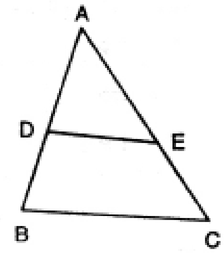
જો એક રેખા ત્રિકોણની એક બાજુને સમાંતર દોરવામાં આવે,તો ત્રિકોણની બીજી બે બાજુઓ પ્રમાણમાં વિભાગીય છે.

આમ, આકૃતિ 14.4 માં, DE || BC, *ઉપરના પરિણામ પ્રમાણે,*

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

આપણે AD, DB, AE *અને* EC. *માપીને આ સરળતાથી ચકાસી શકીશું*

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \text{ થાય છે.}$$



આકૃતિ. 14.4

આપણે ઉપરના પરિણામોનું પ્રતિપ્રમેય નીચે પ્રમાણે જણાવીએ :

જો કોઈ રેખા ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુઓને સમ પ્રમાણમાં વિભાગે, તો તે રેખા ત્રિકોણની ત્રીજી બાજુને સમાંતર હોય છે.

આમ, આકૃતિ14.4 માં જો DE, ΔABC *ની બાજુઓ* AB *અને* AC *ને આવી રીતે વિભાગે,*

જોથી, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ *તો* DE || BC

આપણે $\angle ADE$ *અને* $\angle ABC$ *માપીને અને* $\angle ADE = \angle ABC$ *શોધીને આને ચકાસી શકીશું. આ અનુકોણ હોઈ, રેખા* DE *અને* BC *સમાંતર છે.*

આપણે વિવિધ ત્રિકોણો લઈ ઉપરનાં બે પરિણામો ચકાસી શકીએ.

આના પર આધારિત કેટલાંક ઉદાહરણ ઉકેલીએ.

ઉદાહરણ 14.1: *આકૃતિ 14.5 માં,* DE || BC *જો* AD = 3 *સેમી,* DB = 5 *સેમી અને* AE = 6 *સેમી, તો* AC *શોધો.*

ઉકેલ: DE || BC *(આપેલ છે) ધારો કે* EC = x

$\therefore \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

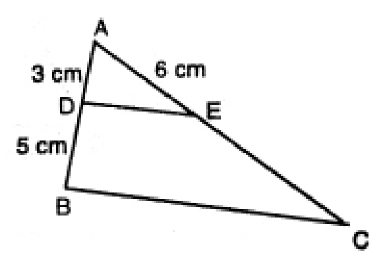
$\therefore \quad \frac{3}{5} = \frac{6}{x}$

➡ $3x = 30$

➡ $x = 10$

$\therefore$ EC = 10 *સેમી*

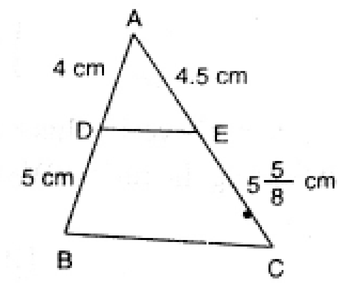
$\therefore$ AC = AE + EC = 16 *સેમી*



આકૃતિ. ૧૪.૫

ઉદાહરણ 14.2: *આકૃતિ. 14.6માં,* AD = 4 *સેમી,* DB = 5 *સેમી,* AE = 4.5 *સેમી અને* EC = $5\frac{5}{8}$ *સેમી,* DE || BC *છે ? તમારા જવાબ માટે કારણ આપો*

ઉકેલ: આપેલ છે કે AD = 4 સેમી અને DB = 5 સેમી



આકૃતિ. 14.6

$$\therefore \quad \frac{AD}{DB} = \frac{4}{5}$$

તે જ પ્રમાણે, $$\frac{AE}{EC} = \frac{4.5}{\frac{45}{8}} = \frac{9}{2} \times \frac{8}{45} = \frac{4}{5}$$

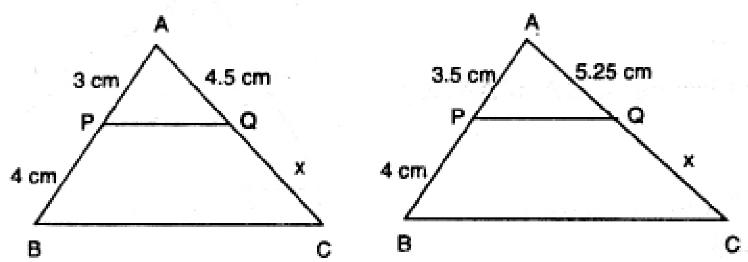
$$\therefore \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

મૂળભૂત પ્રમાણ પ્રમેયના પ્રતિપ્રમેય પ્રમાણે

$$DE \parallel BC$$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 14.1

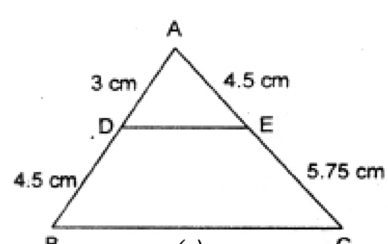
1. આકૃતિ 14.7 (i) અને (ii) માં, PQ || BC દરેક કિસ્સામાં x ની કિંમત શોધો.



(i) (ii)

આકૃતિ. 14.7

2. આકૃતિ 14.8 (i) અને (ii) માં, DE, BC ને સમાંતર છે કે નહીં તે શોધો. તમારા જવાબ માટે કારણો આપો.



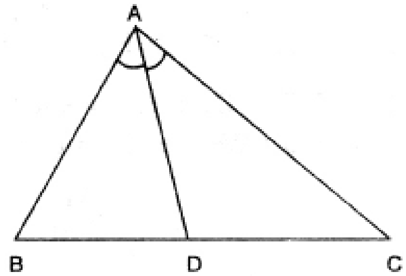
(i)

આકૃતિ. 14.8

14.6 ત્રિકોણના ખૂણાવો દ્વિભાજક

આપણે હવે અગત્યનું પરિણામ નીચે મુજબ જણાવીએ :

ત્રિકોણની આંદરના ખૂણાનો દ્વિભાજક સામેની બાજુને ખૂણો ધરાવતી બાજુઓના પ્રમાણમાં વિભાગે છે.



આમ, ઉપરના પરિણામ પ્રમાણે, જો AD અને Δ ABC ના ∠A ને અત:દ્વિભાજક હોય, તો

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$$

આપણે BD, DC, AB અને AD માપીને અને ગુણોત્તર શોધીને આ સરળતાથી ચકાસી શકીશું. આપણને જોવા મળશે કે,

આકૃતિ. 14.9

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$$ *થાય છે.*

બીજા ત્રિકોણ સાથે આ પ્રવૃત્તિ ફરીથી કરતાં, આપણે પરિણામ ચકાસીશું.

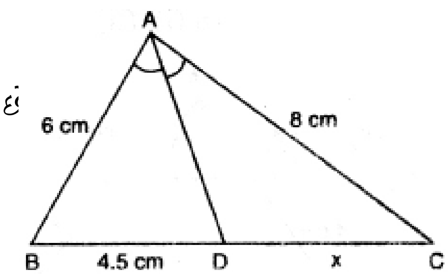
આપણે આ દર્શાવવા કેટલાંક ઉદાહરણ ઉકેલીએ.

ઉદાહરણ 14.3: *ત્રિકોણની બાજુઓ AB અને AC અનુક્રમે 6 સેમી અને 8 સેમી છે. ∠A નો દ્વિભાજક AD સામેની બાજુ BC ને D માં છેદે છે જેથી BD = 4.5 સેમી રેખાખંડ CD ની લંબાઈ શોધો.*

ઉકેલ: *ઉપરના પરિણામ પ્રમાણે, આપણે જાણીએ છીએ કે,*

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$$

(∵ AD એ ΔABC ના ∠ A નો અંત:દ્વિભાજક છે



આકૃતિ. 14.10

અથવા

➡ $6x = 4.5 \times 8$

$\therefore \quad x = 6$

અર્થાત્ રેખાખંડ CD ની લંબાઈ = 6 સેમી હોય.

ઉદાહરણ 14.4: *ત્રિકોણની બાજુઓ 28 સેમી, 36 સેમી, અને 48 સેમી છે. સૌથી નાની બાજુ તેની સામેના ખૂણાન દ્વિભાજકથી જે રેખાખંડોમાં વિભાગીય છે તેમની લંબાઈ શોધો.*

ઉકેલ: *નાનામાં નાની બાજુ 28 સેમી લંબાઈની છે અને તેની સામેનો ખૂણો A રચતી બાજુઓ 36 સેમી અને 48 સેમી છે. ∠ A નો કોણ દ્વિભાજક AD, BC ને D માં મળે છે.*

$$\therefore \quad \frac{BD}{DC}=\frac{36}{48}=\frac{3}{4}$$

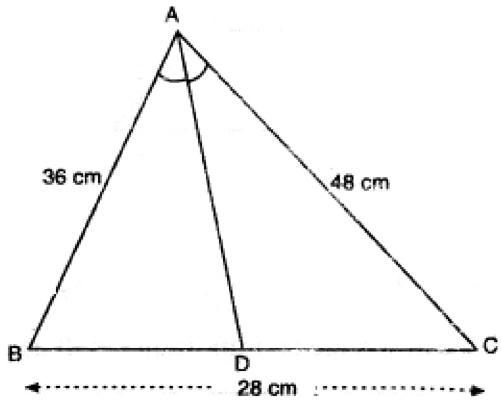
$\Rightarrow$ 4BD=3DC અથવા $BD=\frac{3}{4}DC$

BC = BD + DC = 28 સેમી

$$\therefore \quad DC+\frac{3}{4}DC=28$$

$$\therefore \quad DC=\left(28\times\frac{4}{7}\right)\text{સેમી}=16 \text{ સેમી}$$

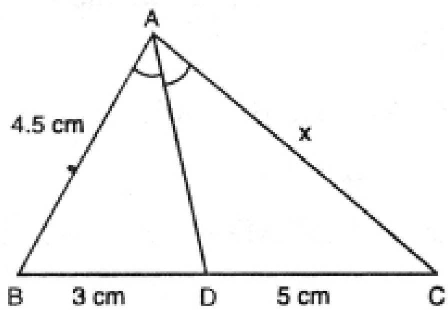
$\therefore$ BD = 12 સેમી અને DC = 16 સેમી



આકૃતિ. 14.11

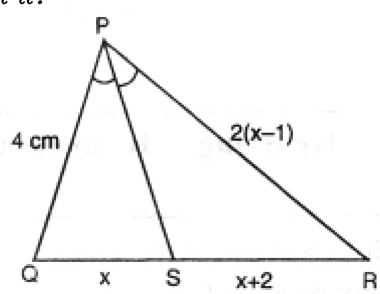
તમારી પ્રગતિ ચકાસો 14.2

1. આકૃતિ 14.12 માં AD, $\angle A$ નો દ્વિભાજક છે, જે BC ને D માં મળે છે. જો AB = 4.5 સેમી BD = 3 સેમી, DC = 5 સેમી, તો x શોધો.



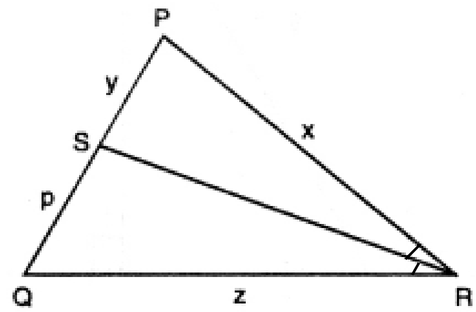
આકૃતિ. 14.12

2. આકૃતિ 14.13 માં PS એ ΔPQR ના $\angle P$ નો અંતઃદ્વિભાજક છે. કેટલીક બાજુઓનાં માપ આકૃતિ 14.13 માં આપેલ છે. x શોધો.



આકૃતિ. 14.13

3. આકૃતિ 14.14 માં RS એ ΔPQR ના $\angle R$ નો અંતઃદુભાજક છે. આપેલ પરિણામ માટે QS ની લંબાઈને x, y અને z માં અભિવ્યક્ત કરો.



આકૃતિ. 14.14

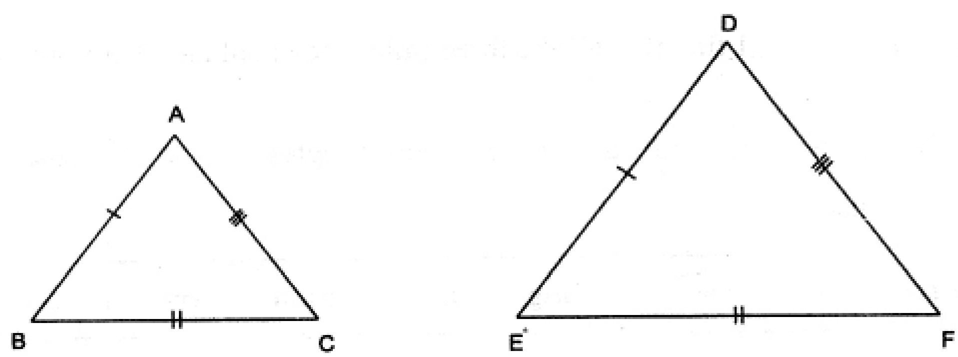
14.4 ત્રિકોણની સમરૂપતત્ર

ત્રિકોણો એ વિશિષ્ટ પ્રકારના બહુકોણ છે અને તેથી બહુકોણોની સમરૂપતાની શરતો ત્રિકોણોને પણ લાગુ પડે છે. આમ,

બે ત્રિકોણો સમરૂપ હોય, જો

(1) તેમના અનુરૂપ ખૂણા સમાન હોય, અને

(2) તેમની અનુરૂપ બાજુઓ પ્રમાણમાં હોય.



આકૃતિ. 14.15

આપણે કહીએ છીએ કે ΔABC ,ΔDEF ને સમરૂપ છે અને તે નીચે લખીને દર્શાવીએ છીએ :

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

સંકેત '~' 'સમરૂપ છે' એ માટે છે.

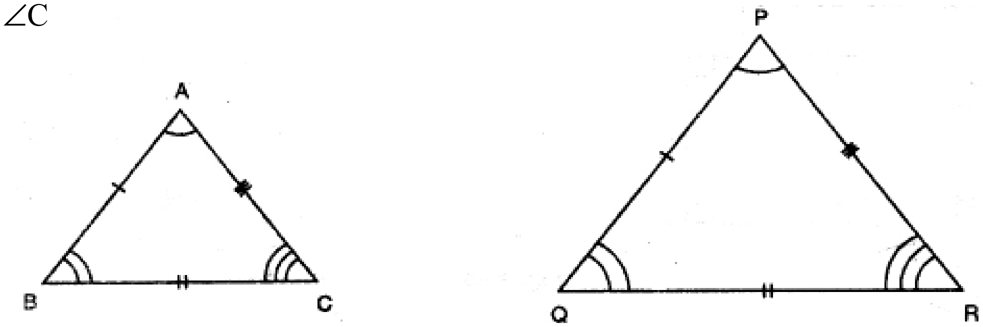
જો $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ તો વ્યાખ્યા દ્વારા

$\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$ and $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CA}{FD}$.

14.4.1 સમરૂપતાની શરત - ખૂખૂખૂ

આપણે દર્શાવીશું કે જો ઉપરની બે શરતો પૈકીની એકનું સમાધાન થતું હોય, તો બીજી પોતાની મેળે ત્રિકોણોની બાબતમાં લાગુ પડે છે. ચલો આપણે નીચેનો પ્રયોગ કરીએ :

આકૃતિ 14.16 *માં દર્શાવ્યા મુજબ બે* ABC *અને* PQR *રચો, જેમાં* $\angle P = \angle A$, $\angle Q = \angle B$ *અને* $\angle R = \angle C$



આકૃતિ. 14.16

DABC *ની બાજુઓ* AB, BC *અને* CA *માપો અને* DPQR *ની બાજુઓ* PQ, QR *અને* RP *પણ માપો.*

હવે ગુણોત્તર શોધો : $\frac{AB}{PQ}, \frac{BC}{QR}$ *અને* $\frac{CA}{RP}$.

તમે શું શોધ્યું ? તમે જોશો કે તમામ ત્રણ ગુણોત્તર સમાન છે અને તેથી ત્રિકોણો એકરૂપ છે.

સમાન અનુરૂપ ખૂણાઓવાળા જુદા જુદા ત્રિકોણો સાથે આની અજમાયશ કરો. તેમને તે જ પરિણામ મળશે.

આમ, આપણે કહી શકીએ કે :

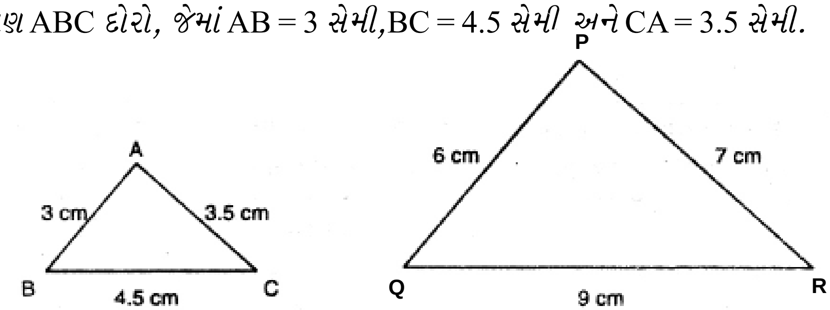
જો બે ત્રિકોણોમાં અનુરૂપ ખૂણા સમાન હોય, તો ત્રિકોણો સમરૂપ હોય છે.

સમરૂપતાની આ શરત ખૂખૂખૂ કહેવાય છે.

14.4.2 સમરૂપતાની શરત ખૂખૂખૂ કહેવાય છે.

હવે આપણે નીચેનો પ્રયોગ કરીએ.

ત્રિકોણ ABC *દોરો, જેમાં* AB = 3 *સેમી*, BC = 4.5 *સેમી અને* CA = 3.5 *સેમી.*



(i) (ii)

આકૃતિ. 14.17

આકૃતિ 14.17 (ii) માં દર્શાવ્યા મુજબ બીજો DPQR દોરો.

આપણે જોઈ શકીએ કે $\frac{AB}{PQ}=\frac{BC}{QR}=\frac{AC}{PR}$ થાય છે.

અર્થાત્, બે ત્રિકોણોની બાજુઓ પ્રમાણમાં છે.

હવે ΔABC ના $\angle A$, $\angle B$ અને $\angle C$ માપો ΔPQR ના $\angle P$, $\angle Q$ અને $\angle R$ માપો.

તમે જોશો કે $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$ અને $\angle C = \angle R$ થાય છે.

અનુરૂપ બાજુઓ પ્રમાણમાં હોય તેવા બીજા બે ત્રિકણો સાથે આ પ્રયોગ ફરીથી કરો ; તમે જોશો કે્ નુરૂપ ખૂણા સમાન છે અને તેથી ત્રિકણો સમરૂપ છે.

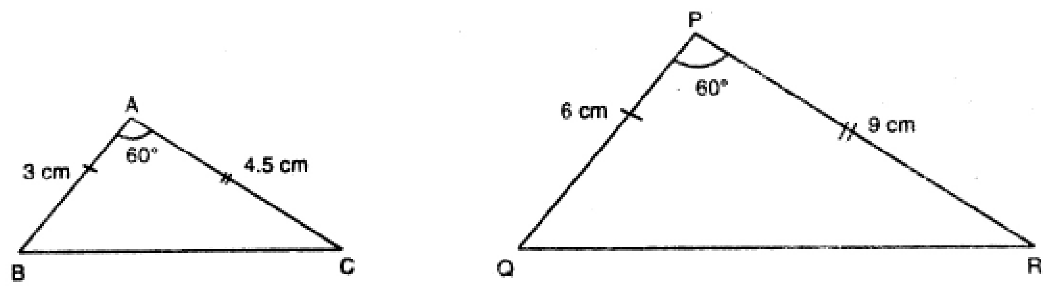
આમ, આપણે કહી શકીએ કે,

જો બે ત્રિકોણોની અનુરૂપ બાજુઓ પ્રમાણમાં હોય, તો ત્રિકોણો સમરૂપ હોય છે.

14.4.3 સમરૂપતાની શરત - બાખૂબા

ચાલો આપણે નીચેનો પ્રયોગ કરીએ :

રેખાખંડ AB = 3 સેમી લો અને A આગળ 60^0 નો ખૂણો રચો. AC = 4.5 સેમી કાપો. BC જોડો.



આકૃતિ. 14.18

હવે PQ = 6 સેમી લો. P બિંદુએ 60^0 નો ખૂણો રચ અને PR = 9 સેમી કાપો (આકૃતિ 14.18) QR જોડો $\angle B$, $\angle C$, $\angle Q$ અને $\angle R$ માપો. આપણે જોઈશુ કે $\angle B = \angle Q$અને $\angle C = \angle R$ થાય છે.

આમ, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

આમ આપણે તારવીએ કે

જો એક ત્રિકોણનો એક ખૂણો બીજા ત્રિકોણના એક ખૂણા બરાબર હોય અને આ ખૂણાઓ ધરાવતી બાજુઓ પ્રમાણમાં હોય, તો ત્રિકોણો સમરૂપ હોય છે.

આમ, આપણને ત્રિકોણોની સમરૂપતા માટે આપણને ત્રણ મહત્વન શરતો મળે છે. તે નીચે આપેલ છે :

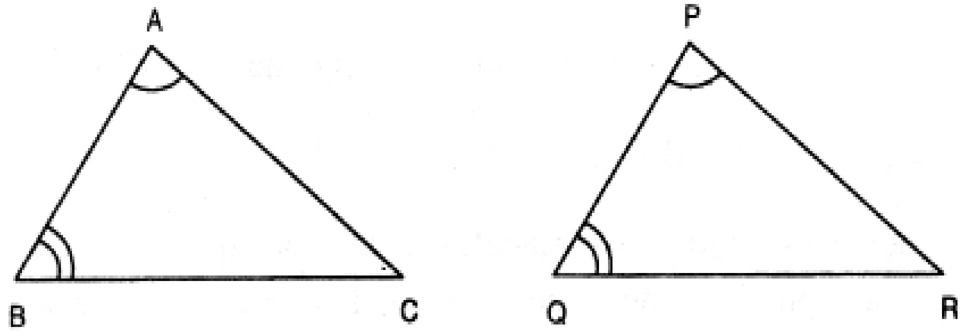
(1) જો બે ત્રિકોણોમાં અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય, તો ત્રિકોણો સમરૂપ હોય છે.

(2) જો બે ત્રિકોણોની અનુરૂપ બાજુઓ પ્રમાણમાં હોય, તો ત્રિકોણો સમરૂપ હોય છે.

(3) જો ત્રિકોણનો એક ખૂણો બીજા ત્રિકોણના એક ખૂણા બરાબર હોય અને આ ખૂણા ધરાવતી બાજુઓ પ્રમાણમાં હોય, તો ત્રિકોણો એકરૂપ હોય છે.

ઉદાહરણ 14.5: *આકૃતિ 14.19 માં બે ત્રિકોણો ABC અને PQR આપેલ છે.*

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$?.



આકૃતિ. 14.19

ઉકેલ: *આપેલ છે કે*

$\angle A = \angle P$ *અને* $\angle B = \angle Q$

આપણે એ પણ જાણીએ છીએ કે :

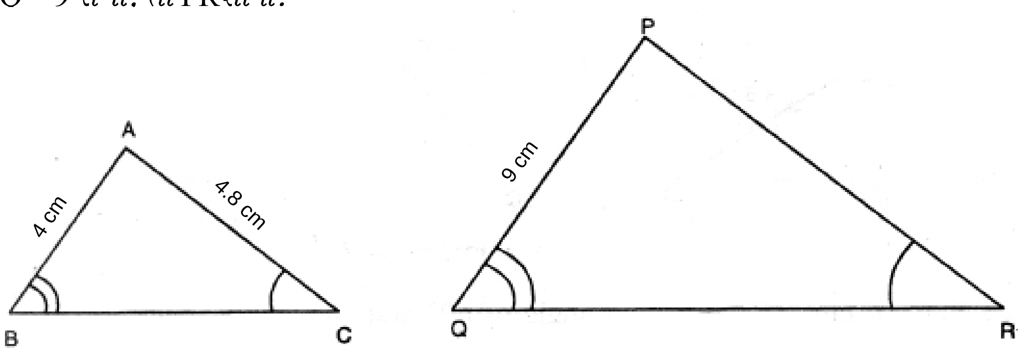
$\angle A + \angle B + \angle C = \angle P + \angle Q + \angle R = 180^o$

$\angle C = \angle R$

આમ, સમરૂપતાની પ્રથમ શરતખૂખૂખૂ મુજબ,

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$

ઉદાહરણ 14.6: *આકૃતિ 14.20 માં,* $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ *જો* AC = 4.8 *સેમી,* AB = 4 *સેમી, અને* PQ = 9 *સેમી. તો* PR *શોધો.*



આકૃતિ. 14.20

ઉકેલ: *આપેલ છે કે* $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

$$\therefore \quad \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$$

ધારો કે PR = x સેમી

$$\therefore \quad \frac{4}{9} = \frac{4.8}{x}$$

➡ $4x = 9 \times 4.8$

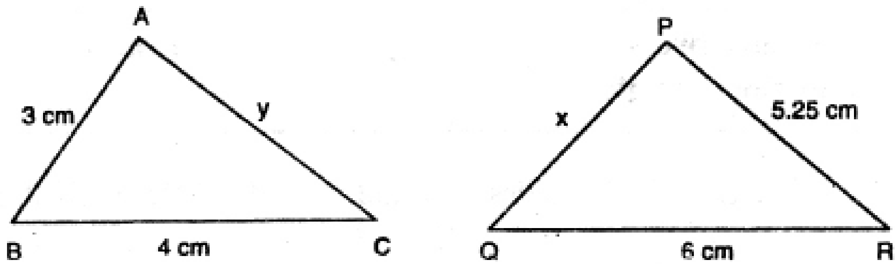
➡ $x = 10.8$

અર્થાત્, PR = 10.8 સેમી.

14.3 તમારી પ્રગતિ ચકાસો

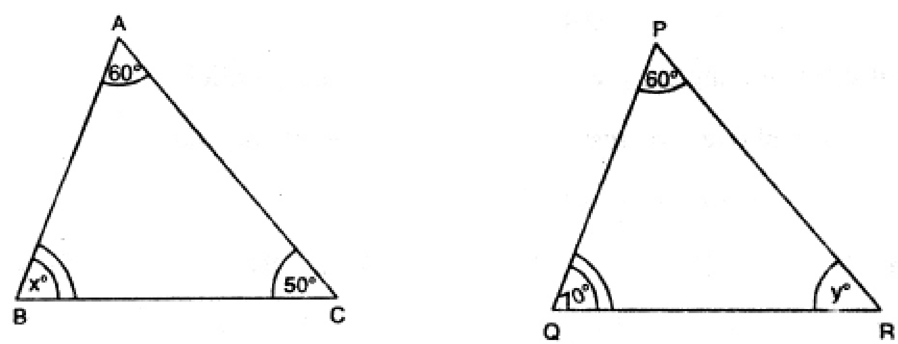
જો $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ તો x અને y ની કિંમત શોધો.

(i)



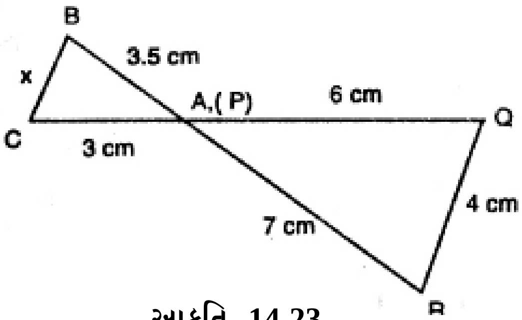
આકૃતિ. 14.21

(ii)



આકૃતિ. 14.22

(iii)



આકૃતિ. 14.23

14.8 કેટલાંક વધુ અગત્યના પરિણામો

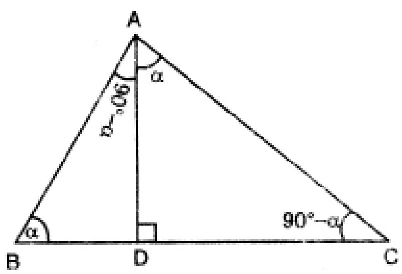
હવે આપણે કાટકોણ ત્રિકોણ અને કાટકોણના શિરોબિંદુમાંથી, સામેની બાજુને લંબના સંબંધમાં સમરૂપતા પરના બીજા અગત્યનાં પરિણામ વિશે શીખીએ. આપણે પરિણામને નીચે મુજબ કહીએ અને તેને ચકાસવા પ્રયત્ન કરીએ.

જો કાટકોણ ત્રિકણમાં કાટખૂણાના શિરોબિંદુમાંથી કર્ણને લંબ દોરવામાં આવે તો લંબની બાજુના ત્રિકોણો એકબીજાને તેમજ મૂળ ત્રિકોણને સમરૂપ છે.

પ્રવૃત્તિ દ્વારા આપણે આ ચકાસવા પ્રયત્ન કરીએ.

A *આગળ કાટકોણ હોય તેવો* ΔABC *દોરો.*

$AD \perp$ *કર્ણ* BC *દોરો, જે તેને* D *માં મળે છે.*



આકૃતિ. 14.24

ધારો કે, $\angle DBA = a$, $\angle ADB = 90^o$ *હોઈ,*

$\angle BAD = 90^o - a$ *થાય.*

$\angle BAC = 90^o$ *અને* $\angle BAD = 90^o - a$ *હોઈ.*

તેથી $\angle DAC = a$ *થાય.*

તે જ પ્રમાણે $\angle DCA = 90^o - a$

$\therefore$ ΔADB *અને* ΔCDA *સમરૂપ છે, કારણ કે તેના તમામ અનુરૂપ ખૂણા સમાન છે.*

વળી, DBAC *ના ખૂણા*B, A , *અને* C *અનુક્રમે* α 90^0 *અને* $90^0 - \alpha$ *છે.*

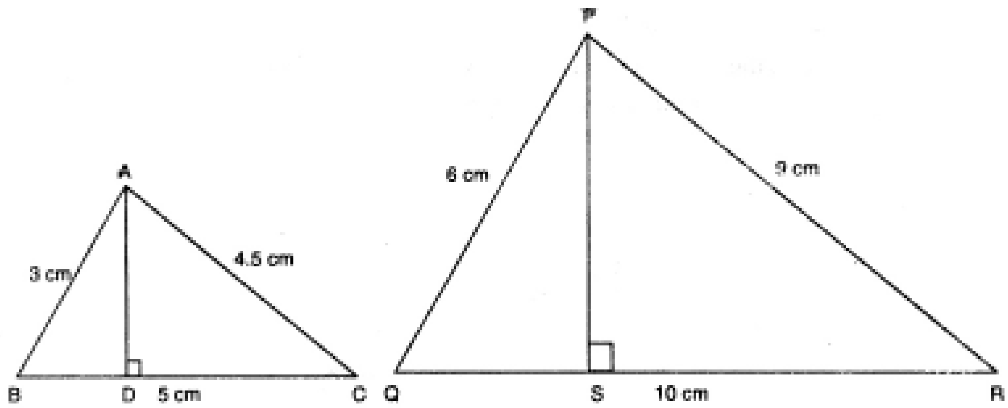
$\therefore \qquad \Delta ADB \sim \Delta CDA \sim \Delta CAB$

બીજું અગત્યનું પરિણામ સમરૂપ ત્રિકોણોની બાજુઓ અને ક્ષેત્રફળ વચ્ચેના સંબંધ વિશે છે.

તે કહી છે કે :

સમરૂપ ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર અનુરૂપ બાજુઓના વર્ગોના ગુણોત્તર બરાબર છે.

આ પરિણામ આપણે નીચેની પ્રવૃત્તિ દ્વારા ચકાસીએ. બે ત્રિકોણો ABC *અને* PQR *દોરો, જે અનુરૂપ છે. એર્થાત્ તેમની બાજુઓ પ્રમાણમાં છે.*



આકૃતિ. 14.25

AD ^ BC અને PS ^ QR દોરો.

AD અને PS ની લંબાઈ માપો.

ગુણનફળ AD × BC અને PS × QR શોધો.

તમને જણાશે કે $AD \times BC = BC^2$ અને $PS \times QR = QR^2$

હવે $AD \times BC = 2$ ΔABC નું ક્ષેત્રફળ

$PS \times QR = 2$ ΔPQR નું ક્ષેત્રફળ

$$\therefore \quad \frac{\Delta ABC \text{ નું ક્ષેત્રફળ}}{\Delta PQR \text{ નું ક્ષેત્રફળ}} = \frac{AD \times BC}{PS \times QR} = \frac{BC^2}{QR^2} \qquad \text{...(i)}$$

$$\frac{BC}{QR} = \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} \quad \text{હોઈ}$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta ABC \text{ નું ક્ષેત્રફળ}}{\Delta PQR \text{ નું ક્ષેત્રફળ}} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{AC^2}{PR^2}$$

સમરૂપ ત્રિકોણોની વિવિધ જોડ લઈ આ પ્રવૃત્તિ ફરીથી કરી શકાય.

આપણે ઉદાહરણોની સહાયથી આ પરિણામો દર્શાવીએ.

ઉદાહરણ 14.7: બે સમરૂપ ત્રિકોણોના ક્ષેત્રફળનો ગુણોત્તર શોધો, જો તેમની અનુરૂપ બાજુઓની જોડ 2.5 સેમી અને 5.0 સેમી હોય.

ઉકેલ: ધારો કે ABC અને PQR બે ત્રિકોણો છે.

BC = 2.5 સેમી અને QR = 5.0 સેમી

$$\frac{(\Delta ABC) \text{ ક્ષેત્રફળ}}{(\Delta PQR) \text{ ક્ષેત્રફળ}} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{(2.5)^2}{(5.0)^2} = \frac{1}{4}$$

ઉદાહરણ 14.8: ΔABC માં, $PQ \parallel BC$ અને AB અને AC ને અનુક્રમે P અને Q માં છેદે છે.

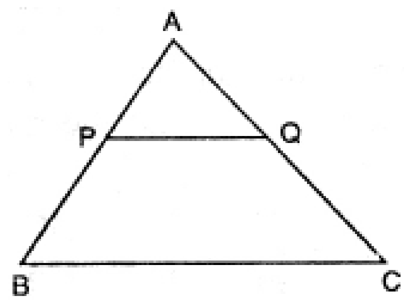
જો $\frac{AP}{BP} = \frac{2}{3}$ તો ΔAPQ અને ΔABC નાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર શોધો.

ઉકેલ: આકૃતિ 14.26 માં

$PQ \parallel BC$

$\therefore \quad \frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{QC} = \frac{2}{3}$

$\therefore \quad \frac{BP}{AP} = \frac{QC}{AQ} = \frac{3}{2}$



આકૃતિ. 14.26

$\therefore 1 + \frac{BP}{AP} = 1 + \frac{QC}{AQ} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

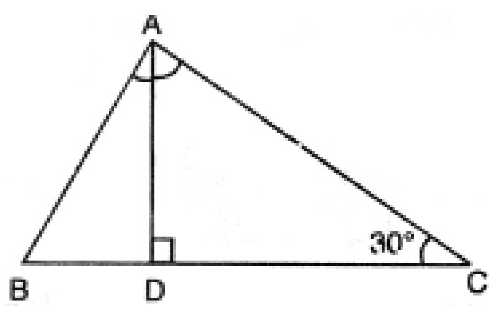
$\Rightarrow \frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ} = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{2}{5}$

$\therefore \quad \Delta APQ \sim \Delta ABC$

$$\therefore \frac{(\Delta APQ) \text{ ક્ષેત્રફળ}}{(\Delta ABC) \text{ ક્ષેત્રફળ}} = \frac{AP^2}{AB^2} = \left(\frac{AP}{AB}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25} (\because \Delta APQ \sim \Delta ABC)$$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 14.4

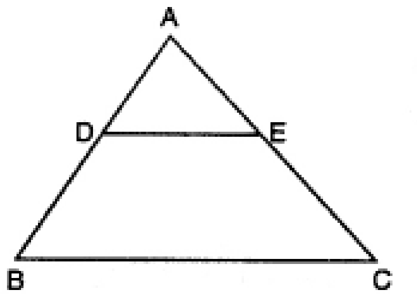
1. આકૃતિ 14.27 માં, ABC કાટકોણ ત્રિકોણ છે. જેમાં $A = 90^\circ$ અને $C = 90^\circ$ દર્શાવો કે $\Delta DAB \sim \Delta DCA \sim \Delta ACB$.



આકૃતિ. 14.27

2. બે સમરૂપ ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળનો ગુણોત્તર શોધો, જેની અનુરૂપ બાજુઓ 3 અને 5 સેમી લંબાઈની છે.

3. આકૃતિ 14.28 માં, ABC એક ત્રિકોણ છે, જેમાં DE || BC. જો AB = 6 સેમી અને AD = 2 સેમી, તો ΔADC અને સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCE નાં ક્ષેત્રફળનો ગુણોત્તર શોધો.



આકૃતિ. 14.28

4. P, Q અને R એ ΔABC ની બાજુઓ AB, BC અને CA નાં અનુક્રમે મધ્યબિંદુઓ છે. દર્શાવો કે ΔPQR નું ક્ષેત્રફળ ΔABC ના ક્ષેત્રફળનું એક ચતુર્થાંશ છે.

5. બે સમરૂપ ત્રિકોણો ABC અને PQR માં, અનુરૂપ વેધ AD અને PS ગુણોત્તર 4:9 માં હોય, તો ΔABC અને ΔPQR ના ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર શોધો.

$\left[\text{સંકેત : } \frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PS} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{PR} \right]$ નો ઉપયોગ કરો.

6. જો બે સમરૂપ ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર 16:25 હોય તો તેમની અનુરૂપ બાજુઓ ગુણોત્તર શોધો.

14.6 બૌધાયન / પાયથાગોરસ પ્રમેય

હવે આપણે અગત્યનું પ્રમેય, જેને બૌધાયન / પાયથાગોરસ પ્રમેય કહે છે તે સમરૂપતાની સંકલ્પનાનો ઉપયોગ કરીને સાબિત કરીશું.

પ્રમેય : કાટકોણ ત્રિકોણમાં, કર્ણનો વર્ગ તે બીજી બે બાજુઓના વર્ગોના સરવાળા બરાબર હોય છે.ફ્

પક્ષ : કાટકોણ ત્રિકોણ ABC જેમાં $\angle B = 90^o$.

સાધ્ય : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

રચના: B માંથી BD ^ AC દોરો (જુઓ આકૃતિ 14.29)

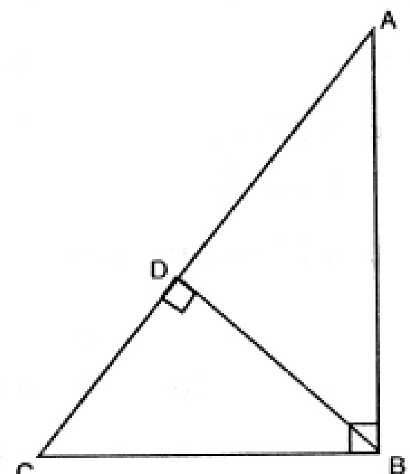
સાબિતી : BD ^ AC

$\therefore \quad \Delta ADB \sim \Delta ABC \qquad ...(i)$

અને $\quad \Delta BDC \sim \Delta ABC \qquad ...(ii)$

(i) માંથી મળે છે : $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}$

➡ $\quad AB^2 = AC \cdot AD \qquad ...(X)$



આકૃતિ. 14.29

(ii) માંથી મળે છે : $\frac{BC}{AC} = \frac{DC}{BC}$

$\Rightarrow \quad BC^2 = AC \,.\, DC \quad ...(Y)$

(X) અને (Y),નો સરવાળો કરતાં આપણને મળે છે.

$$AB^2 + BC^2 = AC\,(AD + DC)$$

$$= AC \,.\, AC = AC^2$$

આ પ્રમેય પ્રખ્યાત ગ્રીક ગણિતશાસ્ત્રી પાયથાગોરસને નામે જાણીતું છે. પાયથાગોરસના 200 વર્ષ પહેલાં ભારતીય ગણિતશાસ્ત્રી બૌધાયને (ઈ.સ. 800 વર્ષ) મૂળ રીતે આપેલો.

14.6.1 પાયથાગોર પ્રમેયનું પ્રતિપ્રમેય

ઉપરના પ્રમેયનું પ્રતિપ્રમેય નીચે મુજબ છે.

ત્રિકોણમાં એક બાજુ પરનો વર્ગ જો બીજી બે બાજુઓના વર્ગોના સરવાળા બરાબર હોય, તો પ્રથમ બાજુની સામેનો ખૂણો કાટખૂણો હોય છે.

આ પરિણામ નીચેની પ્રવૃત્તિ દ્વારા ચકાશી શકાશે.

ત્રિકોણ ABC દોરો, જેમાં બાજુઓ 3 સેમી, 4 સેમી અને 5 સેમી હોય.

અર્થાત્ AB = 3 સેમી, BC = 4 -- સેમી

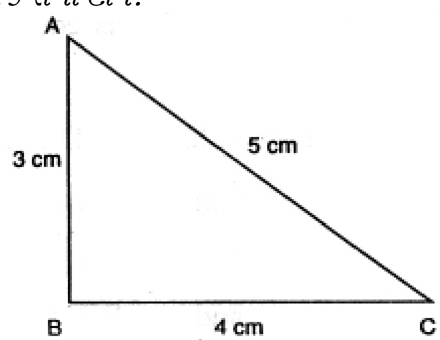
અને AC = 5 સેમી (આકૃત્તિ 14.30)

તમે જોઈ શકશો કે $AB^2 + BC^2 = (3)^2 + (4)^2$

$= 9 + 16 = 25$

$AC^2 = (5)^2 = 25$

$\therefore\ AB^2 + BC^2 = AC^2$



આકૃતિ. 14.30

આકૃતિ 14.30 માં ત્રિકોણ ઉપરના પરિણામની શરતનું સમાધાન કરે છે.

$\angle ABC$ માપો, તમને જણાશે કે $\angle ABC = 90^o$ બાજુઓ 5 સેમી, 12 સેમી, 13 સેમી તેમજ બાજુઓ 7 સેમી, 24 સેમી અને 25 સેમી તેવા ત્રિકોણો રચો. તમને ફરી જણાશે કે 13 સેમી અને 25 સેમી લંબાઈની બાજુઓ સામેનો ખૂણો 90^0 હોય છે.

ઉપરના પરિણામોને ઉપયોગ કરીને કેટલાંક ઉદાહરણો ઉકેલીએ.

ઉદાહરણ 14.9: કાટકોણ ત્રિકોણમાં, કાટખૂણો ધરાવતી બાજુઓ 5 સેમી અને 12 સેમી લંબાઈની છે. તો કર્ણની લંબાઈ શોધો.

ઉકેલઃ ધારો કે ABC કાટકોણ ત્રિકોણ છે, જેમાં B આગળ કાટકોણ છે.

$\therefore \quad$ AB = 5 સેમી, BC = 12 સેમી

વળી, $AC^2 = BC^2 + AB^2$

$= (12)^2 + (5)^2$

$= 144 + 125$

$= 169$

$\therefore \quad AC = 13$

અર્થાત કર્ણની લંબાઈ 13 સેમી છે.

ઉદાહરણ 14.10: લંબચોરસ કે જેની બાજુઓની લંબાઈ 3 સેમી 4 સેમી છે. તેના વિકર્ણની લંબાઈ શોધો.

ઉકેલ: આકૃતિ 14.31 માં, ABCD એ લંબચોરસ છે.

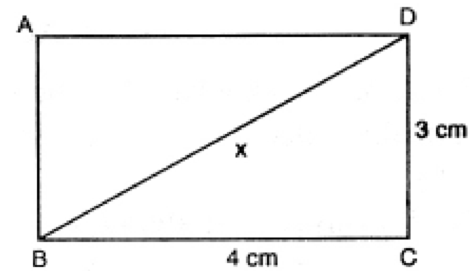
વિકર્ણ BD જોડો. હવે DCB એ કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

$\therefore \quad BD^2 = BC^2 + CD^2$

$= 4^2 + 3^2$

$= 16 + 9 = 25$

$BD = 5$



અર્થાત્ લંબચોરસ ABCD ના વિકર્ણની લંબાઈ 5 સેમી છે.

આકૃતિ. 14.31

ઉદાહરણ 14.11: સમબાજુ ત્રિકોણમાં એક બાજુ પરના વર્ગના ત્રણ ગણા તે તેના વેધના ચાર ગણા બરાબર છે તેની ચકાસણી કરો.

ઉકેલ: વેધ $AD \perp BC$

અને $BD = CD$ (આકૃતિ. ૧૪.૩૨)

ધારો કે $AB = BC = CA = 2a$

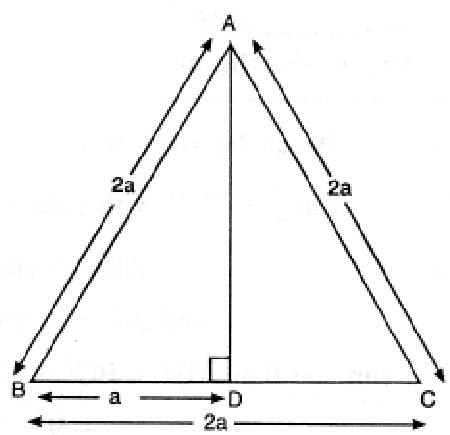
અને $BD = CD = a$

ધારો કે $AD = x$

$\therefore \quad x^2 = (2a)^2 - (a)^2 = 3a^2$

$3. (\text{બાજુ})^2 = 3. (2a)^2 = 12\, a^2$

$4. (\text{વેધ})^2 = 4.\ 3a^2 = 12a^2$



તેથી પરિણામ સિદ્ધ થાય છે.

આકૃતિ. 14.32

ઉદાહરણ 14.12: ABC એ કાટકોણ ત્રિકોણ છે. જેમાં C આગળ કાટકોણ છે. જો CD, AB પર C માંથી લંબની લંબાઈ p હોય, $BC = a$, $AC = b$ અને $AB = c$ સાબિત કરો કે

(i) $pc = ab$

(ii) $\dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$

ઉકેલ : (i) $CD \,^\wedge\, AB$

$\therefore\ \Delta ABC \sim \Delta ACD$

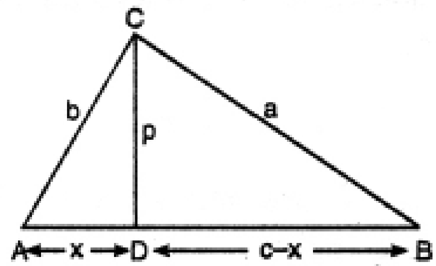
$\therefore \dfrac{c}{b} = \dfrac{a}{p}$

$pc = ab$

(ii) $AB^2 = AC^2 + BC^2$

અથવા $c^2 = b^2 + a^2$

$\left(\dfrac{ab}{p}\right)^2 = b^2 + a^2$



આકૃતિ 14.33

અથવા $\dfrac{1}{p^2} = \dfrac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 14.5

1. અમુક ત્રિકોણની બાજુઓ નીચે આપેલ છે, તે પૈકી કયા કાટકોણ ત્રિકોણો છે તે નક્કી કરો.

   [AB = c, BC = a, CA = b]

   (i) a = 4 સેમી, b = 5 સેમી, c = 3 સેમી

   (ii) a = 1.6 સેમી, b = 3.8 સેમી, c = 4 સેમી

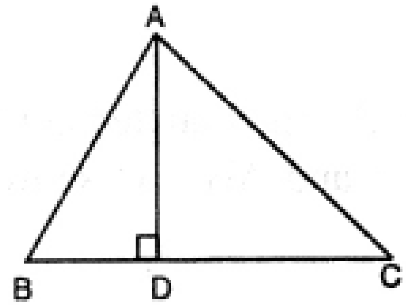
   (iii) a = 9 સેમી, b = 16 સેમી, c = 18 સેમી

   (iv) a = 7 સેમી, b = 24 સેમી, c = 25 સેમી

2. 6 અને 11 મી ઉંચાઈના બે વાંસ સમતલ જમીન પર ઉભા છે. તેમના નીચલા તળિયા વચ્ચેનું અંતર 12 મી હોય, તો તેમની ટોચ વચ્ચેનું અંતર શોધો.

3. 10 સેમી બાજુવાળા ચોરસના વિકર્ણની લંબાઈ શોધો.

4. આકૃતિ 14.34 માં, $\angle C$ લઘુકોણ છે અને AD ^ BC દર્શાવો કે $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\, BC.DC$



આકૃતિ. 14.34

5. B આગળ કાટકોણ હોય તેવા કાટકોણ ΔABC ની બાજુઓ AB અને AC નાં મધ્યબિંદુઓ L અને M છે. દર્શાવો કે $4LC^2 = AB^2 + 4\ BC^2$.

6. C આગળ કાટકોણ હોય તેવા DABC ની બાજુઓ CA અને CB પરનાં બિંદુઓ અનુક્રમે P અને Q છે. સાબિત કરો કે : $AQ^2 + BP^2 = AB^2 + PQ^2$

7. PQR એ સમદ્વિબાજુ કાટકોણ ત્રિકોણ છે જ્યાં $\angle Q = 90^o$ સાબિત કરો કે $PR^2 = 2PQ^2$.

8. એક સીડી દીવાલે આવી રીતે મૂકવામાં આવી છે જેથી તેની ટોચ દીવાલની 4 મી ઉંચાઈએ પહોંચે છે. જો સીડીનો તળભાગ દીવાલની 3 મી દૂર હોય, તો સીડીની લંબાઈ શોધો.

સારાંશ :

- જે વસ્તુઓને સમાન આકાર પણ વિવિધ કદ હોય છે તેમને સમરૂપ વસ્તુઓ કહે છે.
- કોઈ પણ બે બહુકોણ જેમના અનુરૂપ ખૂણા સમાન હોય અને અનુરૂપ બાજુઓ પ્રમાણમાં હોય તે સમરૂપ હોય છે.
- બે ત્રિકોણો સમરૂપ કહેવાય છે, જો

  (અ) તેમના અનુરૂપ ખુણાઓ સમાન હોય છે.

  (બ) તેમની અનુરૂપ બાજુઓ પ્રમાણમાં હોય
- સમરૂપતાની શરતો :

  - ખૂખૂખૂ શરત

  - બાબાબા શરત

  - બાખૂબા શરત
- જો એક રેખા ત્રિકોણની એક બાજુને સમાંતર દોરવામાં આવે, તો તે બીજી બે બાજુઓને સમપ્રમાણમાં વિભાગે છે અને તેનું પ્રતીપ.

- ત્રિકોણના ખૂણાનો અંતઃદ્વિભાજક સામેની બાજુને ખૂણો ધરાવતી બાજુઓના ગુણાત્તરમાં વિભાગે છે.
- કાટકોણ ત્રિકોણમાં કાટખૂણાના શિરોબિંદુમાંથી કર્ણને લંબ દોરવામાં આવે, તો રચાયેલ ત્રિકોણો એકબીજાને તેમજ આપેલ ત્રિકોણને સમરૂપ હોય છે.
- બે સમરૂપ ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર તેમની અનુરૂપ બાજુઓના વર્ગોના ગુણોત્તર જેટલો હોય છે.
- કાટકોણ ત્રિકોણમાં કર્ણનો વર્ગ એ બાકીની બે બાજુઓના વર્ગોના સરવાળા બરાબર હોય છે. (બૌધાયન) પાયથાગોરસ પ્રમેય.
- ત્રિકોણમાં, એક બાજુનો વર્ગ જો બાકીની બે બાજુઓના વર્ગોના સરવાળા બરાબર હોય, તો પ્રથમ બાજુની સામેનો ખૂણો કાટકોણ હોય છે - (બૌધાયન) પાયથાગોરસ પ્રમેયનું પ્રતિપ્રમેય.

સત્રાંત સ્વાધ્યાય

1. બે બહુકોણોની સમરૂપતા માટેની શરતો લખો.
2. બે ત્રિકોણોની સમરૂપતા માટે વિવિધ શરતો ગણાવો.
3. નીચેનામાંથી કયા કિસ્સાઓમાં, ત્રિકોણો ABC અને PQR સમરૂપ છે ?

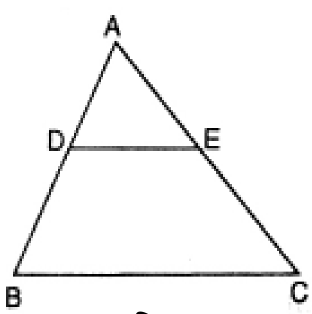
   (i) $\angle A = 40^o$, $\angle B = 60^o$, $\angle C = 80^o$, $\angle P = 40^o$, $\angle Q = 60^o$ અને $\angle R = 80^o$

   (ii) $\angle A = 50^o$, $\angle B = 70^o$, $\angle C = 60^o$, $\angle P = 50^o$, $\angle Q = 60^o$ અને $\angle R = 70^o$

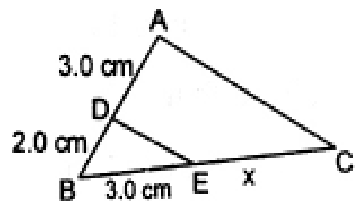
   (iii) AB = 2.5 સેમી, BC = 4.5 સેમી, CA = 3.5 સેમી
   PQ = 5.0 સેમી, QR = 9.0 સેમી, RP = 7.0 સેમી

   (iv) AB = 3 સેમી, QR = 7.5 સેમી, RP = 5.0 સેમી
   PQ = 4.5 સેમી, QR = 7.5 સેમી, RP = 6.0 સેમી.

4. આકૃતિ ૧૪.૩૫ માં , AD = 3 સેમી, AE = 4.5 સેમી, DB = 4.0 સેમી, CE શોધ, આપેલા છે કે DE || BC.



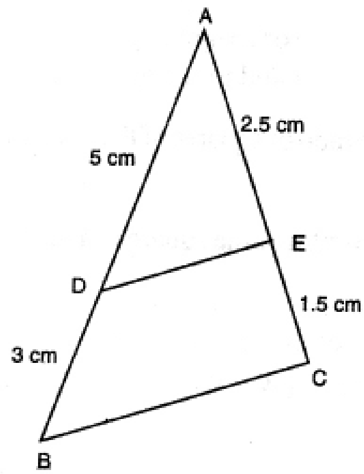
આકૃતિ. 14.35



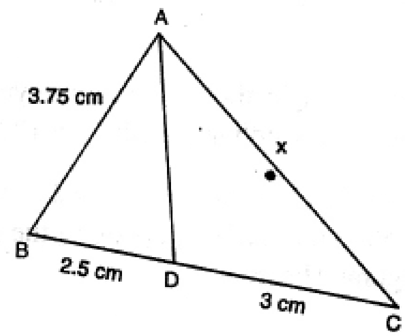
આકૃતિ. 14.36

5. આકૃતિ 14.36 માં DE || AC આકૃતિમાં આપેલ પરિણામમાંથી x ની કિંમત શોધો.

6. આકૃતિ 14.37 માં, ΔABC દર્શાવેલ છે જેમાં AD = 5 સેમી, DB = 3 સેમી, AE = 2.50 સેમી અને EC = 1.5 સેમી. DE || BC છે ? તમારા માટે કારણો આપો.



આકૃતિ. 14.37



આકૃતિ. 14.38

7. આકૃતિ 14.38માં, AD એ ΔABC ના $\angle A$ નો અંતઃદ્વિભાજક છે. આપેલ પરિણામમાંથી x શોધો.

8. બે સમરૂપ ત્રિકોણો ABC અને ΔEF ની પરિમિતિ 12 અને 18 સેમી છે, તો DABC ના ક્ષેત્રફળનો ΔDEF ના ક્ષેત્રફળ સાથેનો ગુણોત્તર શોધો.

9. બે સમરૂપ ત્રિકોણો ABC અને PQR ના વેધ AD અને PS 2.5 સેમી અને 3.5 સેમી લંબાઈના છે, તો -ΔABC ના ક્ષેત્રફળનો ΔPQR ના ક્ષેત્રફળ સાથેનો ગુણોત્તર શોધો.

10. નીચેના પૈકી કયા કાટકોણ ત્રિકોણ છે ?

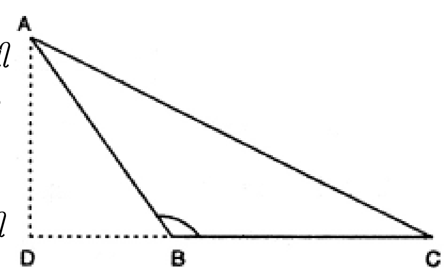
(i) AB = 5 સેમી, BC = 12 સેમી, CA = 13 સેમી

(ii) AB = 8 સેમી, BC = 6 સેમી, CA = 10 સેમી

(iii) AB = 10 સેમી, BC = 5 સેમી, CA = 6 સેમી

(iv) AB = 25 સેમી, BC = 24 સેમી, 7 = 13 સેમી

(v) AB = $a^2 + b^2$, BC = 2ab, CA = $a^2 - b^2$



આકૃતિ. 14.39

11. 2a બાજુવાળા સમબાજુ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

12. 12 મી અને 17 મી ઉંચાઈના બે સમતલ જમીન પર ઉભા છે અને તેમનાં તળિયાં વચ્ચેનું અંતર 12 મી છે. તમની ટોચ વચ્ચેનું અંતર શોધો.

13. આકૃતિ 14.39 માં દર્શાવો કે

$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2\ BC.\ CD$

14. એક સીડી દીવાલને અડીને મૂકી છે અને તેની ટોચ જમીનથી 8 ઉંચાઈએ પહોંચે છે. જો દીવાલ અને સીડીના તળિયા વચ્ચેનું અંતર 6 મી હોય, તો સીડીની લંબાઈ શોધો.

15. સમબાજુ ત્રિકોણમાં, દર્શાવો કે બાજુના વર્ગના ત્રણ ગણા મધ્યગાના વર્ગના ચાર ગણા બરાબર છે.

ઉત્તરો

14.1

1. (i) 6 (ii) 6 (iii) 10 સેમી

2. (i) ના (ii) હા (iii) હા

14.2

1. 7.5 સેમી 2. 4 સેમી

3. $\frac{yz}{x}$ ($x = -1$ શક્ય નથી.)

14.3

1. (i) $x = 4.5, y = 3.5$ (ii) $x = 70, y = 50$ (iii) $x = 2$ cm, $y = 7$ સેમી

14.4

2. 9 : 25 3. 1 : 8 5. 16 : 81 6. 4 : 5

14.5

1. (i) હા (ii) ના (iii) ના (iv) હા

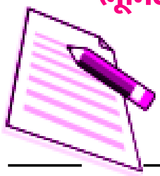
2. 13 મી 3. $10\sqrt{2}$ સેમી 8. 5 મી

સત્રાંત સ્વાધ્યાય

3. (i) અને (iii) 4. 6 સેમી 5. 4.5 સેમી 6. હા : $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

7. 4.5 સેમી 8. 4 : 9 9. 25 : 49 10. (i), (ii), (iv) અને (v)

11. $\sqrt{3}\,a^2$ 12. 13 મી 14. 10 મી



15

વર્તુળો

તમે ભૌમિતિક આકૃતિઓ જેવી કે રેખાખંડ , ખૂણો , ત્રિકોણ , ચતુષ્કોણ અને વર્તુળ પરિચિત છો. ચક્ર બંગડી , અક્ષર 0 વગેરે વર્તુળના ઉદાહરણો છે, આ પ્રકરણમાં આપણે વર્તુળ અને તે સંબંધિત સંકલ્પનાઓ વિશે અભ્યાસ કરીશું.

હેતુઓ

આ પાઠ શીખ્યા પછી, અધ્યેતા :

- વર્તુળની વ્યાખ્યા કરી શકશે.
- વર્તુળ સંબંધિત વિવિધ પદોનાં ઉદાહરણો આપી શકાશે.
- એકરૂપ વર્તુળ અને સમકેન્દ્રીય વર્તુળને દર્શાવી શકાશે.
- વર્તુળ સબંધિત પદો જેવાં કે જીવા, ચાપ, વૃત્તાંશ, વૃત્તખંડ વગેરે ઓળખવાં અને દર્શાવવાં .
- વર્તુળનું ચાપ પદો અને જીવાઓ આધારિત પરિણામોને પ્રાયોગિક રીતે ચકાસી શકશે.
- કૂટપ્રશ્નો ઉકેલવામાં પરિણામોનો ઉપયોગ કરી શકશે.

અપેક્ષિત પૂર્વજ્ઞાન

રેખાખંડ અને તેની લંબાઈ

ખૂણો અને તેનું માપ

સમાંતર અને લંબ રેખાઓ .

બંધ આકૃતિઓ જેવી કે ત્રિકોણ, ચતુષ્કોણ, બહુકોણ વગેરે

બંધ આકૃતિની પરિમિતી

બંધ આકૃતિથી ઘેરાયેલ પ્રદેશ

બંધ આકૃતિઓની એકરૂપતા

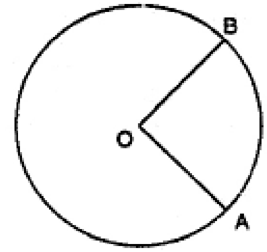
15.4 વર્તુળ અને સંબંધિત પદો

15.4.1 વર્તુળ

વર્તુળ એ સમતલમાં એવા તમામ બિંદુઓનો સમૂહ છે જે તે જ સમતલમાં નિયત બિંદુંથી ચોક્કસ અંતરે હોય છે.

ત્રિજ્યા : *વર્તુળના કેન્દ્રને વર્તુળ પરના કોઈ બિંદું સાથે જોડતા રંખાખંડને તેની ત્રિજ્યા કહે છે.*

આકૃતિ 15.1*માં* 0 *કેન્દ્રવાળું વર્તુળ છે અને તેની એક ત્રિજ્યા* OA *છે* OB *એ તે જ વર્તુળની અન્ય ત્રિજ્યા છે.*



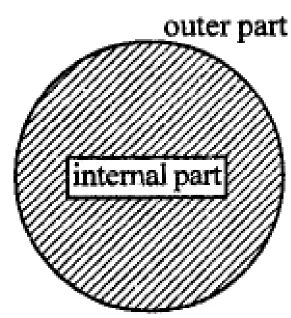
આકૃતિ. 15.1

તમારા માટે : OA *અને* OB *લંબાઈ માપો અને જુઓ કે સમાન છે. આમ*

વર્તુળની તમામ ત્રિજ્યાઓ સમાન હોય છે.

વર્તુળની ત્રિજ્યાની લંબાઈ સામાન્ય રીતે અક્ષર r *વડે દર્શાવાય છે. ત્રિજ્યાની લંબાઈને બદલે ત્રિજ્યા લખવાનું પ્રચલિત છે.*

સમતલમાંની બંધ ભૌમિતિક આકૃતિ સમતલને ત્રણ ભાગમાં વિભાગે છે જેમ કે આકૃતિનો અંદરનો ભાગ આકૃતિ અને આકૃતિનો બહારનો ભાગ, આકૃતિ 15.2 *છાયાંકિત ભાગ, વર્તુળનો અંદરનો ભાગ છે. પરિસીમા વર્તુળ છે અને છાયા વગેરેનો ભાગ વર્તુળનો બહારનો ભાગ છે.*

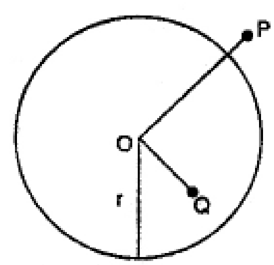


આકૃતિ. 15.2

તમારા માટે પ્રવૃત્તિ

(a) *વર્તુળના અંદરના ભાગમાં બિંદું* Q *લો (જુઓ આકૃતિ* 15.3*)* OQ *માપો અને જાણો કે* OQ< r . *વર્તુળનો અંદરના ભાગને વર્તુળનો બાહ્ય અંતઃ ભાગ કહેવાય છે.*

(b) *હવે વર્તુળના બહારના ભાગમાં બિંદુ* P *લો (જુઓ આકૃતિ* 15.3*)* OP *માપો અને જાણો* OQ > r . *વર્તુળનો અંદરના ભાગને વર્તુળનો બાહ્ય ભાગ કહે છે.*



આકૃતિ. 15.3

15.4.2 જીવા

વર્તુળના કોઈ બે બિંદુઓનો જોડતા રેખાખંડને જીવા કહે છે આકૃતિ 15.4*માં કેન્દ્ર* O *અને ત્રિજ્યા* r *હોય તેવા વર્તુળની ત્રણ જીવાઓ* AB *અને* PQ *અને* CD *છે જીવા* PQ *વરેતુળના કેન્દ્ર* O *માંથી પસાર થાય છે. આવી જીવાને વર્તુળનો વ્યાસ કહે છે. વ્યાસ સામાન્ય રીતે* d *દ્વારા દર્શાવાય છે.*

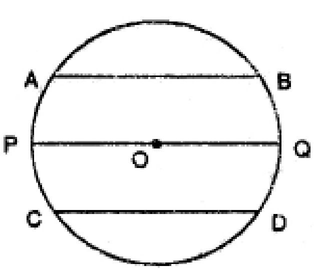
વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી જીવાને વ્યાસ કહે છે.

તમારા માટે પ્રવૃત્તિ :

PQ, *ની લંબાઈ* d *ત્રિજ્યા* r *માપો અને શોધી કાઢો કે* d,2r *બરાબર છે. આમ*

$$d = 2r$$

અર્થાત્ વર્તુળનો વ્યાસ = વર્તુળની બમણી ત્રિજ્યા



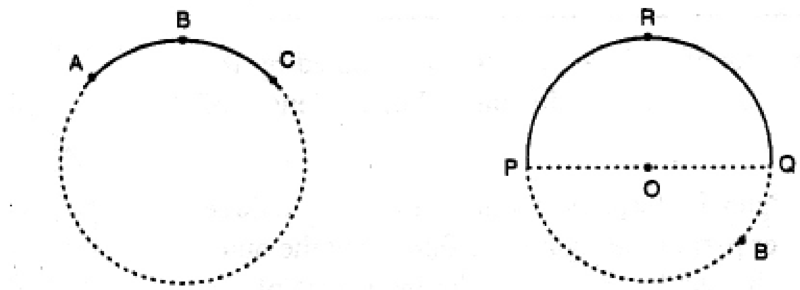
આકૃતિ. 15.4

PQ, AB અને CD ની લંબાઈ માપો અને શોધી કાઢો કે PQ > AB અને PQ > CD,

વ્યાસ એ વર્તુળની સૌથી લાંબી જીવા છે.

15.4.3 ચાપ

વર્તુળના ભાગને ચાપ કહે છે . આકૃતિ 15.5 (A) માં ABC એક ચાપ છે અને તે ચાપ ABC અથવા $\widehat{ABC}$ વડે દર્શાવાય છે.



(A) (B)

આકૃતિ . 15.5

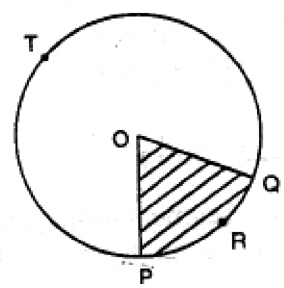
15.1.4 અર્ધવૃત્ત

વર્તુળનો વ્યાસ બે સરખા ચાપમાં વિભાગે છે જે પૈકી દરેક અર્ધવૃત્ત કહેવાય છે આકૃતિ 15.5 (b) માં PQ વ્યાસ છે અને PRQ અર્ધવૃત્ત છે અને PBQ પણ અર્ધવૃત્ત છે.

15.1.5 વૃત્તાંશ

વર્તુળના એક ચાપ અને તેના અંત્ય બિંદુઓએ બે ત્રિજ્યાઓથી ઘેરાયેલા પ્રદેશને વૃત્તાંશ કહે છે.

આકૃતિ 15.6માં છયાંકિત ભાગ એ PRQ ચાપ વડે રચાયેલ વૃત્તાંશ છે અને છાયા વગરનો ભાગ એ PTQ ચાપ વડે રચાયેલ વૃત્તાંશ છે.



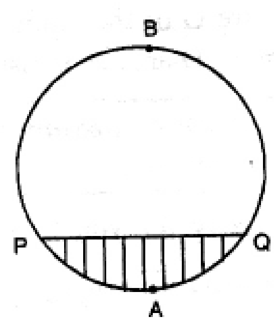
આકૃતિ. 15.6

15.1.6 વૃત્તખંડ

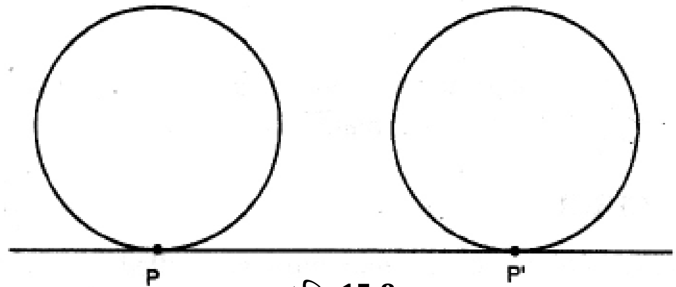
જીવા વર્તુળના અંદરના ભાગને બે ભાજુમાં વિભાગે છે, જે દરેક વૃત્તખંડ કહેવાય છે. આકૃત્તિ 15.7 માં છાયાકિત પ્રદેશ PAQP અને છાયા વગરનો પ્રદેશ PBQP બંને વૃત્તખંડો છે PAQP એ લઘુવૃત્તખંડ અને PBQP ગુરુવૃત્તખંડ કહેવાય છે.

15.1.7 પરિઘ

વર્તુળ પર એક બિંદુ P પસંદ કરો જો આ બિંદુ વર્તુળ સાથે એક વખત ગતિ કરે અને પોતાની મૂળ સ્થિતિએ પાછું આવે તો P વડે આવરી લેવાયેલ અંતર વર્તુળનો પરિઘ કહેવાય છે.



આકૃતિ. 15.7



આકૃતિ. 15.8

તમારે માટે પ્રવૃત્તિ :

એક ચક્ર લો અને જ્યાં તે જમીનને અડે તેની પર .. બિંદુ અંકિત કરો તેના પર ચક્રને એવી રીતે ફેરવો કે બિદું .. ફરીથી જમીન પર આવે. રેખા પર .. ની પ્રથમ સ્થિતિ અને અંતિમ સ્થિતિ વચ્ચેનું અંતર માપો . આ અંતર વર્તુળના પરિઘ જેટલું છે આમ,

વર્તુળની પરિસીમાની લંબાઈ એ વર્તુળનો પરિઘ છે.

તમારે માટે પ્રવૃત્તિ

જુદા જુદા વર્તુળો લઈ તમેના પરિઘ અને વ્યાસ માપો. અવલોકન કરો કે દરેક કિસ્સામાં પરિઘ અને વ્યાસનો ગુણોત્તર તેનો તે જ રહે છે.

વર્તુળના પરિઘ છે , તેનો વ્યાસ સાથેનો ગુણોત્તર હંમેશા અચળ હોય છે આ અચળ ગ્રીક અક્ષર π વડે સાર્વત્રિક રીતે દર્શાવાય છે.

$$\frac{c}{d} = \frac{c}{2r} = \pi \qquad \frac{22}{7}$$

તેથી , જ્યાં c *વર્તુળનો પરિઘ છે,* d *તેનો વ્યાસ છે અને* r *તેની ત્રિજ્યા છે.*

π ની લગભગ કિંમત . છે આર્યભટ્ટ 1 *(ઈ.સ.* 476*) પ્રખ્યાત ભારતીય ગણિતશાસ્ત્રીયએ π ની બહુ બરાબર કિંમત આપી, જે છે* 3.1416 *ખરેખર તો, આ સંખ્યા એ અસંમેય સંખ્યા છે.*

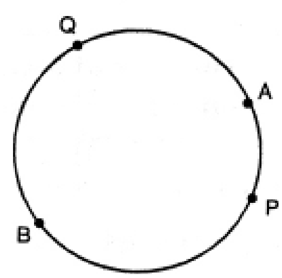
15.2 વર્તુળના ચાપનું માપન

વર્તુળનું ચાપ .. વિચારો (આકૃતિ 15.9*) તેની લંબાઈ માપવા માટે .. ફરતે આપણે એક દોરી મૂકીએઅને પછી દોરીની લંબાઈ માપપટ્ટી વડે માપીએ.*

આકૃતિ. 15.6

15.2.1 લઘુ ચાપ

વર્તુળનો ચાપ જેની લંબાઈ તે જ વર્તુળના અર્ધવૃત્ત કરતાં ઓછી હોય તેને લઘુચાપ કહે છે PAQ *ની લંબાઈ છે. (જુઓ આકૃતિ* 15.9*)*



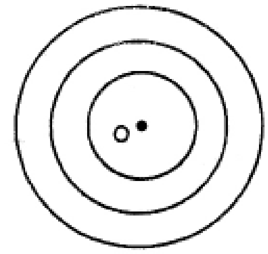
આકૃતિ. 15.9

15.2.2 ગુરુચાપ

વર્તુળનું ચાપ જેની લંબાઈ તે જ વર્તુળના અર્ધવર્તુળ કરતાં મોટી હોય તેને ગુરુ ટાપ કહે છે આકૃત્તિ 18..9 *માં ચાપ* PBQ *ગુરુ ચાપ છે.*

15.3 સમકેન્દ્રીય વર્તુળો

એક જ કેન્દ્ર પણ જુદી જુદી ત્રિજ્યાઓ ધરાવતાં વર્તુળો સમકેન્દ્રીય વર્તુળો કહેવાય છે. (આકૃતિ. 15.10).



આકૃતિ. 15.10

15.4 એક રૂપ વર્તુળો કે ચાપ

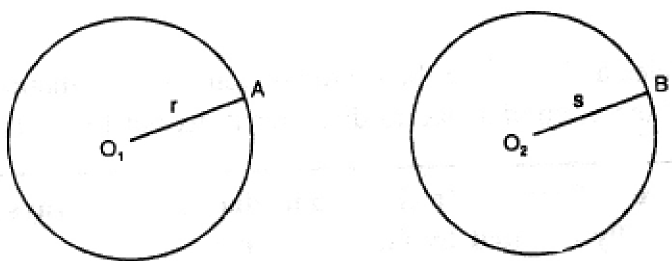
જો , આપણે બે વર્તુળો (કે ચાપ) એકને બીજા પર બંધબેસતા મૂકી શકીએ,

જેથી તેઓ એક બીજાને સંપૂર્ણ રીતે આવરી લઈ શકે તે તેઓ એકરૂપ કહેવાય છે.

15.5 કેટલાક અગત્યના નિયમો

તમારા માટે પ્રવૃત્તિ :

(i) O_1 *અને* O_2 *કેન્દ્ર તેમજ ત્રિજ્યાઓ અનુક્રમે* r *અને* s *હોય તેવા બે વર્તુળઓ દોરો. (જુઓ આકૃતિ* 15.11*)*

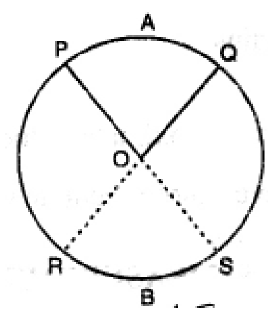


આકૃતિ . 15.11

(ii) *વર્તુળ* (i) *ને વર્તુળ* (ii) *પર એવી રીતે ગોઠવો જેથી* O_1, O_2.

(iii) *આપણે જોઈશું કે* S *વર્તુળ* (i) *વર્તુળ* (ii) *બે વર્તુળો આવરી લેશો .*

ત્રિજ્યા ધરાવે તો અને તો જ તેઓ એકરૂપ વર્તુળો છે.



આકૃતિ. 15.12

આકૃતિ 15.12 *માં જો ચાપ* PAQ = *ચાપ* RBS *તો* ∠POQ= ∠ROS *અને પ્રતીપ રીતે જો* ∠POQ = ∠ROS *તો*

ચાપ PAQ =*ચાપ* RBS.

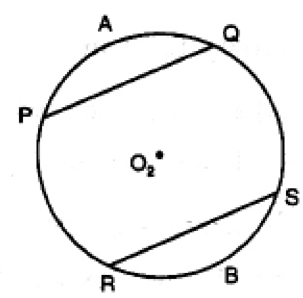
વર્તુળનાં બે ચાપ એકરૂપ હોય, તો અને તો જ તેઓ કેન્દ્ર આગળ *સમાન ખૂણો રચે છે.*

આકૃતિ 15.13, *માં, જો ચાપ* PAQ = arc RBS

તો PQ = RS

અને પ્રતીપ જો PQ = RS

તો ચાપ PAQ = *ચાપ* RBS.



આકૃતિ. 15.13

વર્તુળનાં બે ચાપ એકરૂપ હોય તો અને તો જ અનુરૂપ જીવઓ સમાન હોય.

તમારે માટે પ્રવૃત્તિઃ

(i) O કેન્દ્રવાળું વર્તુળ દોરો.

(ii) સમાન જીવાઓ PQ અને RS દોરો (જુઓ આકૃતિ. 15.14)

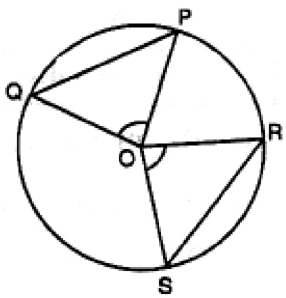
(iii) OP, OQ, OR અને OS જોડો

(iv) Measure $\angle$ POQ અને $\angle$ ROS માપો

આપણે જોઈશું કે $\angle POQ = \angle ROS$

પ્રતીપ રીતે જો, $\angle POQ = \angle ROS$

તો PQ = RS



આકૃતિ. 15.14

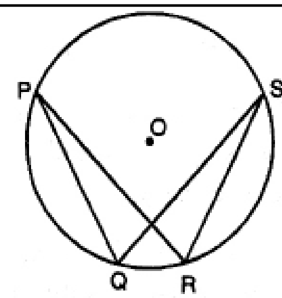
વર્તુળની સમાન જીવઓ કેન્દ્ર પર સમાન ખૂણા રચે છે અને પ્રતીપ રીતે, જો વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ જીવાઓ વડે રચાયેલ ખૂણા સમાન હોય, તો જીવાઓ સમાન હોય છે.

નોંધ : ઉપરના પરિણામો એકરૂપ વર્તુળોના કિસ્સામાં પણ લાગુ પડે છે.

ઉપરના ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરતા કેટલાક ઉદાહરણો લઈએ.

ઉદાહરણ 15.1 : આકૃતિ 15.15માં જીવા PQ = જીવા RS દર્શાવો કે જીવા PQR જીવા

∴



આકૃતિ. 15.15

ઉકેલ : સમાન જીવાઓ PQ અને RS અનુરૂપ ચાપ સમાન હોય છે.

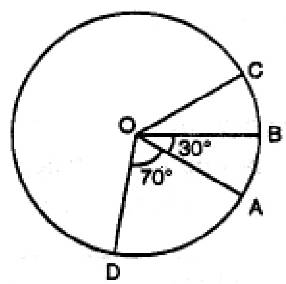
દરેક ચાપમાં ચાપ OR ઉમેરો.

મળતા ચાપ PQR = ચાપ QRS

જીવા PR = જીવા QS

ઉદાહરણ : 15.2 આકૃતિ 15.16માં ચાપ AB = ચાપ BC

$\angle AOB = 30^o$ અને $\angle AOD = 70^o$. $\angle$ COD શોધો.



આકૃતિ. 15.16

ઉકેલ : ચાપ AB = ચાપc BC

$\angle AOB = \angle BOC$

(સમાન ચાપ કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણા રચે છે)

$\angle BOC = 30^o$

હવે $\angle COD = \angle COB + \angle BOA + \angle AOD$

$= 30^o + 30^o + 70^o$

$= 130^o$.

તમારે માટે પ્રવૃત્તિ :

(i) O કેન્દ્રવાળું વર્તુળ દોરો (જુઓ આકૃતિ 15.17)

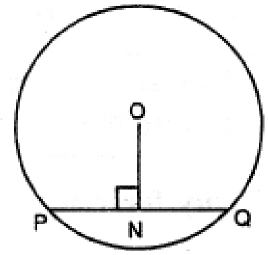
(ii) જીવા PQ દોરો.

(iii) O માંથી ONPQ દોરો

(iv) PN અને NQ માપો.

તમે જોશો કે

PN = NQ.



આકૃતિ. 15.17

વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી જીવાને દોરેલ લંબ જીવાને દ્વિભાગે છે.

તમારે માટે પ્રવૃત્તિ :

(i) O કેન્દ્રવાળું વર્તુળ દોરો (જુઓ આકૃતિ 15.18)

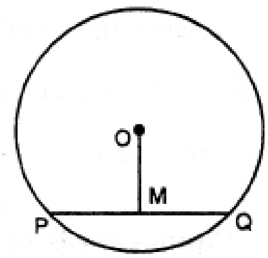
(ii) જીવા PQ દોરો.

(iii) PQ નું મધ્યબિંદુ M શોધો.

(iv) Q અને M જોડો.

(v) કાટખૂણિયા કે કોણમાપક વડે $\angle OMP$ અથવા $\angle OMQ$ માપો.

આપણે જોઈશું કે $\angle OMP = \angle OMQ = 90^0$.



આકૃતિ. 15.18

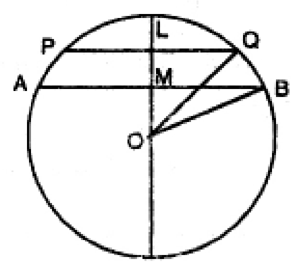
વર્તુળના કેન્દ્રને અને જીવાના મધ્યબિંદુને જોડતી રેખા જીવાને લંબ હોય છે.

તમારા માટે પ્રવૃત્તિ :

ત્રણ અસમરેખ બિંદુઓ A,B અને C લો AB અને BC

જોડો AB અને BC બે લંબદ્વિભાજકો અનુક્રમે MN અને RS દોરો.

A,B,C સમરેખ ન હોઈ MN, RS ને સમાંતર નથી તેઓ માત્ર એક બિંદુ O આગળ એકબીજાને છેદશે OA , OB અને OC જોડો અને તેમને આપો.



આકૃતિ. 15.19

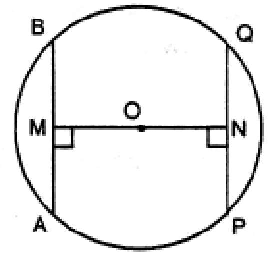
હવે O કેન્દ્ર તરીકે લઈ અને OA ત્રિજ્યા તરીકે, એક વર્તુળ દોરો, જે A,B અને C માંથી પસાર થાય છે ઉપરની વિધિ અન્ય ત્રણ સમરેખ બિંદુઓ લઈ ફરી કરો અને જુઓ કે આપેલ ત્રણ અસમરેખ બિંદુઓમાંથી પસાર થતું વર્તુળ દોરવાની પદ્ધતિ આપે છે.

વર્તુળના કેન્દ્રને અને જીવાના માધ્યબિંદુને જોડતી રેખા જીવાને હોય છે.

નોંધ : એ નોંધવું અગત્યનું છે કે ત્રણ સમરેખ બિંદુઓમાંથી

પસાર થતું વર્તુળ દોરી ન શકાય

તમારા માટે પ્રવૃત્તિ :



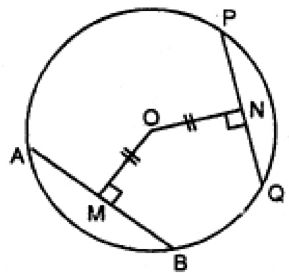
આકૃતિ. 15.20a

(i) O કેન્દ્રવાળું વર્તુળ દોરો (જુઓ આકૃતિ 15.20)

(ii) વર્તુળની બે સમાન જીવાઓ AB અને PQ દોરો.

(iii) OM ⊥ AC અને ON ⊥ PQ દોરો.

(iv) OM અને ON માપો અને જુઓ કે તે સમાન છે.



આકૃતિ. 15.20

વર્તુળની સમાન જીવાઓ કેન્દ્રથી સમાન અંતરે હોય છે.

આકૃતિ 15.20B , OM = ON

માપીને જુઓ કે AB = PQ. આમ

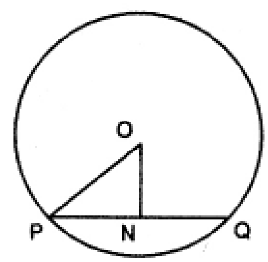
કેન્દ્રથી સમાન અંતરે હોય તે જીવઓ સમાન હોય છે.

ઉપરનાં પરિણામો એકરૂપ વર્તુળો કિસ્સામાં પણ લાગુ પડે છે.

વર્તુળોના આ ગુણદર્મોના ઉપયોગ કરતાં કેટલાક ઉદાહરણો લઈએ.

ઉદાહરણ15.3 : આકૃતિ. 15.21,O વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી અને ON PQ જો PQ = 8 સેમી અને ON = 3 સેમી OP શોધો.

ઉકેલ : ON PQ (આપેલ છે) એ વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી જીવાને દોરેલ લંબ જીવાને દ્વિભાગે છે.



આકૃતિ. 15.21

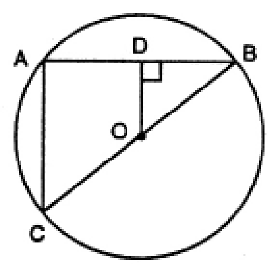
PN = NQ = 4 cm

કાટકોણ ત્રિકોણ OPN માં,

$$OP^2 = PN^2 + ON^2$$

$$OP^2 = 4^2 + 3^2 = 25$$

OP = 5 સેમી.



આકૃતિ. 15.22

ઉદાહરણ 15.4 : આકૃતિ 15.22માં .. એ વર્તુળની જીવા .. નં લંબ છે, જેનુ કેન્દ્ર .. છે અને .. વ્યાસ છે.

સાબિત કરો કે CA = 2OD.

ઉકેલ : OD AB (આપેલ છે.)

D A,Bનું મધ્યબિંદુ છે. (કેન્દ્રમાંથી લંબ જીવાને દ્વિભાગે છે.)

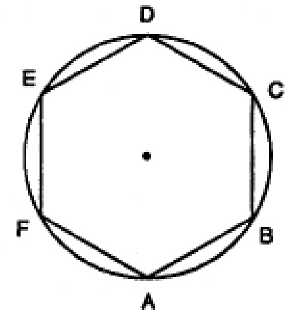
વળી O, CB નું મધ્યબિંદુ છે (કારણ કે CB વ્યાસ છે.)

હવે ABC માં O અને D એ ત્રિકોણ ABC ની બે બાજુઓ BC અને AB ના 1

OD = CA

અર્થાત CA = 2OD.

ઉદાહરણ 15.5 : *એક વર્તુળમાં અંતર્ગત નિયમિત ષટકોણ દોરેલ છે. ષટ્કોણની દરેક બાજુ કેન્દ્ર આગળ કયો ખૂણો આંતર છે ?*



આકૃતિ . 15.23

ઉકેલ : *નિયમિત ષટકોણને છ બાજુઓ સમાન છે. તેતી દરેક બાજુ કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણો રચે છે ધારો કે ષટકોણની બાજુ કેન્દ્ર આગળ* x^{o} *ખૂણો અંતરે છે.*

તો આપણેને મળે

$$6x^{\circ} = 360^{\circ} \Rightarrow x = 60^{\circ}$$

તેથી ષટ્કોણની દરેક બાજુ કેન્દ્ર આગળ 60° *નો ખૂણો રચે છે.*

ઉદાહરણ 15.6 : *આકૃતિ 15.24માં વર્તુળની બે સમાંતર જીવાઓ PQ અને AB અનુક્રમે 7 સેમી અને 13 સેમી લંબાઈની છે જો PQ અને AB વચ્ચેનું અંતર 3 સેમી હોય, તો વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો.*

ઉકેલ : *ધારો કે વર્તુળનું કેન્દ્ર O છે.PQ નો લંબદ્વિભાજક OL દોરો, જે AB ને પણ M આગળ દ્વિભાગે છે. OQ અને OB જોડો*

(આકૃતિ 15.24)

ધારોકે OM = x *અને વર્તુળની ત્રિજ્યા* r *સેમી છે.*

તો $OB^2 = OM^2 + MB^2$ *અને* $OQ^2 = OL^2 + LQ^2$

...(i)

અને $$r^2 = (x+3)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 \qquad \text{...(ii)}$$

તેથી (i) *અને*(ii), *માં*

$$x^2 + \left(\frac{13}{2}\right)^2 = (x+3)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

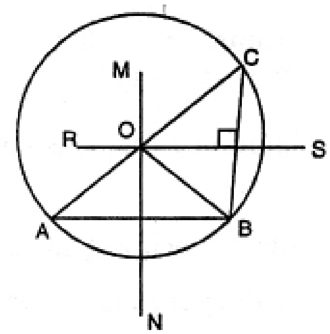
$\therefore$

or 6x = 21

$\therefore$

$\therefore$

$\therefore$

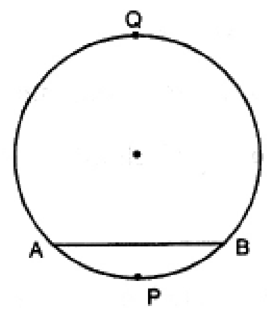


તેથી, વર્તુળની ત્રિજ્યા $r = \frac{\sqrt{218}}{2}$ સેમી છે.

આકૃતિ. 15.24

તમારી પ્રગતિ 15.1

પ્રશ્નો 1 થી 5માં નીચેના પૈકી દરેક વિધાનને સાચું બનાવવા ખાલી જગ્યા પૂરો .



આકૃતિ. 15.25

1. આકૃતિ 18.25માં

   (i) AB વર્તુળની .... છે

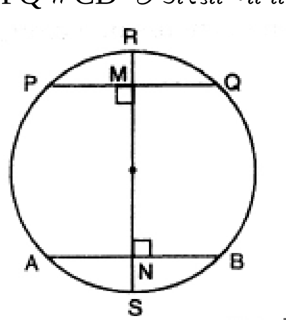
   (ii) AB ને અનુરૂપ લઘુચાપ ...... છે.

$\left(\text{Take } \pi = \frac{22}{7}\right)$

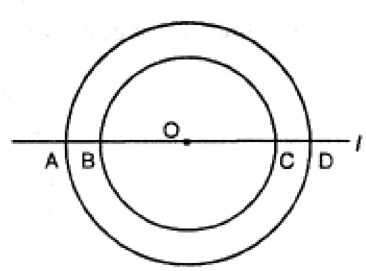
2. ......વર્તુળની સૌથી લાંબી જીવા છે.
3. વર્તુળના પરિઘનો વ્યાસ સાથેનો ગુણોત્તર હમંશા .... હોય છે.
4. π ની કિંમત 3.1416 તરીકે આપનાર મહાન ભારતીય ગણિત શાસ્ત્રી .... હતા.
5. એક જ કેન્દ્ર ધરાવતાં વર્તુળ .... કહેવાય છે.
6. વર્તુળની ત્રિજ્યા નીચે પ્રમાણે હોય, તેનો પરિઘ શોધો.
7. જે વર્તુળની ત્રિજ્યા નીચે પ્રમાણે હોય,તેનો પરિઘ શોધો.

   (i) 7 cm (ii) 11 cm.

8. આકૃતિ 15.26માં RS વ્યાસ છે જે PQ અને AB જીવાઓને બિદુઓ અનુક્રમે M અને N માં દ્વિભાગે છે. શું PQ // CD છે કારણો આપો.



આકૃતિ. 15.26



આકૃતિ. 15.27

9. *આકૃતિ* 15.27*માં રેખા l,O કેન્દ્રવાળા બે સમકેન્દ્રીય વર્તુળોને* A, B, C *અને* D *બિંદુઓમાં છેદે છે શું* AB = CD *છે ? કારણો આપો.*

સારાંશ :

- *ત્રિજ્યા .. વાળા વર્તુળનો પરિઘ r બરાબર છે*
- *તો અને તોજ બંને ચાપ એકરૂપ હોય છે કેન્દ્ર આગળ આંતરેલા ખૂણા સમાન હોય અથવા તેમની અનુરૂપ જીવાઓ સમાન હોય છે.*
- *વર્તુળની સમાન જીવાઓ કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણા આંતરે છે અને તેનું પ્રતીપ.*
- *વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી જીવા પર દોરેલ લંબ જીવોને દ્વિભાગે છે.*
- *વર્તુળના કેન્દ્રને જીવાના મધ્યમબિંદુ સાથે રેખા જીવાને લંબ હોય છે.*
- *ત્રણ અસમરેખ બિદુંઓમાંથી પસાર થતું એક અને માત્ર એક વર્તુળ હોય છે.*
- *વર્તુળની સમાન જીવાઓ કેન્દ્રની સમાન અંતરે હોય છે અને તેનું પ્રતીપ.*

સ્વાધ્યાય

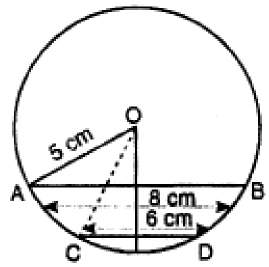
1. *જો વર્તુળની જીવાની લંબાઈ* 16 *સેમી હોય અને જીવાનું કેન્દ્રીય અંતર* 6 *સેમી હોય, તો વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો.*

2. *કેન્દ્ર* 0 *અને* 0 *વાળા વર્તુળો (જુઓ આકૃતિ* 15.28*) એકરૂપ તો ચાપ* CD *ની લંબાઈ શોધો.*

આકૃતિ. 15.28

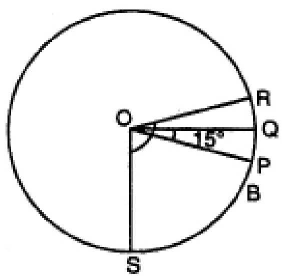
3. *વર્તુળમાં અંતર્ગત નિયમિત પંચકોણ દોરવામાં આવેલ છે. પંચકોણની દરેક બાજુ કેન્દ્ર આગળ જે ખૂણો આંતરે છે તે શોધો.*

4. *આકૃતિ.* 15.29, AB = 8*સેમી અને* CD = 6 *સેમી એ કેન્દ્ર* 0 *વાળા વર્તુળની બે સમાંતર જીવાઓ છે તો જીવાઓ વચ્ચેનું અંતર શોધો,*



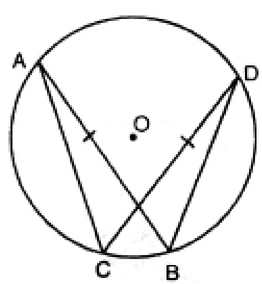
આકૃતિ. 15.29

5. *આકૃતિ.*15.30 *માં* PQ = *ચાપ* QR, $\angle POQ = 15^0$ *અને* $\angle SOR = 110^o$. $\angle SOP$. *શોધો.*



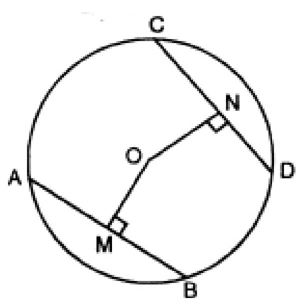
આકૃતિ. 15.30

6. *આકૃતિ.* 15.31, AB *અન* CD,*અને* O *કેન્દ્રવાળા વર્તુળની બે સમાન જીવાઓ છે. શું જીવા* BD = *જીવા* CA *છે? કારણો આપો.*



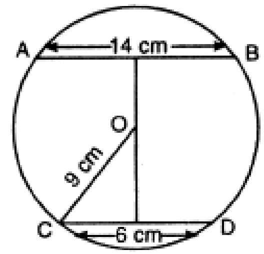
આકૃતિ. 15.31

7. AB *અને* CD, O *કેન્દ્રવાળા વર્તુળની બે સમાન જીવાઓ છે (આકૃતિ* 15.32*) અને* $OM \perp AB$, $ON \perp CD$. OM = ON *છે? કારણો આપો.*



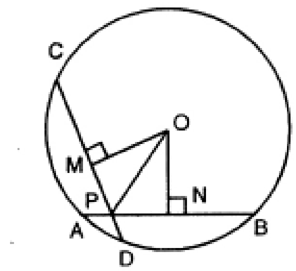
આકૃતિ. 15.32

8. *આકૃતિ* 15.33, AB = 14 *સેમી અને* CD = 6 *સેમી* o *કેન્દ્રવાળા વર્તુળની બે સમાંતર જીવાઓ છે . તો* AB *અને* CD *જીવાઓ વચ્ચેનું અંતર શોધો.*



આકૃતિ. 15.33

9. *આકૃતિ.* 15.34, AB *અને* CD, O, *કેન્દ્રવાળા વર્તુળની બે જીવઓ છે, જે વર્તુળમાંના બિંદુ* P *આગળ એકબીજાને છેદે છે.*

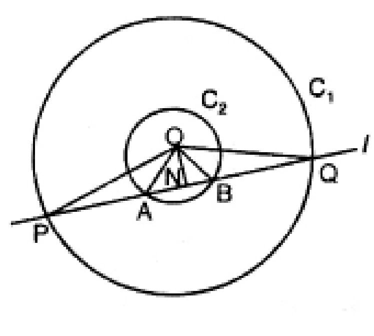


આકૃતિ. 15.34

OM $\perp$ CD, ON   AB *અને*   OPM =   OPN. Now answer:

(i) OM = ON, (ii) AB = CD ? *કારણો આપો.*

10. C_1 *અને* C_2 ,O *કેન્દ્રવાળાં બે સમકેન્દ્રીય વર્તુળો છે. (જુઓ આકૃતિ* 15.35), l *એક એવી રેખા છે, જે* C_1 *અને* P *અને* Q *અને* C_2 *ને* A *અને* B *બિંદુઓમાં અનુક્રમે છેદે છે જો* , ON $\perp l$, *તો* PA = BQ *થાય* ? *કારણો આપો.*



આકૃતિ. 15.35

ઉત્તરો

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 15.1

1. (i) જીવા (ii) APB 2. વ્યાસ 3. અચળ
4. યાર્યભટ્ટ -I 5. સમકેન્દ્રીય 6. 5 સેમી
7. (i) 44 સેમી (ii) 69.14 સેમી 8. હા 9. હા

સત્રાંત સ્વાધ્યાય

1. 10 સેમી 2. 2a સેમી 3. 72^o
4. 1 સેમી 5. 80^o
6. હા (સમાન ચાપ વર્તુળની અનુરૂપ સમાન જીવાઓ ધરાવે છે)
7. હા (સમાન જીવાઓ વર્તુળના કેન્દ્રથી સમાન અંતરે હોય છે.)
8. $10\sqrt{2}$ સેમી 9. (i) હા (ii) હા (MP $\cong$ONP)
10. હા (N એ જીવા PQ અને AB નું મધ્યબિંદુ છે.)

$\sqrt{5}$

16

વર્તુળમાં ખૂણાઓ અને ચક્રીય ચતુષ્કોણ

પરિચય

તમે બે સુરેખાઓ વચ્ચેના ખૂણા માપ્યા હશે, હવે આપણે ચાપ અને જીવાઓ દ્વારા રચાતા વર્તુળમાં ખૂણાઓ અને ચક્રીય ચતુષ્કોણમાં ખૂણાઓ વિશે શીખીશું.

હેતુઓ

આ પાઠ શીખ્યા પછી, અધ્યેતા :

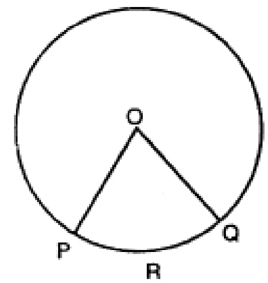
- *વર્તુળના કોઈ ચાપે કેન્દ્ર આગળ આંતરેલો ખૂણો, તેજ ચાપે વર્તુળના બાકીના ચાપ પરના કોઈ બિંદુએ આંતરેલા ખૂણા કરતાં બમણો હોય છે.*
- *ચક્રીય બિંદુઓનાં ઉદાહરણો આપી શકશે.*
- *ચક્રીય ચતુષ્કોણની વ્યાખ્યા આપી શકશે.*
- *ચક્રીય ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણાઓનો સરવાળો 180^0 હોય છે તે સાબિત કરી શકશે.*
- *ચક્રીય ચતુષ્કોણના ગુણધર્મો આપી શકશે.*
- *પ્રમેયો (સાબિત થયેલા) પર આધારિત કૂટપ્રશ્નો અને ચકાસેલ ગુણધર્મો પર આધારિત સાંખ્યિક કૂટપ્રશ્નો ઉકેલી શકશે.*
- *અન્ય પ્રમેયોના પરિણામોનો ઉપયોગ કરીને કૂટપ્રશ્નો ઉકેલી શકશો.*

અપેક્ષિત પૂર્વજ્ઞાન

- *ત્રિકોણના ખૂણાઓ*
- *વર્તુળનાં ચાપ, જીવા અને પરિઘ*
- *ચતુષ્કોણ અને તેના પ્રકારો*

16.1 વર્તુળમાંના ખૂણાઓ

કેન્દ્રીય કોણ : વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ ત્રિજ્યાઓ વડે ચાપ (કે જીવી)ના અંત્ય બિંદુઓએ રચાતા ખૂણાને કેન્દ્રીય કોણ અથવા કેન્દ્ર આગળ ચાપ (કે જીવા) એ આંતરેલો ખૂણો કહે છે.



આકૃતિ 16.1

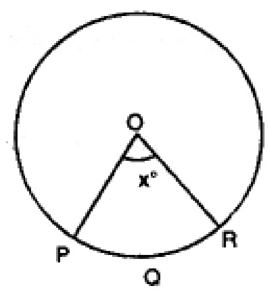
આકૃતિ 16.1 માં, ∠POQ એ ચાપ PRQ વડે રચાયેલ કેન્દ્રીય કોણ છે.

ચાપની લંબાઈ ચાપ દ્વારા દ્વારા આંતરેલ કેન્દ્રીય કોણ સાથે ગાઢ રીતે સંકળાયેલ છે. હવે આપણે ચાપના અંશ માપની કેન્દ્રીય ખૂણાના સ્વરૂપમાં વ્યાખ્યા કરીશું.

વર્તુળમાં લઘુચાપનું અંશ માપ એ અનુરૂપ કેન્દ્રીય કોણનું માપ છે.

આકૃતિ 16.2 માં PQR નું અંશ માપ = x^0

અર્ધવૃત્તનું અંશ માપ 180^0 હોય છે અને ગુરુચાપનું અંશ માપ 360^0 માંથી અનુરૂપ લઘુચાપનું અંશ માપ બાદ કરીએ તેટલું હોય છે.



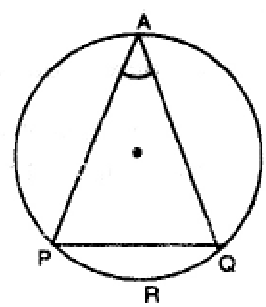
આકૃતિ 16.2

ચાપની લંબાઈ અને તેના અંશ માપ વચ્ચેનો સંબંધ

ચાપની લંબાઈ = પરિધ x ચાપનુ માપ / 360^0

જો ચાપનું અંશ માપ 40^0 હોય,

$$\text{તો PQR ચાપની લંબાઈ} = 2\pi r.\frac{40^o}{360^o} = \frac{2}{9}\pi r$$



અંતર્ગત કોણ : *ચાપ કે જીવા દ્વારા વર્તુળના બાકીના ભાગ પરના કોઈ બિંદુ આગળ આંતરેલ ખૂણો અંતર્ગત કોણ કહેવાય છે.*

આકૃતિ 16.3

આકૃતિ 16.3 માં ચાપ PRQ વડે અથવા જીવા PQ વડે, વર્તુળના બાકીના ભાગ પરના કોઈ બિંદુ A આગળ રચાતો ∠PAQ એ અંતર્ગત કોણ છે.

16.2 કેટલાક અગત્યના ગુણધર્મો

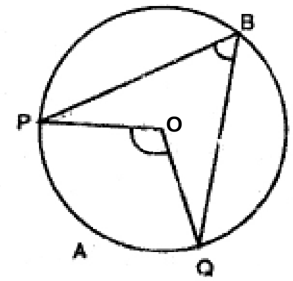
તમારે માટે પ્રવૃત્તિ :

O કેન્દ્રવાળું વર્તુળ દોરો. PAQ એક ચાપ હોય અને B વર્તુળ પરનું કોઈ બિંદુ હોય.

કેન્દ્રીય ખૂણો POQ અને વર્તુળના બાકીના ભાગ આગલના

ચાપ દ્વારા અંતર્ગત કોણ PBQ માપો આપણે જોઈશું કે

$\angle POQ = 2 \quad PBQ$



આકૃતિ 16.4

વિવિધ વર્તુળો અને વિવિધ ચાપ લઈ આ પ્રવૃતિ ફરીથી કરો. આપણે જોઈશું કે

વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ ચાપ દ્વારા આંતરેલ ખૂણો વર્તુળના બાકીના ભાગ પર કોઈ બિંદુ આગળ તે જ ચાપ આંતરેલ ખૂણા કરતાં બમણો હોય છે.

B

P O Q

વર્તુળનું કેન્દ્ર O હોય અર્ધવૃત્ત PAQ અને તેનો અંતર્ગત કોણ PBQ વિચારો.

$2 \quad PBQ = \quad POQ$

આકૃતિ 16.5

(કારણ કે કેન્દ્ર આગળ ચાપ દ્વારા આંતરેલ ખૂણો એ વર્તુળના બાકીના ભાગ પરના કોઈ બિંદુ આગળ આંતરેલ ખૂણા કરતાં બમણો હોય છે.)

પરંતુ $\quad POQ = 180^0$

$2 \quad PBQ = 180^0$

$PBQ = 90^0$

આમ આપણે નીચે પ્રમાણે તારવીએ :

અર્ધવૃત્તમાંનો અંતર્ગત કોણ કાટકોણ હોય છે.

પ્રમેય : વર્તુળના એક જ વૃત્તખંડમાંના ખૂણાઓ સમાન હોય છે.

પક્ષ : O કેન્દ્રવાળું વર્તુળ અને જીવા PQ (કે ચાપ PAQ) દ્વારા તે જ વૃત્તખંડમાં રચાયેલ ખૂણા $\angle PRQ$ અને $\angle PSQ$ છે.

સાધ્ય : $\quad PRQ = \quad PSQ$

રચના : OP અને OQ જોડો.

સાબિતી : કેન્દ્ર આગળ ચાપ વડે આંતરેલ ખૂણો વર્તુળના બાકીના ભાગ પર કોઈ બિંદુ આગળ આંતરેલ ખૂણા કરતાં બમણો હોય છે,

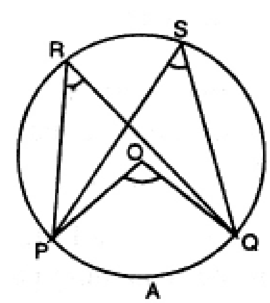


Fig. 16.6

તેથી આપણને મળે છે :

ઉપરના પરિણામોનો ઉપયોગ કરતાં કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ.

આ પ્રમેયનું પ્રતિપ્રમેય પણ સત્ય છે. આ પ્રતિપ્રમેય નીચે મુજબ છે. વિવિધ પ્રયોગો દ્વારા તેની સત્યતા ચકાસી શકાય.

"બે બિંદુઓને જોડતો રેખાખંડ, આ રેખાની એક જ બાજુએ આવેલા કોઈ બે બિંદુઓ સાથે જો સમાન ખૂણા આંતરે, તો ચારે બિંદુઓ વૃત્તીય હોય છે."

આ પરિણામની સત્યતા ચકાસવા માટે 5 સેમી લંબાઈનો એક રેખાખંડ AB દોરો. AB ની એક જ તરફ આવેલા C અને D બિંદુઓ મેળવો કે જેથી $\angle ACB = \angle ADB$ થાય.

હવે ત્રણ અસમરેખ બિંદુઓ A, C, B માંથી પસાર થતું એક વર્તુળ દોરો. જુઓ, D ક્યાં છે ?

D પણ એ જ વર્તુળ પર આવેલું દેખાશે. એટલે કે A, B, C અને D વૃત્તીય બિંદુઓ છે.

જુદા જુદા માપના રેખાખંડો લઈને, ઉપરના પ્રયોગનું પુનરાવર્તન કરો. દરેક વખતે ચારેય બિંદુઓ એક જ વર્તુળ પર જોવા મળશે.

આ રીતે આપેલ પરિણામ સત્ય છે તેની ખાતરી થશે.

ઉદાહરણ 16.1 : આકૃતિ 16.7 માં, O વર્તુળનું કેન્દ્ર છે અને $\angle AOC = 120^0$. $\angle ABC$ શોધો.

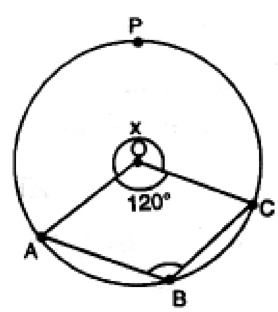
ઉકેલ : એ સ્પષ્ટ છે કે $\angle x$ ચાપ APC દ્વારા આંતરેલ કેન્દ્રીય કોણ છે અને $\angle ABC$ અંતર્ગત કોણ છે.

$\therefore \quad x = 2 \quad ABC$

પરંતુ $\quad x = 360^o - 120^0 = 240^o$

$2 \quad ABC = 240^o$

$ABC = 120^o$



આકૃતિ 16.7

ઉદાહરણ 16.2 : આકૃતિ 16.8 માં, O વર્તુળનું કેન્દ્ર છે અને $\angle PAQ = 35^0$. $\angle OPQ$ શોધો.

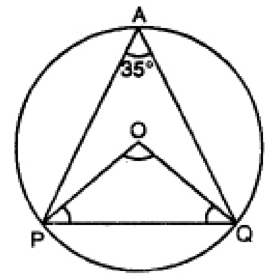
ઉકેલ : $\quad POQ = 2 \quad PAQ = 70^o \quad ...(i)$

(કેન્દ્ર આગળનો કોણ વર્તુળના બાકીના ભાગ પરના કોણ કરતાં બમણો હોય છે.)

Since OP = OQ (Radii of the same circle)

OPQ = OQP ...(ii)

(સમાન બાજુઓની સામેના કોણ સમાન હોય છે.)



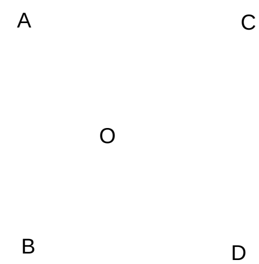
પરંતુ OPQ + OQP + POQ = 180°

2 OPQ = 180°–70°= 110°

OPQ = 55°

આકૃતિ 16.8

ઉદાહરણ 16.3 : આકૃતિ 16.9માં, O વર્તુળનું કેન્દ્ર છે AD, ∠BAC વ્યાસ છે અને ∠BCD ને દ્વિભાગે છે. BC શોધો.



ઉકેલ : BC વ્યાસ હોઈ

BAC =90°

(અર્ધવૃત્તમાંનો કોણ કાટકોણ હોય છે.)

AD, BAC ને દ્વિભાગે છે.

આકૃતિ 16.9

BAD = 45°

પરંતુ BCD = BAD

(એક જ વૃત્તખંડમાંના કોણ સમાન હોય છે.)

BCD = 45°

ઉદાહરણ 16.4 : આકૃતિ 16.10માં, O વર્તુળનું કેન્દ્ર છે. ∠POQ = 70° અને PS⊥OQ. ∠MQS શોધો.

ઉકેલ : 2 PSQ = POQ = 70°

(વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ આંતરેલ કોણ વર્તુળના બાકીના ભાગ પર આંતરેલ કોણ કરતાં બમણો હોય છે.)

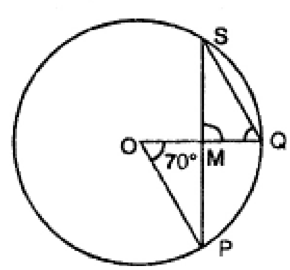
PSQ = 35°

MSQ + SMQ + MQS = 180°

(ત્રિકોણના ખૂણાઓનો સરવાળો)

35° + 90° + MQS = 180°

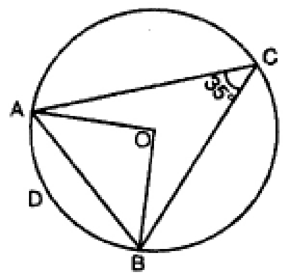
MQS = 180° – 125° = 55°



આકૃતિ 16.10

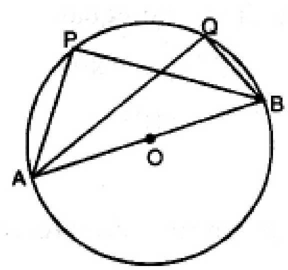
તમારી પ્રગતિ ચકાસો 16.1

1. આકૃતિ 16.11 માં, ADB એ કેન્દ્ર O વાળા વર્તુળનું ચાપ છે. જો $\angle ACB = 35^0$ હોય, તો $\angle AOB$ શોધો.



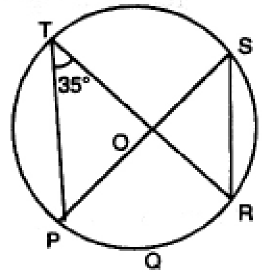
આકૃતિ 16.11

2. આકૃતિ 16.12 માં, AOB એ O કેન્દ્રવાળા વર્તુળનો વ્યાસ છે. શું $\angle APB = \angle AQB = 90^0$? કારણો આપો.



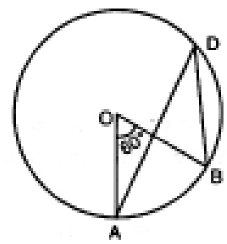
આકૃતિ 16.22

3. આકૃતિ 16.13 માં PQR એ O કેન્દ્રવાળા વર્તુળનું ચાપ છે. જો $\angle PTR = 35^0$, તો $\angle PSR$ શોધો.



આકૃતિ 16.13

4. આકૃતિ 16.14, O વર્તુળનું કેન્દ્ર છે અને $\angle AOB = 60^0$ $\angle ADB$ શોધો.



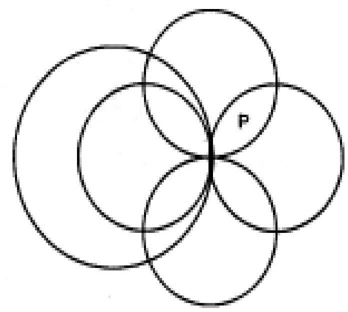
આકૃતિ 16.14

16.3 વૃત્તીય બિંદુઓ

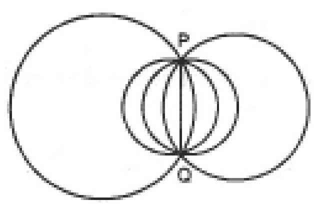
વ્યાખ્યા : વર્તુળ પર હોય, તે બિંદુઓ વૃત્તીય બિંદુઓ કહેવાય છે.

હવે આપણે અમુક શરતો શોધીએ, જે હેઠળ બિંદુઓ વૃત્તીય હોય છે.

જો તમે એક બિંદુ P લેશો, તો તમે આકૃતિ 16.15 પ્રમાણે તેમાંથી પસાર થતાં એક નહિ, પણ અનેક વર્તુળો દોરી શકશો.

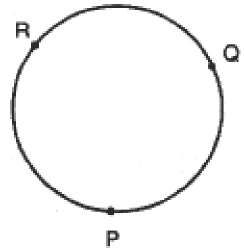


હવે કાગળ પર કોઈ બે બિંદુઓ P અને Q લેશો. તો તમે આ બિંદુઓમાંથી પસાર થતાં તમે ઈચ્છો તેટલાં વર્તુળો દોરી શકશો. (આકૃતિ 16.16)



આકૃતિ 16.16

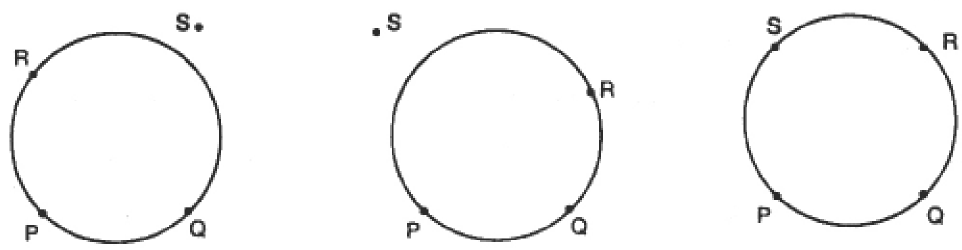
હવે આપણે ત્રણ બિંદુઓ P, Q અને R લઈએ, જે એક સુરેખા પર નથી. આ કિસ્સામાં તમે આ ત્રણ અસમરેખ બિંદુઓમાંથી પસાર થતું માત્ર એક વર્તુળ દોરી શકો. (આકૃતિ 16.17)



આકૃતિ 16.17

આથી આગળ હવે આપણે ચાર બિંદુઓ P, Q, R અને S લઈએ, જે એક જ રેખા પર નથી. તમે જોશો કે ચાર અસમરેખ બિંદુઓમાંથી પસાર થતું વર્તુળ દોરવું હંમેશા શક્ય નથી.

આકૃતિ 16.18 (અ) અને (બ) માં, બિંદુઓ વૃત્તીય નથી, પણ આકૃતિ 16.18 (ડ) માં વૃત્તીય છે.



(a) (b) (b)

આકૃતિ 16.18

નોંધ : જો બિંદુઓ P, Q અને R સમરેખ હોય, તો તેઓમાંથી પસાર થતું વર્તુળ દોરવું શક્ય નથી.

આમ આપણે તારવીએ :

1. માત્ર એક કે બે બિંદુઓ આપેલ હોય, તો તેમાંથી પસાર થતાં અસંખ્ય વર્તુળો દોરી શકાય.
2. ત્રણ અસમરેખ બિંદુઓ હંમેશાં એકવૃત્તીય હોય છે અને તે બધામાંથી પસાર થતું માત્ર એક વર્તુળો હોય છે.
3. ત્રણ સમરેખ બિંદુઓ એકવૃત્તીય હોતાં નથી.
4. ચાર અસમરેખ બિંદુઓ એકવૃત્તીય હોય કે ન પણ હોય.

16.6.1 ચક્રીય ચતુષ્કોણ

જો કોઈ ચતુષ્કોણનાં તમામ ચાર શિરોબિંદુઓમાંથી પસાર થતું એક વર્તુળ હોય તો તેને ચક્રીય ચતુષ્કોણ કહેવાય

ઉદાહરણાર્થ, આકૃતિ 16.19 ચતુષ્કોણમાં PQRS ચક્રીયે ચતુષ્કોણ છે.

પ્રમેય : ચક્રીય ચતુષ્કોણના સામસેમાના ખૂણાઓના સરવાળો 1800 હોય છે.

પક્ષ : ચક્રીય ચતુષ્કોણ ABCD છે.

To prove : $\angle BAD + \quad BCD = \quad ABC + \quad ADC = 180^0$.

Construction : AC અને DB દોરો.

Proof : ACB = ADB

અને BAC = BDS

[એક જ વૃત્તખંડમાં ખૂણા]

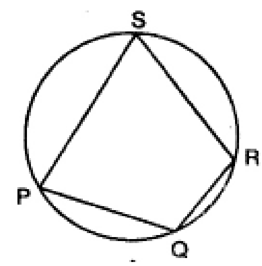


Fig. 16.19

ACB + BAC = ADB + BDC = ADC

બંને બાજુએ ABC ઉમેરતાં,

ACB + BAC + ABC = ADC + ABC

પરંતુ ACB + BAC + ABC = 180° [ત્રિકોણના ખૂણાઓનો સરવાળો]

ADC + ABC = 180°

BAD + BCD = ADC + ABC = 180°.

ઈતિ સિદ્ધમ્

આ પ્રમેયનું પ્રતિપ્રમેય પણ સાચું છે.

જો ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણાની જોડ પૂરક હોય, તો તે ચતુષ્કોણ ચક્રીય હોય છે.

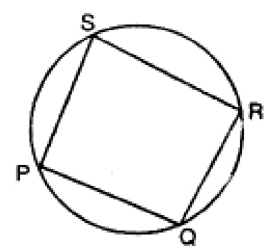
ચકાસણી :

ચતુષ્કોણ PQRS દોરો

ચતુષ્કોણ PQRS માં,

P + R = 180°

અને S + Q = 180°



તેથી, P, Q અને R માંથી પસાર થતું વર્તુળ દોરો અને જુઓ કે તે બિંદુ S માંથી પણ પસાર થાય છે. તેથી આપણે તારવીશું કે ચતુષ્કોણ PQRS ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે. ઉપરના પરિણામોનો ઉપયોગ કરતાં કેટલાંક ઉદાહરણો ઉકેલીએ.

ઉદાહરણ 16.5 : ABCD એ ચક્રીય સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણ છે.

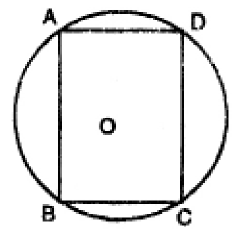
દર્શાવો કે તે લંબરોચરસ છે.

A + C = 180°

(ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે.)

A = C હોઈ,

(સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણા)



પરિણામ (1) માં $\angle C$ *ની કિંમત મૂકતાં*

અથવા $A + A = 180^o$

$2 \quad A = 180^o$

$A = 90^o$

આમ, ABCD *લંબચોરસ છે.*

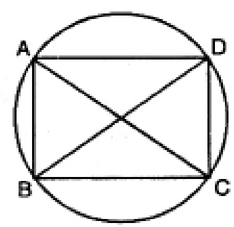
ઉદાહરણ 16.6 : *ચક્રીય ચતુષ્કોણની સામેની બાજુઓની જોડ સમાન છે. સાબિત કરો કે તેના વિકર્ણ પણ સમાન હોય છે. (જુઓ આકૃતિ 16.23)*

Solution : *ધારો કે* ABCD *ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે અને* AB = CD.

ચાપ AB = *ચાપ* CD (*અનુરૂપ ચાપ*)

ચાપ AD *બંને બાજુમાં ઉમેરતાં,*

ચાપ AB + *ચાપ* AD = *ચાપ* CD + *ચાપ* AD



ચાપ BAD = *ચાપ* CDA

જીવા BD = *જીવા* CA

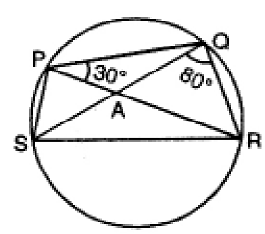
BD = CA

ઉદાહરણ 16.7 : આકૃતિ 16.24 માં PQRS *ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે, જેના વિકર્ણો* A *આગળ છેદે છે. જો* $\angle SQR = 80^0$ *અને* $\angle QPR = 30^0$, *તો* $\angle SRQ$ *શોધો.*

ઉકેલ : આપેલ છે. $SQR = 80^o$

Since $SQR = SPR$

[*એક જ વૃત્તખંડમાં ખૂણા*]



$SPR = 80^o$

$SPQ = SPR + RPQ$

$= 80^o + 30^o.$

અથવા $SPQ = 110^o.$

પરંતુ SPQ + SRQ = 180°. (Sum of the opposite angles of a cyclic quadrilateral is 180°)

$$SRQ = 180^\circ - SPQ$$

$$= 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

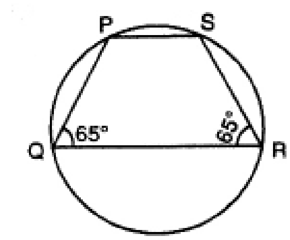
ઉદાહરણ 16.8 *:* PQRS *એ ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે.*

જો Q = R = 65°, find P *અને* S *શોધો.*

ઉકેલ : $P + R = 180^\circ$

$P = 180^\circ - R = 180^\circ - 65^\circ$

$P = 115^\circ$



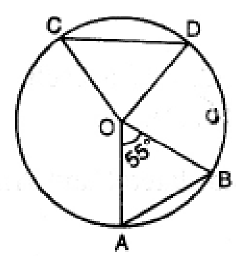
તે જ પ્રમાણે, $Q + S = 180^\circ$

$S = 180^\circ - Q = 180^\circ - 65^\circ$

$S = 115^\circ$.

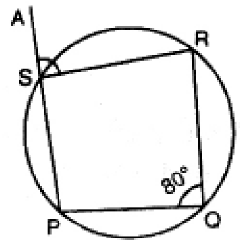
તમારી પ્રગતિ ચકાસો 16.2

1. *આકૃતિ* 16.26 *માં* AB *અને* CD *એ* O *કેન્દ્રવાળા વર્તુળની બે સમાન જીવાઓ છે. જો* ∠AOB = 55⁰, *હોય, તો* ∠COD *શોધો.*



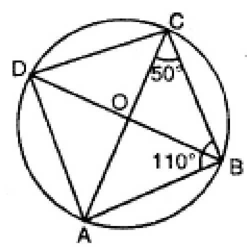
આકૃતિ 16.26

2. *આકૃતિ* 16.27 *માં,* PQRS *એ ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે, અને તેની બાજુ* PS *બિંદુ* A *સુધી લંબાવવામાં આવેલ છે. જો* ∠PQR = 80⁰ *હોય, તો* ∠ASR *શોધો.*



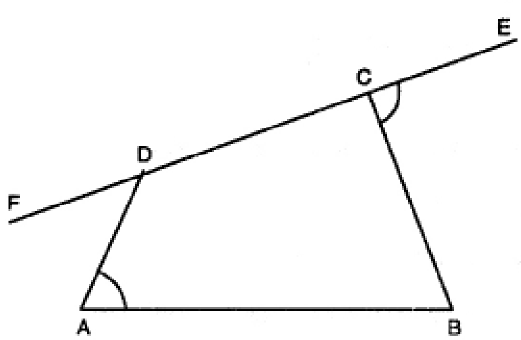
આકૃતિ 16.27

3. આકૃતિ 16.28માં, ABCD એ ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે, જેના વિકર્ણો O આગળ છેદે છે. જો $\angle ACB = 50^0$ અને $\angle ABC = 11^0$ હોય, તો $\angle BDC$ શોધો.



આકૃતિ 16.28

4. આકૃતિ 16.29માં, ABCD એક ચતુષ્કોણ છે. જો $\angle A = \angle BCE$, તો શું તેવો ચતુષ્કોણ ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે ? કારણો આપો.



આકૃતિ 16.29

સારાંશ :

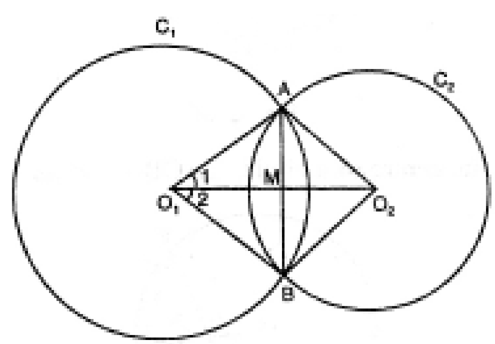
- વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ ચાપ (કે જીવા) દ્વારા આંતરેલ કોણ કેન્દ્રીય કોણ કહેવાય છે અને વર્તુળના બાકીના ભાગ પર કોઈ બિંદુએ તેના દ્વારા આંતરેલ કોણ અંતર્ગત કોણ કહેવાય છે.
- એક જ વર્તુળ પરનાં બિંદુઓ એકવૃત્તીય બિંદુઓ કહેવાય છે.
- વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ ચાપ દ્વારા આંતરેલ કોણ વર્તુળના બાકીના ભાગ પર કોઈ બિંદુએ તેના દાવ્રા આંતરેલ કોણ કરતાં બમણો હોય છે.
- અર્ધવૃત્તમાં અંતર્ગતકોણ કાટકોણ હોય છે.
- વર્તુળના એક જ વૃત્તખંડમાંના ખૂણા સમાન હોયછે.
- ચક્રીય ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણાઓનાં સરવાળો 180^0 હોય છે.
- જો ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણાની એક જોડ પૂરક હોય, તો તે ચતુષ્કોણ ચક્રીય હોય.

સત્રાંત સ્વાધ્યાય

1. ચોરસ PQRS, O કેન્દ્રવાળા વર્તુળમાં અંતર્ગત છે. દરેક બાજુ કેન્દ્ર O આગળ ક્યો ખૂણો આંતરે છે ?

2. આકૃતિ 16.30 માં C_1 અને C_2 એ O_1 અને O_2 કેન્દ્રવાળાં બે વર્તુળો છે અને તે બિંદુઓ A અને B આગળ છેદે છે. જો O_1, O_2 AB ને M આગળ છેદે, તો દર્શાવો કે :

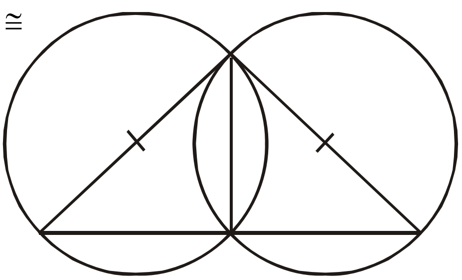
   (i) ΔO_1AO_2 ΔO_1BO_2 (ii) M એ AB નું મધ્યબિંદુ છે. (iii) AB O_1O_2



આકૃતિ 16.30

(માર્ગદર્શન : (1) પરથી તારવો કે $\angle 1 = \angle 2$ અને પછી સાબિત કરો કે $\Delta AO_1M \cong \Delta BO_1M$ (બાખૂબા નિયમ દ્વારા))

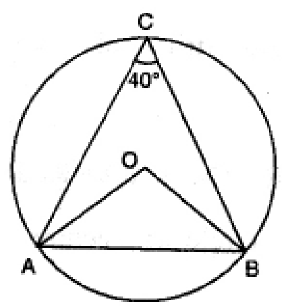
3. *બે વર્તુળો A અને B માં છેદે છે. AC અને AD વર્તુળોનો વ્યાસ છે. સાબિત કરો કે C, B અને D સમરેખ છે.*



આકૃતિ 16.31

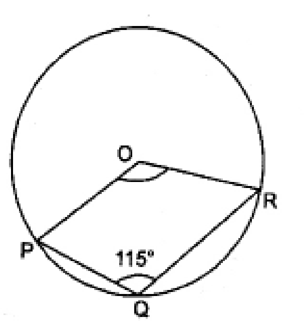
(માર્ગદર્શન : CB, BD અને AB જોડો : $\angle ABC = 90^0$ અને $\angle ABD = 90^0$ હોઈ)

4. *આકૃતિ 16.32 માં AB, O કેન્દ્રવાળા વર્તુળની જીવા છે. જો $\angle ACB = 40^0$, તો $\angle OAB$ શોધો.*



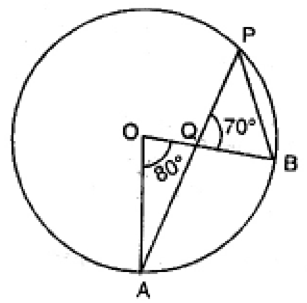
આકૃતિ 16.32

5. *આકૃતિ 16.33 માં, O એ વર્તુળનું કેન્દ્ર છે અને $\angle PQR = 115^0$. $\angle POR$ શોધો.*



આકૃતિ 16.33

6. આકૃતિ 16.34માં, O વર્તુળનું કેન્દ્ર, $\angle AOB = 80^0$ અને $\angle PQB = 70^0$. $\angle PBQ$ શોધો.



આકૃતિ 16.34

ઉત્તરો

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 16.1

(1) 70^0 (2) હા (3) 35^0 (4) 30^0

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 16.2

(1) 55^0 (2) 80^0 (3) 20^0 (4) હા

સત્રાંત સ્વાધ્યાય

(1) 90^0 (2) 50^0 (3) 130^0 (4) 70^0

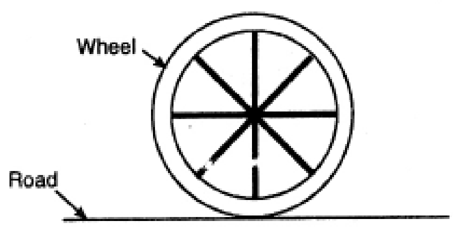
17

છેદિકાઓ, સ્પર્શકો અને તેમના ગુણધર્મો

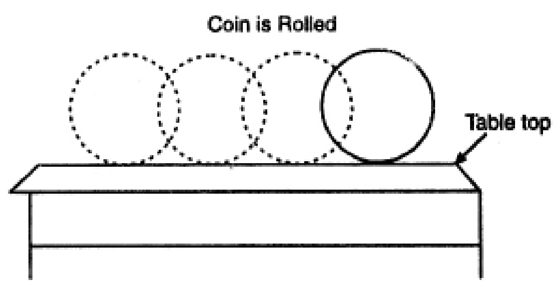
પરિચય

ચાલતી સાઈકલ જુઓ, તમે જોશો કે કોઈ પણ ક્ષણે ગતિ કરતી સાઈકલના ચક્રો રસ્તાના અતિ મર્યાદિત ક્ષેત્રફળને સ્પર્શે છે, વધુ ચોકસાઈથી કહીએ તો તે એક બિંદુને સ્પર્શે છે.
જો તમે સિક્કાને લીસી સપાટી જેમ કે ટેબલ કે લાદી પર ગબડાવો તો તમને જણાશે કે કોઈ પણ ક્ષણે સિક્કાનું માત્ર એક બિંદુ ગબડાવેલ સપાટીના સંપર્કમાં આવે છે ?

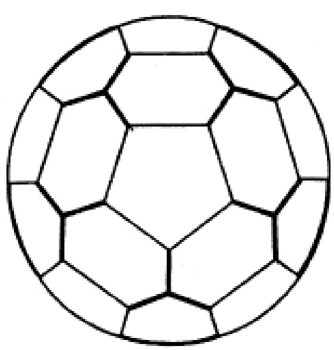
ઉપરની પરિસ્થિતિઓમાં તમે શું જુઓ છો ?



(i)



(ii)



(iii)

આકૃતિ . 17.1

જો તમે ચક્ર કે સિક્કા ને વર્તુળ અને સ્પર્થતી સપાટી (રસ્તો કે ટેબલ) ને રેખા તરીકે વિચારો , તો ઉપરનાં ઉદાહરણો દર્શાવે છે કે રેખા વર્તુળને સ્પર્શ કરે છે આ પ્રકરણમાં આપણે શક્ય સંપર્કો જે રેખા અને વર્તુળ ધરાવે છે તે વિશે શીખીશું અને તેમના ગુણધર્મો શીખવા પ્રયત્ન કરીશું.

હેતુઓ

આ પાઠ શીખ્યા પછી, અધ્યેતા :

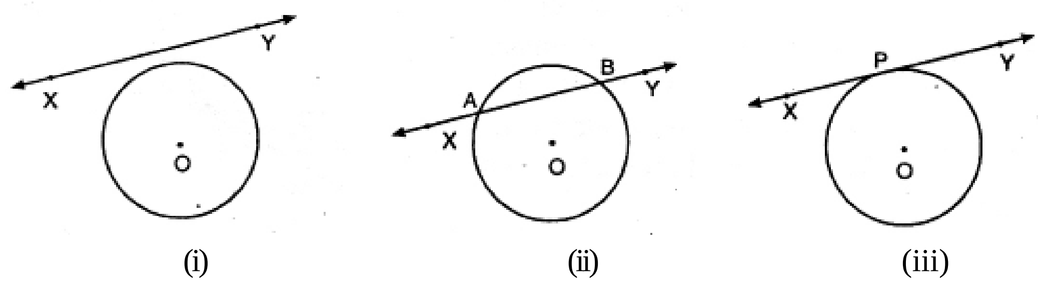
- *વર્તુળની છેદિકા અને તેના સ્પર્શકની વ્યાખ્યા આપી શકશે.*
- *છેદિકા અને સ્પર્શક વચ્ચેનો ભેદ પારખી શકશે.*
- *વર્તુળને તેની બહારના બિંદુમાંથી દોરેલા સ્પર્શકો લંબાઈમાં સરખા હોય છે.*
- *વર્તુળનાં સ્પર્શક અને છેદિકા સંબંધિત અગત્યના પરિણામો (અભ્યાસક્રમમાં આપેલ) ચકાસી શકશે અને તેમનો ઉપયોગ કરી શકશે.*

અપેક્ષિત પૂર્વજ્ઞાન

- *કોણ અને રેખાખંડનું માપન*
- *આપેલ ત્રિજ્યાના વર્તુળો દોરવાં.*
- *આપેલ રેખાને લંબ અને સમાંતર રેખાઓ દોરવી.*
- *રેખા અને કોણ, એકરૂપતા અને વર્તુળ વિશે અગાઉનાં પરિણામોનું જ્ઞાન.*
- *પાયથાગોરસ પ્રમેયનું જ્ઞાન.*

17.1 છેદિકા અને સ્પર્શક - પરિચય

અગાઉના પાઠોમાં તમે રેખા અને વર્તુળ વિશે શીખી ગયા છો. યાદ કરો કે વર્તુળ એ સમતલમાં કોઈ બિંદુનો બિંદુપથ છે, જે એવી રીતે ગતિ કરે છે કે સમતલમાં નિયત બિંદુથી તેનું અંતર અચળ રહે છે આ નિયત બિદુંને વર્તુળનું કેન્દ્ર કહે છે કે સમતલમાં નિયત બિદુંથી તેનું અંતર અચળ રહે છે આ નિયત બિંદુને વર્તુળનું કેન્દ્ર કહે છે અને અચળ અંતરને વર્તુળની ત્રિજ્યા કહે છે. તમે એ પણ જાણો છો કે રેખા એ બિદુઓનો સમૂહ છે જે બંને બાજુએ અનંત રીતે વિસ્તરે છે, જ્યારે રેખાખંડ એ બે બિંદુઓથી બંધાયેલ રેખાનો ભાગ છે.



આકૃતિ. 17.2

હવે એવો કિસ્સો વિચારો, જ્યારે રેખા અને વર્તુળ તે જ સમતલમાં એક સાથે અસ્તિત્વ ધરાવે છે. આકૃત્તિ 17.2માં

દર્શાવ્યા મુજબ , ત્રણ ભિન્ન શક્યતાઓ હશે.

તમે જોઈ શકશો કે આકૃતિ 17.2 (i) માં રેખા XYO કેન્દ્રવાળા વર્તુળને છેદતી નથી. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો, રેખા XY અને વર્તુળને કોઈ સામાન્ય બિંદુ નથી, આકૃતિ 17.2 (ii) માં રેખા XY વર્તુળને બે ભિન્ન બિંદુઓ A અને B માં છેદે છે અને રેખા વર્તુળને બિંદુ P એ સ્પર્શ કરે છે એમ કહેવાય છે.

આમ, આપણે કહી શકીએ કે રેખા અને વર્તુળના છેદનના કિસ્સામાં, નીચેની ત્રણ શક્યતાઓ રહેલી છે.

(i) રેખા વર્તુળને બિલકુલ છેદતી નથી, અર્થાત રેખા વર્તુળના બહિર્ભાગમાં પડે છે.

(ii) રેખા વર્તુળને બે ભિન્ન બિંદુઓમાં છેદે છે . તે કિસ્સામાં, રેખાનો અમુક ભાગ વર્તુળના અંતભાગમાં પડે છે, છેદનનાં બે બિંદુઓ વર્તુળ પર પડે છે અને બાકીનો ભાગ વર્તુળના બાહિભાગમાં પડે છે.

(iii) રેખા વર્તુળને બરાબર એક બિંદુએ સ્પર્શે છે, તેથી આપણે નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યા કરીએ :

સ્પર્શક :

રેખા કે જે વર્તુળને બરાબર એક બિંદુએ સ્પર્શે છે તે સ્પર્શક રેખા કહેવાય છે અને બિંદુ કે જ્યાં તે વર્તુળને સ્પર્શે છે તેને બિંદુ કહે છે.

આમ, આકૃતિ 17.2 (ii) માં,XY એ વર્તુળને P આગળ સ્પર્શક છે, જેને લ(P ને) સ્પર્શબિંદુ કહે છે.

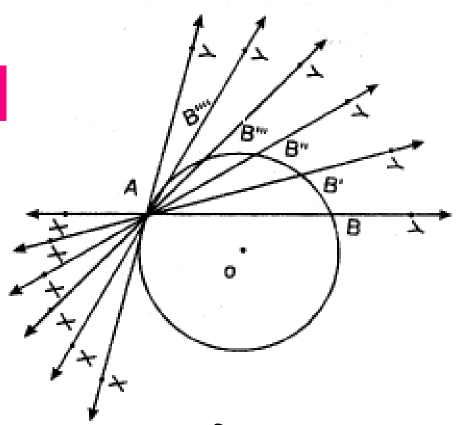
છેદિકા :

રેખા કે જે વર્તુળ બે ભિન્ન બિંદુઓમાં છેદે છે તેને છેદિકા રેખા (સામાન્ય રીતે છેદિકા) કહે છે.

આકૃતિ 17.2 (ii) માં,XY વર્તુળને છેદિકા રેખા છે અને A અને B રેખા XY અને O કેન્દ્રવાળા વર્તુળનાં છેદન બિંદુઓ છે.

17.2 સ્પર્શક, છેદિકાના સીમાન્ત કિસ્સા તરીકે

O કેન્દ્રવાળા વર્તુળની છેદિકા XY વિચારો જે વર્તુળને બિંદુઓ A અને B માં છેદે છે. કલ્પના કરો કે વર્તુળ પર પડતું છેદિકા XY નું બિંદુ A અચળ છે અને છેદિકા A ના આજુબાજુ ફરે છે જે આકૃત્તિ 17.3માં દર્શાવ્યા મુજબ વર્તુળને B આગળ છેદે છે, અને આખરે રેખા XAY ની સ્થિતિ મેળવે છે, જ્યારે તે વર્તુળને A આગળ સ્પર્શક બને છે.



આકૃતિ. 17.3

આમ આપણે કહીએ કે :

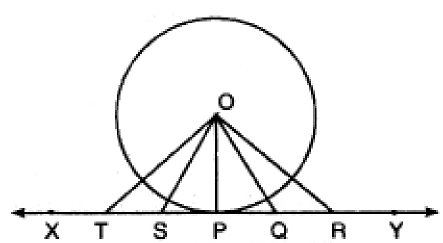
સ્પર્શક એ છેદિકાની સીમાન્ત સ્થિતિ છે, જ્યારે છેદનના બે બિદુંઓ એકરાર થાય છે.

17.3 સ્પર્શબિંદુમાંથી સ્પર્શક અને ત્રિજ્યા

0 કેન્દ્રવાળા વર્તુળને P બિંદુએ XY એક સ્પર્શક છે OP જોડો.

સ્પર્શક XY પર બિદુઓ Q,R,S અને T લો અને OQ, OR, OS અને OT જોડો Q,R,S અને T એ વર્તુળના બાહિર્ભાગમાં બિંદુઓ હોઈ તેમજ P વર્તુળ પર હોઈ ,

OP એ OQ, OR,OS અને OT કરતાં નાની છે.



આકૃતિ. 17.3

ભૂમિતિના આપણા અગાઉના અભ્યાસ પરથી આપણે જાણીએ વછીએ કે તમામ રેખાખંડો જે બિંદુ (રેખા પરના નહિ) માંથી રેખા પર દોરી શકાય તે પૈકી લંબ રેખા એ સૌથી ટૂંકી છે.

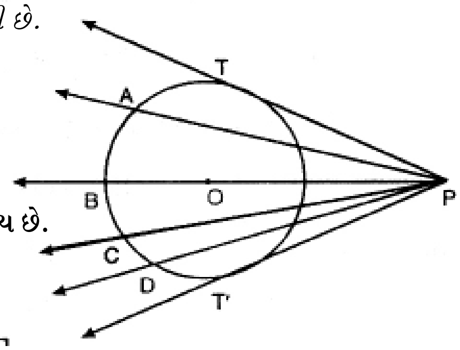
O એ XY રેખાને O બિંદુમાંથી ટૂંકામાં ટૂંકુ અંતર હોઈ

$\therefore \qquad OP \perp XY$

આમ, આપણે કહી શકીએ કે :

વર્તુળના સ્પર્શબિંદુમાંથી દોરેલ ત્રિજ્યા તે બિંદુએ સ્પર્શકને લંબ હોય છે.

OPX અને OPY કોણ માપીને અને તે દરેક 90° જાણીને પણ ઉપરનું પરિણામ ચકાસી શકાય.



આકૃતિ. 17.5

17.4 વર્તુળના બહારના બિંદુમાંતી સ્પર્શકો

0 કેન્દ્રવાળા વર્તુળના બહિર્ભાગમાં કોઈ બિંદુ P લો P માંથી રેખાઓ દોરો , આમાંની કેટલીક આકૃતિ 17.5માં PT,PB,PA,PC,PD, અને PT દર્શાવવામાં આવેલ છે.

આ પૈકીની કેટલીક વર્તુળને સ્પર્શે છે ? માત્ર બે. અન્ય બિંદુ અને વર્તુળ લઈ આ પ્રવૃત્તિ ફરી કરો. ફરીથી પણ તમને તે જ પરિણામ મળશે ?

આમ આપણે કહી શકીએ કે :

બાહ્ય બિંદુમાંથી વર્તુળને બે સ્પર્શક દોરી શકાય .

જો બિંદુ P વર્તુળ પર પડે, તો શું તે બિંદુમાંથી પણ વર્તુળને બે સ્પર્શક ? તમે જોઈ શકશો કે તે કિસ્સામાં વર્તુળને માત્ર એક સ્પર્શક દોરી શકાય P વર્તુળના અંત : ભાગમાં હોય તો તે કિસ્સા વિશે શુ ? નોંધો કે તે કિસ્સામાં P માંથી કોઈ પણ રેખા વર્તુળને બે બિંદુઓમાં છેદે છે અને તેથી અંત : ભાગમાંનાં બિંદુઓમાંથી વર્તુળને એક પણ સ્પર્શક દોરી શકાય નહીં.

હવે PT અને PT ની લંબાઈ માપો અને તમને જણાશે કે.

$PT = PT \qquad$ ....(i)

(B) આપણે આ તાર્કિક રીતે પણ જોઈએ.

બે **:** $PT = PT'$ વિચારો

OP, OT અને OT′

OPT અને OPT′

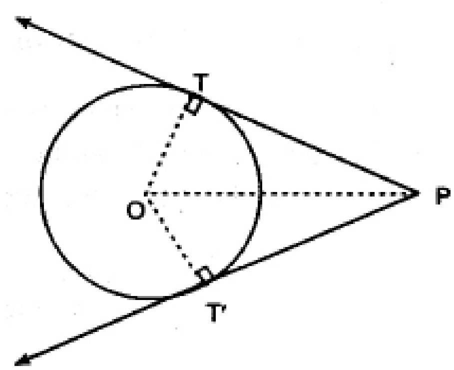
$\angle OTP =$ Ð $OT'P$ (દરેક કાટકોણ છે)

$OT = OT'$ (એક જ વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ)

$OP = OP$ (સામાન્ય)

$\Delta OPT \cong \Delta OPT'$

$\therefore PT = PT'$



આકૃતિ. 17.6

`(A)અને`(B) પરથી આપણે કહી શકીએ કે

બાહ્યબિંદુમાંથી દોરેલા બે સ્પર્શકોની લંબાઈ સમાન હોય છે.

આકૃતિ 17.6, $\Delta OPT \cong \Delta OPT'$

$$\angle OPT' = \angle OPT'$$

આમ, આપણે કહી શકીએ કે

બાહ્ય બિંદુમાંથી વર્તુળને દોરેસલ સ્પર્શકો બિંદુને વર્તુળના કેન્દ્ર સાથે જોડતી રેખા સાથે સમાન રીતે ઢળેલા હોય છે . (બાહ્ય બિંદુ અને કેન્દ્રને જોડતી રેખા, સ્પર્શકો વચ્ચેના ખૂણાને દુભાગે છે.

આ દર્શાવવા હવે આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ.

ઉદાહરણ 17.1: આકૃતિ 17.7માં, OP = 5 સેમી અને વર્તુળની ત્રિજ્યા 3 સેમી છે. O કેન્દ્રવાળા વર્તુળને P બિંદુમાંથી તરેલ સ્પર્શક PT ની લંબાઈ શોધો.

ઉકેલ: $\angle OTP = 90^o$, Let PT = x

કાટકોણ ત્રિકોણ OPT માં

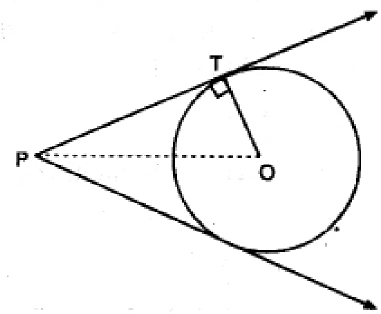
$$OP^2 = OT^2 + PT^2$$

અથવા $5^2 = 3^2 + x^2$

અથવા $x^2 = 25 - 9 = 16$

$x = 4$

અર્થાતે સ્પર્શક PT ની લંબાઈ = 4 સેમી



આકૃતિ. 17.7

ઉદાહરણ 17.2: આકૃતિ 17.8માં 7 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના કેન્દ્રથી 25 સેમી અંતરે બિંદુ P માંથી સ્પર્શકો PT અને PT દોરવામાં આવેલ છે. તો PT અને PT ની લંબાઈ શોધો.

ઉકેલ : Here OP = 25 સેમી અને OT = 7 સેમી

$\angle OTP = 90^o$

$PT^2 = OP^2 - OT^2$

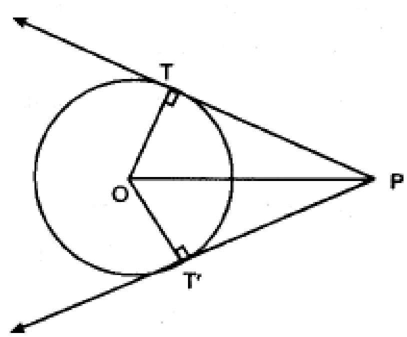
$= 625 - 49 = 576 = (24)^2$

PT = 24 સેમી

આપણે એ પણ જાણીએ છીએ કે

PT = PT′

PT′ = 24 સેમી



આકૃતિ . 17.8

ઉદાહરણ17.3: આકૃતિ 17.9, માં A,B અને C,O કેન્દ્રવાળા વર્તુળનાં ત્રણ બાહ્ય બિંદુઓ છે . સ્પર્શકો AP,BQ અને CR 3 સેમી 4,સેમી અને 3.5 સેમી લંબાઈના છે, તો ΔABC ની પરિમિતી શોધો.

ઉકેલ: આપણે જાણીએ છીએ કે બાહ્ય બિંદુમાંતી વર્તુળને બે સ્પર્શકોની લંબાઈ સમાન હોય છે.

AP = AR

BP = BQ,

$CQ = CR$

$AP = AR = 3$ cm

$BP = BQ = 4$ સેમી

અને $CR = CQ = 3.5$ સેમી

$AB = AP + PB;$

$= (3 + 4)$ સેમી $= 7$ સેમી

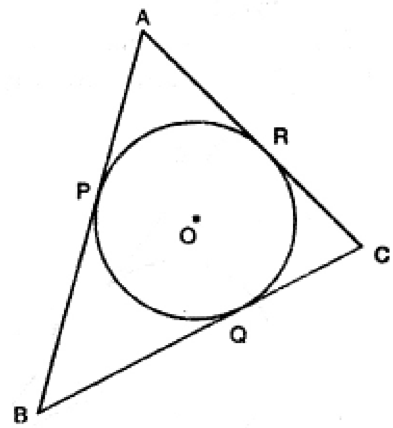
$BC = BQ + QC;$

$= (4 + 3.5)$ સેમી $= 7.5$ સેમી

$CA = AR + CR$

$= (3 + 3.5)$ સેમી

$= 6.5$ સેમી



આકૃતિ . 17.9

ABC ની પરિમિતિ $= (7 + 7.5 + 6.5)$ સેમી $= 21$ સેમી

ઉદાહરણ 17.4: આકૃતિ. 17.10, $\angle AOB = 50^o$. $\angle ABO$ અને $\angle OBT$ શોધો

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે $OA \perp XY$

$\angle OAB = 90^o$

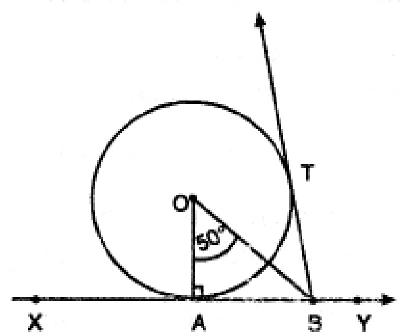
$\angle ABO = 180^o - (\angle OAB + \angle AOB)$

$= 180^o - (90^o + 50^o) = 40^o$

આપણે જાણીએ છીએ કે $\angle OAB = \angle OBT$

$\angle OBT = 40^o$

$\angle ABO = \angle OBT = 40^o$



આકૃતિ . 17.10

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 17.1

1. યોગ્ય શબ્દો વડે ખાલી જગ્યા પૂરો .

(i) સ્પર્શક સ્પર્શબિંદુમાંથી ત્રિજ્યાને ________ છે.

(ii) વર્તુળને બાહ્ય બિંદુમાંતી સ્પર્શકોની લંબાઈ ________ હોય છે.

(iii) સ્પર્શક છેદિકાની સીમાન્ત સ્થિતિ છે , જ્યારે બે ________ થાય છે.

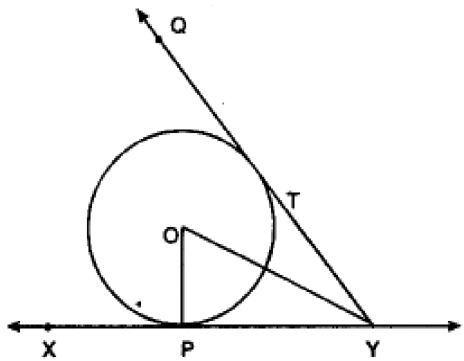
(iv) બાહ્ય બિંદુમાંથી ________ સ્પર્શકો વર્તુળને દોરી શકાય છે.

(v) વર્તુળના અંત : ભાગના બિંદુમાંથી ________ સ્પર્શક વર્તુળને દોરી શકાય (શૂન્ય,એક,બે)

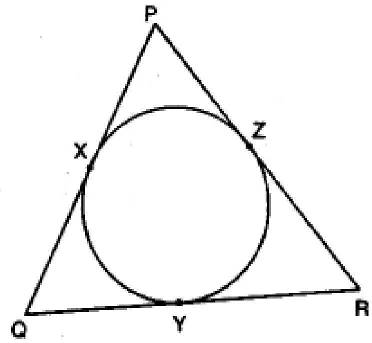
2. આકૃતિ. 17.11, $\angle POY = 40^o$, $\angle OYP$ અને $\angle OYT$ શોધો.

3. આકૃતિ. 17.12, માં ΔPQR નું અંતઃવૃત્ત દોરવામાં આવેલા છે . જો $PX = 2.5$ cm, $RZ = 3.5$ સેમી અને $\Delta PQR = 18$ સેમી, હોય, તો QY ની લંબાઈ શોધો.

B



આકૃતિ . 17.11



આકૃતિ. 17.12

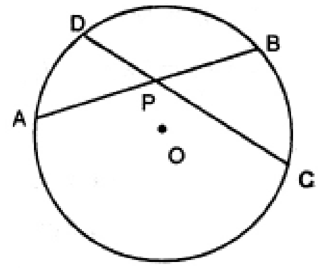
4. બાહ્ય બિંદુમાંથી વર્તુળને (દોરેલ) સ્પર્શકોની લંબાઈ સમાન હોય છે, દર્શાવતો પ્રયોગ લખો.

17.5 વર્તુળની અંદર અને બહાર છેદતી જીવાઓ

તમે અગાઉના પ્રકરણમાં જીવાઓ અંગે વિવિધ પરિણામો વિશે શીખી ગયો છો બે જીવાઓ વર્તુળની અંદર છેદતી હોય અથવા જીવાઓ લંબાવાથી વર્તુળની બહારના ભાગમાં છેદતી હોય તે વિશે કેટલાંક પરિણામો હવે આપણે ચકાસીશું.

O કેન્દ્રવાળુ અને કોઈ પણ ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દોરો. વર્તુળમાં P બિંદુએ છેદતી બે જીવાઓ AB અને CD દોરો.

રેખાખંડ PD, PC, PA અને PB ની લંબાઈ માપો ગુણફળ PA × PB અને PC × PD શોધો તમને જણાશે કે તે સમાન હોય છે. અન્ય બે વર્તુળો લઈ તેની અંદર છેદતી જીવાઓ દોર્યા પછી ઉપરની પ્રવૃત્તિ ફરી કરો. તમે ફરી જોશો કે.



આકૃતિ . 17.13

$PA \times PB = PC \times PD$

હવે આપણે વર્તુળની બહાર છેદતી જીવાઓના કિસ્સો લઈએ. આપણે નીચેની પ્રવૃત્તિ કરીએ : કોઈ પણ ત્રિજ્યા અને 0 કેન્દ્રવાળું વર્તુળ દોરો. બે જીવાઓ BA અને DC દોરો જે એકબીજાને વર્તુળની બહાર P બિંદુએ છેદતી હોય, રેખાખંડ PA, PB, PC અને PD ની લંબાઈ માપો ગુણનફળ PA × PB અને PC × PD શોધો.

તમે જોશો કે ગુણનફળ PA × PB ગુણનફળ

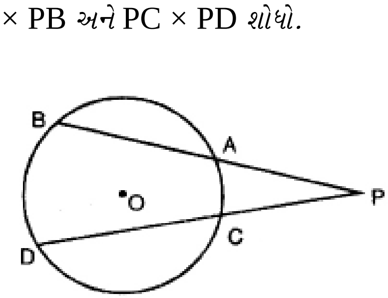
PC × PD બરાબર થે, અર્થાત્

$PA \times PB = PC \times PD$ થાય છે.

આ પ્રવૃત્તિ અન્ય બે વર્તુળ લઈ ફરી કરો, જેમાં

જીવાઓ એક બીજાને વર્તુળની બહાર છેદતી હોય ફરી

તમે જાણી શખશો કે $PA \times PB = PC \times PD$ થાય છે.



આકૃતિ . 17.14

આમ આપણે કહી શકીએ કે :

જો બે જીવાઓ .. અને .. (વર્તુળની અંદર અથવા) .. બિંદુએ છેદે, તો
$PA \times PB = PC \times PD$

17.6 વર્તુળની છેદિકા અને સ્પર્શક

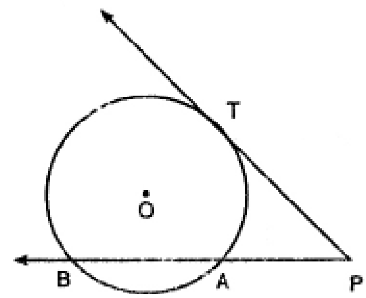
વર્તુળની છેદિકા અને સ્પર્શક વસ્તુની બહાર છેદતા હોય ત્યારે તેમની સંબંધ છે કે કેમ તે જોવા આપણે નીચેના પ્રવૃત્તિ કરીએ O *કેન્દ્રવાળું અને કોઈ પણ ત્રિજ્યાવાળું એક વર્તુળ દોરો.*

બાહ્ય બિંદુ P *માંથી વર્તુળને* PAB *છેદિકા અને સ્પર્શક* PT *દોરો.*

રેખાખંડ PA,PB *અને* PT *ની લંબાઈ માપો .*

ગુણનફળ $PA \times PB$*અને* $PT \times PT$ *ની લંબાઈ માપો.*

શુ પરિણામ મળે છે ? તમે જોઈ શકશો કે $PA \times PB = PT^2$ *થાય છે.*



આકૃતિ . 17.15

You will find that

$$PA \times PB = PT^2$$

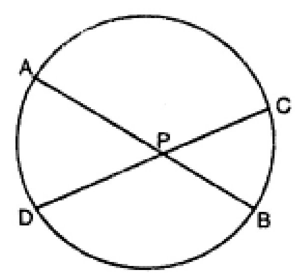
ઉપરની પ્રવૃત્તિ અન્ય બે વર્તુળો લઈ ફરી કરો. તમને ફરીથી તેજ પરિણામ આમ, આપણે કહી શકએ.

જો PAB *એ વર્તુળને* A *અને* B *બિંદુએ છેદિકા હોય, અને* PT *વર્તુળને* T *બિંદુએ સ્પર્શક હોય, તો*

$$PA \times PB = PT^2$$

ચાલો આપણે ઉદાહરણોની સહાયથી જોઈએ .

ઉદાહરણ17.5: *આકૃતિ. 17.16, માં* AB *અને* CD *વર્તુળની બે જીવાઓ છે, જે વર્તુળની અંદરના ભાગમાં* P *બિંદુએ છેદે છે. જો*PA = 3 *સેમી* PB =2*સેમી,* PC =1.5 *સેમી હોય, તો* ,PD*ની લંબાઈ શોધો.*



આકૃતિ . 17.16

ઉકેલ : *આપેલ છે કે* PA = 3 *સેમી,* PB = 2 *સેમી અને* PC = 1.5 *સેમી.*

ધારો કે $PD = x$

આપણે જાણીએ છીએ કે $PA \times PB = PC \times PD$

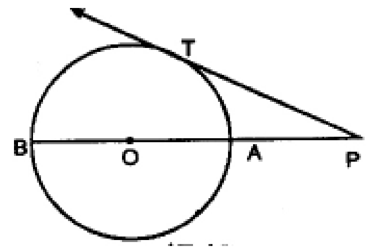
$$\Rightarrow \quad 3 \times 2 = (1.5) \times x$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{3 \times 2}{1.5} = 4$$

$\therefore$ *રેખાખંડ* PD *ની લંબાઈ* = 4 *સેમી.*

ઉકેલ 17.6: *આકૃતિ. 17.17, માં* PAB *એ વર્તુળની બહારના* P *બિંદુમાંથી વર્તુળની છેદિકા છે.* PAB *વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી પસાર થાય છે. અને* PT *એ સ્પર્શક છે . જો* PT = 8 *સેમી અને* OP=10 *સેમી, તો* $PA \times PB = PT^2$ *નો ઉપયોગ કરી વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો.*

ઉકેલ : *ધારો કે વર્તુળની ત્રિજ્યા* x *છે.*



આકૃતિ. 17.17

આપેલ છે કે $OP = 10$ *સેમી*

$PA = PO - OA = (10 - x)$ *સેમી*

અને $PB = OP + OB = (10 + x)$ *સેમી*

$PT = 8$ *સેમી*

આપણે જાણીએ છીએ કે $PA \times PB = PT^2$

$$(10 - x)(10 + x) = 8^2$$

અથવા $100 - x^2 = 64$

અથવા $x^2 = 36$ *અથવા* $x = 6$

અર્થાત્ વર્તુળની ત્રિજ્યા

ઉદાહરણ : 17.7: *આકૃતિ 20.18માં,* BA *અને* DC *વર્તુળની એવી બે જીવાઓ છે જે એકબીજીને વર્તુળના બહિર્ભાગના* P *બિંદુએ છેદે છે. જો* PA = 4 *સેમી* PB = 10 *સેમી* CD = 3 *સેમી હોય તો* PC *શોધો.*

ઉકેલ : *આપણને આપે છે કે* PA = 4*સેમી,* PB = 10 *સેમી,* CD = 3 *સેમી*

ધારો કે $PC = x$

$PA \times PB = PC \times PD$

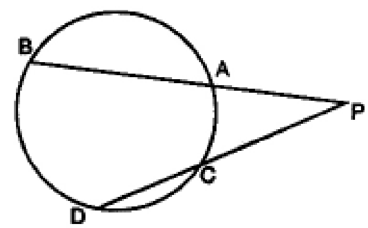
અથવા $4 \times 10 = (x + 3)x$

અથવા $x^2 + 3x - 40 = 0$

$(x + 8)(x - 5) = 0$

$x = 5$

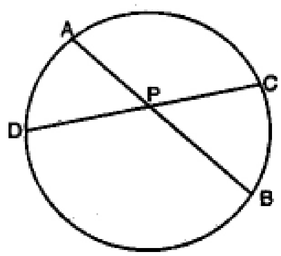
$PC = 5$ *સેમી*



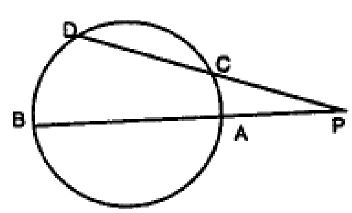
આકૃતિ . 17.18

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 17.2

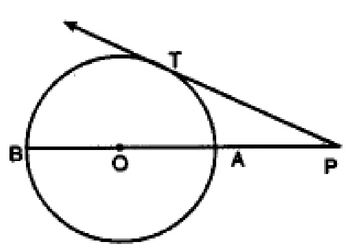
1. *આકૃતિ* 17.19, *માં* $PA = 3$ *સેમી હોય,* $PB = 6$ *સેમી અને* $PD = 4$ *સેમી હોય તો* PC *ની લંબાઈ શોધો.*
2. *આકૃતિ.* 17.19*માં ,* $PA = 4$ *સેમી,* $PB = x + 3$, $PD = 3$ *સેમી અને* $PC = x + 5$, *તો* x *ની કિંમત શોધો.*



આકૃતિ . 17.19



આકૃતિ . 17.20

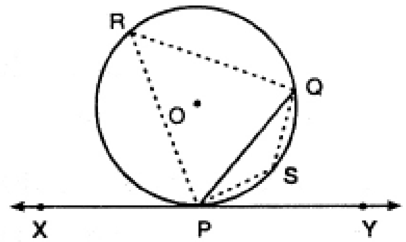


આકૃતિ . 17.21

3. આકૃતિ. 17.20, if PA = 4સેમી, PB = 10 cm, PC = 5 સેમી, PD.
4. આકૃતિ. 17.20, if PC = 4 સેમી, PD = (x + 5) સેમી, PA = 5 સેમી અને PB = (x + 2) સેમી, find x.
5. આકૃતિ. 17.21, PT = $2\sqrt{7}$ સેમી, OP = 8 સેમી, છે જો વર્તુળનું કેન્દ્ર O હોય તો વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો.

17.7 સ્પર્શક અને જીવા દ્વારા રચાતા કોણ

O કેન્દ્રવાળું વર્તુળ લો વર્તુળને P બિંદુંએ XY સ્પર્શક ધારો આકૃત્તિ 17.20માં દર્શાવ્યા મુજબ P બિદુમાંથી વર્તુળની જીવા PQ દોરો. ગુરુચાપ PRQ પર બિંદું R અંકિત કરો અને લઘુ ચાપ PSQ પર બિંદુ PRQ પારો ગુરુ ચાપ PRQ અને જીવા PQ વડે રચાતો ખંડ ∠QPY નો



આકૃતિ . 17.22

વિરુદ્ધ વૃત્ત કહેવાય છે. અને લઘુ અને જીવા વડે રચાતો ખંડ ∠QPX નો વિરુદ્ધ વૃત્ત ખંડ કહેવાય છે. વિરિદ્ધ વૃત્ત ખંડોમાંના કોણ તેમજ સ્પર્શક અને જીવા વચ્ચેના કોણ વચ્ચેચ કોઈ સંબંધ છે કે કેમ તે જોઈએ.

∠QR અને PR માપો (જુઓ આકૃત્તિ 17.22)

તમેને શુ જણાય છે. તમે જાશો કે ∠PRQ = ∠QPY

અન્ય વર્તુળ અને સમાન કે જુદી જુદી ત્રિજ્યા લઈ આ આકૃત્તિ ફરી કરો. તમે ફરીથી જોશો કે ∠QPY = ∠PRQ

હવે ∠QPX અને ∠PRQ માપો તમે ફરીથી જોશો કે આ ખૂણા પણ સમાન છે.

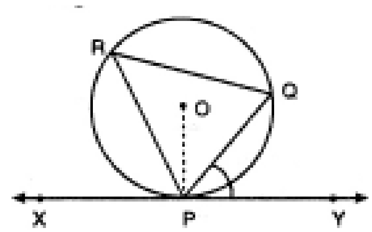
આમ આપણે કહી શકીએ કે :

વર્તુળના સ્પર્શકના સ્પર્શબિંદુ એ દોરેલી જીવા દ્વારા વિરુદ્ધ વૃત્ત ખંડોમાં રચાતો કોણ જીવા અને સ્પર્શક વચ્ચેના કોણ જેવડો હોય છે.

આ પરિણામ સામાન્ય રીતે વિરૂદ્ધ વૃત્ત ખંડોના ખૂણાની રીતે ઓળખાય છે.

હવે આપણે ઉપરના પરિણામનું પ્રતિપ્રમેય ચકાસીએ.

O કેન્દ્રવાળું વર્તુળ દોરો અને એક જીવા PQ દોરો અને આકૃત્તિ 20.23માં દર્શાવ્યા મુજબ વિરુદ્ધ વૃત્ત ખંડમાં ∠PRQ રચો. P બિદુંએ ∠QPR = ∠QRP દોરો રેખાખંડ PY ને બંન બાજુ લંબાવો જેથી XY રેખા રચાય OP જોડો અને ∠OPY માપો.



આકૃતિ . 17.23

તમે જાણયું તમને જણાશે કે ∠OPY = 90^0 જે દર્શાવે છે કે XY એ વર્તુળનો સ્પર્શક છે. જુદાં જુદાં વર્તુળો લઈ આ પ્રવૃત્તિ ફરી કરો. તમને તે જ પરિણામ મળશે. આમ, આપણે કહી શકીએ કે :

જો રેખા જીવા સાથે એવા કોણ રચે, જે વિરુદ્ધ વૃત્ત ખંડમાં જીવા દ્વારા રચાયેલ કોણને અનુક્રમે સમાન છે. તો રેખા વર્તુળનો સ્પર્શક હોય છે.

હવે આપણે તે દર્શાવવા કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ .

ઉદાહરણ :- **17.8 આકૃત્તિ 17.24માં** XY એ O કેન્દ્રવાળા

વર્તુળને સ્પર્શક છે. જો AOB એ વ્યાસ હોય અને $\angle PAB = 40^0$ હોય તો $\angle APX$ અને $\angle BPY$ શોધો.

ઉકેલ : વિરુદ્ધ વૃત્ત ખંડ પ્રમેય દ્વારા આપણે જાણીએ છીએ કે

$\angle BPY = ĐBAP$

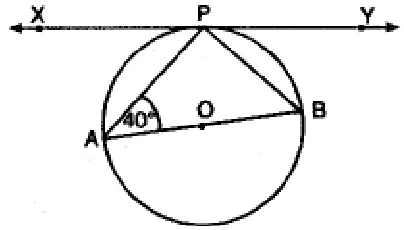
$\angle BPY = 40^o$

વળી $\angle APB = 90^o$ (અર્ધવૃત્તમાં અંગર્તકોણ)

અને, $\angle BPY + \angle APB + \angle APX = 180^o$ (રેખા પરના કોણ)

$\angle APX = 180^o - (\angle BPY + \angle APB)$

$= 180^o - (40^o + 90^o) = 50^o$



આકૃતિ . 17.24

ઉદાહરણ 17.9: આકૃતિ. 17.25, ABC એ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે. જેમાં AB = AC અને XY એ ΔABC ના પરિવૃત્તને સ્પર્શક છે. દર્શાવો કે XY પાયા BC ને સમાંતર છે.

ઉકેલ: ΔABC, AB = AC

$\therefore \quad \angle 1 = \angle 2$

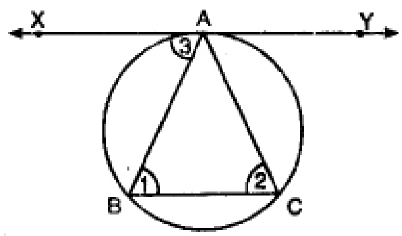
વળી XY એ A બિંદુએ વર્તુળનો સ્પર્શક છે.

$\therefore \quad \angle 3 = \angle 2$

$\therefore \quad \angle 1 = \angle 3$

પરંતુ આ યુગ્મકોણ છે.

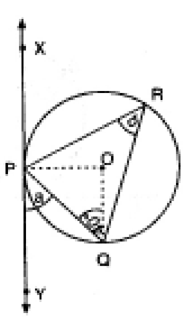
$\therefore \quad XY \parallel BC$



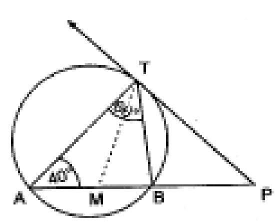
આકૃતિ . 17.25

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 17.3

1. વર્તુળના વિરિદ્ધ વૃત્તખંડમાં જીવા દ્વારા રચાતો કોણ આકૃત્તિ દ્વારા સમજાવો.
2. આકૃત્તિ 17.26માં XY એ O કેન્દ્રવાશા વર્તુળને P બિદું સ્પર્શે છે, જો $\angle OQP = 40^o$ હોય તો a અને b ની કિંમત શોધો.
3. આકૃત્તિ 17.27માં PT એ બાહ્ય બિદું P માંથી વર્તુળને સ્પર્શક છે વર્તુળની જીવા AB લંબાવવામાં આવે તો TP ને P માં મળે છે TA અને TB જોડવામાં આવે છે. અને TM એ $\angle ATB$ નો દ્વિભાજક છે.



આકૃતિ . 17.26



આકૃતિ .17.27

જો $\angle PAT = 40^o$ અને $\angle ATB = 60^o$, તો દર્શાવો કે PM = PT.

સારાંશ

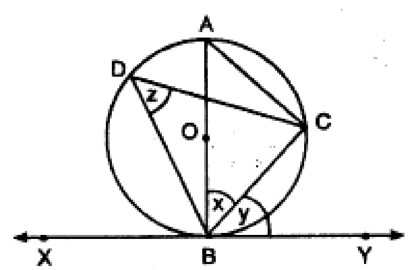
- વર્તુળને બે બિંદુઓમાં છેદતી રેખા વર્તુળની છેદિકા કહેવાય છે.
- વર્તુળને એક બિંદુએ સ્પર્શ કરતી રેખા વર્તુળને સ્પર્શક કહેવાય છે.
- સ્પર્શક એ છેદિકાની સીમાન્ત સ્થિતિ છે, જ્યારે બંને છેદિકાઓ એકકાર થાય છે.
- વર્તુળને સ્પર્શક એ સ્પર્શબિંદુ એ દોરીલી ત્રિજ્યાને લંબ છે.
- બાહ્ય બિંદુમાંથી વર્તુળને બે સ્પર્શક દોરી શકાય, જે સમાન લંઈના હોય છે.
- જો વર્તુળની બે જીવાઓ AB અને CD બિદું P (વર્તુળની અંદર અથવા બહાર) એ એકબીજાને છેદે તો

  $PA \times PB = PC \times PD$
- જો PAB એ વર્તુળને A અને B બિંદુએ છેદતી વર્તુળની છેદિકા હોય અને PT એ વર્તુળને T બિંદુએ સ્પર્શક હોય તો,

  $PA \times PB = PT^2$
- વર્તુળના સ્પર્શકના સ્પર્શબિંદુએ દોરેલી જીવા દ્વારા વિરુદ્ધ વૃત્તખંડોમાં રચાતા કોણ જીવા અને સ્પર્શક વચ્ચેના કોણ જેવડો હોય છે.
- જો રેખા જીવા સાથે એવા કોણ રચે, જે જીવા દ્વારા , વિરિદ્ધ વૃત્તખંડમાં રચાતા કોણને અનુક્રમે બરાબર હોય તો તે રેખા વર્તુળનો સ્પર્શક હોય છે. ત્

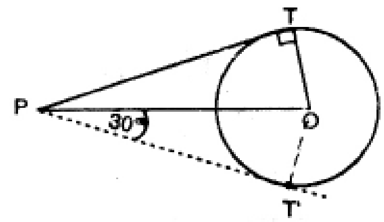
સત્રાંત સ્વાધ્યાય

1. આકૃત્તિમાં મદદથી વર્તુળની છેદિકા અને સ્પર્શ વચ્ચેનો તફાવત આપો.
2. પ્રવૃત્તિ દ્વારા દર્શાવો કે સ્પર્શક સ્પર્શ બિંદુએ દોરીલી ત્રિજ્યાને લંબરેખા છે.
3. આકૃત્તિ 17.28માં જો AC = BC અને AB એ ર્તુળમાં વ્યાસ છે. $\angle x$, $\angle y$ અને $\angle z$ શોધો,



આકૃતિ . 17.28

4. આકૃત્તિ 17.29માં OT = 7 સેમી અને OP = 25 સેમી, તો PT ની લંબાઈ શોધો. જો PT વર્તુળને બીજો સ્પર્શ હોય તો PT અને ∠POT શોધો,



આકૃતિ. 17.29

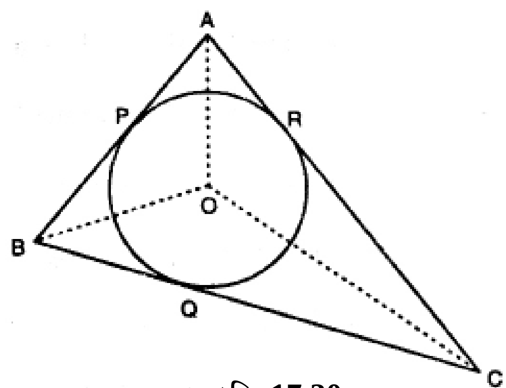
5. આકૃત્તિ 17.30માં ΔABC ની પરિમિતિ 27 સેમી છે. જો PA = 4 સેમી, QB = 5 સેમી તો QC ની લંબાઈ શોધો.

6. આકૃત્તિ 17.30માં જો ∠ABC = 70°

તો ∠BOC શોધો.

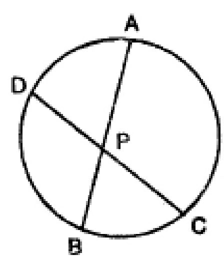
(સંકેત ∠OBC + ∠OCB = $\frac{1}{2}$

(∠ABC + ∠ACB)



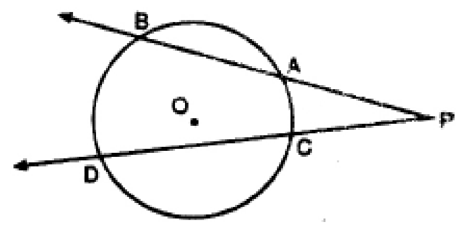
આકૃતિ. 17.30

7. આકૃત્તિ 17.31માં વર્તુળના અંદરના બિંદુ P આગળ છેદતી વર્તુળની બે જીવાઓ AB અને CD છે . જો PA = (x + 3) સેમી PB = (x – 3) સેમી અને PC = $5\frac{1}{3}$ સેમી તો, x શોધો.



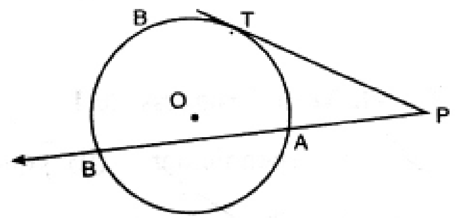
આકૃતિ. 17.31

8. આકૃત્તિ 17.32માં વવર્તુળની જીવાઓ BA અને DC વર્તુળની બહારના બિંદુ P આગળ છેદે છે. જો PA = 4 સેમી અને PB = 9 સેમી PC = x અને PD = 4x તો x ની કિંમત શોધો.



આકૃતિ 17.32

9. *આકૃત્તિ* 17.33*માં* PAB *એ છેદિકા છે, અને બાહ્ય બિંદુમાંથી* PT *એ વર્તુળને સ્પર્શક છે. જો* PT = x *સેમી* PA = 4 *સેમી અને* AB = 5 *સેમી, તો* x *શોધો,*



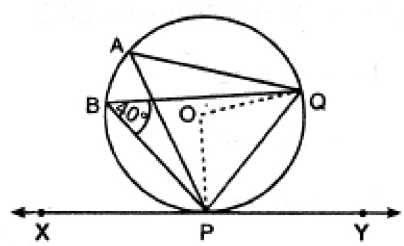
આકૃતિ 17.33

10. *આકૃત્તિ* 17.34*માં* O *વર્તુળનું કેન્દ્ર છે અને* $\angle PBQ = 40^\circ$ *નીચેના શોધો.*

(i) $\angle QPY$

(ii) $\angle POQ$

(iii) $\angle OPQ$



આકૃતિ 17.34

ઉત્તરો

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 17.1

1. (i) *લંબ* (ii) *સમાન* (iii) *છેદન બિંદુઓ*
   (iv) *બે* (v) *શૂન્ય*
2. 50^o, 50^o
3. 3 *સેમી*

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 17.2

1. 4.3 *સેમી* 2. 3 *સેમી* 3. 8 *સેમી*
4. 10 *સેમી* 4. 6 *સેમી*

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 17.3

2. $\angle a = \angle b = 50^o$

સત્રાંત સ્વાધ્યાય

3. $\angle X = \angle Y = \angle Z =$
4. PT = 24 cm; PT' = 24 cm, $\angle POT' = 60^o$
5. QC = 4.5 6. $\angle BOC = 125^o$
7. x = 5 8. x = 3
9. x = 6
10. (i) 40^o (ii) 80^o (iii) 50^o

નોંધ

18

રચનાઓ

પરિચય

ભૂમિતિ શીખવાનો એક હેતુ એ ચોકસાઈપૂર્વક આકૃત્તિઓ દોરવાનું કૈશલ્ય પ્રાપ્ત કરવું તે છે. ભૌમિતિક આકૃત્તિઓ જેવી કે ત્રિકોણ, ચોરસ અને વર્તુળ સીધી અને પરિકરની સહાયથી કેવી રીતે રચવી તે તમે શાખી ગયા છો. તમે 30^0, 90^0, 120^0 અને 45^0 ના ખૂણા રચ્યા છે. વળી, તમે રેખાખંડનો લંબદ્વિભાજક તેમજ કોણદ્વિભાજક દોર્યા છે.

આ પાઠમાં કેટલીક મહત્વની ભૌમિતિક રચવાનું શીખીશું.

હેતુઓ

આ પાઠ શીખ્યા પછી, અધ્યેતા :

- રેખાખંડને આંતરિક રીતે આપેલ પ્રમાણમાં વિભાગી શકશે.
- આપેલ ડેટા (વિગત) પરથી ત્રિકોણ રચી શકાશે છ
  (1) બાબાબા
  (2) બાખૂબા
  (3) ખૂબાખૂ
  (4) કાકબા
  (5) પરિમિતિ અને પાયાના કોણ
  (6) પાયો (આધાર), અન્ય બે બાજુઓનો સરવાળો / તફાવત અને એક આધાર કોણ
  (7) બે બાજુઓ અને આ બાજુઓ પૈકીની એકને અનુરૂપ મધ્યગા
- આપેલ ત્રિકોણને સમરૂપ ત્રિકોણ રચી શકાશે.
- વર્તુળના કેન્દ્રનો ઉપયોગ કરીને,
  (1) તેના બહારના બિંદુમાંથી વર્તુળને સ્પર્શક રચી શકશે.
  (2) તેની ઉપરના બિંદુમાંથી વર્તુળને સ્પર્શક રચી શકશે.

અપેક્ષિત પૂર્વજ્ઞાન

આપણે એવું માની લઈએ કે અધ્યેતા નીચેની રચનાઓ કરવા પરિકર અને સીધી પટ્ટીનો ઉપયોગ કેવી રીતે કરવો તે જાણે છે :

- 30^0, 45^0, 60^0, 90^0, 105^0, 120^0 ના ખૂણા
- રેખાખંડનો લંબદ્વિભાજક
- આપેલ કોણનો દ્વિભાજક

18.1 રેખાખંડનું આપેલ પ્રમામાં આંતરિક રીતે વિભાજન

રચના -1 : રેખાખંડને આંતરિક રીતે આપેલ ગુણોત્તરમાં વિભાગવો.

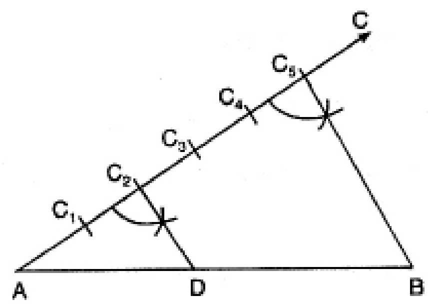
રેખાખંડ AB આપેલ છે. તમારે તેને આંતરિક 2 : 3 પ્રમાણમાં વિભાગવાનો છે. આપણે નીચેનાં સોપાનો અનુસરીએ :

સોપાન-1 : AB સાથે લઘુકોણ રચતુ AC કિરણ દોરો.

સોપાન-2 : A થી શરૂ કરીને, બિંદુ A થી સમાન અંતરે 5 બિંદુઓ C_1, C_2, C_3, C_4 અને C_5 અંકિત કરો.

સોપાન-3 : C_5 અને B જોડો.

સોપાન-4 : C_2 (અર્થાત્ બીજા બિંદુ) માંથી C_5B ને સમાંતર C_2D દોરો, જે AB ને D માં મળે.



આકૃતિ 18.1

એટલે આકૃતિ 18.1 માં દર્શાવ્યા મુજબ, D એ આવશ્યક બિંદુ છે જે AB ને આંતરિક રીતે 2 : 3 પ્રમાણમાં વિભાગે છે.

તમારી પ્રગતિ ચકાશો 18.1

1. 7 સેમી લંબાઈનો રેખાખંડ દોરો. તેને આંતરિક રીતે 3 : 4 પ્રમાણમાં વિભાગો. દરેક ભાગ માપો. વળી રચનાનાં સોપાનો લખો.

2. રેખાખંડ PQ = 8 સેમી દોરો. તે પર બિંદુ R એવું શોધો કે $PR = \frac{3}{4} PQ$

   (સંકેત : રંખાખંડ PQ ને આંતરિક રીતે 3 : 1 પ્રમાણમાં વિભાગો.)

18.2 ત્રિકોણ - રચના

રચના - 2 : *ત્રણ બાજુઓ આપેલ હોય ત્યારે ત્રિકણ રચવો. (બાબાબા)*

ધારો કે તમારે Δ ABC *રચવાનો છે જેમાં* AB = 6 *સેમી,* AC = 4.8 *સેમી અને* BC=5 *સેમી આપણે નીચેનાં સોપાનો અનુસરીએ :*

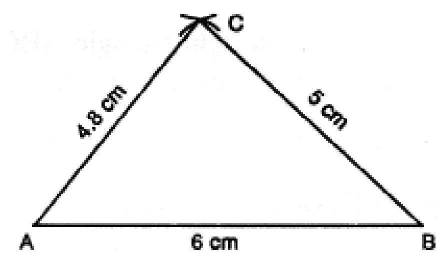
સોપાન-1 : AB = 6 *સોમી દોરો.*

સોપાન 2: *કેન્દ્ર* A *અને ત્રિજ્યા* 4.8 *સેમી લઈ ચાપ દોરો*

સોપાન 3: *કેન્દ્ર* B *અને ત્રિજ્યા* 5 *સેમી લઈ બીજું ચાપ દોરો. જે સોપાન* 2 *ના ચાપને* C *માં છેદે.*

સોપાન 4: AC *અને* BC *જોડો.*

આમ, Δ ABC *એ આવશ્યક ત્રિકોણ છે.*



આકૃતિ ૧૮.૨

નોંધ : *તમે* BC *કે* AC *ને આધાર લઈ શકો છો.*

રચના 3: *બે બાજુઓ અને અંતર્ગત કોણ આપેલ હોય ત્યારે ત્રિકોણ રચવો. (બાખૂબા)*

ધારો કે તમારે ત્રિકોણ PQR *રચવો છે, જેમાં* PQ = 5.6 *સેમી,* QR = 4.5 *સેમી અને* -- PQR = 60^0 *ત્રિકોણ રચવા માટે આપણે નીચેના સોપાનો અનુસરીએ :*

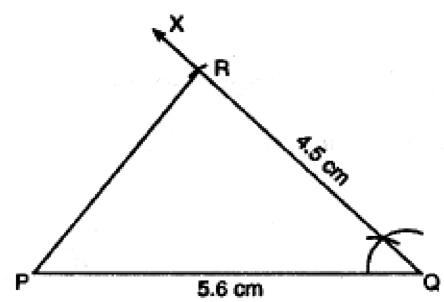
સોપાન 1: PQ = 5.6 *સેમી દોરો.*

સોપાન 2: Q *આગળ* -- PQX = 60^0 *રચો.*

સોપાન 3: *કેન્દ્ર* Q *અને ત્રિજ્યા* 4.5 *સેમી લઈ* QX *ને* R *માં છેદતું ચાપ દોરો.*

સોપાન 4: PR *જોડો.*

એટલે -- PQR *એ આવશ્યક ત્રિકોણ છે.*



આકૃતિ ૧૮.૩

(**નોંધ :** *તમે* PQ *ને બદલે* QR = 4.5 *સેમીને આધાર તરીકે લઈ શકો.)*

રચના 4: *જ્યારે બે ખૂણા અને અંતર્ગત બાજુ આપેલ હોય, ત્યારે ત્રિકોણ રચવો. (ખૂબાખૂ) ચાલો, આપણે* Δ ABC *રચીએ, જેમાં* $\angle$ B = 60^0, $\angle$ C = 45^0, *અને* BC = 4.7 *સેમી ત્રિકોણ રચવા આપણે સોપાન અનુસરીએ :*

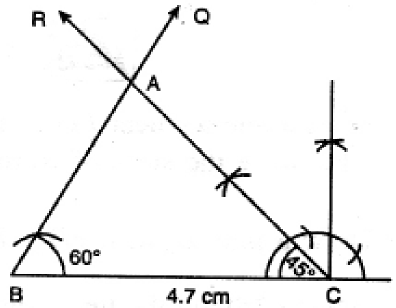
સોપાન 1: BC = 4.7 *સેમી દોરો*

સોપાન 2: B *આગળ,* ΔCBQ = 60^0 *રચો.*

સોપાન 3: C *આગળ* BCQ = 45^0 *રચો, જે* A *આગળ* BQ *ને મળે.*

આમ, Δ ABC *એ આવશ્યક ત્રિકોણ છે.*

નોંધ : *જ્યારે બે ખૂણા એક (અંતર્ગત બાજુ સિવાયની) કોઈ બાજુ આપેલ હોય, ત્યારે આપણે (ત્રિકોણના કોણના સરવાળાના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરીએ) ત્રીજો કોણ શોધીએ છીએ અને પછી ત્રિકોણ રચવા ઉપરની પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરીએ છીએ.*



આકૃતિ ૧૮.૪

રચના 5: *જ્યારે કર્ણ અને એક બાજુ આપેલ હોય, ત્યારે કાટકોણ ત્રિકોણ રચવો.*

ચાલો, આપણે કાટકોણ ત્રિકોણ ABC *રચીએ, જ્યાં કાટખૂણો* B *આગળ,*

બાજુ BC = 3 *સેમી અને કરણ* AC = 5 *સેમી*

ત્રિકોણ રચવા આપણે નીચેનાં સોપાનો અનુસરીએ :

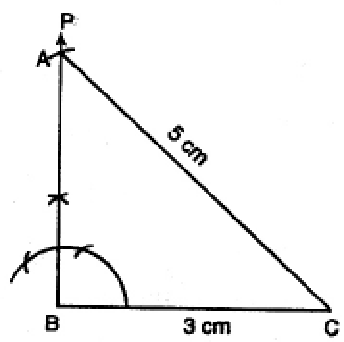
સોપાન 1: BC = 3 *સેમી દોરો*

સોપાન 2: B *આગળ,* $\angle$ CBP = 90^0 *રચો.*

સોપાન 3: C *કેન્દ્ર લઈ અને* 5 *સેમી ત્રિજ્યા લઈ* BP *ને* A *માં કાપતું ચાપ દોરો.*

સોપાન 4: AC *જોડો.*

Δ ABC *એ આવશ્યક ત્રિકોણ છે.*



આકૃતિ.૧૮.૫

રચના 6: *જ્યારે પરિમિતિ અને બે આધાર કોણ આપેલ હોય ત્યારે ત્રિકોણ રચવો.*

ધારો કે આપણે એવો ત્રિકોણ રચવો છે જેની પરિમિતિ 9.5 *સેમી અને આધાર ખૂણા* 60^0 *અને* 45^0 *હોય. ત્રિકોણ રચવા, નીચાનાં સોપાનો અનુસરીએ :*

સોપાન 1: XY = 9.5 *સેમી દોરો.*

સોપાન 2: X *આગળ* $\angle$ YXP = 30^0 *રચો. (જે -- છે.)*

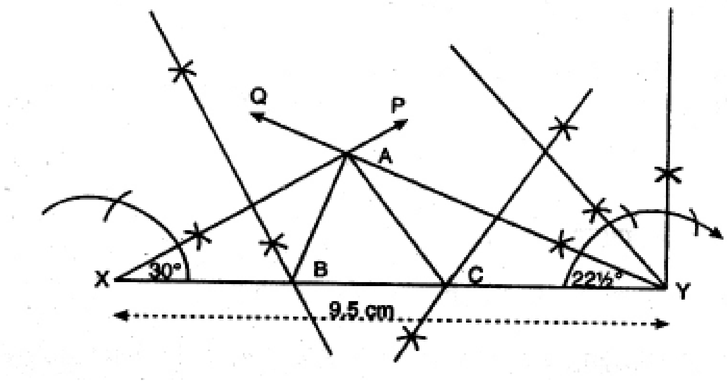
સોપાન 3: Y *આગળ* $\angle$ XYQ = -- *રચો. (જે -- છે.)*

XP *અને* YQ, A *આગળ છેદે.*

સોપાન 4: XA *નો લંબ દ્વિભાજક દોરો, જે* XY *ને* B *માં છેદે.*

સોપાન 5: YA *નો લંબ દ્વિભાજક દોરો, જે* XY *ને* C *માં છેદે.*

સોપાન 6:



આકૃતિ. 18.6

AB અને AC જોડો.

Δ ABC એ આવશ્યક ત્રિકોણ છે.

રચના 7: *જ્યારે બે બાજુઓનો સરવાળો , ત્રીજી બાજુ અને ત્રિકણની ત્રીજી બાજુ પરનો કોઈ ખૂણો આપેલ હોય, ત્યારે ત્રિકોણ રચવો.*

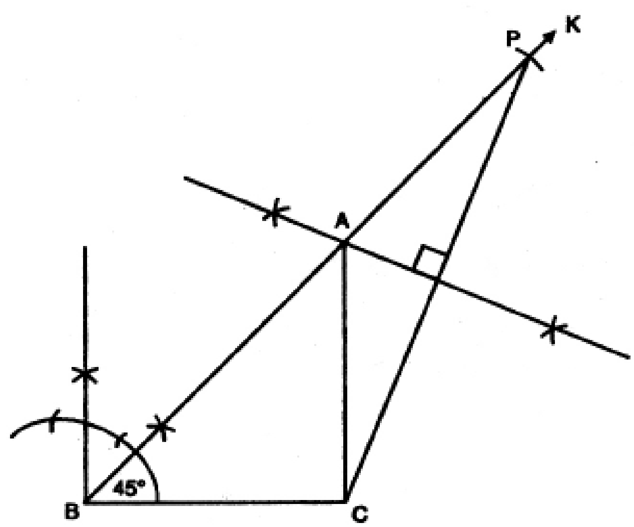
ધારો કે તમારે ત્રિકોણ ABC *રચવાનો છે.*

જ્યારે AB + AC = 8.2 cm, BC = 3.6 cm *અને* $\angle$ B = 45°

ત્રિકોણ રચવા આપણે નીચેના સોપાનો અનુસરીએ.

સોપાન 1: BC = 3.6 *સેમી દોરો.*

સોપાન 2: B *આગળ* $\angle$ CBK = 45° *રચો*



આકૃતિ. 18.7

સોપાન 3: BK *માંથી* BP = 8.2 *સેમી કાપો.*

સોપાન 4: CP જોડો

સોપાન 5: CP નો લંબ દ્વિભાજ દોરો, જે BP ને A છેદે.

સોપાન 6: AC જોડો.

Δ ABC એ આવશ્યક ત્રિકોણ છે.

રચના 8: જ્યારે બે બાજુઓનો તફાવત, ત્રીજી બાજુ અને ત્રીજી બાજુ પરનો એક ખૂણો આપેલ હોય, ત્યારે ત્રિકોણ રચવો.

ધારો કે આપણે ΔABC રચવો છે. જેમાં BC = 4 સેમી, $\angle B = 60^0$ AB - AC = 12 સેમી ત્રિકોણ રચવા માટે આપણે નીચેના સોપાનો અનુસરીએ.

સોપાન 1: BC = 4 સેમી દોરો.

સોપાન 2: $\angle$ CBP = 60^0 રચો.

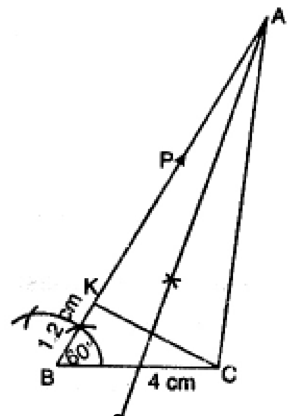
સોપાન 3: BP માંથી BK = 1.2 સેમી કાપો.

સોપાન 4: CK જોડો.

સોપાન 5: CK નો લંબ દ્વિભાજક દોરો, જે લંબાવેલ BP ને A આગળ મળે છે.

સોપાન 6: AC જોડો.

ΔABC એ આવશ્યક ત્રિકોણ છે.



આકૃતિ ૧૮.૮

રચના 9: જ્યારે બે બાજુઓ અને તે પૈકીની એક બાજુને અનુરૂપ મધ્યગા આપેલ હોય, ત્યારે ત્રિકોણ રચવો. ધારો કે તમારે Δ ABC રચવો છે, જેમાં AB = 6 સેમી, BC = 4 સેમી, અને મધ્યગા CD = 3.5 સેમી છે.

આપણે નીચેનાં સોપાનો અનુસરીએ :

સોપાન 1: AB = 6 સેમી દોરો.

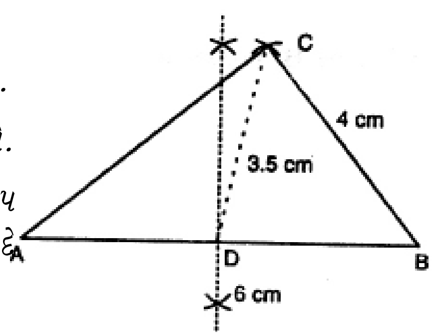
સોપાન 2: AB નો લંબ દ્વિભાજ દોરો, જે AB ને D માં મળે.

સોપાન 3: D કેન્દ્ર લઈ ત્રિજ્યા 3.5 સેમી લઈ એક ચાપ દોરો.

સોપાન 4: B કેન્દ્ર લઈ અને ત્રિજ્યા 4 સેમી લઈ બીજુ ચાપ દોરો, જે સોપાન - 3 ના ચાપને C માં છેદે છે.

સોપાન 5: AC અને BC જોડો.

આમ, ΔABC એ આવશ્યક ત્રિકણ છે.



આકૃતિ 18.9

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 18.2

1. ΔDEF રચો, આપેલ છે કે $DE = 5.1$ સેમી, $EF = 4$ સેમી અને $DF = 5.6$ સેમી રચનાનાં સોપાનો પણ લખો.

   નોંધ : તમારે બાકીના દરેક કૂટપ્રશ્નોમાં રચનાનાં સોપાનો લખવાનાં છે.

2. ΔPQR રચો, આપેલ છે કે $PR = 6.5$ સેમી, $\angle P = 120^\circ$ અને $PQ = 5.2$ સેમી
3. ΔABC રચો, આપેલ છે કે $BC = 5.5$ સેમી, $\angle B = 75^\circ$ અને $\angle C = 45^\circ$.
4. કાટકોણ ત્રિકોણ રચો, જેમાં એક બાજુ 3 સેમી અને કર્ણ 7.5 સેમી હોય.
5. કાટકોણ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોમ રચો જેમાં બાજુમાંની એક બાજુ 4.8 સેમી છે.
6. ΔABC રચો, આપેલ છે કે $AB + BC + AC = 10$ સેમી, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 30^\circ$.
7. ΔABC રચો, જેમાં $AB = 5$ સેમી, $\angle A = 60^\circ$, $BC + AC = 9.8$ સેમી
8. ΔLMN રચો, જેમાં $\angle M = 30^\circ$, $MN = 5$ સેમી અને $LM - LN = 1.5$ સેમી
9. ત્રિકોણ PQR રચો, જેમાં $PQ = 5$ સેમી, $QR = 4.2$ સેમી અને મધ્યગા $RS = 3.8$ સેમી

18.3 આપેલ માપ પ્રમાણે આપેલ ત્રિકોણને સમરૂપ ત્રિકોણની રચના :

આપેલ માપ પ્રામાણે આપેલ ત્રિકોણને સમરૂપ ત્રિકેણની રચના (બાજુઓના આપેલા ગુણોત્તર પ્રમાણે આપેલા ત્રિકોણને સમરૂપ ત્રિકોણ રચવો)

રચના : 10 ΔABC ને સમરૂપ હોય તેવા ત્રિકોણની રચના કરો, જેની અનુવર્તી બાજુઓ 3/5 ભાગની હોય.

રચનાના મુદ્દા :

સોપાન : 1 આપેલ ABC ની BC બાજુ સાથે, શિરોબિંદુ A ની વિરુદ્ધ દુશામાં લઘુકોણ બનાવતુ કિરણ BX દોરો.

સોપાન : 2 કિરણ BX પર પાંચ બિંદુઓ B_1, B_2, B_3, B_4 અને B_5 એવાં મેળવો કે જેથી $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5$ થાય.

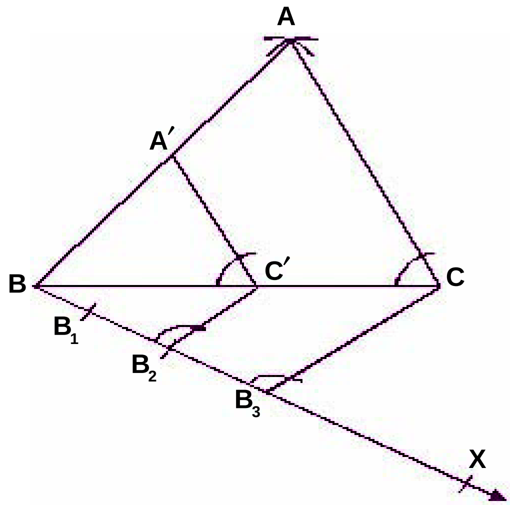
સોપાન : 3 B_5C જોડો. B_3 માંથી B_5C ને સમાંતર રેખા દોરો જે BC ને કાપે ત્યાં C` નામ આપો.

સોપાન : 4 C` માંથી AC ને સમાંતર રેખા દોરો, જે AB ને કાપે ત્યાં A` નામ આપો.

આમ, $\Delta A`BC`$ એ માગ્યા મુજબનો ત્રિકોણ બનશે.

એટલે કે $\frac{A`B}{AB} = \frac{BC`}{BC} = \frac{A`C`}{AC} = \frac{3}{5}$ થશે.

રચના 11: 5 સેમી, 6 સેમી અને 7 સેમી બાજુઓવાળો ત્રિકોણ દોરો. આ ત્રિકોણને સમરૂપ હોય એવો બીજો ત્રિકોણ રચો જેની બાજુઓ $\frac{2}{3}$ ભાગીની હોય.



આકૃતિ ૧૮.૧૧

રચનાના મુદ્દા :

સોપાન : 1 રેખાખંડ BC = 7 સેમી દોરો.

સોપાન : 2 B ને કેન્દ્ર લઈ 6 સેમીની ત્રિજ્યા વડે એક ચાપ દોરો અને C ને કેન્દ્ર લઈ 5 સેમીની ત્રિજ્યા વડે બીજું ચાપ દોરો. બંને ચાપના છેદબિંદુને A નામ આપો.

સોપાન : 3 AB અને AC જોડીને ΔABC મેળવો.

સોપાન : 4 BC સાથે લઘુકોણ બનાવતું BX કિરણ દોરો, જે A ની વિરુદ્ધ બાજુઓ હોય.

સોપાન : 5 BX કિરણ પર B_1, B_2 અને B_3 બિંદુઓ મેળવો કે જેથી $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$ થાય.

સોપાન : 6 B_3C જોડો. B_2 માંથી B_3C ને સમાંતર રેખા દોરો જે BC ને કાપે ત્યાં C\` નામ આપો.

સોપાન : 7 C\` માંથી CA ને સમાંતર રેખા દોરો, જે BA ને કાપે ત્યાં A\` નામ આપો.

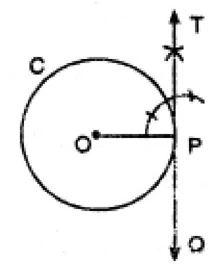
આમ, Δ A\`BC\` એ માગ્યા મુજબનો ત્રિકોણ બનશે.

એટલે કે $\frac{A`B}{AB} = \frac{BC`}{BC} = \frac{A`C`}{AC} = \frac{2}{3}$ થશે.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 18.3

1. 4 સેમી,5 સેમી અને 7 સેમી બાજુવાળવો ત્રિકેણ દોરો. આ ત્રિકોણને સમરૂપ એવો બીજો ત્રિકોણ રચોજેની બાહુઓ મૂળ ત્રિકોણની અનુવર્તી બાજુઓના $\frac{3}{4}$ ભાગની હોય,.

2. BC = 7 સેમી, AB = 5 સેમી અને $\angle ABC = 60^{o}$ હોય એવો Δ ABC દોરો. ABC ને સમરૂપ હોય એવો ત્રિકોણ રચો જેની બાજુઓ Δ ABC. ની બાજુઓના $\frac{4}{5}$ ભાગની હોય.



આકૃતિ ૧૮.૧૨

3. એક કાટકોણ ત્રિકોણ દોરો જેની કાટખૂણો બનાવતી બાજુઓ 5 સેમી અને 6 સેમી હોય. આ ત્રિકોણને સમરૂપ ત્રિકોણ રચો જેની બાજુઓનું પ્રમાણમાપ $\frac{4}{5}$ હોય.

4. પાયો BC = 6 સેમી, $\angle ABC = 60^o$ અને AB = 4.5 સેમી હોય તેવો Δ ABC દોરો. ABC ને સમરૂપ Δ A`BC` આ જેમાં અનુવર્તી બાજુઓનું પ્રમાણમાપ $\frac{5}{6}$. હોય.

18.4 વર્તુળને સ્પર્શકોની રચના

રચના 12: આપેલ વર્તુળને તેની પરના બિંદુએ વર્તુળના કેન્દ્રનો ઉપયોગ કરીને સ્પર્ધક દોરવો.

ધારો કે C એ કેન્દ્ર O વાળું આપેલ વર્તુળ છે અને તેની પર P એક બિંદુ છે. તમારે વર્તુળને સ્પર્ધક દોરવાનો છે.

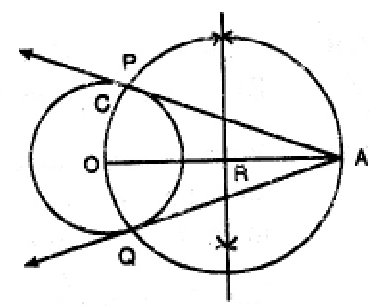
આપણે નીચેનાં સોપાન અનુસરીએ :

સોપાન 1 : OP જોડો.

સોપાન 1 : P આગળ, PT $\perp$ OP દોરો.

સોપાન 3 : TP ને Q સુધી લંબાવો.

આમ, TPQ એ આવશ્યક સ્પર્ધક છે.



આકૃતિ ૧૮.૧૩

રચના 13 : વર્તુળને તેની બહારના આપેલ બિંદુમાંથી સ્પર્ધક દોરવા.

ધારો કે C આપેલ વર્તુળ છે અને A તેની બહાર બિંદુ છે. તમારે બિંદુ A માંથી વર્તુળને સ્પર્શક દોરવાના છે, તે માટે આપણે નીચેનાં સોપાનો અનુસરીએ :

સોપાન 1 : OA જોડો

સોપાન 2 : OA નો કાટકોણ દ્વિભાજક દોરો. ધારો કે R એ OA મધ્યબિંદુ છે.

સોપાન 3 : R કેન્દ્ર અને RO જેટલી ત્રિજ્યા લઈ વર્તુળ દોરો, જે આપેલ વર્તુળોને P અને Q માં છેદે.

સોપાન 4 : AP અને AQ જોડો.

આમ, AP અને AQ આવશ્યક સ્પર્ધક છે.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 18.4

1. 3 સેમી ત્રિજ્યાનું વર્તુળ દોરો. વર્તુળ પર એક બિંદુ O લો. A આગળ વર્તુળના કેન્દ્રનો ઉપયોગ કરી વર્તુળને સ્પર્શક દોરો. વળી રચનાનાં સોપાનો લખો.
2. 2.5 સેમી ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દોરો. વર્તુળની બહારના બિંદુ P માંથી વર્તુળને બે સ્પર્શકો PQ અને PR દોરો. PQ અને PR ની લંબાઈ સમાન છે તે ચકાસો. વળી રચનાનાં સોપાનો લખો.

સત્રાંત સ્વાધ્યાય

1. રેખાખંડ PQ = 8 સેમી લંબાઈનો દોરો. તેને આંતરિક રીતં ગુણોત્તર 3:5 માં વિભાગો. વળી રચનાનાં સોપાનો લખો.

   નોંધ : તમારે નીચેના કૂટપ્રશ્નોમાં દરેકમાં રચનાનાં સોપાનો પણ લખવાનાં છે :

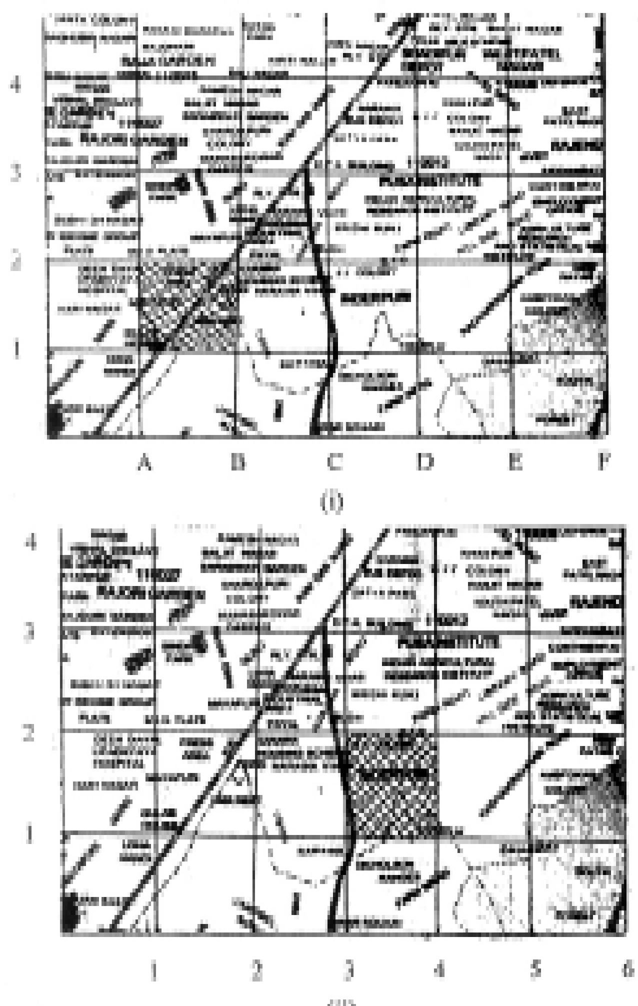
2. રેખાખંડ AB = 6 સેમી દોરો. AB પર એક બિંદુ C એવું શોધો કે AC : CB = 3 : 2 AC અને CB માપો.
3. 14 પરિમિતિ અને પાયા કોણ 60^0 અને 90^0 હોય, તેવો ત્રિકોણ રચો.
4. કાટકોણ ત્રિકોણ રચો જેનો કર્ણ 8 સેમી હોય અને તેની બીજી બે બાજુઓ પૈકીની એક 5.5 સેમી હોય.
5. ΔABC રચો, જેમાં BC = 3.5 સેમી, AB + AC = 8 સેમી અને ĐB = 60^o.
6. ΔABC રચો, જેમાં AB = 4 સેમી ĐA = 45^o અને AC – BC = 1 સેમી.
7. ΔPQR રચો, જેમાં PQ = 5 સેમી, PR = 5.5 સેમી અને પાયો QR = 6.5 સેમી હોય. ΔPQR ને સમરૂપ બીજો P\`QR\` એવો રચો કે જેની અનુવર્તી બાજુઓ ΔPQR ની બાજુઓથી $\frac{5}{7}$ ગણી થાય.
8. 5 સેમી, 12 સેમી અને 13 સેમી બાજુઓવાળો કાટકોણ ત્રિકોણ દોરો. આ ત્રિકોણ સમરૂપ હોય એવો બીજો ત્રિકોણ રચો જેની અનુવર્તી બાજુઓ $\frac{5}{6}$ ગણી હોય.
9. 6 સેમી વ્યાસવાળું વર્તુળ દોરો. કેન્દ્રથી 6 સેમી દૂર આવેલા વર્તુળની બહારના બિંદુ P માંથી વર્તુળને બે સ્પર્શકો દોરો.
10. AB=8 સેમી દોરો. A ને કેન્દ્ર લઈ 4 સેમીની ત્રિજ્યા વડે એક વર્તુળ દોરો અને B ને કેન્દ્ર લઈ 3 સેમીની ત્રિજ્યા વડે બીજુ વર્તુળ દોરો. A થી બીજા વર્તુળને અને B થી પહેલા વર્તુળને સ્પર્શકો દોરો.

19

યામ ભૂમિતિ

પરિચય

કોઈ મોટા નકશામાં ગામ કે રસ્તો અને તેનું સ્થાન નક્કી કરવાના કૂટપ્રશ્નમાં સારી એવી ખોજ માંગી લે છે, પરંતુ નકશાને યોગ્ય કદવાળા ચોરસમાં વિભાજન કરવાથી આ કામગીરી સરળ કરી શકાય. દરેક ચોરસ એક અક્ષર અને એક સંખ્યા અથવા બે સંખ્યાઓ, જેમાંની એક નકશાનું સ્તંભોમાં ઊર્ધ્વ વિભાજન અને બીજી હારબંધ સમક્ષિતિજ વિભાજન સાથે સંબંધિત છે તે દ્વારા ઓળખાય છે.



આકૃતિ 19.1

ઉપરની આકૃતિ 19.1 (1) માં, આપણે નકશા પર છાયાંક્તિ ચોરસ સંકેત (કોડ) (B, 2) અથવા (4, 2) દ્વારા દર્શાવી શકીએ. (જુઓ આકૃતિ 19.1 (2)). સંકેત માટે વપરાતું સંખ્યાયુગ્મ ક્રમયુક્ત યુગ્મ કહેવાય છે. જો આપણે અમુક શહેરનું સંકેતીકરણ જાણીએ તો નકશા પર છાયાંક્તિ ચોરસમાં તેનું સ્થાન દર્શાવી શકીએ. તો પણ આપણે તેનું ચોક્કસ સ્થાન જાણી ન શકીએ. સમતલમાં અતિ ચોક્કસપણે બિંદુનું સ્થાન નક્કી કરવાની પદ્ધતિ ફ્રેંચ ગણિતશાસ્ત્રી અને દાર્શનિક રેને ડેસ્કાટ (15-96-1650) એ આપી.

આમાં, સમતલમાં બિંદુ સંખ્યાઓના ક્રમયુક્ત યુગ્મ વડે દર્શાવાય છે, જેને બિંદુના કાર્તેઝિય યામ કહે છે.

આ પાઠમાં આપણે બિંદુના કાર્તેઝિય યામ સમતલમાં બે બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર અને ત્રિકોણના ગુરુત્વકેન્દ્રનું વિભાગીય સૂત્ર તેમજ યામ વિશે વિસ્તારથી શીખીશું.

હેતુઓ

આ પાઠ શીખ્યા પછી, અધ્યેતા :

- સમતલમાં જુદાં જુદા બિંદુઓનું સ્થાન નક્કી કરી શકાશે.
- જેમનાં યામ આપ્યાં હોય તેવાં બે જુદા જુદાં બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર શોધી શકશે.
- બિંદુ કે જે બે બિંદુઓને જોડતા રેખાખંડને આંતરિક રીતે આપેલ ગુણોત્તરમાં વિભાગે છે તેના યામ શોધી શકશે.
- બે બિંદુઓને જોડતા રેખાખંડના મધ્યબિંદુંના યામ શોધી શકશે.
- આપેલ શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણના ગુરુત્વકેન્દ્રના યામ શોધી શકશે.
- ઉપરની સંકલ્પનાઓ પર આધારિત કૂટપ્રશ્નો ઉકેલી શકશે.

અપેક્ષિત પૂર્વજ્ઞાન

- સંખ્યા રેખાનો ખ્યાલ
- સંખ્યાઓ પર મૂળભૂત પ્રક્રિયાઓ
- કાટકોણ ત્રિકોણના ગુણધર્મ

19.1 યામ પદ્ધતિ

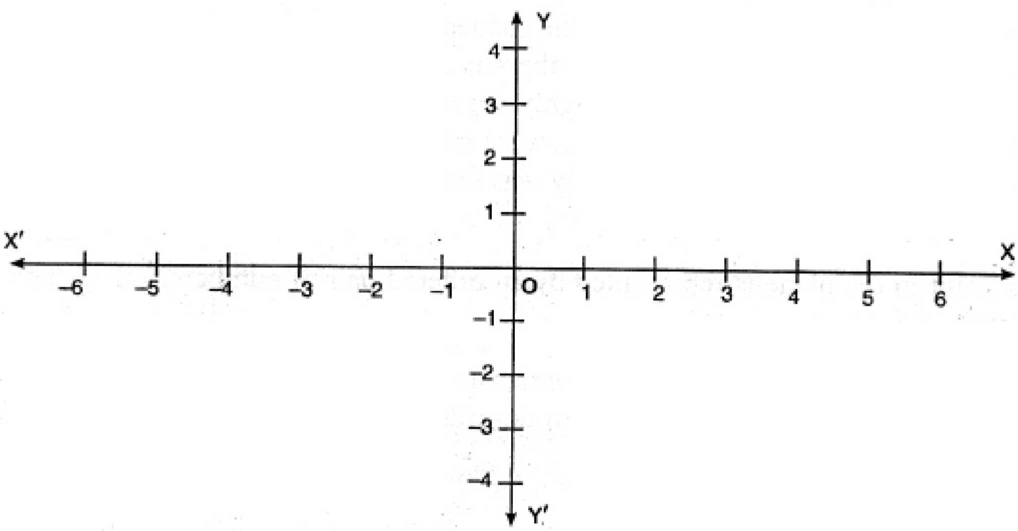
તમે પાઠ 5માં બે ચલ સુરેખ સમીકરણનો આલેખ દોરતાં શીખી ગયા છો.

સમતલમાં કોઈ એક બિંદુનું સ્થાન બે સદંર્ભ ધરીઓથી તેના અંતરના સંદર્ભમાં નક્કી કરવામાં આવે છે. આ ધરીઓ સામાન્ય રીતે અંકિત સંખ્યા રેખાઓ XOX' અને YOY' જે O બિંદુ આગળ એકબીજીને કાટખૂણે છે તે રીતે દોરવામાં આવે છે. (જુઓ આ. 19.2)

સમક્ષિતિજ આડી સંખ્યા રેખા XOX', x- ધરી (અક્ષ) કહેવાય છે અને ઊર્ધ્વ-ઊભી સંખ્યા રેખા YOY', Y- ધરી કહેવાય છે. બંને ધરી એકબીજીને બિંદુ O માં છેદે છે તેને ઉગમ (કે ઊગમ) બિંદુ કહે છે. બન્ને ધરીઓવાળી પદ્ધતિને લંબચોરસીય યામ પદ્ધતિ કહે છે.

નોંધી લઈએ કે, x - ધરીની ધન દિશા ઉગમ બિંદુ O થી જમણી તરફ OX એમ અને ઋણ દિશા ઉગમ બિંદુ O થી ડાબી તરફ OX' એમ લેવામાં આવે છે.

તે જ પ્રમાણે ઉગમ બિંદુ O થી ઉપરનો y - ધરીનો ભાગ અર્થાત્ બાજુ OY ધન તરીકે ગણવામાં આવે છે. અને ઉગમ બિંદુ O થી નીચેનો ભાગ અર્થાત્ બાજુ OY' ઋણ તરીકે ગણવામાં આવે છે.

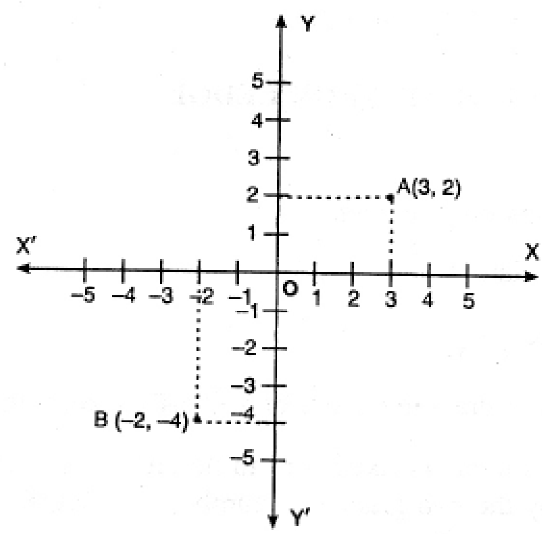


આકૃતિ 19.2

19.2 બિંદુના યામ

બિંદુનું સ્થાન બે સંખ્યાઓ જેમને યામ કહે છે તે દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે, જે બે ધરીઓથી બિંદુના અંતર દ્વારા નિર્ધારિત થાય છે. પરિપાટી મુજબ, પ્રથમ સંખ્યા x- યામ (કોટિ) હંમેશાં y ધરીથી અંતર દર્શાવે છે અને બીજી સંખ્યા y યામ (ભુજ) x ધરીથી અંતર દર્શાવે છે.

ઉપરની આકૃતિ 19.3માં, બિંદુઓ A અને B નાં યામ અનુક્રમે (3, 2) અને (-2, -4) છે.



આકૃતિ 19.3

તમે કહી શકો કે બિંદુ A(3, 2) નું y ધરીથી અંતર 3 એકમ છે અને x ધરીથી 2 એકમ છે. પરિપાટી મુજબ બિંદુનાં યામ ક્રમયુક્ત

યુગ્મ તરીકે લખાયર છે. અર્થાત્ (x યામ, y યામ)

બિંદુ A (3, 2) પરથી એ સ્પષ્ટ છે કે x યામ 3 છે અને y યામ 2 છે. તે જ પ્રમાણે બિંદુ B (-2, -4) ના x યામ અને y યામ અનુક્રમે (2) અને (-4) છે.

સામાન્યત : બિંદુ P(x, y) ના યામમાં એવુ ગર્ભિત છે કે y ધરીથી P નું અંતર x એકમ છે અને x ધરીથી તેનું y એકમ છે.

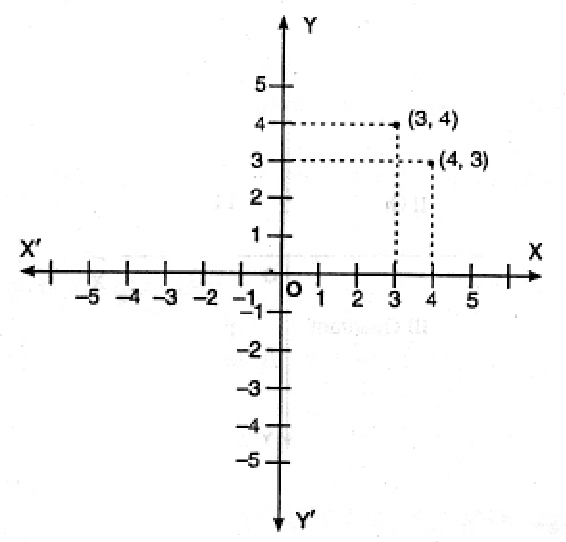
ધ્યાન રાખો કે ઉગમ બિંદુ O ના યામ (0, 0) છે. x ધરી પર દરેક બિંદુના y યામ 0 છે અને y ધરી પર દરેક બિંદુના x યામ 0 છે.

સામાન્યત : x ધરી પર ઉગમ બિંદુની જમણી તરફ આવેલ દરેક બિંદુના યામ (a, 0) છે અને ડાબી તરફના બિંદુના યામ (-a, 0) છે, જ્યાં a શૂન્યેતર ધન સંખ્યા છે.

તે જ પ્રમાણે y ધરી પર x ધરીની ઉપરના તથા નીચેના કોઈ બિંદુના y યામ અનુક્રમે (0, b) અને (0, -b) હશે, જ્યાં b એ શૂન્યેતર ધન સંખ્યા છે.

તે એ પણ ધ્યાન રાખો કે લંબચોરસીય યામ પદ્ધતિમાં બિંદુઓ (x, y) અને (y, x) ના સ્થાન સમાન નથી.

ઉદાહરણાર્થ, બિંદુઓ (3, 4) અને (4, 3) નાં સ્થાન આકૃતિ 19.4 દર્શાવવામાં આવેલ છે.



આકૃતિ 19.4

ઉદાહરણ 19.1 : નીચેના દરેક બિંદુમાં x અને y યામ લખો.

(અ) (1, 1) (બ) (-3, 2) (ક) (-7, -5) (ડ) (2, -6)

ઉકેલ (અ) x યામ 1 છે.
y યામ 1 છે.

(બ) x યામ -3 છે.
y યામ 2 છે.

(ક) x યામ -7 છે.　　　(ડ) x યામ 2 છે.
　　y યામ -5 છે.　　　　　y યામ -6 છે.

ઉદાહરણ 19.2 : નીચેના દરેક બિંદુ માટે y અને x ધરીથી અનુક્રમે અંતરે લખો :

(અ) A (3, 4)　(બ) B (-5, 1)　(ક) C (-3, -3)　(ડ) D (8, -9)

ઉકેલ : (અ) y ધરીથી બિંદુ A નું અંતર 3 એકમ છે અને x ધરીથી 4 એકમ છે.

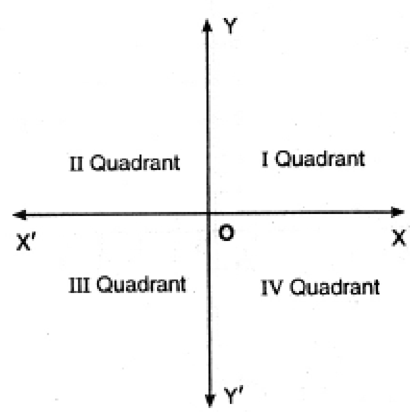
(બ) y ધરીથી બિંદુ B નું અંતર ઉગમ બિંદુથી ડાબી તરફ 5 છે અને x ધરીથી 1 એકમ છે.

(ક) y ધરીથી બિંદુ c નું અંતર ઉગમ બિંદુંની ડાબી તરફ 3 એકમ છે અને x ધરીથી ઉગમ બિંદુથી નીચે 3 એકમ છે.

(ડ) y ધરીથી બિંદુ D નું અંતર ઉગમ બિંદુની જમણી તરફ 8 અકમ છે અને x ધરીથી ઉગમ બિંદુથી નીચે 9 એકમ છે.

19.3 ચરણ અથવા પાદ (ચતુર્થાંશ)

બે ધરીઓ XOX’ અને YOY’ સમતલને ચાર ભાગમાં વિભાગે છે, જેમને ચરણ કહે છે.



આકૃતિ 19.5

ચાર ચરણ (જુઓ આકૃતિ 19.5) ના નામ પરથી પ્રમાણે છે.

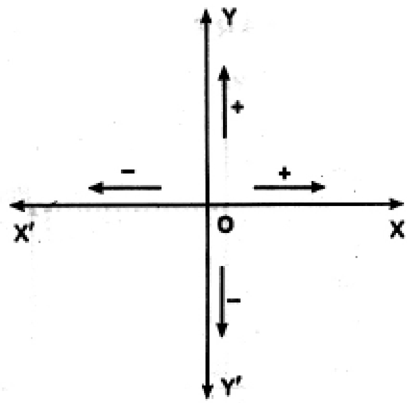
XOY : I ચરણ　　　YOX’ : II ચરણ

X’OY’ : III ચરણ　　Y’OX : IV ચરણ

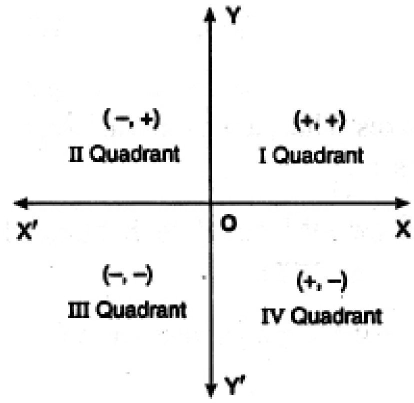
વિભાગ 19.4માં આપણે ચર્ચા કરી ગયા કે

1. x ધરી પર ઉગમબિંદુની જમણી તરફ ધન દિશા અને ડાબી તરફ ઋણ દિશા ગણાય છે.

2. y ધરી માટે -- ધરી પરનો ભાગ ધન અને x ધરીની નીચેનો ભાગ ઋણ ગણવામાં આવે છે. (જુઓ આકૃતિ 19.6)



આકૃતિ 19.6



આકૃતિ 19.7

તેથી, પ્રથમ ચરણમાં તમામ બિંદુઓના યામ (+, +) પ્રકારના છે. (જુઓ આકૃતિ 19.7)

બીજા ચરણમાં કોઈ પણ બિંદુના x યામ ઋણ અને y યામ ધન હોય છે. (-, +)

તે જ પ્રમાણે ત્રીજા ચરણમાં બિંદુના બંને x અને y યામ ઋણ હોય છે. (-, -) અને ચોથા ચરણમાં બિંદુના x યામ ધન અને y યામ ઋણ હોય છે. (+, -)

ઉદાહરણાર્થે :

(અ) P (5, 6)ના બંને x અને y યામ ધન હોઈ, તે પ્રથમ ચરણમાં પડે છે.

(બ) Q (-3, 4) x યામ ઋણ અને y યામ ધન હોઈ તે બીજા ચરણમાં પડે છે.

(ક) R (-2, -3)ના બંને x અને y યામ ઋણ હોઈ, તે ત્રીજા ચરણમાં પડે છે.

(ડ) S (4, -1)ના x યામ ધન અને y યામ ઋણ હોઈ તે ચોથા ચરણમાં પડે છે.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 19.1

1. નીચેના દરેક બિંદુનાં x અને y યામ લખો.

   (અ) (3, 3) (બ) (–6, 5) (ક) (–1, –3) (ક) (4, –2)

2. નીચેના દરેક બિંદુના y અને x ધરીથી અંતરો અનુક્રમે લખો.

   (અ) A (2, 4) (બ) B (–2, 4) (ક) C (–2, –4) (ડ) D (2, –4)

3. નીચેના દરેક બિંદુને ચરણદીઠ જૂથમાં ગોઠવો

(A)(–3, 2), (B) (2, 3), (C)(7, -6), (D)(1, 1), (E)(–9, –9),
(F)(–6, 1), (G) (–4, –5) (H)(11, –3), (I)(3, 12), (J)(–13, 6),

19.4 જેના યામ આપેલ હોય તેવા બિંદુનું આલેખન

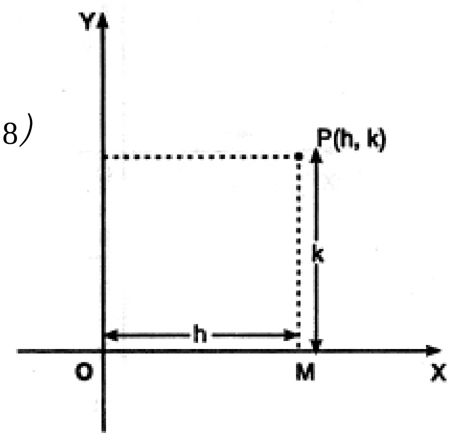
ધરીઓથી અંતરો માપીને બિંદુને આલેખિત કરી શકાય. આમ કોઈ પણ બિંદુ (h, k) નીચે પ્રમાણે આલેખિત કરી શકાય

(1) x ધરી પર h ને સમાન OM માપો. (જુઓ આકૃતિ 19.8)

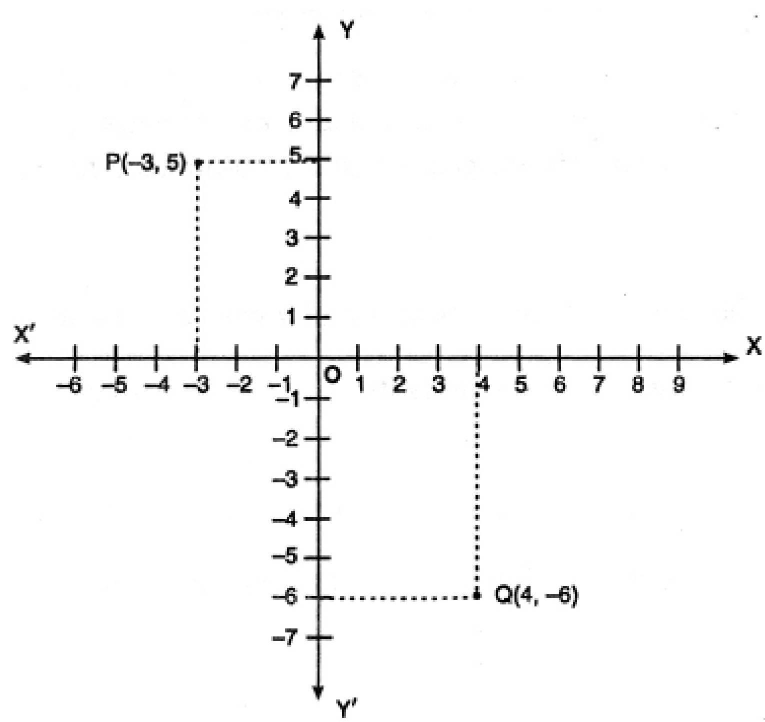
(2) OM ને લંબ હોય અને k ને સમાન MP માપો

બંને કિસ્સામાં સંજ્ઞાનો નિયમ અનુસરો.

ઉદાહરણાર્થ, (-3, 5) અને (4, -6) બિંદુઓ આકૃતિ 19.9માં દર્શાવ્યા મુજબ આલેખિત થશે.



આકૃતિ 19.8

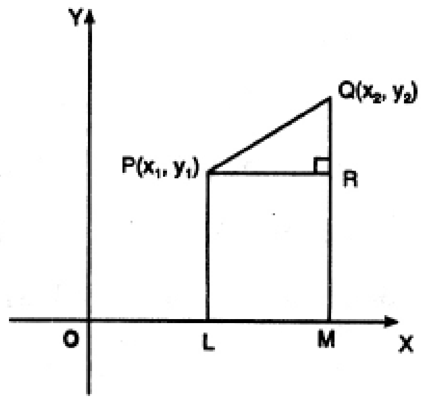


આકૃતિ 19.9

19.5 બે બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર

સમતલમાં કોઈ બે બિંદુઓ $P(x_1\, y_1)$ અને $Q(x_2\, y_2)$ વચ્ચેનું અંતર એ રેખાખંડ PQ ની લંબાઈ છે.

P અને Q માંથી x ધરીને લંબ PL અને QM દોરો અને PR, GM ને લંબ દોરો.



આકૃતિ. 19.10

તો, $OL = x_1$, $Om = x_2$, $PL = y_1$ અને $QM = y_2$

$\therefore$ $PR = LM = OM - OL = x_2 - x_1$

$QR = QM - RM = QM - PL = y_2 - y_1$

PQR કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

$$\therefore \quad PQ^2 = PR^2 + QR^2$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \quad \text{(પાયથાગોરસના પ્રમેય પ્રમાણે)}$$

$$\therefore \quad PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

બે બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર $= \sqrt{(\textbf{difference of abscissae})^2 + (\textbf{difference of ordinates})^2}$

ઉપસિદ્ધાંત : ઉગમબિંદુ (0, 0) થી બિંદુ (x_1, y_1) નું અંતર છે.

$$\sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2} = \sqrt{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2}}$$

તે દર્શાવવા કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ.

ઉદાહરણ 19.3 : *નીચેનાં બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર શોધો :*

(a) P(6, 8) અને Q(–9, –12)

(b) A(–6, –1) અને B(–6, 11)

ઉકેલ :

(a) *અહીં બિંદુઓ P (6, 8) અને Q (-9, -12) છે. અંતરના સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,*

$$PQ = \sqrt{(-9-6)^2 + \{(-12-8)\}^2}$$

$$= \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{225 + 400} = \sqrt{625} = 25$$

તેથી PQ = 25 *એકમ*

(b) *અહીં બિંદુઓ* A(–6, –1) *અને* B(–6, 11) *છે. અંતરના સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,*

$$AB = \sqrt{\{-6-(-6)\}^2 + \{11-(-1)\}^2}$$

$$= \sqrt{0^2 + 12^2} = 12$$

તેથી AB = 12 *એકમ*

ઉદાહરણ 19.4: *બે બિંદુઓ* (0, 0) *અને* (x, 3) *વચ્ચેનું અંતર* 5 *છે.* x *શોધો.*

ઉકેલ : અંતરના સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં, (0, 0) અને (x, 3) વચ્ચેનું અંતર

$$\sqrt{(x-0)^2 + (3-0)^2}$$ *મળે છે.*

આપેલ છે કે

$$\sqrt{(x-0)^2 + (3-0)^2} = 5$$

અથવા $\sqrt{x^2 + 3^2} = 5$

બંને બાજુઓના વર્ગ કરતાં

$x^2 + 9 = 25$

અથવા $x^2 = 16$

અથવા $x = \pm 4$

તેથી x = + 4 *અથવા* – 4

ઉદાહરણ 19.5 : *દર્શાવો કે બિંદુઓ* (1, 1), (3, 0) *અને* (–1, 2) *રેખીય છે.*

ઉકેલ : P(1, 1), Q(3, 0) *અને* R (-1, 2) *આપેલ બિંદુઓ છે.*

હવે, PQ + RP = $\left(\sqrt{5} + \sqrt{5}\right)$ *એકમ* = $2\sqrt{5}$ *એકમ* = QR

P, Q અને R રેખીય બિંદુઓ છે અને P બિંદુ Q અને R ની વચ્ચે છે.

ઉદાહરણ 19.6 : વર્તુળ કે જેનું કેન્દ્ર (0, 0) પર હોય અને જે બિંદુ (-6, 8) માંથી પસાર થતું હોય, તેની ત્રિજ્યા શોધો.

ઉકેલ : A (0, 0) અને B (–6, 8) આપેલ બિંદુઓ છે.

હવે, વર્તુળની ત્રિજ્યા રેખાખંડ AB ના અંતર જેટલી છે.

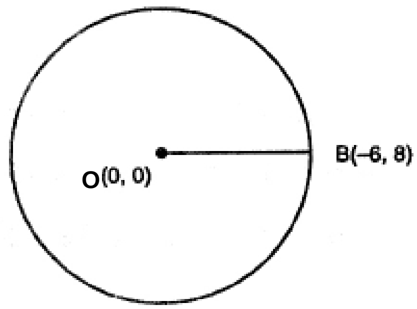


Fig. 19.11

$$\therefore \quad OB = \sqrt{(-6-0)^2 + (8-0)^2}$$

$$= \sqrt{36+64} = \sqrt{100}$$

$$= 10$$

તેથી વર્તુળની ત્રિજ્યા 10 એકમ છે.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 19.2

1. નીચેનાં બિંદુઓની દરેક જોડ વચ્ચેનું અંતર શોધો

   (અ) (3, 2) અને (11, 8) (બ) (–1, 0) અને (0, 3)

   (ક) (3, –4) અને (8, 5) (ડ) (2, –11) અને (–9, –3)

2. વર્તુળ કે જેનું કેન્દ્ર (2, 0) પર છે અને જે (7, -12) બિંદુમાંથી પસાર થતું હોય તેની ત્રિજ્યા શોધો.
3. દર્શાવો કે બિંદુઓ (–5, 6), (–1, 2) અને (2, –1) રેખીય છે.

19.6 છેદ સૂત્ર

બે બિંદુઓને જોડતા રેખાખંડને આપેલ ગુણોત્તરમાં આંતરિક રીતે વિભાગતા બિંદુના યામ શોધવા

ધારો કે $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$ બે આપેલ બિંદુઓ છે અને P(x, y) એ AB પર એવું બિંદુ છે જે તેને આપેલ ગુણોત્તર m : n માં વિભાગ છે.

આપણે P ના યામ શોધવાનાં છે.

AL, PM, BN એ OX પર અને AK, PT અનુક્રમે PM અને BN પર લંબ દોરો. તો, સરૂપ ત્રિકોણો APK અને PBT માંથી આપણને મળે છે.

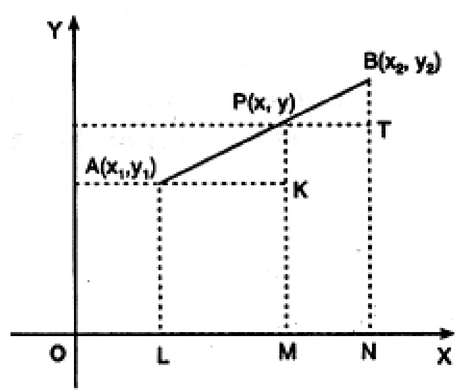


Fig. 19.12

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AK}{PT} = \frac{KP}{TB} \qquad \ldots(1)$$

હવે, $AK = LM = OM - OL = x - x_1$

$PT = MN = ON - OM = x_2 - x$

$KP = MP - MK = MP - LA = y - y_1$

$TB = NB - NT = NB - MP = y_2 - y$

(1) પરથી આપણને મળે છે :

$$\frac{m}{n} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

પ્રથમ બે સંબંધોમાંથી,

$$\frac{m}{n} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

અથવા $mx_2 - mx = nx - nx_1$

અથવા $x(m + n) = mx_2 + nx_1$

અથવા $x = \dfrac{mx_2 + nx_1}{m + n}$

તે જ પ્રમાણે $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{KP}{TB}$, સંબંધી પરથી,

$\dfrac{m}{n} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y}$ જેને સાદું રૂપ આપતાં,

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n}$$

$$\therefore \quad x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \text{ and } y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n} \qquad \ldots(i)$$

અહીં બિંદુ કે જે (x_1, y_1) અને (x_2, y_2) બિંદુઓને જોડતા રેખાખંડને m:n ગુણોત્તરમાં આંતરિક રીતે વિભાગ છે તેનાં યામ આ પ્રમાણે છે. :

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \frac{my_2 + ny_1}{m + n}\right)$$

19.9.1 મધ્યબિંદુ સૂત્ર

બે બિંદુઓ (x_1, y_1) અને (x_2, y_2) જોડતા રેખાખંડના મધ્યબિંદુના યામ ઉપરના છેદ સૂત્રમાં m=n લઈને મેળવી શકાય છે.

ઉપર (1) માં m = n મૂકતાં

$$x = \frac{nx_2 + nx_1}{n+n} = \frac{x_2 + x_1}{2}$$

અને $$y = \frac{ny_2 + ny_1}{n+n} = \frac{y_2 + y_1}{2}$$

બે બિંદુઓ (x_1, y_1) અને (x_2, y_2) જોડતા રેખાખંડના મધ્યબિંદુના યામ આ પ્રમાણે છે.

$$\left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right)$$

આ દર્શાવતા આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ.

ઉદાહરણ 19.7 : બિંદુ જે નીચેનાં બિંદુઓને જોડતા રેખાખંડને આપેલ ગુણોત્તરમાં વિભાગે છે તેનાં યામ શોધો :

(a) (2, 3) અને (7, 8) 2 : 3 ગુણોત્તરમાં આંતરિક રીતે

(b) (–1, 4) અને (0, –3) 1 : 4 ગુણોત્તરમાં આંતરિક રીતે

ઉકેલ : (a) ધારો કે A (2, 3) અને B (7, 8) આપેલ બિંદુઓ છે.

ધારો કે P (x, y) AB ને ગુણોત્તર 2:3 માં આંતરિક રીતે વિભાગે છે.

છેદ સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$x = \frac{2\times7+3\times2}{2+3} = \frac{20}{5} = 4$$

અને $$y = \frac{2\times8+3\times3}{2+3} = \frac{25}{5} = 5$$

P (4, 5) AB ને ગુણોત્તર 2 : 3 માં આંતરિક રીતે વિભાગે છે.

(b) ધારો કે A (–1, 4) અને B (0, –3) આપેલ બિંદુઓ છે.

ધારો કે P (x, y) AB ને ગુણોત્તર 1:4 માં આંતરિક રીતે વિભાગે છે.

છેદ સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$x = \frac{1\times 0 + 4\times(-1)}{1+4} = -\frac{4}{5}$$

અને $$y = \frac{1\times(-3) + 4\times 4}{1+4} = \frac{13}{5}$$

$\therefore P\left(-\frac{4}{5}, \frac{13}{5}\right)$ AB ને ગુણોત્તર 1:4માં આંતરિક રીતે વિભાગે છે.

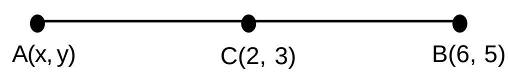
ઉદાહરણ 19.8 : બે બિંદુઓ (3, 4) અને (5, 12)ને જોડતા રેખાખંડનું મધ્યબિંદુ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે A (3, 4) અને B (5, 12) આપેલ બિંદુઓ છે.

ધારો કે C(x, y) AB નું મધ્યબિંદુ છે. મધ્યબિંદુ સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$x = \frac{3+5}{2} = 4$$

અને $$y = \frac{4+12}{2} = 8$$



બિંદુઓ (3, 4) અને (5, 12)ને જોડતા રેખાખંડનું મધ્યબિંદુ (4, 8) છે.

ઉદાહરણ 19.9 : રેખાખંડના મધ્યબિંદુના યામ (2,3) છે. જો રેખાખંડના એક અંત્યબિંદુના યામ (6, 5) હોય, તો બીજા અંત્યબિંદુના યામ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે રેખાખંડનું એક અંત્યબિંદુ B (6, 5) અને બીજું અંત્યબિંદુ A(x, y) છે.

C (2, 3) એ AB નું મધ્યબિંદુ છે.

આપણે લખી શકીએ કે :

$$2 = \frac{x+6}{2} \qquad \text{અને} \qquad 3 = \frac{y+5}{2}$$

અથવા $4 = x + 6$ અથવા $6 = y + 5$

અથવા $x = -2$ અથવા $y = 1$

બીજા અંત્યબિંદુના યામ (-2, 1) છે.

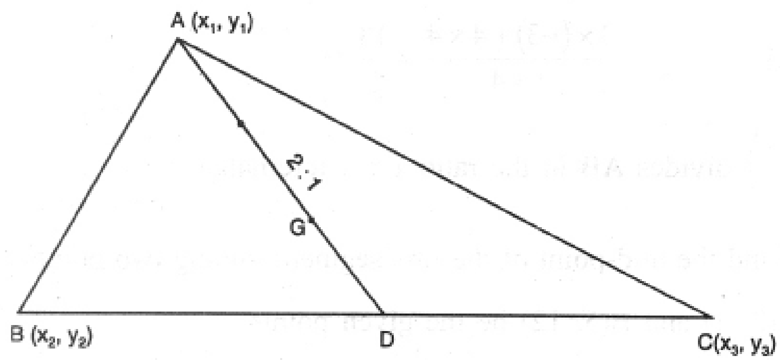
19.7 ત્રિકોણનું ગુરુત્વકેન્દ્ર (અથવા મધ્યકેન્દ્ર)

જેનાં શિરોબિંદુઓ આપેલ હોય, તેવા ત્રિકોણના ગુરુત્વકેન્દ્રના યામ શોધવા.

વ્યાખ્યા : ત્રિકોણનું ગુરુત્વકેન્દ્ર એ તેની મધ્યગાઓનું સંગમ બિંદુ છે અને તે દરેક મધ્યગાને 2:1 ગુણોત્તરમાં વિભાગે છે.

ધારો કે $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ અને $C(x_3, y_3)$ ત્રિકોણ ABC નાં શિરોબિંદુઓ છે. ધારો કે AD મધ્યગા છે, જે પાયાને દ્વિભાગે છે. તો, મધ્યબિંદુ સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$D = \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2} \right)$$



આકૃતિ 19.14

હવે, AD ઉપર બિંદુ G, જે તેને અંતઃ ગુણોત્તર 2:1 માં દ્વિભાગે છે તે ગુરુત્વકેન્દ્ર છે. જો (x, y) એ G ના યામ હોય, તો

$$x = \frac{2 \times \frac{x_2 + x_3}{2} + 1 \times x_1}{2 + 1} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$y = \frac{2 \times \frac{y_2 + y_3}{2} + 1 \times y_1}{2 + 1} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

તેથી ગુરુત્વકેન્દ્રના યામ આ પ્રમાણે હોય :

$$\left(\mathbf{\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}}, \mathbf{\frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}} \right)$$

ઉદાહરણ 19.10 : ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓના યામ (3, -1), (10, 7) અને (5, 3) છે. તો ગુરુત્વકેન્દ્રના યામ શોધો

ઉકેલ : ધારો કે A (3, -1), B (10, 7) અને C (5, 3) ત્રિકોણના શિરોબિંદુઓ છે. ધારો કે G(x, y) તેનું ગુરુત્વકેન્દ્ર છે.

તો, $$x = \frac{3 + 10 + 5}{3} = 6$$

અને $$y = \frac{-1+7+3}{3} = 3$$

તેથી, ગુરુત્વકેન્દ્રનાં યામ (6, 3) છે.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 19.3

1. બિંદુ કે જે નીચે પ્રમાણે બિંદુઓને જોડતા રેખાખંડને આંતરિક રીતે વિભાગે છે તેનાં યામ શોધો :

   (a) (1, –2) અને (4, 7) ગુણોત્તર 1 : 2 માં

   (b) (3, –2) અને (–4, 5) ગુણોત્તર 1 : 1 માં

2. નીચે પ્રમાણેનાં બિંદુઓને જોડત રેખાખંડનું મધ્યબિંદુ શોધો :

   (a) (0, 0) અને (8, –5)

   (b) (–7, 0) અને (0, 10)

3. ત્રિકોણ કે જેનાં શિરોબિંદુઓ (5, –1), (–3, –2) અને (–1, 8) હોય, તેનું ગુરુત્વકેન્દ્ર શોધો.

સારાંશ :

- જો કોઈ બિંદુનાં યામ (2, 3) હોય, તો x યામ (અથવા કોટિ) 2 છે અને y યામ (અથવા ભુજ) 3 છે.
- કોઈ યામ (x, y) માં, ‘x’, y ધરીથી અંતર દર્શાવે છે અને ‘y’, x ધરીથી અંતર દર્શાવે છે.
- ઉગમબિંદુના યામ (0, 0) હોય છે.
- x ધરી પર દરેક બિંદુના y યામ 0 હોય, અને y ધરી પર દરેક બિંદુના x યામ 0 હોય.
- બે ધરીઓ XOX’ અને YOY’ સમતલને ચાર ભાગમાં વિભાગે છે, જેમને પાદ (ચરણ) કહે છે.
- બે બિંદુઓ (x_1, y_1) અને (x_2, y_2) ને જોડતા રેખાખંડનું અંતર આ પ્રમાણે અપાય છે.

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- ઉગમબિંદુ (0, 0) થી બિંદુ (x_1, y_1) નું અંતર $\sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2}}$ છે.
- બિંદુ કે જે બે બિંદુઓ (x_1, y_1) અને (x_2, y_2) ને જોડતા રેખાખંડનું અંતઃવિભાજન m : n ગુણોત્તરમાં

કરે છે તે આ પ્રમાણે આપવામાં આવે છે :

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

- બે બિંદુઓ (x_1, y_1) અને (x_2, y_2) ને જોડતા રેખાખંડના મધ્યબિંદુના યામ આ પ્રમાણે છે.

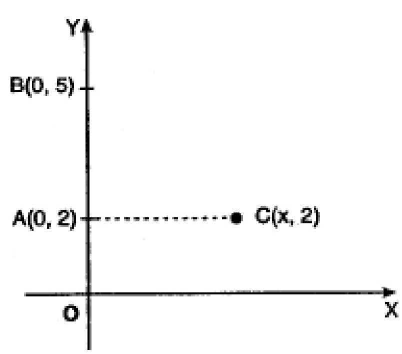
$$\left(\frac{x_2+x_1}{2}, \frac{y_2+y_1}{2}\right)$$

- ત્રિકોણ કે જેનાં શિરોબિંદુઓ (x_1, y_1), (x_2, y_2) અને (x_3, y_3) છે તેના ગુરુત્વકેન્દ્રના યામ આ પ્રમાણે હોય છે.

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

સત્રાંત સ્વાધ્યાય

1. આકૃતિ 19.15 માં AB = BC તો x શોધો.



આકૃતિ 19.15

2. બે બિંદુઓ (2, 3) અને (4, x) ને જોડતા રેખાખંડની લંબાઈ $\sqrt{13}$ એકમ છે. x શોધો.
3. ત્રિકોણ કે જેનાં શિરોબિંદુઓ A(3, 4), B(2, -1) અને C(4, -6) હોય, તેની બાજુઓની લંબાઈ શોધો.
4. સાબિત કરો કે (2, -2), (-2, 1) અને (5, 2) કાટકોણ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ છે.
5. (2, -1) અને (-3, 4) ને જોડતા રેખાખંડને અંતઃ 2:3 ગુણોત્તરમાં વિભાગે તેના યામ શોધો.
6. વ્યાસનાં અંત્યબિંદુઓ P(-5, 7) અને Q(3, -11) હોય તેવા વર્તુળનું કેન્દ્ર શોધો.
7. શિરોબિંદુઓ P(-2, 4), Q(7, -3) અને R(4, 5) હોય, તેવા ત્રિકોણનું ગુરુત્વકેન્દ્ર શોધો.

ઉત્તરો

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 19.1

1. (a) 3; 3 (b) –6; 5 (c) –1; –3 (d) 4; –2
2. (a) 2 એકમ; 4 એકમ
   (b) ઉગમબિંદુની ડાબી બાજુએ 2 એકમ, x ધરીથી 4 એકમ
   (c) ઉગમબિંદુની ડાબી બાજુએ 2 એકમ, ઉગમબિંદુથી નીચે 4 એકમ
   (d) 2 એકમ; ઉગમબિંદુથી નીચે 4 એકમ
3. પાદ I: B(2, 3), D(1, 1) અને P(3, 12)
   પાદ II: A(ß, 2), F(–6, 1) અને Q(–13, 6)
   પાદ III: E(–9, –9) અને G(–4, –5)
   પાદ IV: C(7, –6) અને H(11, –3)

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 19.2

1. (a) 10 એકમ (b) $\sqrt{10}$ એકમ (c) $\sqrt{106}$ એકમ (d) $\sqrt{185}$ એકમ
2. 13 એકમ

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 19.3

1. (a) (2, 1) (b) (–1, 1)
2. (a) $\left(4,-\frac{5}{2}\right)$ (b) $\left(-\frac{7}{2},5\right)$
3. $\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$

સત્રાંત સ્વાધ્યાય

1. 3 એકમ 2. 0 અથવા 6
3. AB = $\sqrt{26}$ એકમ, BC = $\sqrt{29}$ એકમ અને = $\sqrt{101}$ એકમ
5. (0, 1) 6. (–1, –2) 7. (3, 2)

માધ્યમિક પાઠ્યક્રમ
ગણિત

અભ્યાસ કાર્ય - ભૂમિતિ

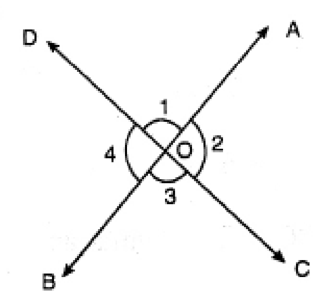
કુલ ગુણ : 25	સમય : 45 મિનિટ

સૂચના :

1. *તમામ પ્રશ્નોના જવાબ અલગ કાગળમાં આપો.*
2. *તમારી જવાબવહીમાં નીચેની માહિતી આપો :*
   - *નામ*
   - *નામાંકન ક્રમાંક*
   - *વિષય*
   - *મહાવરા - કાર્યનો મુદ્દો*
   - *સરનામું*
3. *તમારું અભ્યાસ-કાર્ય તમારા અભ્યાસ કેન્દ્રના વિષય શિક્ષક પાસેથી તપાસાવી લો, જેથી તમારી કામગીરી માટે તમને વિધાયક પ્રતિપોષણ મળે.*

તમારું અભ્યાસ-કાર્ય નેશનલ ઈન્સ્ટિટ્યૂટ ઓફ ઓપન સ્કૂલિંગને મોકલવું નહિ

1. *પાસેની આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ રેખા* AB *અને* CD *એકબીજાને* O *આગળ છેદે છે. અભિકોણની જોડ છે.*



   (A) 1, 2

   (B) 2, 3

   (C) 3, 4

   (D) 2, 4

2. ΔABC માટે નીચેના પૈકી ક્યું વિધાન સાચું છે ? 1

(A) $AB + BC = AC$

(B) $AB + BC < AC$

(C) $AB + BC > AC$

(D) $AB + BC + AC = 0$

3. લંબચોરસની પાસપાસેની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને જોડવાથી રચાતો ચતુષ્કોણ છે. 1

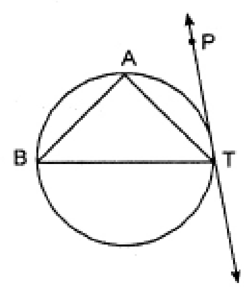
(a) લંબચોરસ

(b) ચોરસ

(c) સમબાજુ ચતુષ્કોણ

(d) સમલંબ ચતુષ્કોણ

4. બાજુની આકૃતિમાં PT એ T આગળ વર્તુળને સ્પર્શક છે. જો $\angle BTA = 45^0$ અને $\angle PTB = 70^0$ તો $\angle ABT$ છે.



(A) 110^o

(B) 70^o

(C) 45^o

(D) 23^o

5. બે બિંદુઓ A અને B અનુક્રમે (2, 3) અને (4, x) યામ ધરાવે છે. જો $AB^2 = 13$ હોય, તો -- ની શક્ય કિંમત છે. 1

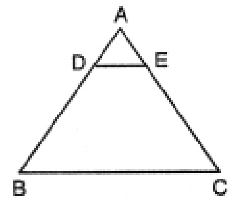
(A) –6

(B) 0

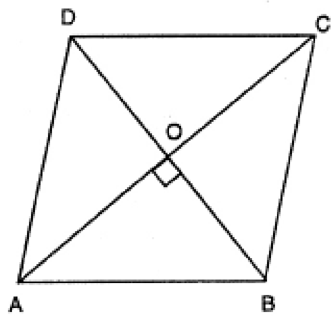
(C) 9

(D) 12

6. ΔABC માં $AB = 10$ સેમી અને DE, BC ને એવી રીતે સમાંતર છે કે $AE = \frac{1}{4} AC$. AD શોધો. 2



7. જો ABCD સમબાજુ ચતુષ્કોણ હોય, તો સાબિત કરો કે $4AB^2 = AC^2 + BD^2$ 2



8. જેમના યામ (3, 8) અને (9, 5) છે, તેવાં બિંદુઓથી સમાન અંતરે પણ x ધરી પર આવેલા બિંદુના યામ શોધો. 2

9. કોઈ રેખાખંડના મધ્યબિંદુના યામ (2, 3) છે. જો રેખાખંડના કોઈ એક અંત્યબિંદુના યામ (6, 5) હોય, તો બીજા અંત્યબિંદુના યામ શોધો. 2

10. ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓના યામ (3, -1), (10, 7) અને (5, 3) છે તો તેના મધ્યકેન્દ્રના યામ શોધો. 2

11. લઘુકોણ ત્રિકોણ ABC માં $AD \perp BC$ સાબિત કરો કે :

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC. BD$ 4

12. સમાન (કે એક જ) પાયા પર તેમજ તે જ સમાંતર રેખાઓ વચ્ચે આવેલ સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણ ક્ષેત્રફળમાં સમાન હોય છે તે સાબિત કરો. 6

20

સમતલીય આકૃતિની પરિમિતિ ક્ષેત્રફળ

20.1 પરિચય

તમે લંબચોરસ , સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણ, ત્રિકોણ વર્તુળ એવી ઘણી બધી સમતલીય, આકૃત્તિઓથી પરિચિત છો. આ બધી આકૃત્તિઓની પરિમિતી અને તેનાં ક્ષેત્રફળ શોધવાના જુદા-જુદા સૂત્રોથી પણ તમે પરિચિત છો. આ પ્રકરણમાં આપણે આ જ્ઞાનને વધારે સઘન બનાવીશું અને આ બાબત વધારે જાણીશું - ખાસ કરીને ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધવાનું કરો નું સૂત્ર અને વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ શોધવાના સૂત્ર વિશે વિશેષ જાણકારી મેળવીશું.

હેતુ

આ પ્રકરણ શીખ્યા પછી અધ્યેતા

- અગાઉ શીખેલા સૂત્રોની મદદથી કેટલાક ત્રિકોણ અને ચતુષ્કોણોની પરિમિતિ અને ક્ષેત્રફળ ગતિ શકશે.
- ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે હેરોના સુત્રનો ઉપયોગ કરી શકાશે.
- કેટલીક સુરેખ આકૃત્તિઓ (લંબ ચોરસ રસ્તાઓ સહિતની)નું જાણિતા આકારોમાં (જેવા કે ત્રિકોણ, ચોરસ,સમતલ ચતુષ્કોણ, લંબચોરસ વગેરેમાં) વિભાજન કરીને તેનું ક્ષેત્રફળ શોધી શકાશે.
- વર્તુળનો પરિઘ અને વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ શોધી શકાશે.
- વર્તુળકાર રસ્તાઓનું ક્ષેત્રફળ શોધી શકશે.
- વૃત્તાંશની પરિમિતિ અને તેનું ક્ષેત્રફળ જણાવાનું સૂત્ર તારવી શકશે અને સમજી શકશે.
- ઉપરોક્ત સૂત્રની મદદથી વૃત્તાંશની પરિમિતિ અને વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ ગણી શકશે.
- વર્તુળ,વૃત્તાંશ ઉપરાંત ત્રિકોણ, ચોરસ અને લંબચોરસવાળા સંયોજિત (મિશ્ર) આકારોનાં ક્ષેત્રફળ શોધ શકશે.
- જુદા - જુદા સમતલીય આકારોનાં પરિમિતિ અને ક્ષેત્રફળને લગતા રોજબેરોજના કૂટ પ્રશ્નો હલ કરી શકશે.

અપેક્ષિત પૂર્વજ્ઞાન

- ત્રિકોણ, ચતુષ્કોણ સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણ સમલંબ ચતુષ્કોણ , ચોરસ સંબચોરસ અને વર્તુળ જેવી સાદી બંધ આકૃત્તિઓના ગુણધર્મો .
- પરિમિતિ અને ક્ષેત્રફળના વિવિધ એકમો જેવા કે, મીટર અને ચોરસ મીટર (મીટર^2) સેમી અને ચો સેમી (સેમી^{2}) ,મિમી અને ચોમીમી (મિમી^{2}) વગેરે
- એક એકમમાંથી બીજા એકમમાં રૂપાંતર
- ક્ષેત્રફળના મોટા એકમો જેવાકે એકર અને હેક્ટર.
- જુદા જુદા આકરોના પરિમિતિ અને ક્ષેત્રફળ માટેના નીચેના સૂત્રો.

(i) લંબ ચોરસની પરિમિતી = 2 (લંબાઈ + પહોળાઈ)

(ii) લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ = લંબાઈ + પહોળાઈ

(iii) ચોરસની પરિમિતી = 4 + બાજુ

(iv) ચોરસનું ક્ષેત્રફળ = બાજુ

(v) સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ = પાયો - પાયાપરનો વેધ

(vi) ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ = $\frac{1}{2}$ પાયો × પાયા પરનો વેધ

(vii) સમબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ = $\frac{1}{2}$ × વિકર્ણોનો ગુણાકાર

(viii) સમલંબચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ =

$\frac{1}{2}$ (સમાંતરબાજુઓનો સરવાળો) × તેમની વચ્ચેનું અંતર

(ix) વર્તુળનો પરિઘ =2 π × ત્રિજ્યા

(x) વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ = π × (ત્રિજ્યા)^2

20.1 કેટલાક વિશિષ્ટ ચતુષ્કોણો અને ત્રિકોણોની પરિમિતિ અને તેઓનું ક્ષેત્રફળ

તમે સારી રીતે જાણો છો કે બંધ આકૃતિની ધાર કિનાર પર ચાલતા જે અંતરને આકૃતિની પરિમિતિ તેનું ક્ષેત્રફળ કહે છે તમે એ પણ જાણો છો કે પરિમિતી લંબાઈના એકમમાં મપાય છે. જ્યારે ક્ષેત્રફળ ચોરસ એકમ અથવા (એમક)^{2}માં મપાય છે. દા.ત પરિમિતી (લંબાઈ)ના એકમ મીટર, સેમી,મિમી , વગેરે છે અને ક્ષેત્રફળના એખમ ચો.મી ચો.સેમી. ચો.મિમી.વગેરે છે (આ એકમો)^2 (મીટર)^2 (સેમી)^2 (મિમી)^2 વગેરે છે એ ક્ષેત્રફળના એકમ ચો.મી,ચો.સેમી ચોમિમી , વગેરે છે. (આ એકમો (મીટર)^2 (સેમી)^2 (મિમી)^2 વગેરે એ રીતે પણ લખાય છે.

કેટલાક વિશિષ્ટ ચતુષ્કોણો (જેવા કે ચોરસ , લંબચોરસ, સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણ વગેરે) અને ત્રિકોણની પરિમીતિ અને ઉદાહરણો દ્વારા આ જ્ઞાનનું દઢીકરણ કરીએ.

વળી, ખેતર ખેડવાની મજૂરી દર ચો.મી 15લેખે ² = ' 20250

ખેતરનું ક્ષેત્રફળ = $\frac{20250}{15}$ મીટર²

= 1350 મીટર² ...(2)

પરિણામ (1) અને (2), પરથી

$$\frac{3x^2}{2} = 1350$$

$$x^2 = \frac{1350 \times 2}{3} = 900 = (30)^2$$

$$x = 30$$

આમ, ઊંચાઈ 30 મીટર અને પાયો (3 × 30) મીટર = 90 મીટર સેમી²

ઉદાહરણ 20.5: જેના વિકર્ણોની લંબાઈ 16 સેમી અને 12 સેમી છે તેવા સમબાજુ ચતુષ્કોણ નું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : સમબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ = $\frac{1}{2}$ બે વિકર્ણોનો ગુણાકાર = $\frac{1}{2}$ × 16 × 12 સેમી²

= 96 સેમી²

ઉદાહરણ 20.6: સમલંબ ચતુષ્કોણની બં સમાંતર બાજુઓ 20 સેમી અને 12 સેમી છે અને 12 સેમી છે અને તેમની વચ્ચેનું અંતર 5 સેમી છે. આ સમલંબ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : સમલંબ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ = $\frac{1}{2}$ [બે સમાંતર બાજુઓના સરવાો]× તેમની વચ્ચેનું અંતર

= $\frac{1}{2}$ (20 + 12) × 5સેમી² = 80 સેમી²

તમારી પ્રતિ ચકાસો 20.1

1. એક ચોરસ ખેતરનું ક્ષેત્રફળ 225 છે, તો તેની પરિમિતિ શોધો.
2. 60 મીટર પરિમિતિ ધરાવતા ચોરસનો વિકર્ણ શોધો.
3. એક લંબચોરસ ખેતરની લંબાઈ અને પહોળાઈ અનુક્રમે 22.5મી અને 12.5મી છે (i) ખેતરનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

   (ii) ખેતરની સીમાને તારની વાડ કરવા માટે સીમાની લંબાઈ શોધો.
4. એક લંબચોરસની લંબાઈ અને પહોળાઈ 3.2ના પ્રમાણમાં છે જો તેનું ક્ષેત્રફળ 72ᶦ મીટર2 હોય,તો તેની પરિમિતિ શોધો.

5. એક સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણનો પાયો 20 સેમી અને પાયા પરના વેધની લંબાઈ 12 સેમી હોય, તો તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

6. એક ત્રિકોણનુ ક્ષેત્રફળ 280 સેમી^{2} છે. જો ત્રિકોણના પાયાની લંબાઈ 70 સેમી, હોય તો પાયા પરના વંધની લંબાઈ શોધો.

7. એક સમતલ ચતુષ્કોણની સમાંતર બાજુઓ 26 સેમી અને 12 સેમી છે. જો સમાંતર

8. એક સમબાજુ ચતુષ્કોણની પરિમિતિ 146 સેમી છે, તેના એક વિકર્ણની લંબાઈ 48 હોય,તો બીજા વિકર્ણની લંબાઈ શોધો.

20.2 હેરોનું સૂત્ર :

જો ત્રિકોણનો પાયો અને પાયા અને પાયા પરનો વેધ આપેલ

હોય તો ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}$ પાયો $\times$ પાયા પરનો વેધ એ સૂત્રનો ઉપયોગ તમે ઘણીવાર કર્યો છે.

ક્યારેક ત્રિકોણને પાયો અને પાયાપરનો વેધ આપવાને બદલે ત્રિકોણનીા ત્રણે બાજુઓ આપવામાં આવે છે આ માહિતી પરથી ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ ગણવામાટે પહેલા તો કોઈ એક બાજુ પરથી ઊંચાઈ શોધવી પડે એક ઉદાહરણ દ્વારા આ પ્રક્રિયા સમજીએ.

ઉદાહરણ 20.7: ABC અને AB, BC અને CA બાજુઓ અનુક્રમે 5 સેમી, 6સેમી અને 7સેમી છે. આ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : આકૃત્તિ 20.1માં દર્શાવ્યા મુજબ ABC દોરો ધારોકે

BD= x સેમી છે DC = $(6 - x)$ સેમી થાય હવે કાટકોણ

ABD પરથી D = $(6 - x)$ સેમી

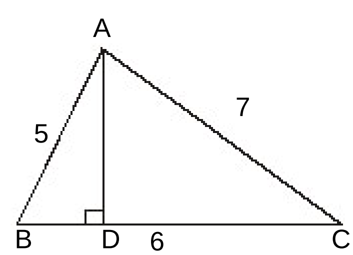
$= BD^2 + AD^2$

$x^2 + AD^2 \quad ...(1)$

એ જ રીતે કાટકોણ ABD પરથી

$CD^2 + AD^2$

$(6 - x)^2 + AD^2 \quad ...(2)$



આકૃત્તિ . 20.1

(1) અને (2) પરથી મળતી AD^2 કિંમતો સરખાવતાં -

$25 = (6 - x)^2 - x^2$

$36 - 12x + x^2 - x^2$

$x = 1$

પરિણામ (1) માં x ની કિંમત મૂકતાં

$1 + AD^2$

$AD^2 = 24 \quad AD = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ સેમી

હવે, $\Delta ABC = \frac{1}{2}\ BC \times AD$

$= \frac{1}{2} \times 6 \times 2\sqrt{6}$ સેમી^{2}

$= 6\sqrt{6}$ સેમી^{2}

તમે જોઈ શકશો કે ઉકેલ મેળવવાની આ પદ્ધતિ ઘણી લાંબી ગ્રીક ગણિત શાસ્રી હેરો () (ઈ.પૂ. 75 થી ઈ.પૂ. 10) એ પ્રસ્થાપિત કર્યું છે , જે નીચે મુજબ છે .

ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

જ્યાં a, b,c એ ત્રિકોણની બાજુઓ છે અને $s = \frac{a+b+c}{2}$ છે હેરોના આ સૂત્રની મદદથી ઉદાહરણ 20.7 ફરી ગણીએ અહી Q = 6 સેમી B = 7 સેમી અને C = 5 સેમી છે.

s = = 9 સેમી

ABC નું ક્ષેત્રફળ =

$= \sqrt{9(9-6)(9-7)(9-5)}$ સેમી^{2}

$= \sqrt{9 \times 3 \times 2 \times 3}\ \text{cm}^2$

$= 6\sqrt{6}$ સેમી^{2}, જે પહેલી રીતથી મેળવ્યા જેટલું જ છે.

કેટલાક વધુ ઉદાહરણો આ સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને ગણીએ

ઉદાહરણ 20.8: ત્રિકોણકાર મેદાનની બાજુઓ 165 મી, 154મી અને 143મી છે, આ મેદાનનું ક્ષેત્રફળ શોધો

ઉકેલ : જ $= \frac{a+b+c}{2} =$

મેદાનનું ક્ષેત્રફળ =

$= \sqrt{231 \times (231-165)(231-154)(231-143)}$ મીટર^2

$= \sqrt{231 \times 66 \times 77 \times 88}$ મીટર^2

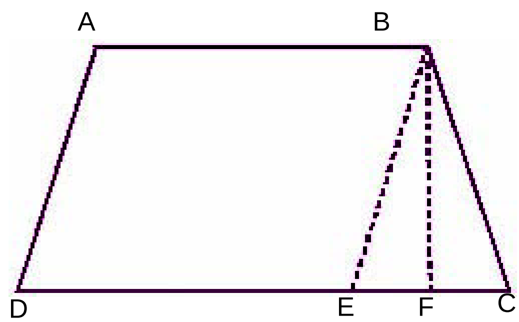
$$= \sqrt{11 \times 3 \times 7 \times 11 \times 2 \times 3 \times 11 \times 7 \times 11 \times 2 \times 2 \times 2}$$

$$= 11 \times 11 \times 3 \times 7 \times 2 \times 2$$

$= 10164$ *મીટર*^{2}

ઉદાહરણ 20.9: *એક સમલંબ ચતુષ્કોમની સમાંતર બાજુઓની લંબાઈ 11 સેમી અને 25 સેમી છે. બાકીની બે બાજુઓની લંબાઈ 15 સેમી અને 13 સેમી છે. આ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.*

ઉકેલ :



આકૃત્તિ . 20.2

$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ *સમલંબ ચતુષ્કોણ* ABCD *માં આકૃતિ* 20.2 *માં દર્શાવ્યા મુજબ* AB = 11 *સેમી*, CD = 25 *સેમી*, AD = 15 *સેમી અને* BC = 13 *સેમી (આકૃત્તિ* . 20.2)

ડિમાંથી AD *ને સમાંતર રેખા દોરો જે* BC *ને કાપે ત્યાં* E *નામ આપો* BF ⊥ DC *દોરો*

હવે BE = AD = 15 *સેમી* BC = 15 *સેમી ને કાપે ત્યાં* EC = (25-11) = 14 *સેમી*

$$\Delta BEC,\ s = \frac{15+13+14}{2} \text{ સેમી} = 21 \text{ સેમી}$$

ΔBEC*નું ક્ષેત્રફળ* =

$$= \sqrt{21 \times (21-15)(21-13)(21-14)}$$

$$= \sqrt{21 \times 6 \times 8 \times 7}$$

$= 7 \square 3 \square 4$ *સેમી*^{2} $= 84$ *સેમી*^{2} ...(1)

ફરી ΔBEC *નું ક્ષેત્રફળ* $= \frac{1}{2}$ EC × BF

$= \frac{1}{2} \times 14 \times$ BF ...(2)

$$\frac{1}{2} \times 14 \times BF = 84$$

$$BF = \frac{84}{7} \text{ સેમી} = 12 \text{ સેમી}$$

સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCD નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}(AB + CD) \times BF$

$$= \frac{1}{2}(11 + 25) \times 12 \text{ સેમી}^2$$

$$= 18 \times 12 \text{સેમી}^2 = 216 \text{સેમી}^2$$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 20.2

1. 15 સેમી, 16 સેમી, અને 17 સેમી બાજુવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

2. 12 સેમી બાજુવાળા સમબાજુ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ હેરોના સૂત્રથી ગણો અને પછી આપેલા ત્રિકોણનો વેધ શોધો.

૨૦.૩ લંબચોરસાકાર પથ (રસ્તો) નું ક્ષેત્રફળ અને કેટલીક સુરેખ આકૃત્તિ

તમારા રહેણાકની આસપાસના બાગમાં તમે વિવિધ પ્રકારના લંબચોરસકારના રસ્તાઓ જોયા હશે કેટલીક જમીન કે ખેતર એક જ આકારના હોતા નથી. હકીકતમાંતેઓ લંબચોરસ, ચોરસ, ત્રિકોણ , વગેરે જેવી બહુકોણ આકૃત્તિઓનો સમૂહ હોય છે. કેટલાક ઉદાહરણો દ્વારા આવા આકારોના ક્ષેત્રફળની ગણતરી સમજીશું.

ઉદાહરણ 20.10: એક લંબચોરસ બાગની લંબાઈ 30મી અને પહોળાઈ 24મી છે. આ બાગ 4 મી પહોળા રસ્તાથી ઘેરાયેલો છે (બાગની ફરતે 4મી પહોળો રસ્તો છે) આ રસ્તાનું ક્ષેત્રફળ શોધો

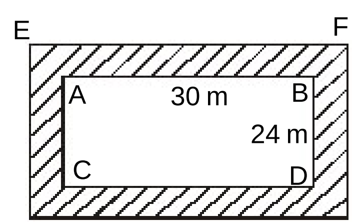


Fig. 20.3

ઉકેલ: ABCD બાગ છે અને છાયાંકિત ભાગ એ બાગ ફરતો રસ્તો દર્શાવે છે (આકૃત્તિ 20.3) તેથી લંબચોરસ EFGH ની લંબાઈ $= (30+4+4) = 38$ મીટર પહોળાઈ $= (24+4+4) = 32$ મીટર રસ્તાઓનું ક્ષેત્રફળ = EFGH નું ક્ષેત્રફળ - ABCD નું ક્ષેત્રફળ

$= (38 \times 32 - 30 \times 24$

$= (1216 - 720)$ મીટર^2

$= 496$ મીટર^2

ઉદાહરણ 20.11: આકૃત્તિ 20.4માં દર્શાવ્યા મુજબ બાગના વચ્ચેના ભાગમાંથી બે લંબચોરસ રસ્તાઓ પસાર થાય છે. રસ્તાઓ પર કોંક્રિટ પાથરવાનો ખર્ચ શોધો. કોંક્રિટ પાથરવાનો ભાગ દરચોરસ મીટરે રૂા. 15 છે. આકૃત્તિમાં AB = CD = 50 મીટર AD = BC = 40 મીટર અને EF = PQ = 2.5 મીટર છે.

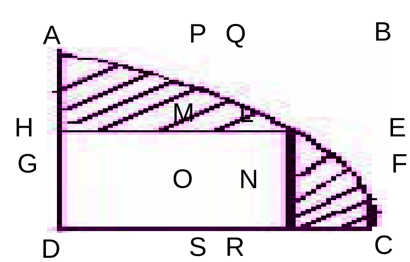


Fig. 20.4

ઉકેલ: રસ્તાઓનું ક્ષેત્રફળ =

PQRS નું ક્ષે+ EFGH નું ક્ષ– MLNOનું ક્ષે

$= (40 \times 2.5 + 50 \times 2.5 - 2.5 \times 2.5)$ મીટર^2

$= 218.75$ મીટર^2

1 મીટર^2 કોંક્રિટ પાથરવાનો ખર્ચ રૂા. 15

218.75 મીટર^2 કોંક્રિટ પાથરવાનો ખર્ચ $= 218.75 \times 15$

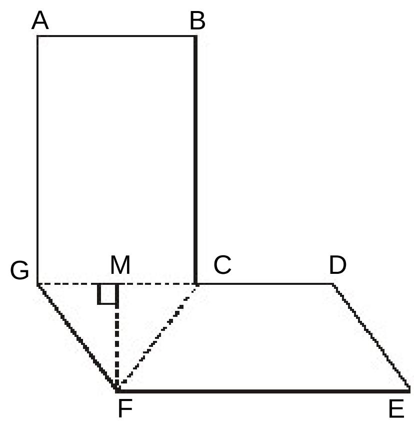
= ' 3281.25 રૂપિયા

ઉદાહરણ 20.12: આકૃત્તિ 20.5 માં દર્શાવેલ ABCDEFG નું ક્ષેત્રફળ શોધો. જ્યાં ABCG લંબ ચોરસ છે. AB = 3 સેમી AB = 3 સેમી, BC = 5 સેમી, GF = 2.5 સેમી = DE = CF., CD = 3.5 સેમી, EF = 4.5 સેમી , અને CD || EF છે.

ઉકેલ : લંબચોરસ ABCG નું ક્ષે +

સમદ્વિબાજુ ΔFGC નું ક્ષે +

સમલંબચતુષ્કોણ DCEFનું ક્ષે ...(1)



આકૃત્તિ. 20.5

હવે, FGC નું ક્ષેત્રફળ મેળવવા માટે $FM \perp CG$ દોરો.

M,CG નું મધ્યબિંદુ થશે કારણકે FG - FC

GM = 1.5 સેમી

હવે કાટકોણ ΔGMF

$$GF^2 = FM^2 + GM^2$$

$\therefore \quad (2.5)^2 = FM^2 + (1.5)^2$

$\therefore \quad FM^2 = (2.5)^2 - (1.5)^2 = 4$

, FM = 2, FM = 2 સેમી

$$DFGC = \frac{1}{2}\ GC \times FM$$

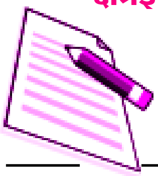
$= \frac{1}{2} \times 3 \times 2$ સેમી^{2} = 3 સેમી^{2} ...(3)

$\frac{3}{2}$

સમલંબ ચતુ CDEF નું ક્ષે =

$\frac{1}{2}$ (સમાંતર બાજુઓનો સરવાળો) × તેમની વચ્ચેનું અંતર

$= \frac{1}{2}\ (3.5 + 4.5) \times 2$ સેમી^{2}



નોંધ

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 2 \text{સેમી}^2 = 8 \text{ સેમી}^2 \qquad \ldots(4)$$

આપેલ આકૃત્તિનું ક્ષે..= $(15 + 3 + 8)$ સેમી^{2}

પરિણામ (1), (2), (3) અને (4) ને આધારે

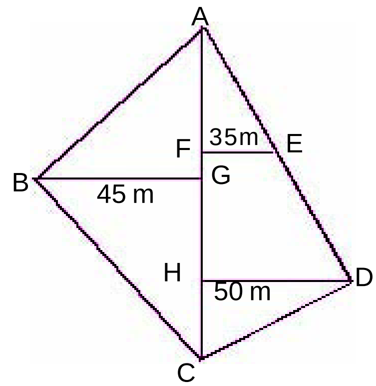
$= 26$ સેમી^{2}

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 20.3

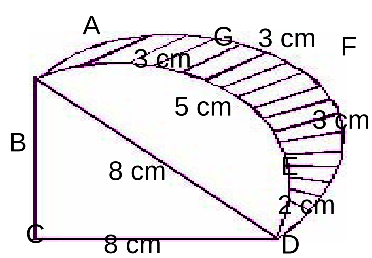
1. એક લંબચોરસ બાગની લંબાઈ 48 મીટર અને પહોળાઈ 36 મીટર છે તેની ધારને અડીને અંદરની બાજુએ 3 મીટર પહોળાઈનો રસ્તો બનાવેલો છે. આ રસ્તાનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

2. એખ લંબચોરસ બાગની લંબાઈ 80 મી અને પહોળાઈ 60મી છે 2મી પહોળાઈનો એક રસ્તો તેટલીજ પહોળાઈનો લંબાઈની મધ્યમાંથી અને પહોળાઈને સમાંતર છે. આ રસ્તાઓનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

3. આકૃત્તિ 20.6માં આપેલ પંચકોણ ABCDE નું ક્ષેત્રફળ શોધાEF, BG અને DH એ AC પર દોરેલા લંબ છે AF = 40 m, AG = 50 m, GH = 40 m અને CH = 50 m.



આકૃત્તિ. 20.6

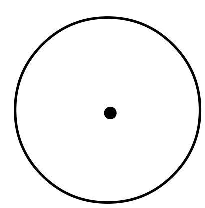


આકૃત્તિ. 20.7

4. આકૃત્તિ 20.7માં આપેલ બહુકોણ ABCDEFG નું ક્ષેત્રફળ શોધો. આકૃત્તિમાં ABEG સમલંબ ચતુષ્કોણ છે.BCDE લંબચોરસ છે,.. ત્રિકોણ છે તેમજ AG અને BE વચ્ચેનું અંતર 2 સેમી છે.

૨૦.૪ વર્તુળનું અને વર્તુળકાર રસ્તાઓનું ક્ષેત્રફળ

અત્યાર સુધી આપણે માત્ર રેખાખંડોથી રચાતી આકૃત્તિઓના પરિમિતિ અને ક્ષેત્રફળ વિશે ચર્ચા કરી છે હવે આપણે ઘણી જાણીતી અને ઉપયોગી આકૃત્તિ વર્તુળ વિશે જાણકારી મેળવીશું. તમે શીખી ગયા છો કે વર્તુળની પરિમિતિ (પરિઘ) મેળવવાનું સૂત્ર π છે અને વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ મેળવવાનું સૂત્ર π છે જ્યાં π એ વર્તુળની ત્રિજ્યા છે. અને π એ પરિઘ અને વ્યાસના ગુણોત્તરથી મળતો અચળાંક છેπ એ અસંમેય સંખ્યા છે.



આકૃત્તિ. 20.8

π ની ચાર દશાંશસ્થળ સુધીની ખરી કિંમત 3.1416 છે. એવું જણાવનાર ભારતના મહાન ગણિતશાસ્ત્રી આર્યભટ્ટ (ઈ.સ.476-500) છે જો કે પ્રાયોગિક ગણતરી માટે સામાન્ય રીત π ની કિંમત $\frac{22}{7}$ અથવા 3.14 લેવામાં આવે છે. રકમમાં ઉલ્લેખ કાર્યો ન હોય, ત્યારે આપણે $\pi = \frac{22}{7}$ લઈશું.

ઉદાહરણ 20.13: બે વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ અનુક્રમે 18 સેમી અને 10 સેમી છે. બંન્ને પરિઘના સરવાળા જેવડો પરીઘ ધરાવતા વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો,

ઉકેલ : ધારોકે આ વર્તુળની ત્રિજ્યા π સેમી છે.

તેનો પરિઘ $= 2\pi r$ ....(1)

હવે આપેલા બે વર્તુળોના પરિઘનો સરવાળો $= (2p \times 18 + 2p \times 10)$ સેમી

$= 2p \times 28$ સેમી ...(2)

પરિણામ (1) અને (2), $2pr = 2p \times 28$

$r = 28$

માંગેલ વર્તુળની ત્રિજ્યા $= 28$, સેમી,

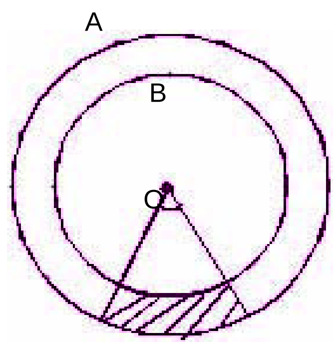
ઉદાહરણ 20.14: એક વર્તુળાકાર બાગની ત્રિજ્યા 16 મીટર છે. વર્તુળની અંદરના ભાગમાં પરિઘને સમાંતર 2 મીટર પહોળાઈનો રસ્તો આવેલો છે આ રસ્તામાં ઈંટો પાથરવાનો ખર્ચ દર ચો.મીટરે રૂા. 24 લેખે કેટલો થાય ? ($\pi = 3.14$)

ઉકેલ : ધારોકે ભાગની ત્રિજ્યા ... છે અને છાયાંકિત ભાગ રસ્તો છે. (જુઓ આકૃત્તિ 20.9)

So, OA = 16 મીટર

અને છે અને છાયાંકિત ભાગ રસ્તો છે. (જુઓ આકૃત્તિ 20.9)

OA = 16 મીટર OB = 16 મીટર – 2 મીટર = 14 મીટર



આકૃત્તિ. 20.9

રસ્તાનું ક્ષેત્રફળ

$= (p \times 16^2 - p \times 14^2)$ મી^{2}

$= p(16 + 14)(16 - 14)$ મી^{2}

$= 3.14 \times 30 \times 2 = 188.4$ મી^{2}

1મી^{2} માં ઈંટો પાથરવાનો ખર્ચ રૂા. 24 મી^{2}

$= 24 \times 188.4$

188મી^{2} માં ઈંટોપાથરવાનો ખર્ચ $= 4521.60$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો ૨૦.૪

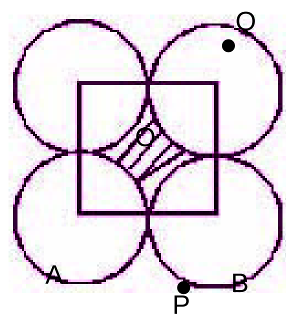
1. બે વર્તુળોની ત્રિજ્યા 9 સેમી અને 12 સેમી છે. આ બંને વર્તુળોનો ક્ષેત્રફળોનો સરવાળા જેટલું ક્ષેત્રફળ ધરાવતા વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો.
2. એક મીટરના પૈડાઓની ત્રિજ્યા 40 સેમી છે. જો આ મોટર કલાકના 66 કિમી ની ઝડપે જતી હોય, તો 20 મિનિટમાં દરેક પૈડું કેટલા આંટા ફર્યું હશે ?
3. એક વર્તુળાકાર બાગની ત્રિજ્યા 21 મીટર છે બાગની બહારની બાજુએ પરિઘને સમાંતર 7 મીટર પહોળો રસ્તો બનાવેલો છે. આ રસ્તાનું ક્ષે6ફળ શોધો.

૨૦.૮ વૃત્તાંશની પરિમિતિ અને ક્ષેત્રફળ

વર્તુળનો વૃત્તાંશ એ શબ્દથી તમે પૂરેપૂરા વાકેફ છો. ફરી યાદ કરી લઈને કે બે ત્રિજ્યાઓ વડે ઘેરાયેલો વર્તુળનો ભાગ એટલે વૃતાંશ. આમ, આકૃત્તિ 20.10માં દર્શાવ્યા મુજબ છાયાક્તિ ભાગ OAPB એ O કેન્દ્રવાળા વર્તુળનો વૃત્તાંશ છ OAPB કેન્દ્રીકોણ અથવા વૃત્તાંશકોણ તરીકે ઓળખાય છે. આ વૃત્તાંશ છે લઘુચાપ OAQB ને સંગલ્ન .. લઘુવૃત્તાંશ છે અને ગુરુચાપ OAQB ને સંગલગ્ન c લઘુવૃતાંશ છે અને ગુરુચાપ OAQB ને

નોંધ :- ખાસ સ્પષ્ટતા કરી ન હોય, ત્યારે વૃત્તાંશ એટલે લઘુવૃત્તાંશ સમજવું.

(i) વૃત્તાંશની પરિમિતિ :



આકૃત્તિ. 20.10

વૃત્તાંશ OA + OB + ચાપ APB ની લંબાઈ

ધારોકે ત્રિજ્યા OA = OB= & ચાપ, APB ની

લંબાઈ r અને $\angle AOB = \theta^\circ$

ચાપ APB ની લંબાઈ r આપણે નીચેની રીતે શધી શકીએ.

આપણે જાણીએ છીએ કે વર્તુળનો પરિઘ $= 2\ \ r$

એટલે કે કેન્દ્ર આગળ કુલ 360° ના ખૂણા માટેની લંબાઈ $= 2\ \ r$

કેન્દ્ર આગળ $^\circ$ ખૂણો બનાવતા ચાપની લંબાઈ =

l = ...(1)

or

...

આમ, વૃત્તાંશ ની પરિમિતિ OAPB = OA + OB + l

$r + r + \qquad = 2r +$

(ii) **વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ**

વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ $= \quad r^2$

એટલે કે કેન્દ્રઆગળ કુલ 360°, ના ખૂણા માટેનું ક્ષેત્રફળ $= \quad r^2$

પરિમિતિ $=$

π

$2r + \dfrac{\pi r(360^\circ - \theta)}{180^\circ}$

અને ક્ષેત્રફળ $= \dfrac{\pi r^2}{360^\circ} \times (360^\circ - \theta)$

ઉદાહરણ 20.15: 9 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળમાં કેન્દ્ર આગળ 35° નો ખૂણો બનાવતા વૃત્તાંશની પરિમિતિ અને તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ: વૃત્તાંશની પરિમિતિ $= 2r + \dfrac{\pi r\theta}{180^\circ}$

$$= \left(2 \times 9 + \frac{22}{7} \times \frac{9 \times 35^\circ}{180^\circ}\right) \text{ સેમી}$$

$$= \left(18 + \frac{11 \times 1}{2}\right) \text{ સેમી} = \frac{47}{2} \text{ સેમી}$$

વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ $= \dfrac{\pi r^2 \times \theta}{360^\circ}$

$$= \left(\frac{22}{7} \times \frac{81 \times 35^\circ}{360^\circ}\right) \text{સેમી}^2$$

$$= \left(\frac{11 \times 9}{4}\right) \text{cm}^2 = \frac{99}{4} \text{cm}^2$$

ઉદાહરણ 20.16: એક વર્તુળની 6જિયા 6 સેમી છે અને તેની એક ચાપની લંબાઈ 22 સેમી છે. આ ચાવથી રચાતા વૃત્તાંશની પરિમિતિ અને તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

$1 = \dfrac{\pi r\theta}{180^\circ}$

(1)

ઉકેલ: વૃત્તાંશની પરિમિતિ $= 2r$ + ચાપની લંબાઈ

$= (2 \times 6 + 22)$ સેમી $= 34$ સેમી

ક્ષેત્રફળ જાણવા પહેલા કેન્દ્રીય કોણ શોધીએ

$$\frac{\pi r\theta}{180^\circ} = 22$$

$$\theta = \frac{180^\circ \times 7}{6} = 210^\circ$$

હવે વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ $= \dfrac{\pi r^2\theta}{360^\circ}$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{36 \times 210^\circ}{360^\circ}$$

$= 66$ સેમી^{2}

ક્ષેત્રફળ શોધવાનો બીજો વિકલ્પ :

વર્તુળનો પરિઘ $= 2pr$

વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ $= 2 \times \dfrac{22}{7} \times 6$ સેમી

જ્યારે ચાપની લંબાઈ $= pr^2 = \dfrac{22}{7} \times 6 \times 6$ સેમી^{2}

તેથી ચાપની લંબાઈ 22 ત્યારે ક્ષેત્રફળ = ?

વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ $2 \times \dfrac{22}{7} \times 6$ સેમી, $= \dfrac{22}{7} \times 6 \times 6$ સેમી^{2}

$= 66$ સેમી^{2}

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 20.5

1. 14 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળમાં કેન્દ્રીયપણે 30° રચતા વૃત્તાંશની પરિમિતિ અને તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.2. 6સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળમાં 11 સેમી લંબાઈની ચાપથી રચાતા વૃત્તાંશની પરિમિતિ અને તેનું ક્ષેત્રળ શોધો.

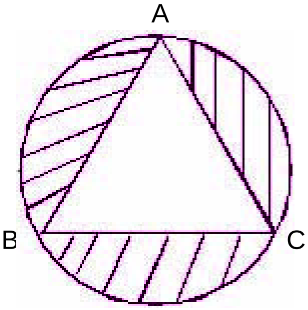
20.6 વર્તુળ સબંધિ મિશ્ર આકોરોનું ક્ષેત્રફળ

અત્યાર સુધીમાં આપેણે કોઈ સ્વતંત્ર આકૃતિ માટે ચર્ચા કરતાં હતાં હવે આપણે કેટલીક મિશ્ર સમતલીય આકૃત્તિઓના ક્ષેત્રફળની ગણતરી કરવાનો પ્રયત્ન કરીશું.

ઉદાહરણ **20.17:** આકૃત્તિ20.11માં દર્શાવ્યા મુદબ એક ટેબલનું મથાલું 40 સેમી ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ છે.તેમાં એવો સમબાજુ ત્રિકોણ દોરેલો છે જેના શિરોબિંદુઓ વર્તુળ ઉપર હોયઆ ત્રિકોણ ની જગ્યા છોડીને વર્તુળના

બાકીના ભાગમાં ચિત્રકામ કરાવવું છે. જો 1 ચો.સેમીમાં ચિત્રકામ કરાવાનો ભાવ 50 પૈસા હોય, તો ચિત્રકામ કરાવવાનો ખર્ચ શોધો,.

(π =3.14 અને $\sqrt{3}$ =1.4 લો)



આકૃતિ. 20.11

ઉકેલ : *ચિત્રકામ માટેની જગ્યા* = ABC નું ક્ષેત્રફળ ...(1)

$OP \perp BC \ \ OB, OC.$ (Fig. 20.12)

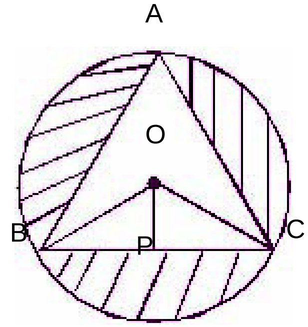
$\angle BOC = 2\ \angle BAC = 2 \times 60^o = 120^o$

$\angle BOP = \angle COP = \quad \angle BOC = \frac{1}{2} \times 120^o = 60^o$

$\frac{BP}{OB} = \sin\angle BOP = \sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$ [22-23]

$\frac{BP}{3.5} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$BC = 2 \times \frac{3.5\sqrt{3}}{2} \text{ cm} = 3.5\sqrt{3} \text{ cm}$



આકૃતિ. 20.12

$\frac{1}{2} 3.5 \times 3.5 \left(\frac{12.56 - 5.10}{4} \right)$ $\Delta ABC = \frac{\sqrt{3}}{4} BC^2$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3.5 \times 3.5 \times 3$ સેમી^{2}

ABC

$= (3.14 \times 3.5 \times 3.5 - \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3.5 \times 3.5 \times 3)$ સેમી^{2}

$= (3.14 \times 3.5 \times 3.5 - \frac{1.7 \times 3.5 \times 3.5 \times 3}{4})$ સેમી^{2}

= સેમી^{2}

$$= 12.25\left(\frac{7.46}{4}\right) \text{ સેમી}^2 = 12.25 \times 1.865 \text{ સેમી}^2$$

1 ચોસેમીમાં ચિત્રકામ 0.50 per સેમી²

$$= \overline{\ }12.25 \times 1.865 \times 0.50 = \text{` } 114.23 \text{ (approx)}$$

ઉદાહરણ 20.18: આકૃતિ 20.13માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે એક ચોરસ હાથ રૂપાલ છે. તેમાં 7 સેમી ત્રિજ્યાવાળા 9 વર્તુળનુ ચિત્ર દોર્યું છે. રૂમાલનુ વર્તુળો સિવાયનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

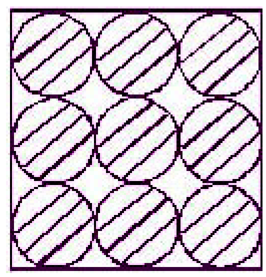
ઉકેલ : દરેક વર્તુળની ત્રિજ્યા 7 સેમી છે તે દરેકનો વ્યાસ 14 સેમી થાય ચોરસ રૂપાલની બાજુ 14 × 3=42 સેમી થાય … 1

રૂમાલનું ક્ષે $= 42 \times 42$ સેમી²

2×7 સેમી $= 14$ સેમી

$= 3 \times 14 = 42$ ચો સેમી ...(1)

$= 42 \times 42 \text{ cm}^2$



આકૃતિ. 20.13

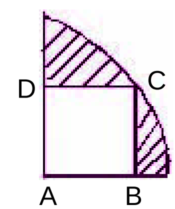
$$= r^2 = \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \text{ cm}^2 = 154 \text{ સેમી}^2$$

$= 9 \times 154$ સેમી² ...(2)

રૂમાલનું બાકીના ભાગનું ક્ષે = (1) - (2)

$= (1764 - 1386) \text{ cm}^2 = 378$ સેમી²

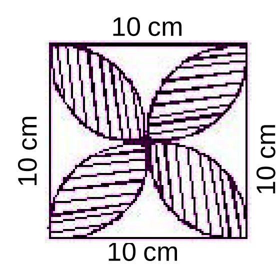
તમારી પ્રગતિ ચકાસો 20.6



આકૃતિ. 20.14

1. 14 સેમી ત્રિજ્યાવાળા એક વર્તુળના ચોથા ભાગમાં 6 સેમી બાજુવાળો ચોરસ દોરેલો છે (જુઓ આકૃતિ 20.14) આકૃતિના છાયાકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

q = 2r +



આકૃતિ. 20.14

2. 10 સેમી બાજુવાળા ચોરસની દરેક બાજુ ઉપર ચોરસની અંદરના ભાગમાં અર્ધવર્તુળો દોર્યો છે. આકૃતિ 20.15માં દર્શાવ્યા મુજબ છાયાકિત ભાગોનું ક્ષેત્રફળ શોધો (જવાબ.માં દર્શાવો.)

- લંબચોરસની પરિમિતી = 2 (લંબાઈ +પહોળાઈ)
- લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ = લંબાઈ + પહોળાઈ

સમતલીય આકૃતિની પરિમિતિ ક્ષેત્રફળ

- ચોરસની પરિમિતી $= 4 +$ બાજુ
- ચોરસનું ક્ષેત્રફળ $=$ (બાજુ)^2
- સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ $=$ પાયો $+$ પાયા પરનો વેધ

ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}$ પાયો $+$ પાયાપરનો વેધ

ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, a, b અન c એ ત્રિકોણની બાજુઓ છે અને $s = \frac{a+b+c}{2}$.

· સમચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ $=$ વિકર્ણોનો ગુણાકાર

- સમલંબચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}$ (સમાંતર બાજુઓનમો સરવાળો) +સમાંતર બાજુઓ વચ્ચેનું અંતર
- લંબ ચોરસ ફરતા રસ્તાનું ક્ષે $=$ આખા લંબચોરસનું ક્ષે -- અંદરના લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ
- લંબ ચોરસના મધ્યમાં નું ક્ષેત્રફળ) $=$ (બે રસ્તાઓનું ક્ષેત્રફળ) - (સામાન્યભાગનું ક્ષેત્રફળ)
- વર્તુળનો પરિઘ $= r = 2\ \pi r$
- $\frac{1}{2}$ વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ $= r = pr^2$
- વર્તુળકાર રસ્તાઓનું ક્ષે $= 2\ \pi r$ બાધવર્તુળનું ક્ષે - અંદરના વર્તુળનું ક્ષે . $1 = \frac{\pi r\theta}{180^o}$
- ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળમાં કેન્દ્રીપકોણ 0 વાળા વૃત્તાંશની પરિમિતિ $= 2\ \ 2r + \frac{\pi r\theta}{180^o}$
- $\frac{\pi r\theta}{180^o}$ ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળમાં કેન્દ્રીયકોણ 0 વાળા વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ $=\ q = \frac{\pi r^2\theta}{360^o}$
- કોઈપણ સુરેખ આકૃત્તિનું ક્ષેત્રફળ આ આકૃત્તિને જાણીતી આકૃત્તિઓમાં જેવી કે ચોરસ, લંબચોરસ, ત્રિકોણ વગેરે, વિભાજિત કરીને ગણી શકાય છે.
- વર્તુળ સાથે જોડાયેલી વિવિધ સંયોજિત (મિશ્ર) આકૃત્તિઓનું ક્ષેત્રફળ જાણતા સૂત્રોની મદદથી મેળવી શકાય છે.

સત્રાંત સ્વાધ્યાય

1. 37.5 મી લંબાઈવાળા ચોરસ બાગનું ક્ષેત્રફળ

2. જે ચોરસની પરિમિતી 480 સેમી છે તેનું ક્ષેત્રફળ

3. એક ચોરસ ખેતરનું ક્ષેત્રફળ 40000 મીટર (ચો.મી) છે. જો ચાલવાની ઝડપ 4 કી.મી./ કલાક હોય, તો આ ખેતર ધાર પર ચાલીને એક ચક્ર પૂરું કરતાં કેટલો સમય લાગે છે ?

4. એક ઓરડાની પહોળાઈ 4.5 મી છે અને લંબાઈ , પહોળાઈ કરતાં ત્રણ ગણી છે. ભોયરાતળિયાનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

5. એક લંબ ચોરસની લંબાઈ અને પહોળાઈ 5.2 ના પ્રમાણમાં છે જો પરિમિતિ 980 સેમી હોય, તો ક્ષેત્રફળ શોધો.

6. નીચેના સમાંતરબાજુ ચચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

(i) એક બાજુ 25 સેમી અને તેના પરનો વેધ 12 સેમી હોય

(ii) બે સંલગ્ન બાજુઓ (પાસ પાસેની બાજુઓ) 13 સેમી અને 14 સેમી હોય અને એક વિકર્ણ 15 સેમી હોય.

7. એક લંબચોરસ ખેતરનું ક્ષેત્રફળ 2700 સેમી છે અને ખેતરની લંબાઈ અને પહોળાઈ 6.5 ના પ્રમાણમાં છે ખેતર ફરતે કાંટાળા તારની વાડ કરવા તારના ચાર ચક્ર કરવાના છે જો આવા તારનો ભાવ 10 મીટરના રૂા. 7 હોય, તો વાડ કરવા જોઈતા તારનો ખર્ચ શોધો.

8. નીચીના સમલંબ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ક્રમ	સમાંતર બાજુઓની લંબાઈ	સમાંતર બાજુઓવચ્ચેનું અંતર
(i)	30 સેમી અને 20 સેમી	15 સેમી
(ii)	15.5 સેમી અને 10.5 સેમી	7.5 સેમી
(iii)	15 સેમી અને 45 સેમી	14.6સેમી
(iv)	40 સેમી અને 22 સેમી	12 સેમી

9. એક ચતુષ્કોણીય પ્લોટનો વિકર્ણ 20 મીટર છે. તેની સામાસામેના ખૂણાના શિરોબિંદુમાંથી વિકર્ણ પર દોરેલા વેધની લંબાઈ અનુક્રમે 12 મી. અને 18 મી. છે. આ પ્લોટનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

10. સમલંબ ચતુષ્કોણ આકારના એખ એતરની સમાંતર બાજુઓની લંબાઈ 48 મી અને 160 મી છે. બાકીની બે બાજુઓ 50 મી અને 78 મી લાંબી છે આ ખેતરનું ક્ષેત્રફળ શોધો,

11. ચતુષ્કોણ ABCD માં .. =AB = 8.5 સેમી, BC = 14.3 સેમી, CD = 16.5 સેમી, AD = 8.5 સેમી અને BD = 15.4 છે. આ ચતુષ્કોણની પરિમિતિ અને ક્ષેત્રફળ શોધો.

12. ત્રિકોણની બાજુઓના આપેલ માપ પરથી તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

(i) 2.5 સેમી, 6 સેમી અને 6.5 સેમી

(ii) 6 સેમી, 11.1 સેમી અને 15.3 સેમી

13. એક ત્રિકોણની બાજુઓ 51 સેમી, 52 સેમી, 53 સેમી, છે નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(i) ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ કેટલું થાય

(ii) 52 સેમી લંબાઈની બાજુ ઉપર તેની સામાના શિરોબિંદુમાંથી દોરેલ વેધની લંબાઈ કેટલી થાય ?

(iii) વેધથી બનતા બન્ને ત્રિકોણનું ક્ષે6ફળ કેટલું થાય ?

14. 5 સેમી લંબાઈની બાજુવાળા એખ સમબાજુ ચતુષ્કોણનો એક વિકર્ણ 8 મી લાંબો છે. આ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

15. એક સમલેબ ચતુષ્કોણની સમાંતર બાજુઓ વચ્ચેનો તફાવત 8 સેમી છે અને ચતુષ્કોણનું અંતર 312સેમી છે. જો સમાંતર વચ્ચેનું અંતર 24 સેમી હોય, તો સમાંતર બાજુઓની લંબાઈ શોધો.

16. એક લંબચોરસ બાગ 200 મી + 150 મી નો છે 10 મી પહોળાઈનો એક રસ્તો લંબાઈના મધ્યમાંથી પોહળાઈને સમાંતર જાય છે અને તેટલીજ પહોળાઈનો બીજો રસ્તો પહોળાઈના મધ્યમાંથી લંબાઈને સમાંતરે જાય છે દર ચોરસ મીટરે 5 રૂપિયા લેખે રસ્તાઓ તૈયાર કરવાનો ખર્ચ કેટલો થાય.

17. 65 મી X 40 મી માપના લંબચોરસ બાગની અંદરના ભાગમાં ચારે બાજુએ 8 મી પહોળો રસ્તો છે. આ રસ્તામાં લાલ પથ્થર જણાવાનો ખર્ચ દર ચો.મીટરે રૂા. 5.25 લેખે કેટલો થાય ?

18. 30 મી લાંબો અને 20 મી પહોળો એક બગીચો છે. બગીચા ફરતે 2 મી પહોળાઈના બે રસ્તાઓ છે (એક અંદરની બાજુઓ અને બીજો બહારની પહોળાઈ બાજુએ) આ રસ્તાઓનું કુલ ક્ષેત્રફળ શોધો.

19. એક વર્તુળના પરિઘ અને વ્યાસ વચ્ચેનો તફાવત 30સેમી છે. વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો.

20. જેની ત્રિજ્ય 9 મી છે એવા વર્તુળાકાર બાગની ફરતે બહારની બાજુએ 3 મી પહોળાઈનો રસ્તો બનાવેલો છે. આ રસ્તાનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

21. 15 મી ત્રિજ્યાવાળા બાગની ફરતે અંદરની બાજુએ 2 મી પહોળો રસ્તો બનાવેલો છે. રસ્તાનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

22. એક વર્તુળાકાર પુંઠાની (કાર્ડબોર્ડની) ત્રિજ્યા 1.47 મી છે, તેમાંથી $60°$ ના કેન્દ્રીયકોણ વાળો વૃત્તાંશ કાપીને દૂર કરવામાં આવ્યો છે. વધેલા પુંઠાનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

23. 360 મીટર લંબાઈના ચોરસ ખેતરનું ક્ષેત્રફળ હેક્ટરમાં જણાવો.

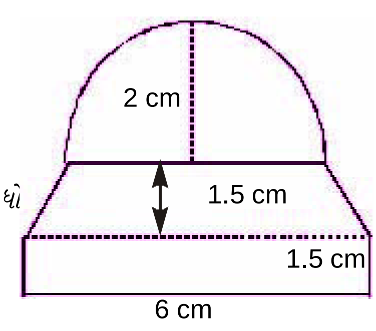
24. એક ત્રિકોણકાર ખેતરનું ક્ષેત્રફળ 2.5 હેટર થે.એખ બાજુની લંબાઈ 250 મી છે. આ બાજુ પરના વંધની લંબાઈ શોધો.

25. એક ખેતરનો આકાર સમલંબ ચતુષ્કોણ છે. તેની સમાંતર બાજુઓ 11 મી અને 25 મી લંબાઈની છે. બીજી બે બાજુઓ 15 મી અને 13 મી લંબાઈની છે. આ ખેતરને પાણી પીવરાવાનો ખર્ચ દર 500 ચોસેમીના 5 પૈસા લેખે કેટલા થાય ?

26. એક વર્તુળાકાર ચક્નો વ્યાસ 8સેમી છે. તેમાં 1.5 સેમી લંબાઈનું ચોરસ કાણું પડયું છે. ચક નું બાકીના ભાગનું ક્ષે6ફળ શોધો.

27. આકૃત્તિ 20.16 માં દર્શાવેલા માપને આધારે આકૃત્તિનું ક્ષેત્રફળ શોધો

(π= 3.14)



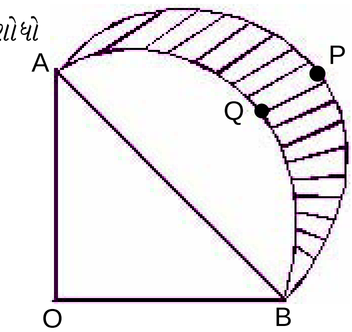
આકૃત્તિ. 20.16

28. એક ખેડુત એખ વર્તુળાકાર ખેતર દર ચોરસમીટરના રૂા. 700ના ભાવે રૂા. 316800માં ખરીદે છે આ ખેતરની પરિમિતિ (પરિઘ) શોધો.

29. એક ચોરસ પ્લોટની લંબાઈ 12 મી દોરડાથી અપ્લોટના એક ખૂણાના ખીલ સાથે 3.5મી દોરડાથી એક ઘોડો બાંધ્યો છે. ઘોડો કેટલી જગ્યામાં ચરી શકશે ?

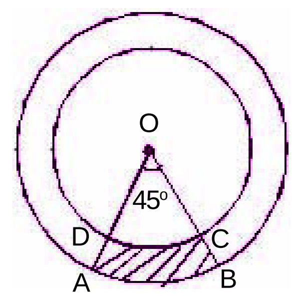
30. જે વર્તુળનો પરિઘ 44 સેમી છે તે વર્તુળના ચોથા ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો

31. આકૃત્તિ 20.17માં OAQB એ 7સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનો ચોથો ભાગ છે અને OPB એ અર્ધવર્તુળ છે. છાયાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



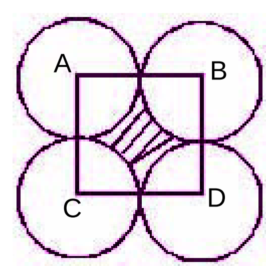
આકૃત્તિ. 20.17

32. આકૃત્તિ 20.18માં દોરેલા બે સમકેન્દ્રીય વર્તુળોની ત્રિજ્યા 7 સેમી અને 14 સેમી $\angle AOB = 45^o$, છે છાયાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



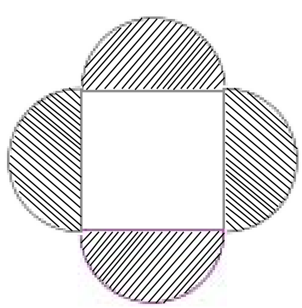
આકૃત્તિ. 20.18

33. આકૃત્તિ 20.19માં 7 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળો બીજાને સ્પર્શે છે અને A, B, C, અને D વર્તુળોના કેન્દ્રો છે વચ્ચેના છાયાકિંત ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

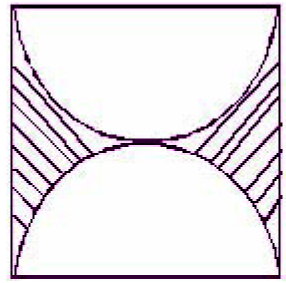


આકૃત્તિ. 20.19

34. આકૃત્તિ 20.20માં એખ ચાદરની બધી ધાર પર અર્ધવર્તુળ કાપડ બેસાડીને ચાદરને બનાવી છે લંબાઈ-પહોળાઈ પર ગોઠવેલા અર્ધવર્તુળના વ્યાસ જો 28 સેમી, 14 સેમી, 28 સેમી અને 14 સેમી હોય, તો કુલ ક્ષેત્રફળ શોધો.


આકૃત્તિ. 20.20

35. આકૃત્તિ 20.21માં 14 સેમી લંબાઈની બાજુવાળો ચોરસ છે બે અર્ધવર્તુળો અંદરની બાજુએ દોરેલા છે. છાયાકિંત ભાગનું અને તે સિવાયના ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



આકૃત્તિ. 20.21

36. ..બાજુ 42 માં આપેલ વિકલ્પોમાંથી જવાબોનો સાચો વિકલ્પ પસંદ કરો

(A) a^2 (B) 4a (C) 2a (D) $\sqrt{2}$ a

37. ત્રિકોણની બાજુઓ 15 સેમી 20સેમી અને 25 સેમી છે. તેનુ ક્ષેત્રફળ કેટલું થાય ?

(A) 30 સેમી^{2} (B) 150 સેમી^{2} (C) 187.5સેમી^{2} (D) 300 સેમી^{2}

38. દ્વિબાજુ ત્રિકોણનો પાયો 8 સેમી અને સરખી બાજુઓ 5 સેમી છે. પરાયા પરની ત્રિકોણની ઊંચાઈ કેટલા ?

(A) 5 સેમી (B) 4 સેમી (C) 3 સેમી (D) 2 સેમી

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

39. બાજુનું માપ .. એકમ હોય એવા સમબાજુ ત્રિકોણની ઊંચાઈ કેટલા એકમ હોય ?

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2a^2}$ (C) a (D) $\frac{\sqrt{3}}{2a}$

40. સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણની એક બાજુ 15 સેમી અને તે બાજુ પરથી ઊંચાઈ 5 સેમી હોય, તો

(A) 75સેમી^{2} (B) 37.5 સેમી^{2} (C) 20 સેમી^{2} (D) 3 સેમી^{2}

41. એક સમબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ 156 સેમી^{2} છે જો તેના એક વિકર્ણ 13 સેમી હોય, તો બીજા વિકર્ણનું માપ કેટલું ?

(A) 12 સેમી (B) 24સેમી (C) 36 સેમી (D) 48 સેમી

42. એક સમલંબ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ 180સેમી^{2} છે . જો બે સમાંતર બાજુઓ 28 સેમી અને 12 સેમી હોય, તો સમાંતર બાજુઓ વચ્ચેનું અંતર કેટલું ?

(A) 9 સેમી (B) 12 સેમી (C) 15 સેમી (D) 18 સેમી

43. નીચેનામાંથી ક્યા વિધાનો સાચા છે અને ક્યા વિધાનો ખોટા છે, તે જણાવો

(i) લંબ ચોરસની પરિમિતી તેની લંબાઈ અને પહોળાઈ સરવાળા જેટલી હોય છે.

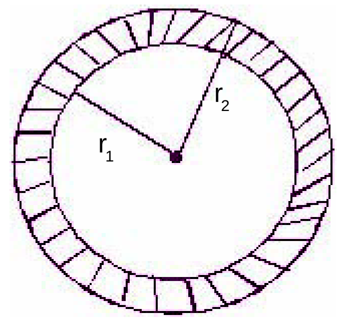
(ii) πr_2 ત્રિજ્યા વાળા વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ $r2^2$ છે.

(iii) બાજુની આકૃત્તિમાં દર્શાવેલ છાયાકિંત વર્તુળાકાર રસ્તાનું ક્ષેત્રફળ $pr_1^2 - pr_2^2$ થાય.

(iv) a, b અને c બાજુઓવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ

$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ જ્યાં S એ

ત્રિકોણની પરિમિતિ છે.



(v) ત્રિજ્યા અને કેન્દ્રીયકોણ હોય 60^o ,

તેવા વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ $\frac{\pi r^2}{6}$ છે.સેમી

(vi) 5 સેમી ત્રિજ્યા અને કેન્દ્રીય કોણ 120^o હોય તેવા વૃત્તાંશની પરિમિતિ 5 સેમી $+ \frac{10\pi}{3}$ સેમી થાય.

44. ખાલી જગ્યા પૂરો.

(i) સમબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ = =__________________ગુણાકાર

(ii) સમલંબ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ = $\frac{1}{2}$ (=________નો સરવાળો) ×=______ વચ્ચેનું અંતર

(iii) 4 સેમી અને 8 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળોનો વૃત્તાંશો કેન્દ્રઆગળ અનુક્રમે 100^o અને 50^o નો ખૂણો બનાવે છે આવૃત્તાશોના ક્ષેત્રફળનો ગુણોત્તર =__________

(iv) 10 સેમી અને 5 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળોના વૃત્તાંશો કેન્દ્ર આગળ અનુક્રમે 75^o અને 150^oનો ખૂણો બનાવે છે આ વૃત્તાંશોના ચાપનો ગુણોત્તર =_____________

(v) જેના વિકર્ણો 16 સેમી અને 12 સેમી છે એવા સમબાજુ ચતુષ્કોણની પરિમિતિ =__________

તમારી પ્રગતિ ચકાસો ના જવાબ

20.1

1. 60 મીટર
2. $15\sqrt{2}$ સેમી
3. (i) 281.25 મીટર^2 (ii) 70મીટર
4. 110 મીટર [$3x \times 2x = 726$ Þ $x = 11$ મીટર]
5. 240 સેમી^{2}
6. 80 સેમી
7. 190 સેમી^{2}

8. 55 સેમી, 1320 સેમી^{2}

20.2

1. $24\sqrt{21}$ સેમી^{2}
2. $36\sqrt{3}$ સેમી^{2}; $6\sqrt{3}$ સેમી

20.3

1. 648 મી^{2}
2. 276 મી^{2}
3. 7225 મી^{2}
4. $\left(27+\frac{5}{4}\sqrt{11}\right)$ સેમી^{2}

20.4

1. 15 સેમી
2. 8750
3. 10.78 મી^{2}

20.5

1. પરિમિતિ $= 35\frac{1}{2}$ સેમી; Area $= \frac{154}{3}$ સેમી^{2}
2. પરિમિતિ $= 23$ સેમી, $= 33$ સેમી^{2}

20.6

1. 118 સેમી^{2}
2. $4\times\frac{1}{2}\pi\times5^2 - 10\times10$ સેમી^{2}

   $= (50\pi - 100)$ સેમી^{2}

સત્રાંત સ્વાધ્યાયના જવાબો

1. 1406.25 મી^{2} 2. 14400 સેમી^{2} 3. 12 minutes

4. 60.75 મી^{2} 5. 49000 સેમી^{2} 6. (i) 300 સેમી^{2} (ii) 168 સેમી^{2}

7. ` 1848

8. (i) 375 સેમી^{2}	(ii) 97.5 સેમી^{2}	(iii) 438 મી^{2}	(iv) 372 સેમી^{2}
9. 300 મી^{2}	10. 3120 મી^{2}	11. 129.36 સેમી^{2}	
12. (i) 7.5 સેમી^{2}	(ii) 27.54 સેમી^{2}		
13. (i) 1170 સેમી^{2}	(ii) 45 સેમી	(iii) 540 સેમી^{2}, 630 સેમી^{2}	
14. 24 મી^{2}	15. 17 સેમીand 9 સેમી	16. ` 17000	
17. ` 7476	18. 400 m^2	19. 7 સેમી	
20. 198 મી^{2}	21. 176 m^2	22. 1.1319 મી^{2}	
23. 12.96	24. 200 મી	25. ` 216	
26. 47.99 સેમી^{2}	27. 22.78 મી^{2}	28. $75\frac{3}{7}$ મી	
29. $\frac{77}{8}$ મીm^2	30. $\frac{77}{2}$ સેમી^{2}	31. $\frac{49}{2}$ સેમી^{2}	
32. $\frac{231}{4}$ સેમી^{2}	33. 42 સેમી^{2}	34. 1162 સેમી^{2}	
35. 42 સેમી^{2}, 154 સેમી^{2}	36. (B)	37. (B)	
38. (C)	39. (C)	40. (A)	
41. (B)	42. (A)		

43. (i) ખોટું (ii) ખરું (iii) ખોટું

(iv) ખોટું (v) ખરું (vi) ખોટું

44. (i) વિકર્ણો (ii) સમાંતર બાજુઓ, તેમની (iii) 1 : 2

(iv) 1 : 1 (v) 40 સેમી.

21

ઘન પદાર્થોની સપાટીનાં ક્ષેત્રફળ અને ઘનફળ (કદ)

પરિચય

લંબચોરસ, ચોરસ, ત્રિકણો, સમલંબ ચતુષ્કોણ, વર્તુળ, વૃત્તાંશ, જેવી સમતલીય આકૃતિઓની પરિમિતિ અને ક્ષેત્રફળ વિશે તમે શીખી ગયા છો. આ બધી સમતલીય અને ક્ષેત્રફળ વિશે તમે શીખી ગયા છો. આ બધી સમતલી આકૃતિઓ કહેવાય છે કારણ કે દરેક પૂરે પૂરી સમતલ ઉપર પથરાયેલી હોય છે. રોજબરોજના ઉપયોગમાં આવતી ઘણી વસ્તુઓ એવી છે જે પૂરેપૂરી (સંપૂર્ણ) સમતલ (સપાટી) ઉપર ન હોય. એમાંથી કેટલીક છે; ઈંટો, દડો, આઈસ્ક્રીમ કોન, ડ્રમ (નળકાર), વગેરે આ બધા ઘન પદાર્થો છે અથવા ત્રિપરિમાણીય પદાર્થો છે. આ ઘન પદાર્થોને રજૂ કરતી આકૃતિઓને ત્રિપરિમાણીય અથવા ઘનાકૃતિ કહેવાય છે. લંબઘન, સમઘન, નળાકાર, શંકુ અને ગોળો ખૂબ જાણીતી ઘનાકૃતિઓ છે. આ પાઠમાં આપણે એ ઘનાકૃતિઓની સપાટીનાં ક્ષેત્રફળ અને તેમના ઘનફળનો અભ્યાસ કરીશું.

હેતુઓ

આ પ્રકરણ શીખ્યા પછીની અધ્યેતા

- *ઘનાકૃતિનાં સપાટીનાં ક્ષેત્રફળ અને તેના ઘનફળનો અર્થ સમજી શકશે.*
- *ક્યારે સપાટીની ક્ષેત્રફળની જરૂર છે અને ક્યારે ઘનાકૃતિના ઘનફળની જરૂર છે તેનો ભેદ પારીખ શકશે.*
- *લંબઘન, સમઘન, નળાકાર, શંકુ, ગોળા અને અર્ધગોળાની સપાટીનું ક્ષેત્રફળ ગણવા જે-તે સૂત્રનો ઉપયોગ કરી શકશે.*
- *લંબઘન, સમઘન, નળાકાર, શંકુ, ગોળો અને અર્ધગોળાનું ઘનફળ ગણવા જે-તે સૂત્રનો ઉપયોગ કરી શકશે.*
- *રોજબરોજના વ્યવહારમાં ઘનપદાર્થોની સપાટીનું ક્ષેત્રફળ અને તેનું ઘનફળને લગતા ઉકેલી શકશે.*

21.1 અપેક્ષિચ પૂર્વજ્ઞાન

- *સમતલીય સુરેખ આકૃતિની પરિમિત અને ક્ષેત્રફળ*
- *વર્તુળનો પરિઘ અને તેનું ક્ષેત્રફળ*
- *ચાર મૂળભુત ગાણિતિક પ્રક્રિયાઓ*
- *એક ચલ અને દ્વિચલ સમીકરણનો ઉકેલ*

21.4 પદાર્થની સપાટીના ક્ષેત્રફળ અને પદાર્થના ઘનફળની સમજ :

નીચે આકૃતિ 21.1 માં આપેલા પદાર્થો જુઓ

આકૃતિ 21.1

નીચેના પદાર્થો ભૌમિતિક રીતે ત્રિપરિમાણીય અથવા ઘનાકૃતિ સ્વરૂપે દર્શાવ્યા છે.

પદાર્થો	**ઘનાકૃતિ**
ઈંટ, કબાટ	*લંબઘટન*
બિબું, ચાનું પેકેટ	*સમઘન*

ઢોલ, પાઉડરનો ડબો	નળાકાર
જોકર ટોપી, આઈસ્ક્રીમ કોન	શંકુ
ફૂટબોલ, દડો	ગોળો
કટોરો	અર્ધગોળો

યાદ કરો કે લંબચોરસ એ બાજુઓથી બનલી આકૃતિ છે, તેની બાજુઓની લંબાઈનો સરવાળો કરવાથી તેની પરિમિતિ જાણી શકાય છે. અને તેણે રોકેલી જગ્યાનું માપ એ તેનું ક્ષેત્રફળ છે. એ જ રીતે ત્રિકોણની બાજુઓની લંબાઈનો સરવાળો તેની પરિમિતિ કહેવાય છે. અને તેના દ્વારા ઘેરાતા પ્રદેશના માપને તેનું ક્ષેત્રફળ કહેવાય છે. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો સમતલીય આકૃતિની હદને તેની પરિમિતિ કહે છે અને આકૃતિ વડે ઘેરાતા સમતલના ભાગને તેનું ક્ષેત્રફળ કહે છે.

એ જ રીતે વિચારીએ તો ઘનાકૃતિ બહારની હદથી (સીમાથી) અથવા બહારની સમાપટીથી બનેલી છે. દાખલા તરીકે લંબઘન એ છ લંબચોરસ વિસ્તારોથી (જે તે તેની સપાટીઓ કહે છે) બનવેલી ઘનાકૃતી છે. એ જ રીતે ગોળો એ બહારની સપાટી કે સીમાથી બનેલો છે. સમતલીય આકૃતિઓની જેમ જ ઘનાકૃતિઓ પણ બે રીતે માપી શકાય છે, જે નીચે મજુબ છે.

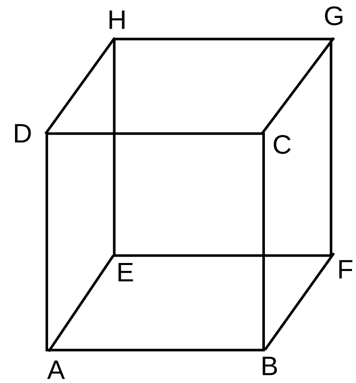
(1) ઘન પદાર્થની અંગભૂત સપાટીઓના માપનને ઘનાકૃતિની સપાટીનું ક્ષેત્રફળ કહે છે.

(2) ઘન પદાર્થો અવકાશમાં રોકેલી જગ્યાના માપને ઘનાકૃતિનું ઘનફળ (કદ) કહે છે.

આ રીતે કહી શકાય કે સપાટીનું ક્ષેત્રફળ એ ઘનાકૃતિનું પોતાનું માપ છે, જ્યારે ઘનફળળ એ અવકાશમાં ઘનાકૃતિએ રોકેલી જગ્યાનું માપ છે. ક્ષેત્રફળ ચોરસ એકમમાં દર્શાવાય છે અને ઘનફળ ઘનએકમમાં દર્શાવાય છે. જો સમદાનની બાજુ 1 સેમી પસદ કરવામાં આવે તો તેના ઘનફળનો એકમ ઘન સેમી (સેમી3) બને છે. એ જ રીતે જો સમઘનની બાજુ 1 મીટર પસંદ કરવામાં આવે (લેવામાં આવે), તો તેના ઘનયળનો એકમ ઘનમીટર (મીટર3) બને છે. એ જ રીતે અન્ય એકમ માટે વિચારી શકાય.

રોજ બરોજના વ્યવહારમાં ઘણીવાર આપણને સપાટીના ક્ષેત્રફળ શોધવાની, તો ઘણીવાર ઘનફળ શોધવાની આવશ્યકતા ઉભી થાય છે. ઉદાહરણ તરીકે આપણે દીવાલોને ઘોળવાનું અને ઓરડાની છતને ધોળવાનું વિચારતા હોઈએ, તો આપણે દીવાલો અને છતનું ક્ષેત્રફળ જાણવું જોઈએ, તદ્ઉપરાતં જો આપણે પાણી કે દૂધને કોઈ વાસણમાં ભરવા માગતા હોઈએ કે વખારમાં અનાજ ભરવા માગતા હોઈએ, તો આપણે વાણસ કે વખારનું ઘનફળ (કદ) જાણવું જોઈએ.

21.2 લંબઘન અને સમઘન



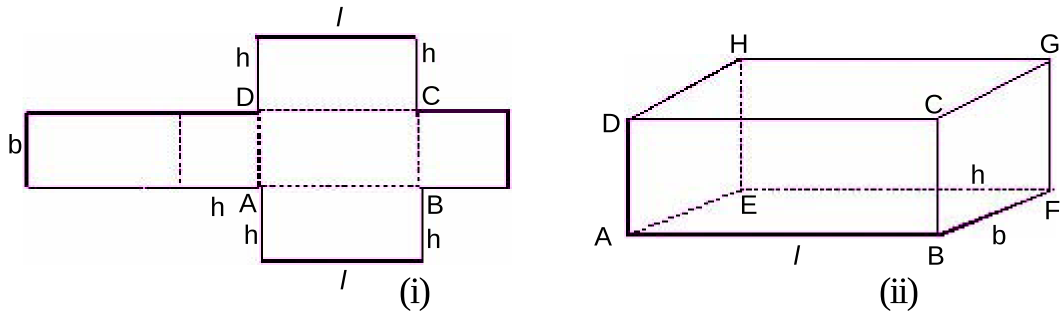
આકૃતિ. 21.2

અગાઉ જાણકારી મેળવ્યા મુજબ ઈંટ, ચોક પેટી, કંપાસ પેટી, દિવાસળીની પેટી, ચોપડી વગેરે લંબઘનના ઉદાહરણો છે. આકૃતિ 21.2 લંબઘન દર્શાવે છે. આકૃતિમાં સરળતાથી જોઈ શકાય છે કે લંબઘનને છ સપાટીઓ છે, જે દરેક એક લંબચરોસ આકારનો પ્રદેશ છે. આ છ સપાટીઓ ABCD, ABFE, BCGF, EFGH, ADHE અને CDHG છે. આ બધામાં ABFE અને CDHG, ABCD અને EFGH તેમજ ADHE અને BCGH એ સમાસામેની સપાટીઓ છે વળી તેઓ પરસ્પર એકરૂપ અને સમાંતર છે. પાસપાસેની બે સપાટીઓ એક રેખાખંડમાં મળે છે જેને લંબઘનની ધાર કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે લઈએ તો ABCD અને ABFE ધાર AB માં પરસ્પર મળે છે. બધું મળીને લંબઘનને કુલ 12 ધાર હોય છે. A,B,C,D,E,F,G અને H લંબઘનના ખૂણાઓ કે શિરોબિંદુઓ છે. આમ, લંબઘનને કુલ 8 ખૂણાઓ કે શિરોબિંદુઓ છે.

વધારામાં એ પણ જોઈ શકાય છે કે દરેક શિરોબિંદુએ ત્રણ ધાર મળે છે. આ ત્રણ ધારમાં એક ધાર લંબાઈની, બીજી ધાર પહોંચાઈની અને ત્રીજીધાર ઉંચાઈની હોય છે. (ઊંચાઈને સંજોગો મુજબ જાડાઈ કે ઊંડાઈ પણ કહેવાય છે). આ લંબાઈ, પહોંચાઈ અને ઊંચાઈને અનુક્રમે l, b અને h વડે દર્શાવાય છે. આ રીતે કહી શકાય કે AB(=EF=CD=GH) એ લંબઘનની લંબાઈ, AE (=BF-CG-DH) એ પહોંચાઈ અને AD = (EH = BC=FG) એ ઊંચાઈ છે.

જુઓ કે સપાટીઓ ABFE, AEHD અને EFGH શિરોબિંદુ E આગળ મળે છે અને આની સામેની સપાટીઓ DCGH, BFGC અને ABCD શિરોબિંદુ C આગળ મળે છે. એટલે E અને C એ સામસામેના શિરોબિંદુઓ કહેવાય છે. E અને C એ સામસામેના શિરોબિંદુઓ કહેવાય છે. E અને C ને જોડનારો રેખાખંડ EC ને લંબઘનનો વિકર્ણ કહેવાય છે. એ રીતે AG, BH અને FD. પણ લંબઘનના વિકર્ણો છે. એકંદરે લંબઘનને ચાર વિકર્ણો હોય છે.

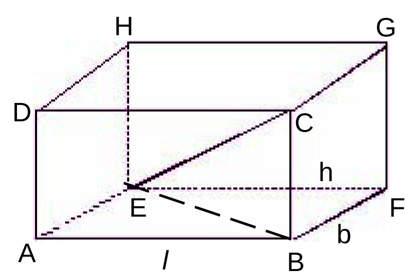
સપાટીનું ક્ષેત્રફળ (પૃષ્ઠફળ)



આકૃતિ - 21.3

આકૃતિ 21.3 (i) જુઓ, જો તેને ડોટેડ રેખાખંડોથી વાળવામાં આવે, તો તે આકૃતિ 21.3 (i) જેવા આકાર ધારણ કરશે, લંબઘન છે. આ લંબઘનની લંબાઈ, પહોંચાઈ અને ઊંચાઈને અનુક્રમ l, b અને l વડે દર્શાવ્યા છે. (આકૃતિ 21.3 (ii)). સપાટીના ક્ષેત્રફળ અંગે તમે શું કહી શકશો ? આકૃતિ 21.3 (i) માં દર્શાવ્યા મુજબના છ લંબચોરસના ક્ષેત્રફળનો રસવાળો લંબઘનની સપાટીનું ક્ષેત્રફળ (પૃષ્ઠફળ) બનશે.

એકજ પદાર્થના એકથી વધુ સપાટીના ક્ષેત્રફળના સરવાળાને કુલ ક્ષેત્રફળ કહેવાય બદલે પૃષ્ઠફળ કહીશું (કુલ ક્ષેત્રફળ એટલે પૃષ્ઠફળ)



આ રીતે, લંબઘનનું પૃષ્ઠફળ =

$= l\times b + b\times h + h\times l + l\times b + b\times h + h\times l$

$= 2(lb + bh + hl)$

આકૃતિ 21.3 (ii), *માં* BE *અને* EC *જોડવામાં આવે તો આકૃતિ* 21.4 *બને*

$\angle$=AB = 90° *છે.*

$\therefore \quad BE^2 = AB^2 + AE^2$

$\therefore \quad BE^2 = l^2 + b^2 \qquad -(1)$

વળી, $\angle$CBE = 90° *છે.*

$\therefore \quad EC^2 = BC^2 + BE^2$

$\therefore \quad EC^2 = h^2 + l^2 + b^2$ [(i) *પરથી*]

$\therefore \quad EC = \sqrt{l^2 + b^2 + h^2}.$

તેથી લંબઘનની વિકર્ણ = $\sqrt{l^2 + b^2 + h^2}.$

આપણે જાણીએ છીએ કે સમઘન એ ખાસ પ્રકારનો લંબઘન જ છે, જેમાં લંબાઈ = પહોંચાઈ = ઊંચાઈ એટલે l = b = h.હોય છે.

હવે આપણે આ સૂત્રનો ઉપયો કેટલાક ઉદાહરણ દ્વારા સમજીશું

ઉદાહરણ 21.1 એક લંબઘનની લંબાઈ, પહોંચાઈ અને ઊંચાઈ અનુક્રમે 4 સેમી, 3 સેમી અને 12 છે. તે પરથી (i) સપાટીનું ક્ષેત્રફળ (ii) ઘનફળ અને (iii) લંબઘનનો વિકર્ણ શોધો.

ઉકેલ : (i) લંબઘનનું પૃષ્ઠફળ

$= 2\,(lb + bh + hl)$

$= 2\,(4\times3+3\times12+12\times4)\text{cm}^2$

$= 2\,(12 + 36 + 48)\text{cm}^2$

$= 192\ \text{cm}^2$

(ii) લંબઘનનું ઘનફળ = lbh

$= 4 \times 3 \times 12\ \text{cm}^3$

$= 144\ \text{cm}^2$

(iii) Diagonal of the cuboid

$= \sqrt{l^2 + b^2 + h^2}.$

$= \sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2}$ cm.

$= \sqrt{16 + 9 + 144}$ cm.

$= \sqrt{169}$ cm

$= 13$ cm

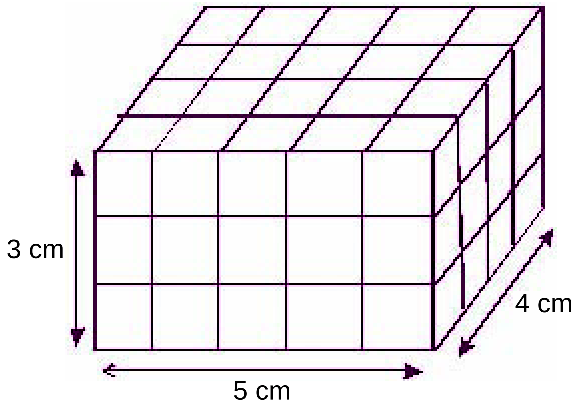
તેથી , વ બાજુવાળા સમઘનનું પૃષ્ઠફળ = 2 (a x a +a x a x a x a)

$6\,a^2$

અને તેનો વિકર્ણ = $\sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$

ઘનફળ :

કેટલા 1 સેમી બાજુવાળા એકમ સમઘન લો અને તેમને એવી રીતે જોડો કે જેથી લંબઘન તૈયાર થાય (જુઓ આકૃતિ 21.5)



આકૃતિ 21.5

એકમ ઘનની ગણતરી કરીને તમે કહી શકશો કે આ લંબઘન 60 એકમ સમઘનો બનેલો છે.

તેથી તેનું ઘનફળ = 60 એકમ સમઘન = 60 સેમી3 (કારણ કે 1 એકમ સમઘનનું ઘનફળ 1 સેમી3 છે.)

વળી તમે જુઓ કે લંબાઈ x પહોંચાઈ x ઊંચાઈ = 5 x 4 x 3

આવી રીતે તમે એકમ સમઘન ગોઠવીને વિવિધ લંબઘન બનાવો, સમઘનની સંખ્યા ગણો સાથો સાથ લંબાઈ, પહોંચાઈ અને ઊંચાઈનો ગુણાકાર પણ કરો. દરેક વખતે તમે જોઈ શકશો કે લંબઘનનું ઘનફળ = લંબાઈ x પહોળાઈ x ઊંચાઈ = lth

ઉપરાંત, સમઘન એ ખાસ પ્રકારનો લંબઘન છે, જેમાં $l = b = h$ હોય છે તેથી

a બાજુવાળા સમઘનનું ઘનફળ a x a x a = a^3...

(iii) Diagonal of the cuboid

$$= \sqrt{l^2 + b^2 + h^2}.$$

$$= \sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2} \text{ cm.}$$

$$= \sqrt{16 + 9 + 144} \text{ cm.}$$

$$= \sqrt{169} \text{ cm}$$

$$= 13 \text{ cm}$$

ઉદાહરણ 21.2 *લંબાઈ* 3 *મીટર, પહોંચાઈ* 2 *મી અને જાડાઈ* 25 *સેમી ધરાવતો એક લંબઘનાકાર પથ્થર છે. તેનું ઘનફળ શોધો.*

ઉકેલ : અહીં l=3 *મી,* b=2 *મી અને* h = 25 *સેમી* = 0.25 *મી છે. (પથ્થરની જાડાઈને આપણે અહીં ઊંચાઈ તરીકે દર્શાવી છે)*

પથ્થરનું ઘનફળ = lbh

= 3 x 3 x 0.25

= 1.50 *ઘનમીટર (મીટર*^{3}*)*

ઉદાહરણ - 21.3 *એક સમ ઘનનું ઘનફળ* 2197 *સેમી*^{3} *છે. તેની સપાટીનું ક્ષેત્રફળ અને તેનો વિકર્ણ શોધો.*

ઉકેલ : ધારો કે સમઘનની ધાર a *સેમી છે.*

∴ *ઘનફળ* = a^3

∴ 2197 = a^3

∴ $(13)^3 = a^3$

∴ a= 13 *સેમી* ∴ *ધારની લંબાઈ* 13 *સેમી છે.*

હવે સપાટીનું ક્ષેત્રફળ = $6a^2$

= 6 x 13 x 13

= 1014 *સેમી*^{2}

સમઘનનો વિકર્ણ =

= $\sqrt{a^2+a^2+a^2}$.

= $\sqrt{3a^2}$

= $\sqrt{3\times13^2}$

= $13\sqrt{3}$ *સેમી*

ઉદાહરણ **21.4 :** *એક લંબઘનાકાર ટાંકીની લંબાઈ અને પહોંચાઈ અનુક્રમે* 5 *મી અને* 4 *મી છે. તે* 60m^3 *પાણી સમાવી શકે છે. ટાંકીની ઊંડાઈ શોધો.*

ઉકેલ : ધારો કે ટાંકીની ઊંડાઈ d *મી છે.*

ટાંકનું ઘનફળ = $l$bh

∴ 60 = 5 x 4 x d

∴ d = 3 *મી*

∴ *ટાંકની ઊંડાઈ* 3 *મી હશે.*

નોંધ : વાસણના ઘનફળને સામાન્ય રીતે તેની ગુંજાશ કહે છે. એ રીતે અહીં કહી શકાય કે ટાંકીની ગુંજાશ $60 m^3$ છે. ગુંજાશ લિટરમાં દર્શાવવામાં આવે છે. જ્યા 1 લિટર = 1000 ઘનસેમી અથવા સેમી3 અને 1000 લિટર = 1 કિલોલિટર = $1 m^3$

તેથી આ ટાંકીની ગુંજાશ = 60 x 1 = 60 કિલોલિટર

= 60000 લિટર છે.

એમ કહેવાય.

ઉદાહરણ : 21.5 : ઉપરથી ખૂલ્લી હોય એવી લાકડાની એક પેટી 1.5 મી લાંબી 1.25 મી પહોળી અને 65 સેમી ઊંડી છે. લાકડાની જાડાઈને અવગણવાની છે (ગણતરીમાં લેવાની નથી) લાકડાનો ભાવ રૂા. $200 m^2$ હોય, તો આ પેટી બનવવામાં અવપરાયેલા લાકડાની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : વપરાયેલા લાકડાની સપાટીનું પૃષ્ઠફળ = $lb + 2bh + 2hl$ (પેટીની મથાળું નથી તેથી $2lb$ બદલે lb લીધું છે.)

$$= (1.5\times1.25) + 2\times1.25 \times \frac{65}{100} + 2 \times \frac{65}{100} \times1.5) m^2$$

$$= (1.875 + \frac{162.5}{100} + \frac{195}{100}) m^2$$

$$= (1.875 + 1.625 + 1.95) m^2 = 5.450 m^2$$

lm^2 લાકડાની કિંમત 200

તેથી 5.45 લાકડાની કિંમત = 200×5.450

= ₹ 1090 રૂપિયા

ઉદાહરણ 21.6 : 10m ઊંડી અને 100m પહોળી નદીમાં વહેતા પાણીની ઝડપ કલાકના 4.5 કિમી છે. એક સેકન્ડમાં આ નદીનું કેટલું પાણી દરિયામાં ઠલવાતું હશે ?

ઉકેલ **:** પાણીના પ્રવાહની ઝડપ (ગતિ) = 4.5 કિમી / કલાક

$$= \frac{4.5\times1000}{60\times60} \text{ મીટર / સેકન્ડ}$$

$=$ મી/સે

$= \frac{5}{4}$ મી/સે

દર સેકન્ડે દરિયામાં ઠલવાતા પાણીનું ઘનફળ $= l\,bh$

$$= \frac{5}{4} \times 100 \times 10 \text{ m}^3$$

$$= 1250 \text{ m}^3$$

દર સેકન્ડે 1250 કિલોલિટર પાણી દરિયામાં ઠલવાતું હશે

ઉદાહરણ 21.7 : એક લંબચોરસ ખેતરની લંબાઈ 588 મી અને પહોંચાઈ 50 મી છે. તેમાં 30 મી લાંબો, ૨0 મી પહોળો અને 12 મી ઊંડો ખાડો ખોદવામાં આવ્યો. વીકળેલી મારી ખેતરના બાકીના ભાગમાં એક સરખી રીતે પાથરી દેવામાં આવે, તો ખેતરની સપાટી કેટલી ઊંચી આવે ?

ઉકેલ : નીકળેલી માટીનું ઘનફળ = ખાડાનું ઘનફળ

= લંબાઈ × પહોંચાઈ × ઊંડાઈ

$= 30 \times 20 \times 12$

$= 30 \times 20 \times 12 \text{ m}^3$

$= 7200 \text{ m}^3$

માટી પાથરવાની સપાટીનું ક્ષે = ખેતરનું ક્ષે. - ખાડાના મથાળાનું ક્ષેત્રફળ

$$= 588 \times 50 \text{ m}^2 - 30 \times 20 \text{ m}^2$$

$$= 29400 \text{ m}^2 - 600 \text{ m}^2$$

$$= 28800 \text{ m}^2$$

ખેતરની સપાટીની ઊંચાઈ $= \dfrac{\text{માટીનું ઘનફળ માટી પાથરવાનું ક્ષેત્રફળ}}{\text{બાકીના ભાગનું ક્ષેત્રફળ}}$

$$= \frac{7200}{28800} \text{ m} = \frac{1}{4} \text{ m} = 25 \text{ cm}$$

આમ, ખેતરની સપાટી 25 સેમી ઊંચી આવે

ઉદાહરણ 21.8: એક ઓરડાનું માપ 7m x 4m x 3m છે. તેમાં એક બારણું અને એક બારીનું માપ અનુક્રમે 2m x 1.5m અને 1.5m x 1m છે. આ ઓરડાની દીવાલોને અને છતને ધોળવાનો ખર્ચ દર ચોરસમીટરે 4 લેખે કેટલો થાય ?

નોંધ : 7m x 4m x 3m એટલે લંબાઈ 7m, પહોળાઈ 7m અને ઊંચાઈ 3m છે એવા અર્થ થાય છે. બારણાનું માપ 2m x 1.5m એટલે બારણાની લંબાઈ

(2m અને પહોંચાઈ 1.5 મી છે. એવો અર્થ થાય છે)

ઉકેલ : ધોળવાની જગ્યાનું ક્ષે. = ચાર દિવાલોનું ક્ષે. + છતનું ક્ષે. - બારણાનું ક્ષે. - બારીનું ક્ષે. (1)

ચાર દીવાલોનું ક્ષે. = $l\times h+b\times h+l\times h+b\times h$

$= 2(l+b)\times h$

$= 2(7+4)\times 3 \text{ m}^2$

$= 66\text{m}^2$

છતનું ક્ષે. = $l\times b = 7\times 4 \text{ m}^2 = 28\text{m}^2$

બારીબારણાંનું ક્ષે. = $2 \times 1.5 + 1.5 \times 1 = 4.5 \text{ m}^2$

(1) માં કિંમત મૂક્તાં

ધોળવાની જગ્યાનું ક્ષે. 66 + 28 - 4.5

= 89.5 ચોરસ મીટર અથવા m^2

1 ચોમી જગ્યા ધોળવાનો ખર્ચ ₹ 4

89.5 ચોમી જગ્યા ધોળવાનો ખર્ચ = 89.5 × 4

= 358 રૂપિયા

નોંધ : ચાર દીવાલોનું ક્ષેત્રફળ = એ સૂત્રનો સીધો ઉપયોગ પણ કરી શકાય.

તમારી પ્રગતી ચકાસો - 21.1

1. 6 મી લંબાઈ, 3 મી પહોળાઈ અને 2.5 મી ઊંચાઈ ધરાવતા લંબઘનની સપાટીનું પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ શોધો.
2. એક સમઘનની ધાર 3.6 સેમી છે તેની સપાટીનું પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ શોધો.
3. એક સમઘનનું ઘનફળ 3375 સેમી3 છે. સમઘની બાજુનું માપ અને સપાટીનું પૃષ્ઠફળ શોધો.
4. લાકડાની એક પેટીનું બહારથી માપ 42સેમી × 32સેમી ×27 સેમી છે. લાડકાની જાડાઈ 1 સેમી હોય, તો પેટીના અંદરના ભાગનું ઘનફળ શોધો.

5. એક વખારની લંબાઈ, પહોંચાઈ અને ઊંચાઈ અનુક્રમે 12 મી, 8 મી અને 6 મી છે. જો એક બોક્ષ 1.5 $મી^3$ જગ્યા રોકે તો આવા કેલા બોક્ષ વખારમાં ગોઠવી શકાય.
6. લાકડાના એક પાટિયાની લંબાઈ 3 મી અને જાડાઈ 75 સેમી છે. જો તેનું ઘનફળ 33.75 મી3 હોય, તો તેનું પૃથ્ઠફળ શોધો.
7. 8 સેમી બાજુવાળા ત્રણ સમઘન જોડીને બનાવેલા લંબઘનનું પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ શોધો.
8. એક ઓરડા 6 મી લાંબો, 5 મી પહોળો અને 4 મી ઊંચો છે. તેમાં બારી-બારણઓએ 4 મી2 જગ્યા રોકી છે. બાકીના ભાગમાં ખાસ પ્રકારના કાગળ ચોકવાના છે. કાગળની પહોંચાઈ 75 સેમી છે. જો કાગળનો ભાવ 1 મીટરના રૂા. 2.40 હોય, તો વપરાતા કાગળનો ખર્ચ શોધો.
9. 6 મી × 4 મી × 3 મી માપના રૂમમાં વધુમાં વધુ કેટલી લંબાઈનો સળિયો ગોઠવી શકાય ?

21.3 લંબ વૃત્તિય નળાકાર

લંબચોરસ ABCD ની AB ધારને સ્થિર રાખીને લંબચોરસનું પરિભ્રમણ કરવામાં આવે તો નળકારનો અભાસ ઉભો થાય છે. જો સ્થિર ધારવાળી રેખા પૃથ્વીની સપાટીને લંબ હોય, તો સર્જાતા નળકાર લંબ વૃત્તીય નળાકાર હોય છે. (આકૃતિ 21.6)

(નોંધ : આવા લંબ વૃત્તીય નળાકારને ટૂંકમાં 'નળાકાર' કહીશું)

પાણીની પાઈપ (નળી), ડ્રમ (ઢોલ), પાઉડરનો ડબો, વગેરેનો આકાર નળકાર છે.

નળાકારના છેડાઓ બે એકરૂપ વર્તુળો છે. આવૃત્તિ 21.6 માં A અને B આ વર્તુળના કેન્દ્રો છે. AD=BC એ બંને વર્તુળની ત્રિજ્યો છે. AB એ બંને વર્તુળની સપાટીને લંબ છે. અહીં AD (અથવા BC) ને પાયાની ત્રિજ્યા અને AB અને નળાકારની ઉંચાઈ કહેવામાં આવે છે. નળકારના છેડા (વર્તુળ) સપાટ અને પરસ્પર સમાંતર છે. નળકારનો બાકીનો ભાગ વક્રસપાટી છે.

સપાટીનું ક્ષેત્રફળ :

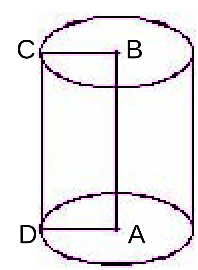
r એકમ ત્રિજ્યા અને h એકમ ઊંચાઈ વાળા પોલા નળાકાર ઉપર એવી રીતે કાપો મૂકીએ કે જેથી તે વર્તુળોના કેન્દ્રોને જોડતા રેખાખંડને સમાંતર હોય. હવે આ વક્રસમાપટીને કોઈ સપાટી ઉપર ખોલી નાખીએ, તો આપણને એક લંબચોરસ મળશે. આ લંબચોરસની લંબાઈ 2 r એકમ અને પહોંચાઈ h એકમ હશે જુઓ આકૃતિ (i) અને (ii) સ્પષ્ટ છે કે લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ નળાકારની વક્રસપાટી જેટલું થશે.

આમ, નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષે. = લંબચોરસનું ક્ષે.

$$= 2\ \ r \times h = 2\ \ rh.$$

જો નળકાર બનં છેડે બંધ હોય, તો

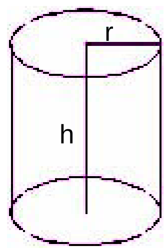
નળાકારની કુલ સપાટીનુ ક્ષે. વક્રસપાટીનું ક્ષે. + ર વર્તુળનું ક્ષે.

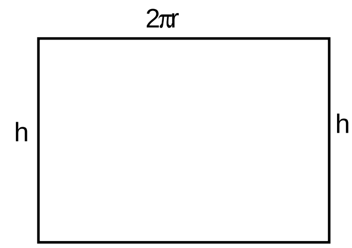


આકૃતિ. **21.6**

$= 2 \quad rh + 2 \quad r^2$

$= 2 \quad r\,(r + h)$





ઘનફળ

આપણે જાણીએ છીએ કે,

લંબઘનનું ઘનફળ = lbh

તળિયાથી મથાળા સુધી જેનો આકાર એક સરખો છે. એવા કોઈ પણ પદાર્થનું ઘનફળ શોધવા આ ઉપરનો નિયમ ઉપયોગમાં લઈ શકાય. એ રીતે.

નળાકારનું ઘનફળ = પાયાનું ક્ષે. × ઊંચાઈ

$= \quad {}^2 \times h$

$= \quad r^2 h$

આ સૂત્રોનો ઉપયોગ કેટલા ઉદાહરણો દ્વારા સમજીએ

$\pi \frac{22}{7} \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 10\,\text{cm}^3 = 440\,\text{cm}^2 \quad \frac{22}{7} \times 7 \times 7)\,\text{cm}^2$

ઉદાહરણ : 21.9 એક નળાકારના પાયાની ત્રિજ્યા અને તેની ઊંચાઈ અનુક્રમે 7 સેમી અને 10 સેમી છે. (1) નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષે. (2) કુલ સપાટીનું ક્ષે. અને (3) ઘનફળ શોધો.

ઉકેલ : (1) નળકારની વક્રસપાટીનું ક્ષે. = પાયાનો પરિઘ × ઊંચાઈ

$2 \quad rh$

$=$

(2) નળાકારની કુલ સપાટીનું ક્ષે. $= 2\pi rh + 2 \quad r^2$

$=$

= 440 સેમી^{2} + 308 સેમી^{2} = 748 સેમી^{2}

(3) નળાકારનું ઘનફળ $= \pi r^2 h$

$=$

= 1540 સેમી^{3}

ઉદાહરણ 21.10: *ધાતુની એક નળાકાર પાઈપ બંને છેડેથી ખૂલ્લી છે. પાઈપનો બહારનો વ્યાસ 12 સેમી છે. ધાતુની જાડાઈ 1 સેમી અને પાઈપની લંબાઈ 70 સેમી હોય, તો પાઈપમાં વપરાયેલ ધાતુનું ઘનફળ શોધો.*

ઉકેલ : *પાઈપની બાહ્ય ત્રિજ્યા* $= \frac{12}{2} = 6$ *સેમી*

પાઈની અંદરની ત્રિજ્યા = બાહ્ય ત્રિજ્યા - ધાતુની જાડઈ

$= 6 - 1$

$= 5$ *સેમી*

આકૃતિ પરથી જોઈ શકાય છે કે અહીં બે નળાકાર ઓખા નળાકારના ઘનફળમાંથી અંદરના પોલા નળાકારનું ઘનફળ બાદ કરવાથી ધાતુનું ઘનફળ જાણી શકાય.

પાઈપની બનાવટમાં વપરાયેલ ધાતુનં ઘનફળ = બાહ્ય નળાકારનું ઘનફળ - પોલા નળાકારનું ઘનફળ

$= \pi r_1^2 h - \quad r_2^2 h$ (*જ્યાં* $r_1 =$ *બાહ્યત્રિજ્યા અને* $r_2 =$ *અંત : ત્રિજ્યા)*

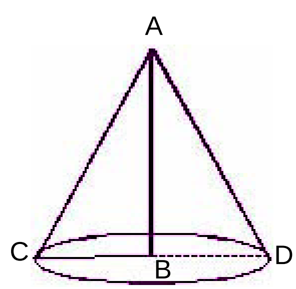
$=$

$= 22 \times 10 \times (36 - 25) \text{cm}^3$

$= 2420 \text{ cm}^3$

વપરાયેલ ધાતુનું ઘનફળ $= 2420$ *સેમી*^{3} *અથવા ઘનસેમી*

ઉદાહરણ 21.11: *એક રોલરની ત્રિજ્યા 35 સેમી અને લંબાઈ 1 મીટર છે. રમતના મેદાનને સમથલ કરવા જો રોલરને 200 આંટા કરવું પડ્યું હોય અને સમથલ કરવાનું ભાડું દર ચોરસ મીટરે રૂા. 3 હોય, તો કેટલું ભાડું ચૂકવવું પડે ?*



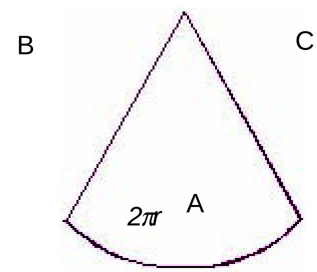
આકૃતિ **21.8**

ઉકેલ : *રોલના 1 આંટામાં દબાતી જગ્યા = રોલની વક્રસપાટીનું ક્ષે.*

$= 2prh$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 35 \times 100$ *સેમી*^{2} (r = 35 *સેમી*, h = 1 m = 100 *સેમી*)

$= 22000$ *સેમી*^{2}



આકૃતિ **21.9**

$= \frac{22000}{100 \times 100}$ m^2

$= 2.2$ *મી*^{2}

(1 *મીટર* 100 *સેમી*

1 *મીટર*^{2} = 100 × 100 *સેમી*2

1 *મી*^{2} = 10000 *સેમી*^{2}

∴ 200 *આંટામાં રોલર વડે દબાતી જગ્યા* = 2.2 × 200 m^2 = 440 m^2

∴ 1 *મી*2 *નું ભાડું રૂા.* 3

∴ 440 *મી*^{2} *નું ભાડું* ₹. 3 × 440 = ₹. 1320.

ઉદાહરણ 21.12 : *ધાતુના એક ટુકડાનું ઘનફળ 1.54 ઘનમીટર છે. આ ધાતુને પીગાળીને તેમાંથી 3.5 મિમી વ્યાસનો તાર ખેંચવામાં આવે છે. તારની લંબાઈ શોધો.*

ઉકેલ : *(જુઓ કે તાર એ નળાકારનું સ્વરૂપ છે)*

ધાતુનું ઘનફળ ઘનમીટરમાં આપ્યું છે તેથી ત્રિજ્યાનું માપ મીટરમાં ફેરવીએ.

1. *મીટર* 100 *સેમી* = 1000 *મિમી*

વ્યાસ 3.5 *મિમી છે તેથી* $r = \frac{3.5}{2}$ *મિમી* $= \frac{3.5}{2}$ *મિમી* $= \frac{7}{4}$ *મિમી*

$r = \frac{7}{4 \times 1000}$ *મીટર* $= \frac{7}{4000}$ *મી*

તારનું ઘનફળ = ધાતુનં ટુકડાનું ઘનફળ

$\therefore \quad \pi r^2 h = 1.54$

$\therefore \quad \frac{22}{7} \times \frac{7}{4000} \times \frac{7}{4000} \times h = \frac{154}{100}$

$\therefore \quad h = \frac{154}{100} \times \frac{7}{22} \times \frac{4000}{7} \times \frac{4000}{7}$

$\therefore$ h = 160000 મીટર = 160 કિલોમીટર

$\therefore$ તારની લંબાઈ 160 કિ.મી.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 21.2

1. એક નળાકારના પાયાની ત્રિજ્યા 5 મી અને ઊંચાઈ 1.4 મીટર છે. આ નળાકારની (1) વક્ર સપાટીનું ક્ષેત્રફળ (2) કુલ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ અને (3) તેનું ઘનફળ શોધો.
2. નળાકારનું ઘનફળ 3080 સેમી3 છે અને પાયાની ત્રિજ્યા 7 સેમી છે. નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
3. પાણીની નળાકાર ટાંકીના પાયાનો વ્યાસ 7 મી અને ઊંચાઈ 2.1 મી છે. ટાંકીની ગુંજાશ લિટરમાં જણાવો.
4. એક કાગળની લંબાઈ અને પહોંચાઈ અનુક્રમે 33 સેમી અને 16 સેમી છે. પહોળાઈઓને ભેગી કરીને તૈયાર કરેલા નળાકારનું ઘનફળ શોધો.
5. પાણી ભરવાના નળકાર પીપના પાયાનો વ્યાસ 28 સેમી અને ઊંચાઈ 12 સેમી છે. પાણીથી સંપૂર્ણ ભરેલા પીપનું આ પાણી લંબઘનાકાર ટબમાં છાલવી દેવામાં આવે છે. જો ટબની લંબાઈ 66 સેમી અને પહોળાઈ 28 સેમી હોય, તો ટબમાં પાણીની ઊંચાઈ કેટલી થશે ?
6. ધાતુનો એક નળાકાર બંને છેડેથી ખૂલ્લો છે. જો નળાકારની લંબાઈ 8 સેમી, ધાતુની જાડાઈ 2 સેમી અને પાયાની બાહ્યવ્યાસ 10 સેમી હોય, તો વક્રસપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ શોધો. (π = 3.14 લો) (માર્ગદર્શન : કુલ વક્રસપાટી = અંદરની વક્રસપાટી + બહારની વક્રસપાટી)

21.4 લંબ વૃત્તીય શંકુ

કાટકોણ ΔABC માં $\angle B$ ખૂણો છે. AB ધારને સ્થિર રાખીને તેની આસપાસ ΔABC નું પરિભ્રમણ કરવામાં આવે, તો શંકુના આકારનો આભાસ ઉભો થાય છે. જો સ્થિત ધારવાળી રેખા પૃથ્વીની સપાટીને લંબ હોય, તો સર્જાતો શંકુ લંબ વૃત્તીય શંકુ છે. (આકૃતિ 21.8)

(નોંધ : આવા લંબ વૃત્તીય શંકુ કહીશું)

જોકરની ટોપી, તંબુ, આઈસ્ક્રીમ કોન, વગેરે રોજબરોજના વ્યવહારમાં જોવા મળતા શંકુ આકારો છે.

આકૃતિ 21.8 માં જોઈ શકશો કે શંકુનો પાયો એક વર્તુળ છે, BC તેની ત્રિજ્યા છે, B વર્તુળનું કેન્દ્ર છે અને AB શંકુની ઉંચાઈ છે. A ને શંકુનું શિરોબિંદુ અને AD ને શંકુની ત્રાંસી ઊંચાઈ કહે છે.

પાયથા ગોરસના પ્રમેય મુજબ

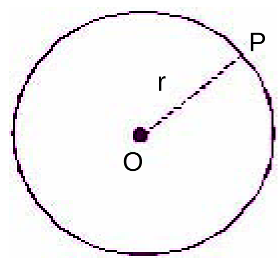
ત્રાંસી ઊંચાઈ = $\sqrt{\text{ત્રિજ્યા}^2 + \text{ઊંચાઈ}^2}$ અથવા $l = \sqrt{r^2 + h^2}$,

જ્યાં r, h અને l અનુક્રમે શંકુના પાયાની ત્રિજ્યા, ઊંચાઈ અને ત્રાંસી ઊંચાઈ છે.

શંકુનો પાયો સપાટ છે પરંતુ એ સિવાયનો ભાગ વક્રસપાટી છે.

સપાટીનું ક્ષેત્રફળ :

ઉપરના પોલ શંકુને કે જેની પાયાની ત્રિજ્યા r ઊંચાઈ h અને ત્રાંસી ઊંચાઈ પર વ્યવસ્થિત કાયો મૂકીને શંકુની વક્રસપાટી કોઈ સપાટી ઉપર ખોલી નાખવામાં આવે, તો આકૃતિ 21.9 મુજબ એક વૃત્તાંશ મળશે, જેની ત્રિજ્યા l અને આપની લંબાઈ $2\pi r$ હશે.



આકૃતિ **21.10**

આ વૃત્તાંશું ક્ષે. $= \frac{\text{આપની લંબાઈ}}{2\pi l \text{ ત્રિજ્યાવાળા નો પરિઘ}} \times \pi l^2$ ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું ક્ષે.

$= \frac{2\pi r}{2\pi l} \times \pi l^2$

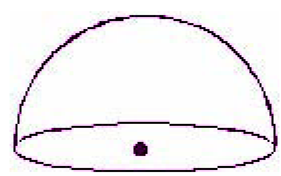
$= \pi r l$

શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષે. = વૃત્તાંશનું ક્ષે. $2rl$

જો પાયાનું ક્ષેત્રફળ ઉમેરવામાં આવે તો સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ એટલે કે શંકુનું પૃષ્ઠફળ મળે.

$\therefore$ શંકુનું પૃષ્ઠફળ $= \pi rl + \quad r^2$

$= \quad r(l + r)$


આકૃતિ **21.11**

ઘનફળ

સરખી ત્રિજ્યા અને સરખી સરખી ઊંચાઈ વાળો એક નળાકાર અને એક શંકુ લો. હવે શંકુને રેતી (કે પાણી) થી પૂરે પૂરો ભરીને નળાકારમાં ઠાલવો. આ પ્રક્રિયા ત્રણ વખત કરો. તમે જોઈ શકશો કે નળાકાર રેતી (કેપાણી) થી પૂરે પૂરો ભરાઈ જાય છે એ પરથી ફલિત થાય છે કે r ત્રિજ્યા અને h ઊંચાઈવાળા શંકુનું ઘનફળ r ત્રિજ્યા અને h ઊંચાઈવાળા નળકારના ઘનફળથી ત્રીજા ભાગનું હોય છે. આકૃતિ. **21.11**

આમ, શંકુનું ઘનફળ = નળાકારનું ઘનફળ

$= \frac{1}{3} \pi r^2 h$

આ સૂત્રનો ઉપયોગ સમજવા કેટલા ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ -21.13 એક શંકુના પાયાની ત્રિજ્યા 7 સેમી અને તેની ઊંચાઈ 24 સેમી છે. શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ, પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ શોધો.

ઉકેલ : શંકુની ત્રાંસી ઊંચાઈ $l = \sqrt{r^2 + h^2}$

$= \sqrt{7 \times 7 + 24 \times 24}$ સેમી

$= \sqrt{49 + 576}$ cm $= 25$ સેમી

શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષે. $= \pi r l$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 25$ સેમી^{2} $= 550$ સેમી^{2}

શંકુનું પૃષ્ઠફળ (કુલ ક્ષેત્રફળ) $= \pi r l + \pi r^2$

$= (550 + \frac{22}{7}$ x 7 x 7) સેમી^{2}

$= (550 + 154)$ સેમી^{2} $= 704$ સેમી^{2}

શંકુનું પૃષ્ઠફળ (કુલ ક્ષેત્રફળ) $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24$ સેમી^{3}

$= 1232$ સેમી^{3}

ઉદાહરણ 21.14 : શંકુ આકારના એક તંબુની ઊંચાઈ 6 મી અને તેના પાયાની ત્રિજ્યા 8 મી છે. એક ચો.મી. કાપડનો ભાવ રૂા. 120 હોય, તો તંબુમાં વપરાયેલા કાપડની કિંમત શોધો. ($\pi = 3.14$)

ઉકેલ : ત્રાંસી ઊંચાઈ $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$ મીટર

વક્રસપાટીનું ક્ષે. $= \pi r l$

$= 3.14 \times 8 \times 10$

$= 251.2$ સેમી^{2}

1 ચો.મી. કાપડની કિંત રૂા. 120 છે.

$\therefore$ 251.2 ચોમી કાપડની કિંમત = ₹ 120 × 251.2

= ₹ 30144

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 21.3

1. શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ, કુલ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ (પૃષ્ઠફળ) અને શંકુનું ઘનફળ શોધો. શંકુના પાયાની ત્રિજ્યા અને ઊંચાઈ અનુક્રમે 5 સેમી અને 12 સેમી છે.
2. શંકુના પાયાનું ક્ષેત્રફળ 616 સેમી^{2} છે અને શંકુની ઊંચાઈ 9 સેમી છે. આ શંકુનું ઘનફળ શોધો.
3. એક શંકુન ઊંચાઈ 10.5 સેમી અનુ તેનું ઘનફળ 176 ઘનસેમી છે. શંકુના પાયાન ત્રિજ્યા શોધો.
4. પાયાની ત્રિજ્યા 9મી અને ઊંચાઈ 12 મી હોય તેવો શંકુ આકારનો તંબુ બનાવવા માટે 3મી પહોળાઈવાળું કેટલું કાપડ જોઈએ ?($\pi = 3.14$).
5. જે શંકુનું ઘનફળ 12936 ઘનસેમી અને પાયાનો વ્યાસ 42 સેમી હોય, તે શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

21.5 ગોળા

જો એક અર્ધવર્તુળને તેના વ્યાસની આસપાસ ફેરવવામાં આવે તો ગોળાના આકારનો આભાસ ઊભો થાય છે. ગોળાને નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય.

અવકારના કોઈ નિશ્ચિત બિંદુથી સરખે અંતરે રહીને ગતિ કરતા બિંદુનો બિંદુપથ ગોળો છે. આ નિશ્ચિત બિંદુએ ગોળાનું કેન્દ્ર છે અને સરખું અંતર એ ગોળાની ત્રિજ્યા છે (આકૃતિ 21.10) ફૂલબોલ, ક્રિકેટ બોલ, લખોટી, વગેરે રોજબરોજના વ્યવહારમાં જોવા મળતા ગોળાના ઉદાહરણ છે.

અર્ધગોળો

ગોળાના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતું સમતલ ગોળાને બે સરખા ભાગમાં બહેંચે છે. આ દરેક ભાગને અર્ધગોળો કહે છે. (આકૃતિ 21.11)

ગોળાની અર્ધગોળાની સપાટીનું ક્ષેત્રફળ

π *ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળને અને* π *ત્રિજ્યાવાળા ગોળાની વક્રસપાટીની સરખામણી કરીએ તો વર્તુળ કરતાં ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ ચારગણું હોય છે. એટલે કે*

ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = $= 4\,\pi r^2$

અને અર્ધગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 2\,\pi r^2$

અર્ધગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષે. + વર્તુળનું ક્ષે.

$= 2\,\pi r^2 + \pi r^2$

$= 3\pi r^2$

ગોળાનું અને અર્ધગોળાનું ઘનફળ

એક પોલો અર્ધગોળો અને એક પોલો શંકુ એવા લો કે અર્ધગોળાની ત્રિજ્યા, શંકુનાપાયાની ત્રિજ્યા અને શંકુની ઉંચાઈ π *એકમ હોય. હવે શંકુને રેલી (અથવા પાણી) થી પૂરેપૂરો ભરીને અર્ધગોળામાં છાલવો. આ પ્રક્રિયા બે વખત કરો. તમે જોઈ શકશો કે અર્ધગોળો રેતી (અથવા પાણી) થી પૂરેપૂરો ભરાઈ જાય છે. એટલે કે અર્ધગોળાનું ઘનફળ કે જેની ત્રિજ્યા ... એકમ છે તેનું ઘનફળ પાયાની ત્રિજ્યા* π *એકમ અને ઊંચાઈ પણ* π *એકમ હોય, તેવા શંકુથી બમણું હોય છે.*

$\therefore$ *અર્ધગોળાનું ઘનફળ* $= 2 \times \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{2}{3} \times \pi r^2 \times r \qquad (\therefore h = r)$

$= \frac{2}{3} \times \pi r^3$

$\therefore$ r *ત્રિજ્યાવાળા ગોળાનું ઘનફળ* $= 2 \times \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3}\pi r^3$

$\therefore$ ગોળાનું ઘનફળ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

અને અર્ધગોળાનું ઘનફળ $= \frac{2}{3}\pi r^3$

આ સૂત્રોનો ઉપયોગ સમજવા કેટલાક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ - 21.15 ૨1 સેમી વ્યાસવાળા ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ અને ઘનફળ શોધો.

ઉકેલ : ગોળાની ત્રિજ્યા $= \frac{21}{2}$ સેમી

ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 4\pi r^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2}$ સેમી^{2}

$= 1386$ સેમી^{2}

ગોળાનું ઘનફળ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2}$ સેમી^{3}

$= 4851$ સેમી^{3}

ઉદાહરણ 21.16 : એક અર્ધગોળાકાર વાટકાનું ઘનફળ (ગુંજાશ) 2425.5 સેમી^{3} છે. તેની ત્રિજ્યા અને વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : $\frac{2}{3}\pi r^3 =$ અર્ધગોળાનું ઘનફળ

$\therefore \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} r^3 = 2425.5$

$\therefore r^3 = \frac{3 \times 2425.5 \times 7}{2 \times 22} = \frac{21 \times 21 \times 21}{8}$

$\therefore$ r = = 10.5 સેમી

અર્ધગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષે. $= 2\pi r^2$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2}$ સેમી^{2}

$= 693$ સેમી^{2}

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 21.4

1. 14 સેમી ત્રિજ્યાવાળા ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ અને ઘનફળ શોધો.

2. એક ગોળાનું ઘનફળ 38808 સેમી3 છે. ગોળાની ત્રિજ્યા અને વક્રપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

3. એક અર્ધગોળ રમકડાનો વ્યાસ 56 સેમી હોય, તો

   (i) વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

   (ii) કુલ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ (પૃષ્ઠફળ) શોધો.

   (iii) ઘનફળ શોધો.

4. 28 સેમી ત્રિજ્યાવાળા ધાતુના એક ગોળાને ઓગાળીને તેમાંથી 7 સેમી ત્રિજ્યાવાળા કેટલા ગોળા બનાવી શકાય ?

સારાંશ

- જે પદાર્થ (અથવા આકૃતિ) એક સપાટી ઉપર પૂરેપૂરી છવાઈ જતી નથી (પથરાઈ જતી નથી) તેને ઘન પદાર્થ (અથવા આકૃતિ) કહે છે અથવા ત્રિપરિમાણીય પદાર્થ કહે છે.
- જે સીમાથી ઘન પદાર્થ રચાય છે તે જ તેની સપાટી છે.
- આકાશમાં ઘનપદાર્થ રોકેલી જગ્યાને તેનું ઘનફળ કહે છે.
- કેટલાક ઘન પદાર્થને માત્ર સમથલ સપાટી હોય છે, કેટલાકને માત્ર વક્રસપાટી હોય છે અને કેટલાકને સમથલ અને વક્ર એમ બંને પ્રકારની સપાટી હોય છે.
- લંબઘનનું પૃષ્ઠફળ (સપાટીઓનું કુલ ક્ષેત્રફળ) = = $2(lb + bh + hl)$ અને લંબઘનનું ઘનફળ = = lbh, જ્યાં l, b અને h અનુક્રમે લંબાઈ, પહોંચાઈ અને ઊંચાઈ દર્શાવે છે.
- લંબઘનનો વિકર્ણ $= \sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$

- સમઘન એક ખાસ પ્રકારનો લંબઘન છે જેની બધી બાજુઓ સરખી લંબાઈની હોય.
- a બાજુવાળા સમઘનનું પૃષ્ઠફળ = $6a^2$ અને ઘનફળ = a^2
- ઉપરના સમઘનનો વિકર્ણ = $a\sqrt{3}$.
- ચાર દિવાલોનું ક્ષેત્રફળ = $2h(l + b)$
- નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષે. = $2\pi rh$

  નળાકારની કુલ સપાટીનું ક્ષે. (નળાકારનું પૃષ્ઠફળ) = $2\pi rh+2\pi r^2$

  $= 2\pi r(h+r)$

  નળાકારનું ઘનફળ = $\pi r^2 h$

  (r એ પાયાની ત્રિજ્યા અને h ઉંચાઈ દર્શાવે છે)
- શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = $2\pi rl$
- શંકુની કુલ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ = $\pi rl + \pi r^2$

  $= \pi r(l+r)$

  શંકુની ઘનફળ = = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$,

  (r પાયાની ત્રિજ્યા, h ઊંચાઈ અને l ત્રાંસી ઊંચાઈ દર્શાવે છે)
- ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = $4\pi r^2$

  ગોળાની ઘનફળ = = $\frac{4}{3}\pi r^3$ (જ્યાં π ત્રિજ્યા છે.)
- અર્ધગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષે. = $2\pi r^2$

  અર્ધગોળાની કુલ સપાટીનું અથવા પૃષ્ઠફળ = $3\pi r^2$

  અર્ધગોળાનું ઘનફળ = $\frac{2}{3}\pi r^3$ (જ્યાં r ત્રિજ્યા છે.)

સત્રાંત સ્વાધ્યાય

1. ખાલી જગ્યા પૂરો.

(i) જેની લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈ અનુક્રમે l, b અને h છે. તેવા લંબઘનનું પૃષ્ઠફળ = ...

(ii) જેની લંબાઈ, પહોંચાઈ અને ઊંચાઈ અનુક્રમે l, b અને h છે. તેવા લંબઘનો વિકર્ણ = ...

(iii) a બાજુવાળા સમઘનનું ઘનફળ = ___________

(iv) પાયાની ત્રિજ્યા r અને ઊંચાઈ h હોય તેવા ખૂલ્લા નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = ...

(v) પાયાની ત્રિજ્યા r અને ઊંચાઈ h હોય તેવા નળાકારનું ઘનફળ = ...

(vi) શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = ..., જ્યાં r અને l અનુક્રમે .... અને .... દર્શાવે છે.

(vii) r ત્રિજ્યાવાળા ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ ....

(viii) r ત્રિજ્યાવાળા અર્ધગોળાનું ઘનફળ = ...

2. આવેલા વિકલ્પોમાંથી સાચો જવાબ પસંદ કરો.

(i) 63 સેમી × 56 સેમી × 21 સેમી વાળા લંબઘનના ઘનફળ જેટલું ઘનફળ ધરાવતા સમઘનની બાજુનું માપ કેટલું ?

(A) 21 સેમી (B) 28 સેમી (C) 36 સેમી (D) 42 સેમી

(ii) ગોળાની ત્રિજ્યા બે ગણી કરવામાં આવે તો ઘનફળ કેટલા ગણું થાય ?

(A) 2 ગણું (B) 3 ગણું (C) 4 ગણું (D) 8 ગણું

(iii) એક નળાકાર અને એક શંકુના પાયાની ત્રિજ્યા સમાન છે તેમજ બંનેની ઊંચાઈ સમાન છે. તેમનાં ઘનફળ સંબંધ દર્શાવતું કયું વિધાન સાચું છે.

(A) જેટલું શંકુનું, તેટલું નળાકારનું (B) શંકુથી બે ગણું ઘનફળ

(C) શંકુના ઘનફળથી ત્રીજા ભાગનું (D) શંકુના ઘનફળથી ત્રણ ગણું

3. જો સમઘનનું પૃષ્ઠફળ 96 સેમી3 હોય, તો તેનું ઘનફળ શોધો.

4. એક લંબઘનનું લંબાઈ 3 મી, પહોંચાઈ 2.5 મી અને ઊંચાઈ 1.5 મી છે તેનું પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ શોધો.

5. 1.6 સેમી બાજુવાળા સમઘનનું પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ શોધો.

6. 6 સેમી × 8 સેમી × 10 સેમી માપના લંબઘનના વિકર્ણની લંબાઈ શોધો.

7. 8 સેમી બાજુવાળા સમઘનના વિકર્ણની લંબાઈ શોધો.

8. લંબઘનની ત્રણ સંલગ્ન સપાટીઓનાં ક્ષેત્રફળ અનુક્રમે A,B,C (એકમ)2 છે, જો લંબઘનનું ઘનફળ V (એકમ)3 હોય, તો સાબિત કરો કે V^2=ABC

9. એક ખૂલ્લા નળાકાર પાઈપની લંબાઈ 10 સેમી, બાહ્યવ્યાસ 10 સેમી અને જડાઈ 1 મિમી હોય, તો સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ શોધો. (π = 3.14).

10. 21 સેમી પાયાની ત્રિજ્યા ધરાવતા શંકુનું ઘનફળ 12936 સેમી^{3} છે. શંકુની ત્રાંસી ઊંચાઈ શોધો અને શંકુનું પૃષ્ઠફળ (કુલ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ) શોધો.

11. 150 મી × 70 મી નું માપ ધરાવતા ખેતરમાં 5.6 મી ત્રિજ્યા વાળો અને 20 મી ઊંડો કૂવો ખોદવામાં આવે અને નીકળેલી માટી *h* ખેતરના બાકીના ભાગમાં સમથલ પાથરવામાં આવે, તો ખેતરની સપાટી કેટલી ઊંચી આવે ?

12. 606.375 મી^{3} ઘનફળ ધરાવતા ગોળાની ત્રિજ્યા અને ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

13. એક ઓરડાની લંબાઈ 12મી, પહોળાઈ 4મી અને ઊંચાઈ 3મી છે. ઓરડામાં 2m×1m ના માપની બે બારીઓ છે અને 2.5 મી × 2 મી માપનો દરવાજો છે. દર ચોરસ મીટરના રૂા. 30 લેખે દીવાલો પર વો પેપર લગાડવાનો ખર્ચ શોધો.

14. એક ઘન સેમી. સોનામાંથી 0.2 મિમી વ્યાસનો કેટલો લાંબો તાર બનાવી શકાય ? (π = 3.14).

15. ગોળાની ત્રિજ્યા ત્રણ ગણી કરવામાં આવે, તો

(i) જૂના અને નવા ગોળાના ઘનફળનો ગુણોત્તર શોધો

(ii) જૂના અને નવા ગોળાની વક્રસપાટીનો ગુણોત્તર શોધો.

16. એક શંકુ, એક નળાકાર અને એક અર્ધગોળાના પાયાની ત્રિજ્યા અને ઊંચાઈ સમાન છે. તેમના ઘનફળનો ગુણોત્તર શોધો.

17. એક શંકુની ત્રાંસી ઊંચાઈ 25 સેમી અને પાયાની ત્રિજ્યા 7 સેમી છે.

(i) વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

(ii) કુલ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ અને

(iii) ઘનફળ શોધો.

18. 5 સેમી બાજુવાળા ત્રણ સમઘનને પાસપાસે છેડાઓ મેળવીને બનાવેલા લંબઘનનું પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ શોધો.

19 બે નળાકારની ત્રિજ્યાઓનો ગુણોત્તર 3 : 2 અને તેમની ઊંચાઈઓનો ગુણોત્તર 7 : 2 હોય, તો

(i) તેમના ઘનફળનો ગુણોત્તર શોધો.

(ii) તેમની વક્રસપાટીનો ગુણોત્તર શોધો.

20. નીચેના વિધાનોમાં કયું ખરું છે અને કયું ખોટું છે, તે જણાવો.

(i) a બાજુવાળા સમઘનનું પૃષ્ઠફળ $6a^2$

(ii) શંકુની કુલ સપાટીનું ક્ષેત્રળ πrl છે, જ્યા r પાયાની ત્રિજ્યા l ત્રાંસી ઊંચાળઈ છે.

(iii) એક શંકુ અને એક અર્ધગોળાના પાયાની ત્રિજ્યા અને ઊંચાઈ સભાન છે. તેથી અર્ધગોળાનું ઘનફળ, શંકુના ઘનફળ કરતાં ત્રણ ગણું છે.

(iv) લંબાઈ, l પહોળાઈ b અને ઊંચાઈ h હોય તેવા ઓરડામાં $\sqrt{l^2+b^2+h^2}$ હોય.

(v) r ત્રિજ્યવાળા અર્ધગોળાની કુલ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ $2\pi r^2$.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો જવાબો

21.1

1. 81 m^2; 45 m^3 2. 77.76 સેમી^{2}; 46.656 સેમી^{3}

3. 15 સેમી, 1350 સેમી^{2} 4. 30000 સેમી^{3}

5. 384 6. 15 m, 117 m^2

7. 896 સેમી^{2}, 1536 સેમી^{3} 8. ₹ 460.80

9. $\sqrt{61}$ સેમી

21.2

1. 44 m^2; $201\frac{1}{7}$ m^2; 110 m^3 2. 880 સેમી^{2}

3. 80850 લીટર 4. 1386 સેમી^{3}

5. 4 સેમી   6. 401.92 સેમી^{2}

21.3

1. $\frac{1430}{7}$ સેમી^{2}; $\frac{1980}{7}$ સેમી^{2}; $\frac{2200}{7}$ સેમી^{3}

2. 1848 સેમી^{3} 3. 2 સેમી   4. 141.3 સેમી

5. 2310 સેમી^{2}

21.4

1. 2464 સેમી^{2}; $11498\frac{2}{3}$ સેમી^{3} 2. 21 સેમી, 5544 સેમી^{2}

3. (i) 9928 સેમી^{2} (ii) 14892 સેમી^{2} (iii) $92661\ \frac{1}{3}$ સેમી^{3}

4. 64

સત્રાંત સ્વાધ્યાયના જવાબ

1. (i) $2\,(lb + bh + hl)$ (ii) $\sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$ (iii) a^3
   (iv) $2\pi rh + \pi r^2$ (v) $\pi r^2 h$
   (vi) πrl, ત્રિજ્યા , ત્રાંસી ઊંચાઈ   (vii) $4\pi r^2$
   (vii) $\frac{2}{3}\pi r^3$

2. (i) D   (ii) D   (iii) D

3. 64 સેમી^{3} 4. 31.5 m^2; 11.25 m^3 5. 11.76 સેમી^{2}; 3.136 સેમી^{3}

6. $10\sqrt{2}$ સેમી   7. $8\sqrt{3}$ સેમી   8 .

[**Hint**: A = $l \times h$; B = $b \times h$; and C = $h \times l$]

9. 621.72 સેમી^{2} 10. 35 સેમી, 3696 સેમી^{2} 11. 18.95 સેમી

12. 21 m, 5544 m^2 13. ` 2610   14. 31.84 m

15. (i) 1 : 27 (ii) 1 : 9

16. 1: 3: 2

17. (i) 550 સેમી^{2} (ii) 704 સેમી^{2} (iii) 1232 સેમી^{3}

18. 350 સેમી^{2}; 375 સેમી^{3}

19. (i) 63 : 16 (ii) 21 : 8

20. (i) ખરું (ii) ખોટું (iii) ખોટું
(iv) ખરું (v) ખોટું

માધ્યમિક પાઠ્યક્રમ

ગણિત

અભ્યાસ કાર્ય - ક્ષેત્રમિતિ

કુલ ગુણ : 25 **સમય : 45 મિનિટ**

સૂચના :

1. *તમામ પ્રશ્નોના જવાબ અલગ કાગળમાં આપો*
2. *તમારી જવાબવહીમાં નીચેના માહીતી આપો.*

- *નામ*
- *નામાંકન ક્રમાંક*
- *વિષય*
- *મહાવરા કાર્યનો મુદ્દો*
- *સરનામું.*

3. *તમારું અભ્યાસ - કાર્ય તમારા અભ્યાસ કેન્દ્રના વિષય શિક્ષક પાસેથી તપાસાવી લો જેથી તમારી કામગીરી માટે તમને વિદ્યાયક પ્રતિપોષક મળે.*

તમારું અભ્યાસ - - કાર્ય નેશન ઈન્સ્ટીટ્યુટ ઓફ ઓપન સ્કૂલિંગને મોકલવું.

1. *એક સમબાજુ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ* $\sqrt{3}$ *સેમી*^{2} *છે. તેની દરેક બાજુનું માપ કેટલું હશે ?* 1

   (A) 8 *સેમી* (B) 4 *સેમી* (C) 2 *સેમી* (D) 16 *સેમી*

2. *એક ત્રિકોણની બાજુઓ* 3 : 5 : 7. *ના પ્રમાણમાં છે જો તેની પરિમિતિ* 60 *સેમી હોય, તો તેનું ક્ષેત્રફળ કેટલું ?* 1

   (A) $60\sqrt{3}$ *સેમી*^{2} (B) $30\sqrt{3}$ *સેમી*^{3} (C) $15\sqrt{3}$ *સેમી*^{2} (D) $120\sqrt{3}$ *સેમી*^{2}

3. *એક સમબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ 96 ચોરસ સેમી છે. જો તેનો એક વિકર્ણ 16 સેમી હોય, તો તેની એક બાજુનું માપ જણાવો.* 1

(A) 5 સેમી (B) 6 સેમી (C) 8 સેમી (D) 10 સેમી

4. *એક લંબઘનની ત્રણ સંલગ્ન સપાટીઓનું ક્ષેત્રફળ અનુક્રમે* a,b,c *છે, તો તેનું ઘનફળ કેટલું ?* 1

(A) $\sqrt[3]{abc}$ (B) $\sqrt{abc}$ (C) abc (D) $a^3b^3c^3$

5. *એક અર્ધગોળાકાર વાટકાની ત્રિજ્યા 3.5 સેમી હોય, તો તેની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.* 1

(A) 38.5 m^2 (B) 77 m^2 (C) 115.5 m^2 (D) 154 m^2

6. *એક સમલંબ ચુતુષ્કોણાકાર ખેતરની સમાંતર બાજુઓ 20 મી અને 16 મી છે. આ બે બાજુઓ વચ્ચેનું અંતર 11 મીટર હોય, તો તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.* 2

7. *એક વર્તુળાકાર બાગની ત્રિજ્યા 9 મી છે. તેને ફરતે 3 મી પહોળો રસ્તો આવેલો છે. આ રસ્તાનું ક્ષેત્રફળ શોધો.* 2

8. *બે નળાકારની ત્રિજ્યાઓ 4 :5 ના પ્રમાણમાં છે અને તેમની ઊંચાઈ 5 :3 ના પ્રમાણમાં છે. તેમના ઘનફળનો ગુણોત્તર શોધો.* 2

9. *લાકડાના નક્કર શંકુની ઊંચાઈ 9 મીટર છે અને તેના પાયાનો પરિઘ 44 મીટર છે. આ શંકુનું ઘનફળ શોધો.* 2

10. *એક ગોળાના વ્યાસ ૨1 મી છે. ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ અને તેનું ઘનફળ શોધો.* 2

11. *શંકુના પાયાની ત્રિજ્યા અને તેની ઊંચાઈ 5 : 12 ના પ્રમાણમાં છે. જો તેનું ઘનફળ 314 મી3 હોય તો તેની ત્રાંસી ઊંચાઈ શોધો.* ($\pi = 3.14$) 4

12. *એક ખેતર ૨00 મી લાંબુ અને 75 મી પહોળં છે. તેમાં એક લંબઘન ટાંકા ખોદવામાં આવે છે. જેની લંબાઈ 40 મી, પહોળાઈ 20 મી અને ઊંડાઈ 10 મી છે. આ નીકળેલી માટીને ખેતરના બાકીના ભાગમાં એક સરખી રીતે પાથરવામાં આવે, તો ખેતરની સપાટી કેટલી ઊંચી આવે ?* 6

22

ત્રિકોણમિતિનો પરિચય

પરિચય

ગણિતશાસ્ત્રમાં ત્રિકોણોનો અભ્યાસ મહત્ત્વનું સ્થાન ધરાવે છે. ત્રિકોણ ન્યૂનતમ સંખ્યાની (ત્રણ) બાજુઓથી બનતી બંધ આકૃતિ હોવાથી સીધી રેખાઓ કે રેખાખંડો દ્વારા ઘેરાયેલી કોઈપણ બંધ આકૃતિઓના અભ્યાસમાં એક એકમની ગરજ સારે છે. ત જ રીતે કાટકોણ ત્રિકોણોનો ઉપયોગ કરીને વર્તુળોનો અભ્યાસ સરળતાથી થઈ શકે છે.

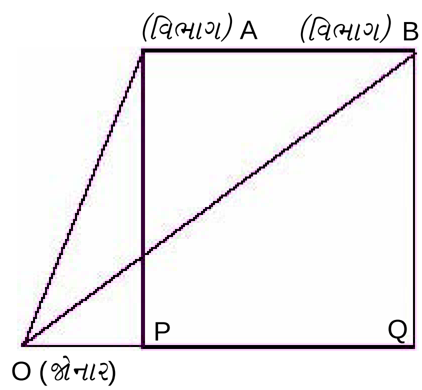
ભૂમિતિમાં આપણે ત્રિકોણોનો અભ્યાસ કર્યો હતો. તેમાં ત્રિકોણો વિશેના ઘણા પરિણામો અંગે આપણે કેટલાંક વિધાનો દ્વારા રજૂઆત કરી હતી પરંતુ ત્રિકોણમિતિનો અભ્યાસ કરવાની આપણી રીત સરળ, સચોટ અને જરા જુદી રીતની રહેશે. તેમાં મોટા ભાગના પરિણામો સૂત્રો દ્વારા રજૂ થશે. ત્રિકોણમિતિમાં અભ્યાસનું કેન્દ્રબિંદુ કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

કાટકોણ ત્રિકોણની રચનાઓનો ઉપયોગ થતો હોય, તેવી કેટલીક પરિસ્થિતિઓ આપણે જોઈએ

તમે નાળિયેરીનું ઊંચું વૃક્ષ જોયું છે ? તેને જોતાં જ તેની ઊંચાઈ કેટલી હશે તેવા વિચાર આપણા મનમાં ઉદ્‌ભવ છે. તેની ઊંચાઈ માપ્યા સિવાય તમે કહી શકો ખરા કે તે કેટલું ઊંચું છે ? તે વૃક્ષની ટોચ અને તેને જોતી આપણી આંખની દૃષ્ટિથી બનતી રેખા, આપણી આંખમાંથી પસાર થતી સમક્ષિતિજ રેખા તથા વૃક્ષની ટોચમાંથી પસાર થતી અને સમક્ષિતિજ રેખા કઉપર લંબ થતી શિરોલંબ રેખા દ્વારા એક કાટકોણ ત્રિકોણ રચાય છે.

બીજું દૃષ્ટાંત જોઈએ.

તમે પતંગ ઉડાડો છો એવી કલ્પના કરો. પતંગ જ્યારે આકાશમાં ઉડતી હોય, ત્યારે તમે તેની ઉંચાઈ નક્કી કરી શકો છો ? અહીં પણ પતંગને જોતી તમારી આંખની દૃષ્ટિ-રેખા, આંખના દૃષ્ટિ-બિંદુમાંથી પસાર થતી સમક્ષિતિજ રેખા અને પતંગમાંથી પસાર થતી શિરોલંબ રેખાથી રચાતા કાટકોણ ત્રિકોણની કલ્પના આપણે કરી શકીએ છીએ.



આકૃતિ **22.1**

આપણે એક અન્ય પરિસ્થિતિનો વિચાર કરીએ. જેમાં એક વ્યક્તિ કોઈ નદીના કિનારે ઊભી હોય અને બીજા કિનારે આવેલા એક મંદિરને જોઈ રહી હોય. જો મંદિરની ઊંચાઈ

જાણતા હોઈએ, તો નદીના પટની પહોલાઈ શોધી શકાય ખરી ? આ દષ્ટાંતમાં પણ આપણે કાટકોણ ત્રિકોણની કલ્પના કરી શકીએ છીએ.

એક વધારે દષ્ટાંત લઈએ. ધારો કે તમે તમારા ઘરના છાપરા ઉપર ઊભા છો અને તમે આકાશમાં ઉડતું એક વિમાન જુઓ છો. તમે તેના તરફ દષ્ટિ કરો ત્યારે વળી એક કાટકોણ ત્રિકોણની કલ્પના કરો. થોડા સમય પછી તે વિમાન તમારાથી દૂરજાય, ત્યાર`તેની તરફ જોવાથી રચાતા કાટકોણ ત્રિકોણની કલ્પના આ રીતે કરી શકાય. આકૃતિ 22.1 માં દર્શાવ્યા મુજબ વિમાનને જોતી તમારી આંખની દષ્ટિ-રેખા, વિમાનમાંથી પસાર થતી શિરોલંબ રેખા જે સમક્ષિતિજ રેખા પર લંબ છે અને આંખમાંથી પસાર થતી સમક્ષિતિજ રેખા એક કાટકોણ ત્રિકોણ રચે છે. આ થોડા સમય દરમિયાન વિમાને કેટલું અંતર કાપ્યું હશે, તે કહી શકો ?

ઉપર વર્ણવેલી અને તેના જેવી અન્ય ઘણી પરિસ્થિતિઓમાં ઉંચાઈ કે અંતરને ખરેખર માપ્યા સિવાય શોધી કાઢવાની રીતોનો ગણિતની જે શાખામાં અભ્યાસ કરવામાં આવે છે તે છે ત્રિકોણિતિ

ત્રિકોણમિતિ એટલે ત્રિકોણના ખૂણાઓ અને બાજુઓનું માપન કરવું. મૂળભૂત રીતે તો ત્રિકોણિમિતિને ત્રિકોણના ખૂકણાઓ અને બાજુઓનો ઉપયોગ કરીને ગણતરી કરવાની પદ્ધતિઓની શાખા ગણવામાં આવતી હતી. ખગોળશાસ્ત્ર, ભૂગોળ, ભૂમિ-માપન, ઈજનેરી અભ્યાસ, દરિયાઈ કે અન્ય યાનને ચલાવવાના આયોજન વગેરેમાં તેનો આધારભૂત ઉપયોગ થાય છે. ભૂતકાળમાં તારાઓ અને ગ્રહોનું પૃથ્વીથી અંતર શોધવા માટે ખગોળશાસ્ત્રીઓ તેનો ઉપયોગ કરતા. આજે ઈજનેરી વિજ્ઞાનની તકનિકીવિદ્યાની કેટલીક પાયાની બાબતોમાં ત્રિકોણિતીય સંકલ્પનાઓનો ઉપયોગ થાય છે.

આ પ્રકરણમાં આપણે ત્રિકોણિતિય ગુણોત્તરોની વ્યાખ્યા કોઈ કાટકોણ ત્રિકોણની બાજુઓના ગુણોત્તરોના સ્વરૂપમાં કરીશુ અને જુદા જુદા ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોના સંબંધ સ્થાપિત કરીશુ. કેટલાક ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમો પણ આપણે આ પ્રકરણમાં સ્થાપિત કરીશું.

હેતુઓ

આ પ્રકરણ શીખ્યા પછીની અધ્યેતા

- કાટકોણ ત્રિકોણમાંના લઘુકોણના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તર લખી શકશે.
- જ્યારે કેટલીક બાજુઓ અને ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરનો જ્ઞાત હોય, ત્યારે કાટકોણ ત્રિકોણની બાજુઓ અને ખૂણા શોધી શકશે.
- ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો વચ્ચેનો સંબંધ લખી શકશે.
- ત્રિકોણમિતીય પર્યાય પ્રસ્થાપિત કરી શકશે. (ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમો તારવી શકશે)
- ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો અને નિત્યસમો પર આધારિત કૂટપ્રશ્નો ઉકેલી શકશે.
- કોટિકોણના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો શોધી શકશે અને તેના પર આધારિત કૂટપ્રશ્નો ઉકેલી શકશે.

અપેક્ષિત પૂર્વજ્ઞાન :

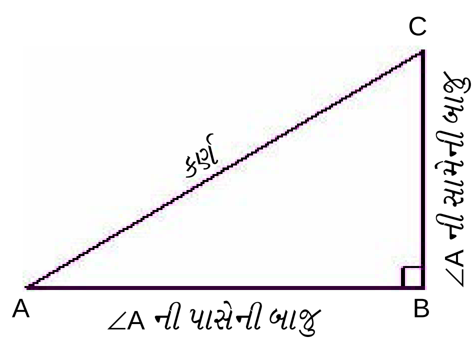
- *ખૂણાની સંકલ્પના*
- *કાટકોણ ત્રિકોણની રચના*
- *સમાંતર રેખાઓ દોરવી અને લંબરેખાઓ દોરવી*
- *ખૂણાના પ્રકાર : લઘુકોણ, કાટકોણ, ગુરૂકોણ*
- *ત્રિકોણના પ્રકાર : લઘુકોણ ત્રિકોણ, કાટકોણ ત્રિકોણ, ગુરૂકોણ ત્રિકોણ*
- *ત્રિકોણના પ્રકાર : સમદ્વિબાજુ, સમબાજુ ત્રિકોણ*
- *કોટિકોણ*

22.1 કાટકોણ ત્રિકોણમાંના લઘુકોણના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો

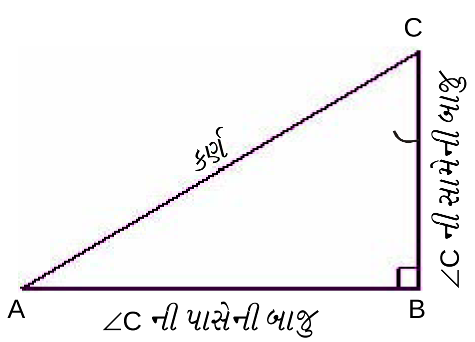
B બિંદુઓ કાટકોણ હોય એવો કાટકોણ Δ ABC *લઈએ.* $\angle$A (CAB) *એ લઘુકોણ છે.* AC *કર્ણ છે.* $\angle$A *ની સામેની બાજુ* BC *છે.* $\angle$A *ની પાસેની બાજુ* AB *છે.*

આ ત્રિકોણમાં $\angle$C *ને લગુકોણ તરીકે લઈએ, તો* $\angle$C *ની સામોની બાજુ* AB *છે અને* $\angle$C *ની પાસેની બાજુ* BC *છે.*

હવે આપણે કાટકોણ ત્રિકોણની બાજુઓ વચ્ચેના ગુણોત્તરો વ્યાખ્યાતિ કરીશું જેને ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો કહે છે.



આકૃતિ. 22.2



આકૃતિ. 22.3

કાટકોણ Δ ABC ના લઘુકોણ ∠A સંબંધિત ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો નીચે મુજબ છે.

(1) $\text{sine } A = \dfrac{\angle A \text{ ની સામેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}} = \dfrac{BC}{AC}$

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

ઉપરના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોને ટૂંકમાં અનુક્રમે sin A, cos A, tan A, cosec A, sec A અને cot A કહેવામાં આવે છે. ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોને ટૂંકમાં ત્રિ-ગુણોત્તરો કહેવામાં આવે છે.

જો આપણે $\angle A = \theta$ લખીએ ઉપરના પરિણામો નીચે મુજબ લખાશે

$\sin\theta =$, $\quad \cos\theta = \dfrac{AB}{AC}$, $\quad \tan\theta = \dfrac{BC}{AB}$

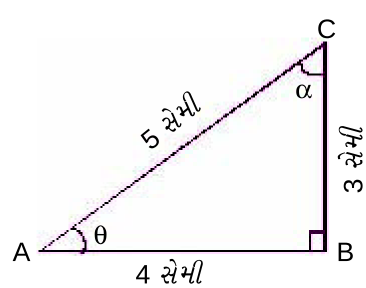
$\text{cosec}\,\theta = \dfrac{AC}{BC}$, $\quad \sec\theta = \dfrac{AC}{AB}$ અને $\cot\theta = \dfrac{AB}{BC}$

નોંધ : જુઓ કે $\sin\theta$ અને $\text{cosec}\,\theta$, $\cot\theta$ અને $\sec\theta$ તેમજ $\tan\theta$ અને $\cos\theta$ એકબીજાના વ્યસ્થ છે. આ રીતે કાટકોણ ΔABC માં જો AB = 4સેમી, BC = 3સેમી અને સેમી, AC = 5 સેમી હોય, તો

$\sin\theta = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{3}{5}$ $\qquad \text{cosec}\,\theta = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{5}{3}$

$\cos\theta = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{4}{5}$ $\qquad \sec\theta = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{5}{4}$

$\tan\theta = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{3}{4}$ અને $\cot\theta = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{4}{3}$



આકૃતિ. 22.4

ઉપરની આકૃતિમાં જો આપણે $C = \alpha$ લઈએ, તો

$$\sin\alpha = \frac{\angle\alpha \text{ ની સામેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{\angle\alpha \text{ ની પાસેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}} = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$$

$$\tan\alpha = \frac{\angle\alpha \text{ ની સામેની બાજુ}}{\angle\alpha \text{ ની પાસેની બાજુ}} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{3}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\text{કર્ણ}}{\angle\alpha \text{ ની સામેની બાજુ}} = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{4}$$

$$\sec\alpha = \frac{\text{કર્ણ}}{\angle\alpha \text{ ની પાસેની બાજુ}} = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{3}$$

$$\cot\alpha = \frac{\angle\alpha \text{ ની પાસેની બાજુ}}{\angle\alpha \text{ ની સામેની બાજુ}} = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4}$$

નોંધ :

1. Sin A અથવા $\sin\theta$ એ એક પ્રતિક છે અને sin ને A કે θ થી જુદું પાડી શકાય નહિ. વળી તે $\sin \times \theta$ નથી. આ હકીકત દરેક ત્રિ-ગુણોત્તરોને લાગુ પડે છે.
2. દરેક ત્રિ-ગુણોત્તર એ એક વાસ્તવિક સંખ્યા છે.
3. $\sin^2\theta$, $\cos^2\theta$ અને $\tan^2\theta$ ને બદલે સરળ ખાતર $(\sin\theta)^2$, $(\cos\theta)^2$, અને $(\tan\theta)^2$ લખાય છે. આથી વધુ ઘાતાંકો માટે પણ દરેક ત્રિ-ગુણોત્તર માટે આ નિયમને અનુસરીશું.
4. A અથવા θ લઘુકોણ હોવો જોઈએ એ આપણી ત્રિ-ગુણોત્તરો માટેની મર્યાદા છે.

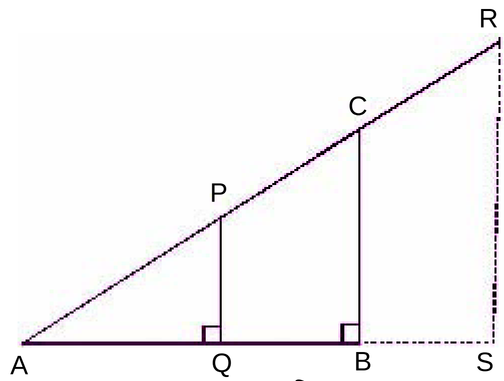
હવે પ્રશ્ન એ ઉભો થાય છે કે શું જુદા જુદા કાટકોણ ત્રિકોણ માટે ત્રિ-ગુણોત્તરના મૂલ્યો સમાન રહે છે ? આ પ્રશ્નનો જવાબ મેળવવા આપણે એક કાટકોણ ABC લઈએ, જેનો B ખૂણો કાટકૂણો હોય. કઈ AC પર કોઈ બિંદુ P લઈએ $PQ \perp AB$ લો.

હવે કાટકોણ ΔABC માં

$$\sin A = \frac{BC}{AC} \qquad \text{----(i)}$$

અને કાટકોણ ΔAQP માં

$$\sin A = \frac{PQ}{AP} \qquad \text{----(ii)},$$



આકૃતિ. 22.5

એ ΔAQP અને ΔABC માં

$\angle Q = \angle B$.... (બંને કાટકૂણા)

અને $\angle A = \angle A$ .... (સામાન્ય)

$\therefore \quad \Delta AQP \sim \Delta ABC$

$$\therefore \frac{AP}{AC} = \frac{QP}{BC} = \frac{AQ}{AB}$$

અથવા $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{PQ}{AP}$ ----(iii)

પરિણામ (1), (2) અને (3) પરથી જોઈ શકાય છે કે -- ની કિંમત બંને ત્રિકોણોમં સમાન છે.

એ જ રીતે $\cos A = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AQ}{AP}$ અને $\tan A = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{PQ}{AQ}$

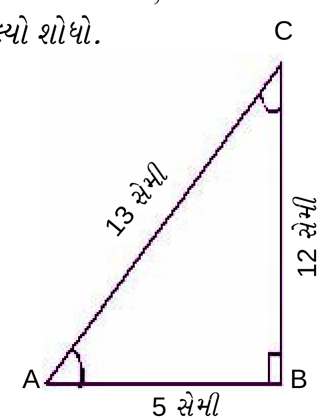
હવે લંબાવેલી AC ઉપર કોઈ બિંદુ R લઈએ $RS \perp AB$ (લંબાવેલી) ને S માં મળે છે. તમે તપાસી શકશો કે ΔASR માટે પણ ત્રિ-ગુણોત્તર મૂલ્યો એના એ જ રહે છે.

એ રીતે તારવી શકાય છે કે ત્રિ-ગુણોત્તરના મૂલ્યો કાટકોણ ત્રિકોણની બાજુઓની લંબાઈ પર આધાર રાખતા નથી. તેઓ માત્ર ખૂણા પર આધારિત છે.

ઉદાહરણ 22.1: આકૃતિ 22.6માં ΔABC નો B ખૂણો કાટખૂણે છે. જો AB = 5 સેમી, BC = 12 સેમી, AC = 13 સેમી અને C સેમી હોય, તો cosec C અને sec C નાં મૂલ્યો શોધો.

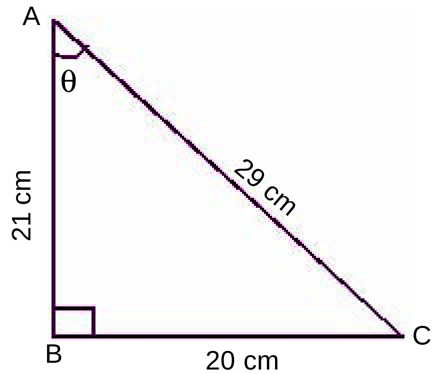
ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે

$$\tan C = \frac{\angle C \text{ ની સામેની બાજુ}}{\angle C \text{ ની પાસેની બાજુ}} = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{12}$$



આકૃતિ. 22.6

ઉદાહરણ 22.2 : આકૃતિ 22.7 પરથી $\sin\theta$, $\cot\theta$ અને $\text{Sec}\,\theta$ અંગેના મૂલ્યો શોધો.



આકૃતિ 22.7

ઉકેલ :

$= \frac{AC}{BC} = \frac{41}{40}$

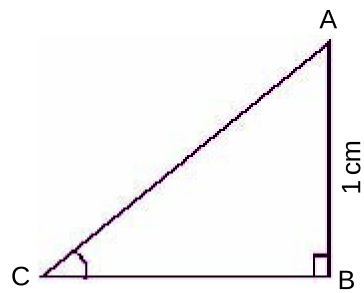
ઉદાહરણ 22.3 : *આકૃતિ 22.8 માં કાટકોણ* ΔABC *માં* B *કાટખૂણો છે. જો* $AB = 9$ *સેમી,* $BC = 40$ *સેમી અને* $AC = 41$ *સેમી હોય, તો* cos C, cot C, tan A, *અને* cosec A *ના મૂલ્યો મેળવો.*

ઉકેલ :

ઉદાહરણ 22.4 : *આકૃતિ 22.9 માં કાટકોણ* ΔABC *નો B કાટખૂણો છે,* $\angle A = \angle C, AC =$ *સેમી અને* $AB = 1$ *સેમી છે.* sin C, cos C *અને* tan C *નાં મૂલ્યો શોધો*

ઉકેલ : ΔABC **માં** $\angle A = \angle C$

$\therefore$ $BC = AB = 1$ *સેમી (પક્ષ)*



આકૃતિ. 22.9

અને

નોંધ : *ઉપરના ઉદાહરણમાં* $\angle A = \angle C$ *અને* $\angle B = 90°$

$\sin 45° = \cos 45° =$

અને $\tan 45° = 1$

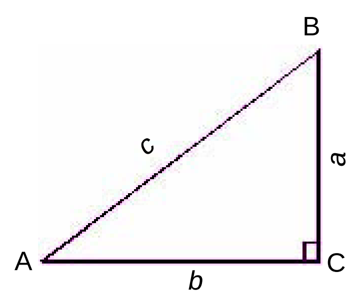
ઉદાહરણ 22.5 : *આકૃતિ 22.10 માં કાટકોણ* ΔABC *નો C કાટખૂણો છે. જો* $AB = c, AC = b$ *અને* $BC = a$ *હોય, તો નીચેનામાંથી કોણ સત્ય છે ? જણાવો.*

(i) $\tan A =$

(ii) $\tan A = \frac{c}{b}$

(iii) $\cot A = \frac{b}{a}$

(iv) $\cot A = \frac{a}{b}$



આકૃતિ. 22.10

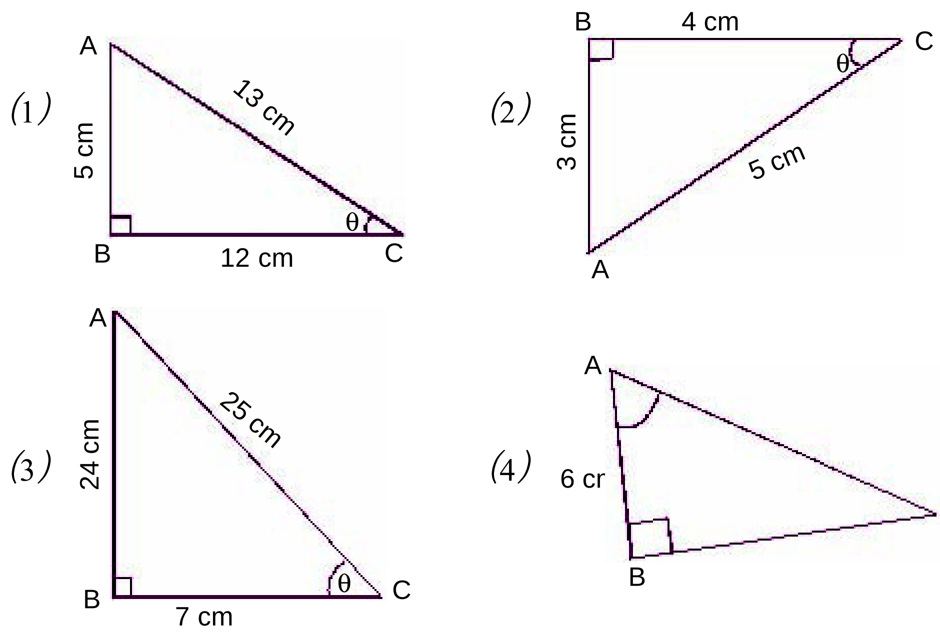
ઉકેલ : $\tan A = \frac{\angle A \text{ ની સામેની બાજુ}}{\angle A \text{ ની પાસેની બાજુ}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$

અને

એટલે કે પરિણામ (3) $\cot A = \frac{b}{a}$ *એ સાચું વિધાન છે.*

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 22.1

1. *નીચેની આકૃતિઓમાં* ΔABC *કાટકોણ ત્રિકોણ છે. જેમાં* B *કાટકૂણો છે.* θ *ખૂણા માટેના બધા ત્રિ-ગુણોત્તરો શોધો*

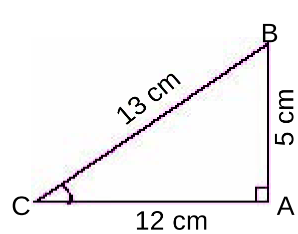


આકૃતિ 22.11

2. ΔABC *માં* $B = 90°$, $BC = 5$ *સેમી,* $AB = 4$ *સેમી, અને* $AC =$ *સેમી* $\sin A$, $\cos A$, *અને* $\tan A$ *ની કિંમત શોધો.*
3. ΔABC *માં* $\angle B$ *કાટખૂણો છે. જો* $AB = 40$ *સેમી,* $BC = 9$ *સેમી અને* $AC = 41$ *સેમી હોય, તો* $\sin C$, $\cot C$, $\cos$, A *અને* $\cot A$ *ની કિંમત શોધો.*
4. ΔABC *માં* B *કાટખૂણો છે. જો* $AB = BC = 2$ *સેમી અને* $AC =$ *હોય, તો* $\sec C$, $\operatorname{cosec} C$, *અને* $\cot C$ *શોધો.*
5. *આકૃતિ 22.12 માં* ΔABC *માં* A *કાટખૂણો છે.*
   નીચેનામાંથી ક્યું સત્ય છે ?

(i) $\cot C = \dfrac{13}{12}$ (ii) $\cot C = \dfrac{12}{13}$

(iii) $\cot C = \dfrac{5}{12}$ (iv) $\cot C = \dfrac{12}{5}$

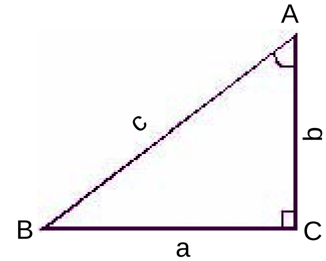


આકૃતિ 22.12

6. *આકૃતિ 22.13 માં* $AC = b$, $BC = a$ *અને* $AB = c$ *છે.*
   નીચેનામાંથી ક્યું સાચું છે.

(i) $\operatorname{cosec} A = \dfrac{a}{b}$ (ii) $\operatorname{cosec} A = \dfrac{c}{a}$

(iii) $\operatorname{cosec} A = \dfrac{c}{b}$ (iv) $\operatorname{cosec} A = \dfrac{b}{a}$.



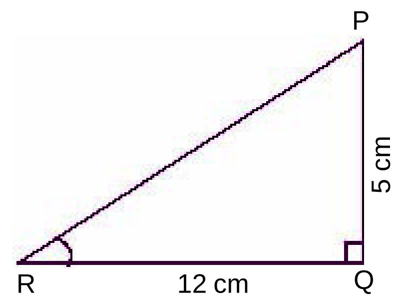
આકૃતિ. 22.13

22.2 કાટકોણ ત્રિકોણની આપેલી બે બાજુઓ પર ત્રિ-ગુણોત્તરો શોધવા

જ્યારે કાટકોણ ત્રિકોણની બે બાજુઓનાં માપ આપ્યા હોય, ત્યારે પાયથાગોરસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને ત્રીજી બાજુ શોધી શકીએ. પછી આપણે આપેલા ખૂણા માટેના ત્રિ-ગુણોત્તરો ઉપર શીખ્યા મુજબ ગણી શકીએ.

આપણે કેટલા ઉદાહરણો દ્વારા સમજીએ.

ઉદાહરણ 22.6: *આકૃતિ 22.14 માં* ΔPQR *નો* Q *કાટખૂણો છે. જો* $PQ = 5$ *સેમી અને* $QR = 12$ *સેમી હોય, તો* sin R, cos R *અને* tan R *શોધો.*



આકૃતિ. 22.14

ઉકેલ : *પાયથાગોરસ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને આપણે ત્રીજી બાજુ શોધીશુ. કારણ કે* ΔPQR *એ કાટકોણ* Q *છે.*

$\therefore$ PR = *(પાયથાગોરસ પ્રમેય)*

$$= \sqrt{5^2 + 12^2}$$

$$= \sqrt{25 + 144}$$

$$= \sqrt{169}$$

હવે ત્રિ-ગુણોત્તરોની વ્યાખ્યાઓને આધારે

$$\sin R = \frac{\angle R \text{ ની સામેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}} = \frac{PQ}{PR} = \frac{5}{13}$$

અને

ઉપરના ઉદાહરણ પરથી જાણી શકીએ છીએ કે,

કાટકોણ ત્રિકોણની બે બાજુઓ આપી અને ત્રિ-ગુણોત્તરો શોધવા હોય ત્યારે...

સોપાન -1: *પાયથાગોરસ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને ત્રીજી વસ્તુ શોધવી.*

સોપાન -2: *ત્રિ-ગુણોત્તરની વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરી તેમાં બાજુઓનાં માપ લખવા*

ઉદાહરણ 22.7 : *આકૃતિ* 22.15 *માં* ΔPQR *નો* Q *કાટખૂણો છે.* PR = 25 *સેમી,* PQ = 7 *સેમી અને* PRQ = θ. tan θ, cosec θ *અને* sec θ *નાં મૂલ્યો મેળવો.*

ઉકેલ :

ΔPQR *નો* Q *કાટખૂણો છે.*

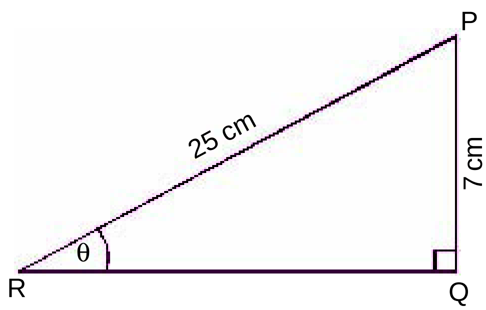
$QR^2 =$

$= \sqrt{25^2 - 7^2}$

$= \sqrt{625 - 49}$

$= \sqrt{576}$

$= 24$ *સેમી*



આકૃતિ. 22.15

$\therefore$

$\sec\theta = \frac{PR}{QR} = \frac{25}{24}$

$\text{cosec}\,\theta = \frac{PR}{PQ} = \frac{25}{7}$ $\therefore$

ઉદાહરણ 22.8 : ΔABC *માં* $\angle B = 90^\circ$ *જો* AB = 4 *સેમી, અને* BC = 3 *સેમી હોય, તો* sin C, cos C, cot C, tan A, sec A *અને* cosec A *શોધો.*

ઉકેલ : *પાયથાગોરસ પ્રમેય મુજબ,* ΔABC

$AC^2 =$

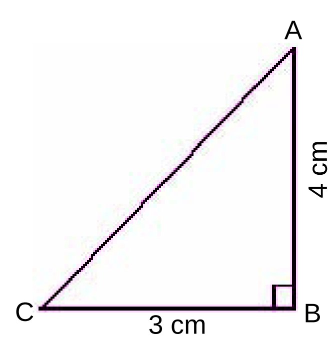
$= \sqrt{4^2 + 3^2}$

$= \sqrt{25}$

$= 5$ *સેમી*

$\sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$

$\cos C = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$



આકૃતિ. 22.16

$$\cot C = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4}$$

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4}$$

$$\sec A = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{4}$$

અને $$\operatorname{cosec} A = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{3}$$

હવે tan A અને cot C નાં મૂલ્યો સરખાં છે.

$$\tan A - \cot C = 0$$

ઉદાહરણ 22.9: આકૃતિ 22.17માં PQR નો R કાટખૂણો છે. જો PQ = 13 સેમી અને QR = 5 સેમી હોય, તો નીચેનામાંથી ક્યું વિધાન સાચું છે ?

(i) $\sin Q + \cos Q = \frac{17}{13}$ (ii) $\sin Q - \cos Q = \frac{17}{13}$

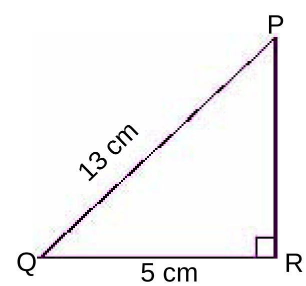
(iii) $\sin Q + \sec Q = \frac{17}{13}$ (iv) $\tan Q + \cot Q = \frac{17}{13}$

ઉકેલ : $PR^2 = \sqrt{PQ^2 - QR^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$

$\therefore$ $\sin Q =$ અને $\cos Q = \frac{QR}{PQ} = \frac{5}{13}$

$\therefore$ $\sin Q + \cos Q =$

એટલે કે વિધાન (1) $\sin Q + \cos Q = \frac{17}{13}$ સાચું છે.



આકૃતિ. 22.17

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 22.2

1. ΔABC માંB જમણે ખુણે હોય તો, AC = 10 cm, અને AB = 6 cm. sin C, cos C, અને tan C નું મૂલ્ય શોધો.

2. ΔABC માં, $\angle C = 90°$, BC = 24 cm અને AC = 7 cm. sin A, cosec A અને cot A નું મુલ્ય શોધો.

3. ΔPQR માં, Q = 90°, PR = cm અને QR = 10cm. તો sec P, cot P અને cosec P નું મુલ્ય શોધો.

4. ΔPQR માં, $\angle Q = 90°$, PQ = cm અને QR = 1 cm. તો tan R, cosec R, sin P અને sec P નું મુલ્ય શોધો.

5. ΔABC માં, $\angle B = 90°$, AC = 25 cm, AB = 7 cm અને ACB = θ. તો cot θ, sin θ, sec θ અને tan θ નું મુલ્ય શોધો.

6. ΔPQR માં, Q જમણે ખૂણે હોય, PQ = 5 cm અને PR = 7 cm. તો sin P, cos P, sin R અને cos R. અને sin P – cos R નું મુલ્ય શોધો.

7. ΔDEF માં, E કાટખૂણો છે. આકૃતિ 22.18. જો DE = 5 cm અને EF = 12 cm, હોય તો નીચેનામાંથી શું સાચું છે?

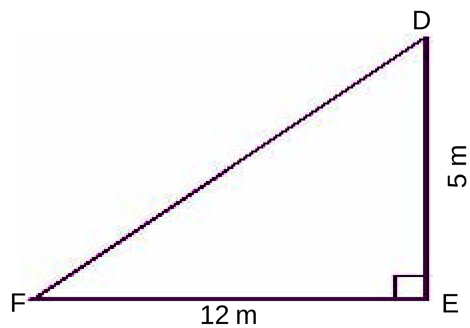
   i) sin F =

   (ii) sin F $= \frac{12}{5}$

   (iii) sin F $= \frac{5}{13}$

   (iv) sin F $= \frac{12}{13}$

$\frac{13}{12}$ $\sqrt{2}$



આકૃતિ. 22.18

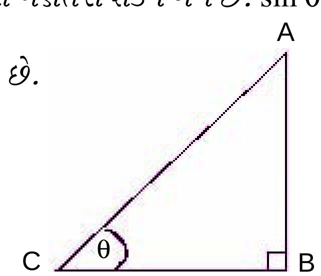
22.3 એક ત્રિ-ગુણોત્તર પરથી બીજા ત્રિ-ગુણોત્તર શોધવા

ક્યારેક આપણે એક ત્રિ-ગુણોત્તર જાણતા હોઈએ અને આપણે બાકીના ત્રિ-ગુણોત્તરો જાણવા છે. ત્રિ-ગુણોતરની વ્યાખ્યા અને પાયથાગોરસના પ્રમેયને આધારે આ ગણતરી શક્ય બને છે. $\sin\theta = \frac{12}{13}$ લઈએ. પછી બીજા ત્રિ-ગુણોત્તર શોધવા કાટકોણ ABC દોરીએ છે.

હવે $\sin\theta = \frac{12}{13}$

એટલે કે AB અને AC 12 : 13 ના પ્રમાણમાં છે.

ધારો કે AB = 12 k અને AC = 13 k છે.



આકૃતિ. 22.19

$$BC^2 = \sqrt{AC^2 - AB^2} \quad \text{(પાયથાગોરસ)}$$

$$= \sqrt{(13k)^2 - (12k)^2}$$

$$= \sqrt{169k^2 - 144k^2}$$

$$= \sqrt{25k^2} = 5\,k$$

હવે આપણે બીજા બધા ત્રિ-ગુણોત્તરો શોધી શકીશું.

$$\cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{5k}{13k} = \frac{5}{13}$$

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{12k}{5k} = \frac{12}{5}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{13k}{12k} = \frac{13}{12}$$

$$\sec\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{13k}{5k} = \frac{13}{5}$$

$$\cot\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{5k}{12k} = \frac{5}{12}$$

ઉપર ચર્ચા કર્યા મુજબ નીચેના સોપાન દ્વારા ઉકેલ મેળવી શકાય છે.

1. *કાટકોણ* ΔABC *દોરો.*
2. *આપેલ ત્રિ-ગુણોત્તર, બાજુઓના ગુણોત્તરથી દર્શાવો. ગુણોત્તરમાં અચળાંક* k *ધારો*
3. k *સ્વરૂપમાં બંને બાજુઓ જાણો.*
4. *પાયથાગોરસ પ્રમેયની મદદથી (અન્ય) ત્રીજી બાજુ શોધો.*
5. *હવે વ્યાખ્યાન સહારે બાકીના ત્રિ-ગુણોત્તર શોધો.*

કેટલાક ઉદાહરણથી સમજીએ.

ઉદાહરણ 22.10 : *જો* $\cos\theta = \frac{7}{25}$, *તો* $\sin\theta$ *અને* $\tan\theta$ *શોધો.*

ઉકેલ : ΔABC *દોરો જેમાં* $\angle B = 90°$ *અને* $C = \theta$ *આપણે જાણીએ છીએ કે,*

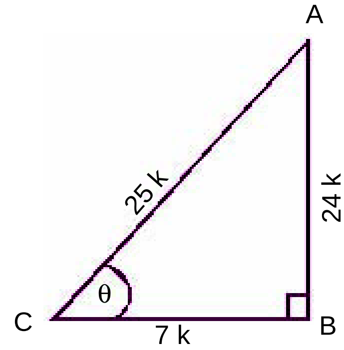
ધારો કે $\cos\theta =$ અને છે.

$$AB^2 = \sqrt{AC^2 - BC^2} \quad \text{(પાયથાગોરસ)}$$

$$= \sqrt{(25k)^2 - (7k)^2}$$

$$= \sqrt{625k^2 - 49k^2}$$

$$= \sqrt{576k^2}$$



આકૃતિ. 22.20

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{24k}{25k} = \frac{24}{25}$$

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{24k}{7k} = \frac{24}{7}$$

ઉદાહરણ 22.11: જો $\cot\theta = \frac{40}{9}$, હોય, તો $\frac{\cos\theta.\sin\theta}{\sec\theta}$ નું મૂલ્ય શોધો.

$\frac{BC}{AB}$

ઉકેલ : ABC માં $\angle B = 90^\circ$ અને $C = \theta$ છે. આપણે જાણીએ છીએ કે

$$\cot\theta \quad = \qquad = \frac{40}{9}$$

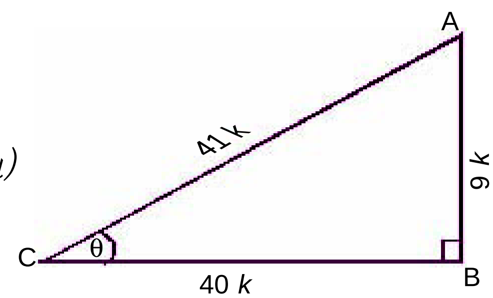
ધારો કે $BC = 40k$ અને ΔABC છે.

$$AC^2 = \sqrt{BC^2 + AB^2} \quad \text{(પાયથાગોરસ)}$$

$$= \sqrt{(40k)^2 + (9k)^2}$$

$$= \sqrt{1600k^2 + 81k^2}$$

$$= \sqrt{1681k^2}$$



આકૃતિ. 22.21

હવે $\sin\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{9k}{41k} = \frac{9}{41}$

$$\cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{40k}{41k} = \frac{40}{41}$$

અને $\quad \sec\theta = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{41k}{40k} = \dfrac{41}{40}$

હવે $\quad \dfrac{\cos\theta.\sin\theta}{\sec\theta} = \dfrac{\dfrac{9}{41}\times\dfrac{40}{41}}{\dfrac{41}{40}}$

$$= \frac{9}{41}\times\frac{40}{41}\times\frac{40}{41}$$

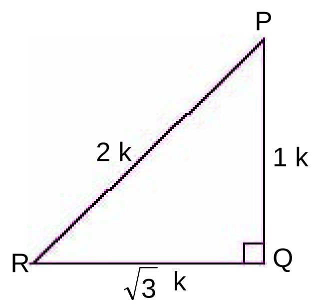
$$= \frac{14400}{68921}$$

ઉદાહરણ 22.12: PQR માં $\angle Q = 90^\circ$ અને $\tan R =$ સાબિત કરો કે

$\sin P \cos R + \cos P \sin R = 1$

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$\tan R = \dfrac{PQ}{QR} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$



આકૃતિ. 22.22

ધારો કે $PQ = k$ અને $QR = \sqrt{3}\,k$ છે.

$PR^2 = \sqrt{PQ^2 + QR^2}$

$= \sqrt{k^2 + \left(\sqrt{3}k\right)^2}$

$= \sqrt{k^2 + 3k^2}$

$= \sqrt{4k^2}$

હવે $\therefore \quad \sin P = \dfrac{\text{side opposite to } \angle P}{\text{Hypotenuse}} = \dfrac{QR}{PR} = \dfrac{\sqrt{3}k}{2k} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos P = \dfrac{\text{side adjacent to } \angle P}{\text{Hypotenuse}} = \dfrac{1k}{2k} = \dfrac{1}{2}$

$$\sin R = \frac{\text{side opposite to } \angle R}{\text{Hypotenuse}} = \frac{PQ}{PR} = \frac{1k}{2k} = \frac{1}{2}$$

$$\cos R = \frac{\text{side adjacent to } \angle R}{\text{Hypotenuse}} = \frac{QR}{PR} = \frac{\sqrt{3}k}{2k} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \quad \sin P \cos R + \cos P \sin R = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4}$$

$$= 1$$

ઉદાહરણ 22.13 : ΔABC *માં* $\angle B$ *કાટખૂણો છે. જો* $AB = c$, $BC = a$ *અને* $AC = b$ *હોય, તો નીચેનામાંથી ક્યું સાચું છે.*

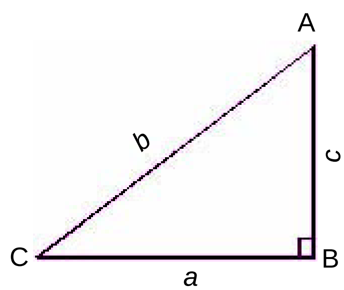
(i) $\cos C + \sin A =$

$\frac{2b}{a}$

(ii) $\cos C + \sin A = \frac{b}{a} + \frac{a}{b}$

(iii) $\cos C + \sin A = \frac{2a}{b}$

(iv) $\cos C + \sin A = \frac{a}{b} + \frac{c}{b}$



આકૃતિ. 22.23

ઉકેલ : *અહીં,* $\cos C = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$

અને $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$

$$\cos C + \sin A = \frac{a}{b} + \frac{a}{b} = \frac{2a}{b}$$

એટલે વિધાન (3) $\cos C + \sin A = \frac{2a}{b}$ *સાચું છે.*

નોંધ

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 22.3

1. જો $\sin\theta = \frac{20}{29}$, તો $\cos\theta$ અને $\tan\theta$. ના મૂલ્યો શોધો.

2. જો $\tan\theta = \frac{24}{7}$, તો $\sin\theta$ અને $\cos\theta$ ના મૂલ્યો શોધો.

3. જો $\cos A = \frac{7}{25}$, તો $\sin A$ અને $\tan A$ ના મૂલ્યો શોધો.

4. જો $\cos\theta = \frac{m}{n}$, તો $\cot\theta$ અને $\text{cosec}\,\theta$ નાં મૂલ્યો શોધો.

5. જો $\cos\theta = \frac{4}{5}$, તો $\frac{\cos\theta\,.\cot\theta}{1-\sec^2\theta}$ નું મૂલ્ય શોધો.

6. જો $\text{cosec}\,\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$, તો $\sin^2\theta\cos\theta + \tan^2\theta$ શોધો.

7. જો $\cot B = \frac{5}{4}$, તો સાબિત કરો કે $\text{cosec}^2 B = 1 + \cot^2 B$

8. ΔABC માં $\angle C = 90^\circ$. જો $A = \frac{3}{2}$, તો $\sin B$ અને $\tan B$ની કિંમત શોધો.

9. જો $A = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ અને $B = \sqrt{3}$, તો સાબિત કરો કે $\cos A\cos B - \sin A\sin B = 0$

10. જો $\cot A = \frac{12}{5} = \frac{12}{5}$, તો બતાવો કે $\tan^2 A - \sin^2 A = \sin^4 A\sec^2 A$

    (માર્ગદર્શન : $\tan A$, $\sin A$ અને $\sec A$ ની કિંમત શોધો અને આપેલા સૂત્રમાં મૂકો)

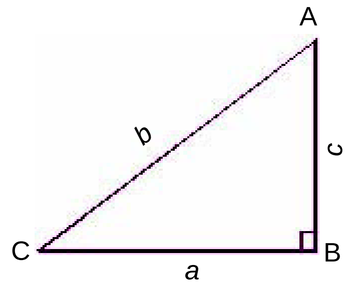
11. આકૃતિ 22.24 માં ΔABC ના શિરોબિંદુ B આગળ કાટખૂણો બને છે. જો $AB = c$, $BC = a$ અને $CA = b$ હોય, તો નીચેનામાંથી ક્યું વિધાન સાચું છે.

    (i) $\sin A + \cos A = \frac{b+c}{a}$

(ii) $\sin A + \cos A =$

(iii) $\sin A + \cos A =$

(iv) $\sin A + \cos A =$



આકૃતિ. 22.24

22.7 ત્રિ-ગુણોત્તરો વચ્ચેનો સંબંધ

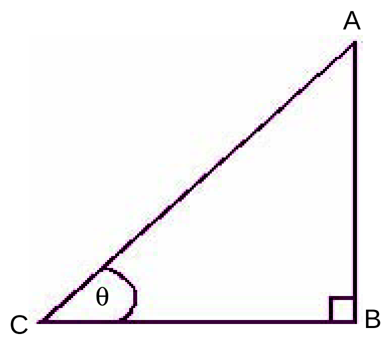
ABC માં B કાટખૂણો હોય, તો આપણે જાણીએ છીએ કે,

$\sin\theta =$

$\cos\theta = \frac{BC}{AC}$

અને $\tan\theta = \frac{AB}{BC}$

$\frac{AB\,b + c}{AC\,b}$



આકૃતિ. 22.25

બીજી રીતે વિચારીએ $= \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{AC}, \frac{BC}{AC}$

$$= \frac{\frac{AB}{AC}}{\frac{BC}{AC}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

આમ, $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

AB = 3 સેમી અને BC = 4 સેમી લઈને આ પરિણામ ચકાસીએ

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 5^2} = 25$$

$\sin\theta = \frac{3}{5}$, $\cos\theta = \frac{4}{5}$ અને $\tan\theta = \frac{3}{4}$

હવે $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} = \tan\theta.$

પરિણામ સાચું છે.

વળી $\sin\theta = \dfrac{AB}{AC}$

$$\frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\frac{AB}{AC}} = \frac{AC}{AB} = \operatorname{cosec}\theta$$

આમ, $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$ અથવા $\operatorname{cosec}\theta \,.\, \sin\theta = 1$

એટલે કે $\operatorname{cosec}\theta$ અને $\sin\theta$ એકબીજાના વ્યસ્ત છે.

વળી, $\cos\theta = \dfrac{BC}{AC}$

$$\frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{BC}{AC}} = \frac{AC}{BC} = \sec\theta$$

આમ $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ અથવા $\sec\theta \,.\, \cos\theta = 1$

એટલે કે $\sec\theta$ અને $\cos\theta$ એકબીજાના વ્યસ્ત છે.

છેલ્લે, $\tan\theta = \dfrac{AB}{BC}$

$$\frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{AB}{BC}} = \frac{BC}{AB} = \cot\theta$$

આમ, $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$ અથવા $\tan\theta \,.\, \cot\theta = 1$

વળી $\cot\theta = \dfrac{1}{\sin\theta/\cos\theta} = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

એટલે કે $\cot\theta$ અને $\tan\theta$ એકબીજાના વ્યસ્ત છે.

આમ સમગ્ર રીતે જોઈએ તો,

cosec θ, sec θ અને cot θ એ અનુક્રમે sin θ, cos θ અને tan θ ના વ્યસ્ત છે.

આ રીતે આપણે નીચે મુજબ નવા પરિણામો મેળવ્યા

(i) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(ii) $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$

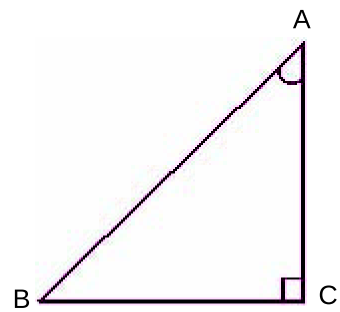
(iii) $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

(iv) $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

હવે વિવિધ ત્રિ-ગુણોત્તરોનું મૂલ્ય શોધવા ઉપરના પરિણામોનો સહારો લઈ શકીશું.

ઉદાહરણ 22.14 : જો $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ અને $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, હોય, તો cosec θ, sec θ અને tan θ નાં મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : આપણે શીખી ગયા છીએ કે,



આકૃતિ. 22.26

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{1} = \sqrt{3}$$

ઉદાહરણ 22.15 : ABC, માં C કાટખૂણો છે. tan A = 1 ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : ΔABC દોરીએ જેમાં $\angle C = 90^\circ$. કાટખૂણો હોય.

$\tan A = 1$ (પક્ષ)

$$\tan A = \frac{BC}{AC} = 1$$

$$BC = AC$$

ધારો કે $BC = AC = k$

હવે $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2}$

$$= \sqrt{k^2 + k^2}$$

$$= \sqrt{2}k$$

હવે $\cos B = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{k}{\sqrt{2}k}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો ૨૨.૪

1. જો $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ અને $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, હોય, તો $\cot\theta$ અને $\sec\theta$ નાં મૂલ્યો શોધો.

2. જો $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ અને $\tan\theta = \sqrt{3}$, હોય, તો $\cos^2\theta + \sin\theta\cot\theta$ નું મૂલ્ય શોધો.

3. ΔABC માં $\cos A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ હોય, તો $\sin B + \cos A \cos B$ નું મૂલ્ય શોધો.

4. જો $\operatorname{cosec} A = 2$ હોય, તો $\sin A$ અને $\tan A$ નાં મૂલ્યો શોધો.

5. ΔABC માં $\tan A = \sqrt{3}$, હોય, તો $\tan^2 B \sec^2 A - (\tan^2 A + \cot^2 B)$ શોધો.

22.5 નિત્યસમ

આપણે બીજગણિતમાં સમીકરણ વિશે શીખી ગયાં છીએ. જ્યારે બે પદાવલીઓ '=' (બરાબર)ની નિશાનીથી જોડાય છે, ત્યારે સમીકરણ બને છે. આ વિભાગમાં આપણે નિત્યસમની સંકલ્પનાનો મુદ્દો શીખીશું સમીકરણની જેમ જ જ્યારે બે પદાવલીઓ (=) બરાબરની નિશાનીથી જોડાય છે ત્યારે નિત્યસમ બને છે. તો પછી પ્રશ્ન ઉદ્ભવે કે સમીકરણ અને નિત્યસમ વચ્ચે તફાવત શું છે ?

બે વચ્ચેનો મુખ્ય તફાવત એ છે કે સમીકરણમાં રહેલા ચલની નિશ્ચિત કિંમત માટે જ તે સત્ય ઠરે છે, જ્યારે ચલની કોઈ પણ કિંમત માટે તે સ્તય ઠરે ત્યારે તે નિત્યસમ કહેવાય છે.

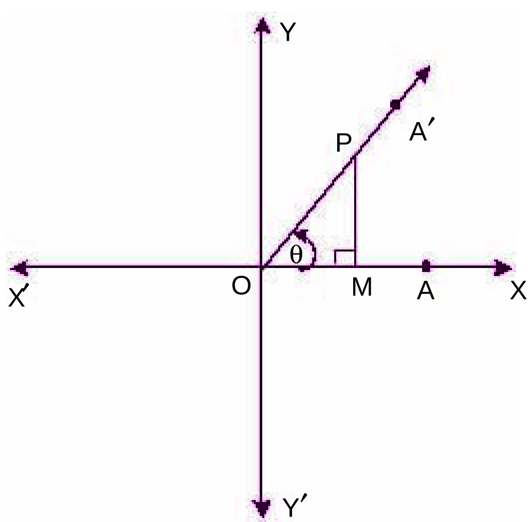
જેમ કે $x^2 - 2x + 1 = 0$ એ સમીકરણ છે કારણ કે $x = 1$ માટે જ તે સત્ય ઠરે છે. તે જ રીતે $x^2 - 5x + 6 = 0$ એ પણ સમીકરણ જ છે. કારણ કે $x = 2$ અને $x = 3$ માટે જ તે સત્ય ઠરે છે.

જો આપણે $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ એ સ્વરૂપમાં રજૂ કરીએ, તો રજૂઆત એ નિત્યસમ છે. કારણ કે $x = 2, x = 3$ માટે તો તે સત્ય છે જ સાથોસાથ $x = 0, x = 10$ જેવી કોઈ પણ કિંમત માટે તે સત્ય બને છે. હવે પછીના વિભાગમાં આપણે કેટલાક ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમ અંગે વિચારીશું.

22.9 ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમ

આપણે જાણીએ છીએ કે જ્યારે કિરણ તેના ઉદ્‌ભવ બિંદુએ ભ્રમણ કરે છે અને કોઈ નિશ્ચિત જગ્યાએ સ્થિર થાય છે ત્યારે કિરણના મૂળ સ્થાન અને અંતિમ સ્થાન વચ્ચે ખૂણો રચાય છે તમે જાણો છો કે બધા ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તર ખૂણા પર આધારિત છે ફરી નીચેની રીતે યાદ કરી લઈએ

આકૃતિ 22.27માં XOX′ અને YOY′ બે પરસ્પર લંબ હોય એવી ધરી (અક્ષ) છે. OX ઉપર કોઈ બિંદુ OA છે. આ સમતલમાં O કિરણ ઘડિયાળના કાંટા ફરવાની દિશાથી વિરુદ્ધ દિશામાં ભ્રમણ કરે છે અને કેટલાક સમય પછી OA′ સ્થાન પ્રાપ્ત કરે છે. ધારો કે $\angle A'OA = \theta$ કિરણ OA′ પર કોઈ બિંદુ P લો. P માંથી PM $\perp$ OX દોરો.



આકૃતિ. 22.27

કાટકોણ ΔPMO માં

$$\sin\theta = \frac{PM}{OP}$$

અને $$\cos\theta = \frac{OM}{OP}$$

બંનેનો વર્ગ કરીને ઉમેરતાં

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \left(\frac{PM}{OP}\right)^2 + \left(\frac{OM}{OP}\right)^2$$

$$= \frac{PM^2 + OM^2}{OP^2} = \frac{OP^2}{OP^2} \qquad = 1$$

$$\sin^2 q + \cos^2 q = 1 \qquad ...(1)$$

આપણે એ પણ જાણીએ છીએ કે

$$\sec^2 \theta = \frac{OP}{OM}$$

અને $\tan^2\theta = \frac{PM}{OM}$

બંનેનો વર્ગ કરીને બાદ કરતાં,

$$\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = \left(\frac{OP}{OM}\right)^2 - \left(\frac{PM}{OM}\right)^2$$

$$= \frac{OP^2 - PM^2}{OM^2}$$

$$= \frac{OM^2}{OM^2} \quad [OP^2 - PM^2 = OM^2]$$

$$= 1$$

$$\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1 \qquad ...(2)$$

એ જ રીતે, $\operatorname{cosec} \theta = \frac{OP}{PM}$

અને $\cot \theta = \frac{OM}{PM}$

બંનેનો વર્ગ કરીને બાદ કરતાં,

$$\operatorname{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta = \left(\frac{OP}{PM}\right)^2 - \left(\frac{OM}{PM}\right)^2$$

$$= \frac{OP^2 - OM^2}{PM^2} = \frac{PM^2}{PM^2} \qquad [OP^2 - OM^2 = PM^2]$$

$$= 1$$

$$\operatorname{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta = 1 \qquad ...(3)$$

નોંધ : *નિત્યસમ (1), (2) અને (3) ઉપર સમીકરણના પક્ષાંતરના નિયમો વાપરીને પરિણામો નીચે મુજબ પણ મેળવી શકાય.*

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ *અથવા* $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ *અથવા* $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$

$\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$ *અથવા* $\cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta - 1$

ઉપરના નિત્યસમોનો ઉપયોગ કરીને કેટલાક દાખલાઓનો ઉકેલ મેળવીશું.

ઉદાહરણ 22.16 : *સાબિત કરો કે*

$$\tan\theta + \cot\theta = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

ઉકેલ : *(ડા.બા. એટલે ડાબી બાજુ અને જ.બા. એટલે જમણી બાજુ)*

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} \qquad (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$

$$\tan\theta + \cot\theta =$$

$$\frac{2 + 2\cos A}{\sin A\,(1 + \cos A)}$$

ઉદાહરણ 22.17 : *સાબિત કરો કે*

$$\frac{\sin A}{1+\cos A} + \frac{1+\cos A}{\sin A} = 2\operatorname{cosec} A$$

ઉકેલ : *ડા.બા.* $= \dfrac{\sin A}{1+\cos A} + \dfrac{1+\cos A}{\sin A}$

$$= \frac{\sin^2 A + (1+\cos A)^2}{\sin A\,(1+\cos A)}$$

$$= \frac{\sin^2 A + 1 + \cos^2 A + 2\cos A}{\sin A\,(1+\cos A)}$$

$$= \frac{(\sin^2 A + \cos^2 A) + 1 + 2\cos A}{\sin A\,(1+\cos A)}$$

$$= \frac{1 + 1 + 2\cos A}{\sin A\,(1+\cos A)}$$

$$=$$

$=$

$=$

$= 2 \text{ cosec A}$

$=$ જ.બા.

$$\frac{\sin A}{1+\cos A}+\frac{1+\cos A}{\sin A} = 2 \text{ cosec A}$$

ઉદાહરણ 22.18 : સાબિત કરો કે

$$\frac{1-\sin A}{1+\sin A} = (\sec A - \tan A)^2$$

ઉકેલ : ડા.બા. $=$ જ.બા. સાબિત કરવાને બદલે અનુકૂળતા મુજબ જ.બા. $=$ ડા.બા. પણ સાબિત કરી શકાય. અહીં જ.બા.નું વિસ્તરણ કરીને ડા.બા. મેળવવાનું સરળ જણાય છે.

જ.બા. $=$

$$= \left(\frac{1}{\cos A}-\frac{\sin A}{\cos A}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1-\sin A}{\cos A}\right)^2$$

$$= \frac{(1-\sin A)^2}{\cos^2 A}$$

$$= \frac{(1-\sin A)^2}{1-\sin^2 A} \qquad (\because \cos^2 A = 1-\sin^2 A)$$

$$= \frac{(1-\sin A)^2}{(1-\sin A)(1+\sin A)}$$

$$= \frac{1-\sin A}{1+\sin A} \quad =$$ ડા.બા.

બીજી રીત

હવે ડા.બા.થી શરૂઆત કરીને પરિણામ મેળવીએ

ડા.બા. =

= ×

=

$$= \frac{(1-\sin A)^2}{\cos^2 A}$$

$$= \left(\frac{1-\sin A}{\cos A}\right)^2$$

$\frac{(1-\sin A)^2}{1+\sin A}$

$$= \left(\frac{1}{\cos A} - \frac{\sin A}{\cos A}\right)^2$$

$$= (\sec A - \tan A)^2$$

= જ.બા.

ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમનો ઉપયોગ કરી પ્રશ્નનો ઉકેલ મેળવવાની પદ્ધતિ

સોપાન 1 : ડા.બા. કે જ.બા. પસંદ કરો કે જ્યાંથી ગણતરી કરવાનું સરળ જણાતું હોય.

સોપાન 2: ડા.બા. (કે જ.બા.) પર વિવિધ નિત્યસમનો ઉપયોગ કરીને બીજી તરફના પરિણામ સુધી પહોંચો.

સોપાન 3: જો તમે એક બાજુથી શરૂ કરી બીજી બાજુ સુધી પહોંચી ન શકો, તો જ્યાંથી આગળ વધવાની સમજ ન પડે ત્યાં અટકી જાવ અને બીજી બાજુથી શરૂ કરીને અહીં સુધી પહોંચી જાવ. આમ ડા.બા.થી શરૂ કરીને કોઈ પરિણામ મેળવો પછી જ.બા.થી શરૂ કરીને આ પરિણામ સુધી પહોંચો તો પણ પરિણામ સાબિત કર્યું કહેવાય

સોપાન 4:

ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમો પર આધારિત કેટલાક વધુ ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 22.19 : સાબિત કરો કે

$$\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$$

ઉકેલ : ડા.બા. $=\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}$

$$=\frac{\sqrt{1-\sin\theta}}{\sqrt{1+\sin\theta}}\times\frac{\sqrt{1+\sin\theta}}{\sqrt{1+\sin\theta}}$$

$$=\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{(1+\sin\theta)}$$

$$=\frac{\sqrt{\cos^2\theta}}{1+\sin\theta}\qquad(\because 1-\sin^2\theta=\cos^2\theta)$$

$$=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$$ = જ.બા.

$$\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$$

ઉદાહરણ 22.20 : *સાબિત કરો કે*

$$\cos^4 A-\sin^4 A=\cos^2 A-\sin^2 A=1-2\sin^2 A$$

ઉકેલ : ડા.બા. $=\cos^4 A-\sin^4 A$

$$=(\cos^2 A)^2-(\sin^2 A)^2$$

$$=(\cos^2 A+\sin^2 A)(\cos^2 A-\sin^2 A)$$

$$=\cos^2 A-\sin^2 A\qquad(\because \cos^2 A+\sin^2 A=1)$$

= જ.બા.

હવે $\cos^2 A-\sin^2 A=(1-\sin^2 A)-\sin^2 A\quad(\ \cos^2 A=1-\sin^2 A)$

$$=1-2\sin^2 A$$

= જ.બા.

આમ, $\cos^4 A-\sin^4 A=\cos^2 A-\sin^2 A=1-2\sin^2 A$

ઉદાહરણ 22.21: *સાબિત કરો કે*

$$\sec A\,(1-\sin A)\,(\sec A+\tan A)=1$$

ઉકેલ : ડા.બા. $=\sec A\,(1-\sin A)\,(\sec A+\tan A)$

$=$

$$=\frac{(1-\sin A)(1+\sin A)}{\cos^2 A}$$

$=$

$$=\frac{\cos^2 A}{\cos^2 A}$$

$= 1$ = *જ.બા.*

આમ, $\sec A\,(1-\sin A)\,(\sec A+\tan A)=1$

22.22: *સાબિત કરો કે*

$$\frac{\tan\theta+\sec\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1}=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

$(\because 1=\sec^2\theta-\tan^2\theta)$

Wfu÷: *ડા.બા.* =

$=$

$$=\frac{(\tan\theta+\sec\theta)-(\sec\theta+\tan\theta)(\sec\theta-\tan\theta)}{\tan\theta-\sec\theta+1}$$

$=$

$=$

$=\tan\theta+\sec\theta$

=

= જ.બા.

હવે =

=

$$= \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta(1-\sin\theta)}$$

$$= \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

= જ.બા.

આમ, $\frac{\tan\theta+\sec\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

$$= \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

ઉદાહરણ 22.23 : જો $\cos\theta - \sin\theta =$ $\sin\theta$, તો સાબિત કરો કે $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$.

ઉકેલ : આપેલુ છે કે $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$

અથવા $\cos\theta = \sqrt{2}\sin\theta + \sin\theta$

અથવા $\cos\theta = (\sqrt{2}+1)\sin\theta$

અથવા $\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}+1} = \sin\theta$

અથવા $\sin\theta = \frac{\cos\theta}{\sqrt{2}+1} \times \frac{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)}$

અથવા $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}\cos\theta - \cos\theta}{2-1}$

અથવા $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\cos\theta$

$\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta.$

ઉદાહરણ 22.24: જો $\tan^4\theta + \tan^2\theta = 1$, then show that

$\cos^4\theta + \cos^2\theta = 1$

ઉકેલ: $\tan^4\theta + \tan^2\theta = 1$

$\therefore \quad \tan^2\theta(\tan^2\theta + 1) = 1$

$$\therefore \quad 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\tan^2\theta} = \cot^2\theta$$

$\therefore \quad \sec^2\theta = \cot^2\theta \qquad (\therefore\ 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta)$

$$\therefore \quad \frac{1}{\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$\therefore \quad \sin^2\theta = \cos^4\theta$

$\therefore \quad 1 - \cos^2\theta = \cos^4\theta \qquad (\therefore\ \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta)$

$\therefore \quad \cos^4\theta + \cos^2\theta = 1$

નીચેના નિત્યમસ સાબિત કરો.

1. $(\operatorname{cosec}^2\theta - 1)\sin^2\theta = \cos^2\theta$
2. $\sin^4 A + \sin^2 A\cos^2 A = \sin^2 A$
3. $\cos^2\theta(1 + \tan^2\theta) = 1$
4. $(1 + \tan^2\theta)\sin^2\theta = \tan^2\theta$
5. $\dfrac{\sin A}{1+\cos A} + \dfrac{\sin A}{1-\cos A} = 2\operatorname{cosec} A$
6. $\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{1-\cos A}} = \dfrac{1+\cos A}{\sin A}$

7. $\sqrt{\dfrac{\sec A - \tan A}{\sec A + \tan A}} = \dfrac{\cos A}{1+\sin A}$

8. $(\sin A - \cos A)^2 + 2 \sin A \cos A = 1$

9. $\cos^4\theta + \sin^4\theta - 2\sin^2\theta\cos^2\theta = (2\cos^2\theta - 1)^2$

10. $\dfrac{\sin A - \sin B}{\cos A + \cos B} + \dfrac{\cos A - \cos B}{\sin A + \sin B} = 0$

11. $(\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta)(\sec\theta - \cos\theta)(\tan\theta + \cos\theta) = 1$

12. $\sin A(1+\tan A) + \cos A(1+\cot A) = \sec A + \operatorname{cosec} A$

13.

14.

15. $\dfrac{\cot A + \operatorname{cosec} A - 1}{\cot A - \operatorname{cosec} A + 1} = \dfrac{1+\cos A}{\sin A}$

$= \dfrac{\sin A}{1-\cos A}$

16. જો $\sin^2\theta + \sin\theta = 1$, *તો સાબિત કરો કે*

$\cos^2\theta + \cos^4\theta = 1$

પ્રશ્ન 17 થી 20 માં આપેલા વિકલ્પોમાંથી સાચો વિકલ્પ પસંદ કરો.

17. $(\sin A + \cos A)^2 - 2\sin A\cos A =$............

(i) 0 (ii) 2 (iii) 1 (iv) $\sin^2 A - \cos^2 A$

18. $\sin^4 A - \cos^4 A =$ ....

(i) 1 (ii) $\sin^2 A - \cos^2 A$ (iii) 0 (iv) $\tan^2 A$

19. $\sin^2 A - \sec^2 A + \cos^2 A + \tan^2 A =$ ....

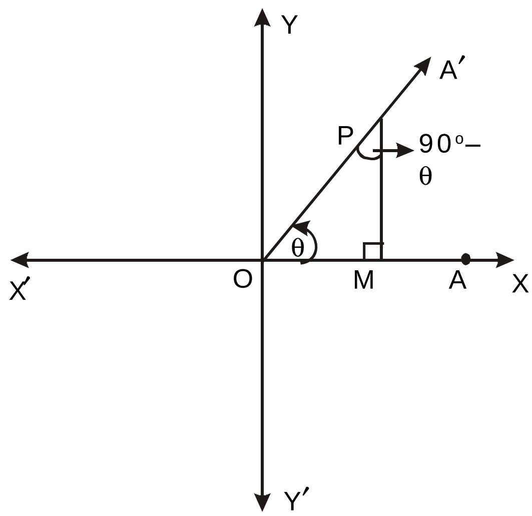
(i) 0 (ii) 1 (iii) $\sin^2 A$ (iv) $\cos^2 A$

20. $(\sec A - \tan A)(\sec A + \tan A) - (\operatorname{cosec} A - \cot A)(\operatorname{cosec} A + \cot A) =$ ....

(i) 2 (ii) 1 (iii) 0 (iv)

22.10

ભૂમિતીમાં આપણે કોટિકોણ અને પૂરકકોણ વિશે શીખી ગયા છીએ. જે બે ખૂણાનો સરવાળો 90^0 થાય તે બંને એકબીજાના કોટિકોણ કહેવાય છે. જો ખૂણા A અને B નો સરવાળો 90^0 હોય, તો $\angle A$ અને $\angle B$ એકબીજાના કોટિકોણ છે. એજ રીતે 20^0 અને 70^0 ના ખૂણા એકબીજાના કોટિકોણ છે.



આકૃતિ. 22.28

ધારો કે XOX^1 અને YOY^1 લંબ યમાક્ષો છે. A અને OX પરનું કોઈ એક બિંદુ છે. OA કિરણ ઘડિયાળના કાંટાની વિરુદ્ધ દિશામાં ફરીને OA^1 સ્થિતિએ પહોંચે છે OA અને OA^1 વડે રચાતો ખૂણો Q છે. ધારો કે $\angle POM = Q$. $PM \perp OX$ દોરો તેથી ΔPMO કાટકોણ Δ થશે.

$\therefore \quad \angle POM + \angle OPM + \angle PMO = 180^o$

$\therefore \quad \angle POM + \angle OPM + 90^o = 180^o$

$\therefore \quad \angle POM + \angle OPM = 90^o$

$\therefore \quad \angle OPM = 90^o - \angle POM = 90^o - Q$

આ રીતે $\angle OPM$ અને $\angle POM$ કોટકોણની જોડ છે. એ કાટકોણ PMO માં

$$\sin\theta = \frac{PM}{OP}, \cos\theta = \frac{OM}{OP} \text{ અને } \tan\theta = \frac{PM}{OM}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{OP}{PM}, \sec\theta = \frac{OP}{OM} \text{ અને } \cot\theta = \frac{OM}{PM}$$

કાટકોણ $\angle OPM$ માં $\angle OPM = 90^0\text{-}Q$

$$\sin(90^o - \theta) = \frac{OM}{OP} = \cos\theta$$

$$\cos(90^o - \theta) = \frac{PM}{OP} = \sin\theta$$

$$\tan(90^o - \theta) = \frac{OM}{PM} = \cot\theta$$

$$\cot(90^\circ - \theta) = \frac{PM}{OM} = \tan\theta$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \frac{OP}{OM} = \sec\theta$$

અને $$\sec(90^\circ - \theta) = \frac{OP}{PM} = \operatorname{cosec}\theta$$

ઉપરના છ પરિણામો કોટિકોણના ત્રિ-કોટિકોણના ત્રિ-ગુણોત્તરો તરીકે ઓળખાય છે.

દાખલા તરીકે,

$\sin(90^\circ - 20^\circ) = \cos 20^\circ$ *એટલે કે* $\sin 70^\circ = \cos 20^\circ$

$\tan(90^\circ - 40^\circ) = \cot 40^\circ$ *એટલે કે* $\tan 50^\circ = \cot 40^\circ$ and so on.

ઉપરના પરિણામોને આત્મસાત કરવા કેટલાક ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 22.25: *સાબિત કરો કે* $\tan 13^\circ = \cot 77^\circ$

ઉકેલ: *જ.બા.* $= \cot 77^\circ$

$= \cot(90^\circ - 13^\circ)$

$= \tan 13^\circ$ ....[$\because \cot(90^\circ - \theta) = \tan\theta$]

$=$ *ડા.બા.*

માટે, $\tan 13^\circ = \cot 77^\circ$

ઉદાહરણ 22.26: $\sin^2 40^\circ - \cos^2 50^\circ$ *ની કિંમત શોધો.*

ઉકેલ: $\cos 50^\circ = \cos(90^\circ - 40^\circ)$

$= \sin 40^\circ$ ....[$\cos(90^\circ - \theta) = \tan\theta$]

$\therefore \quad \sin^2 40^\circ - \cos^2 50^\circ = \sin^2 40^\circ - \sin^2 40^\circ = 0$

ઉદાહરણ 22.27: *ની કિંમત શોધો.*

ઉકેલ: $\sin 49^\circ = \sin(90^\circ - 41^\circ) = \cos 41^\circ$ ...[$\because \sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$]

અને $\operatorname{cosec} 53^\circ = \operatorname{cosec}(90^\circ - 37^\circ) = \sec 37^\circ$ ...[$\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec\theta$]

$$\therefore \quad = \frac{\cos 41^\circ}{\cos 41^\circ} + \frac{\sec 37^\circ}{\sec 37^\circ} = 1 + 1 = 2$$

ઉદાહરણ 22.28: *સાબિત કરો.*

$3 \sin 17^o \sec 73^o + 2 \tan 20^o \tan 70^o = 5$

ઉકેલ: $3 \sin 17^o \sec 73^o + 2 \tan 20^o \tan 70^o$

$= 3 \sin 17^o \sec (90^o - 17^o) + 2 \tan 20^o \tan (90^o - 20^o)$

$= 3 \sin 17^o \operatorname{cosec} 17^o + 2 \tan 20^o \cot 20^o$

...[$\because$ $\sec (90^o - q) = \operatorname{cosec} q$ and $\tan (90^o - q) = \cot q$]

=

$= 3 + 2 = 5$

ઉદાહરણ 22.29: *સાબિત કરો કો* $\tan 7^o \tan 23^o \tan 67^o \tan 83^o = 1$

ઉકેલ: $\tan 67^o = \tan (90^o - 23^o) = \cot 23^o$

and $\tan 83^o = \tan (90^o - 7^o) = \cot 7^o$

હવે, ડા.બા. $= \tan 7^o \tan 23^o \tan 67^o \tan 83^o$

$= \tan 7^o \tan 23^o \cot 23^o \cot 7^o$

$3 \sin 17^o \cdot \frac{1}{\sin 17^o} + 2 \tan 20^o \cdot \frac{1}{\tan 20^o}$

$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\left(\frac{A}{2}\right)$

$= (\tan 7^o \cot 7^o) (\tan 23^o \cot 23^o)$

$= 1 \,.1 = 1$

= *જ.બા.*

$\tan 7^o \tan 23^o \tan 67^o \tan 83^o = 1$

ઉદાહરણ 22.30: *જો* $\tan A = \cot B$, *હોય તો* $A + B = 90^o$.

ઉકેલ: *સાબિત કરો કે*

$\tan A = \cot B$ *(પક્ષ)*

$\therefore$ $\tan A = \tan (90^o - B)$ ... [$\because$ $\cot q = \tan (90^o - q)$]

$\therefore$ $A = 90^o - B$

$\therefore$ $A + B = 90^o$

ઉદાહરણ 22.31: ΔABC *ના અંદરના* A, B, C *માટે સાબિત કરો કે* .

ઉકેલ: *આપણે જાણીએ છીએ કે ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણાનો સરવાળો* 180^0 *થાય છે.*

$\therefore \quad A + B + C = 180^o$

$\therefore \quad B + C = 180^o - A$

$\therefore \quad \dfrac{B+C}{2} = 90^o - \dfrac{A}{2}$

$\therefore$

$\therefore \quad \sin\left(\dfrac{B+C}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{A}{2}\right)$

ઉદાહરણ 22.32: *સાબિત કરો કે* $\dfrac{\cos\theta}{\sin(90^\circ - \theta)} + \dfrac{\sin\theta}{\cos(90^\circ - \theta)} = 2$.

ઉકેલ: =*ડા.બા.* $\dfrac{\cos\theta}{\sin(90^\circ - \theta)} + \dfrac{\sin\theta}{\cos(90^\circ - \theta)}$

$= \dfrac{\cos\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\sin\theta}{\sin\theta}$ ... [$\because$ $\sin(90^o - \theta) = \cos q$ અને $\cos(90^o - \theta) = \sin\theta$]

$= 1 + 1 = 2$

= *જ.બા.*

ઉદાહરણ 22.33: *સાબિત કરો કે*

ઉકેલ: *જ.બા.* = $\dfrac{\sin(90^\circ - \theta)}{\mathrm{cosec}(90^\circ - \theta)} + \dfrac{\cos(90^\circ - \theta)}{\sec(90^\circ - \theta)}$

$= \dfrac{\cos\theta}{\sec\theta} + \dfrac{\sin\theta}{\mathrm{cosec}\,\theta}$ ...[$\because$ $\sin(90^o - \theta) = \cos q$, $\cos(90^o - \theta) = \sin\theta$,

$\mathrm{cosec}(90^o - \theta) = \sec q$ and $\sec(90^o - \theta) = \mathrm{cosec}\,\theta$]

$= \qquad\qquad = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

= *ડા.બા.*

જેથી, $\dfrac{\sin(90^\circ - \theta)}{\mathrm{cosec}(90^\circ - \theta)} + \dfrac{\cos(90^\circ - \theta)}{\sec(90^\circ - \theta)} = 1$

ઉદાહરણ 22.34: *સાદુરૂપ આપો:*

$$\frac{\cos\left(90^\circ - \theta\right)\sec\left(90^\circ - \theta\right)\tan\theta}{\operatorname{cosec}\left(90^\circ - \theta\right)\sin\left(90^\circ - \theta\right)\cot\left(90^\circ - \theta\right)} + \frac{\tan\left(90^\circ - \theta\right)}{\cot\theta}$$

ઉકેલ: *પદાવલી* $= \dfrac{\cos\left(90^\circ - \theta\right)\sec\left(90^\circ - \theta\right)\tan\theta}{\operatorname{cosec}\left(90^\circ - \theta\right)\sin\left(90^\circ - \theta\right)\cot\left(90^\circ - \theta\right)} + \dfrac{\tan\left(90^\circ - \theta\right)}{\cot\theta}$

(વ્યાખ્યા મુજબ કિંમત મૂકતાં)

$= \dfrac{\sin\theta in\theta.co\ \theta.\tan\theta}{\sec\theta ec\theta.cotan\theta} + \dfrac{\cot\theta}{\cot\theta}$ ...[$\because \sin\theta \,.\, \cos\theta = 1$ and $\sec\theta \,.\, \cos\theta = 1$]

$= 1 + 1$

$= 2$

ઉદાહરણ 22.35: $\tan 68^\circ + \sec 68^\circ$ *ને એવા સ્વરૂપમાં દર્શાવો કે જેના ખૂણા* 0^0 *થી* 45^0 *વચ્ચેના હોય.*

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે,

$\because$

$\tan(90^\circ - q) = \cot q$

અને $\sec(90^\circ - q) = \operatorname{cosec} q$

$\therefore$ $\tan 68^\circ = \tan(90^\circ - 22^\circ) = \cot 22^\circ$

અને $\sec 68^\circ = \sec(90^\circ - 22^\circ) = \operatorname{cosec} 22^\circ$

$\therefore$ $68^\circ + \sec 68^\circ = \cot 22^\circ + \operatorname{cosec} 22^\circ$.

નોંધ : *જ્યારે કોટિકોણના ત્રિ-ગુણોત્તરનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે ત્યારે જે ખૂણો 450 થી મોટો હોય તેના માટે જ તેના કોટિકોણનો અનુરૂપ ગુણોત્તર લખાતો હોય છે.*

ઉદાહરણ 22.36: *જો* $\tan 2A = \cot(A - 18^\circ)$ *જ્યાં 2A લઘુકોણ છે. A ની કિંમત શોધો.*

ઉકેલ: $\tan 2A = \cot(A - 18^\circ)$

$\therefore$ $\cot(90^\circ - 2A) = \cot(A - 18^\circ)$ ...[$\cot(90^\circ - 2A = \tan 2A]$

$\therefore$ $90^\circ - 2A = A - 18^\circ$

$\therefore$ $3A = 90^\circ + 18^\circ$

$\therefore \quad 3A = 108^\circ$

$\therefore \quad A = 36^\circ$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 22.6

1. બતાવો કે :

   (i) $\cos 55^\circ = \sin 35^\circ$

   (ii) $\sin^2 11^\circ - \cos^2 79^\circ = 0$

   (iii) $\cos^2 51^\circ - \sin^2 39^\circ = 0$

2. નીચેનાની કિંમત શોધો :

   (i) (ii) $\dfrac{\tan 65^\circ}{2\cot 25^\circ}$ (iii) $\dfrac{\cos 89^\circ}{3\sin 1^\circ}$

   (iv) $\cos 48^\circ - \sin 42^\circ$ (v) $\dfrac{3\sin 5^\circ}{\cos 85^\circ} + \dfrac{2\tan 33^\circ}{\cot 57^\circ}$

   (vi) $\dfrac{\cot 54^\circ}{\tan 36^\circ} + \dfrac{\tan 20^\circ}{\cot 70^\circ} - 2$

   (vii) $\sec 41^\circ \sin 49^\circ + \cos 49^\circ \operatorname{cosec} 41^\circ$

   (viii) $\dfrac{\cos 75^\circ}{\sin 15^\circ} + \dfrac{\sin 12^\circ}{\cos 78^\circ} - \dfrac{\cos 18^\circ}{\sin 72^\circ}$

3. નીચેનાની કિંમત શોધો.

   (i) $\left(\dfrac{\sin 47^\circ}{\cos 43^\circ}\right)^2 + \left(\dfrac{\cos 43^\circ}{\sin 47^\circ}\right)^2$

   (ii) $\dfrac{\cos^2 20^\circ + \cos^2 70^\circ}{3\left(\sin^2 59^\circ + \sin^2 31^\circ\right)}$

4. સાબિત કરો :

   (i) $\sin\theta \cos(90^\circ - \theta) + \cos\theta \sin(90^\circ - \theta) = 1$

   (ii) $\cos\theta \cos(90^\circ - \theta) - \sin\theta \sin(90^\circ - \theta) = 0$

(iii) $\frac{\cos(90^\circ-\theta)}{1+\sin(90^\circ-\theta)}+\frac{1+\sin(90^\circ-\theta)}{\cos(90^\circ-\theta)}=2\operatorname{cosec}\theta$

(iv) $\sin(90^\circ-\theta).\cos(90^\circ-\theta)=\frac{\tan(90^\circ-\theta)}{1+\tan^2(90^\circ-\theta)}$

(v) $\tan 45^\circ \tan 13^\circ \tan 77^\circ \tan 85^\circ = 1$

(vi) $2 \tan 15^\circ \tan 25^\circ \tan 65^\circ \tan 75^\circ = 2$

(vii) $\sin 20^\circ \sin 70^\circ - \cos 20^\circ \cos 70^\circ = 0$

5. સાબિત કરો કે $\sin(50^\circ+\theta)-\cos(40^\circ-\theta)=0$

6. A અને B લઘુકોણ છે. જો $\sin A = \cos B$ હોય, તો સાબિત કરો કે $A + B = 90^\circ$.

7. ΔABC માં સાબિત કરો કે

(i) $\tan\left(\frac{B+C}{2}\right)=\cot\left(\frac{A}{2}\right)$

(ii) $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)=\sin\left(\frac{C}{2}\right)$

8. $\tan 59^\circ + \operatorname{cosec} 85^\circ$ નું એવા ત્રિ-ગુણોત્તર રૂપમાં રૂપાંતર કરો કે જેના ખૂણાઓનું માપ 0^0 અને 45^0 વચ્ચે હોય.

9. $\sec 46^\circ - \cos 87^\circ$ નું એવા ત્રિ-ગુણોત્તર રૂપમાં રૂપાંતર કરો કે જેના ખૂણાઓનું માપ 0^0 અને 45^0 વચ્ચે હોય.

10. $\sec^2 62^\circ + \sec^2 69^\circ$ નું એવા ત્રિ-ગુણોત્તર રૂપમાં રૂપાંતર કરો કે જેના ખૂણાઓનું માપ 0^0 અને 45^0 વચ્ચે હોય.

પ્રશ્ન 11 અને 12 માં આપેલા વિકલ્પોમાંથી જવાબનો સાચો વિકલ્પ પસંદ કરો.

11. $\frac{\sin 40^\circ}{2\cos 50^\circ}-\frac{2\sec 41^\circ}{3\operatorname{cosec}49^\circ}$ ની કિંમત .... છે.

(i) -1 (ii) $\frac{1}{6}$ (iii) $-\frac{1}{6}$ (iv) 1

12. જો $\sin(\theta+36^\circ)=\cos\theta$, જ્યાં $\theta+36^\circ$ એ લઘુકોણ છે, તો $\theta =$..........

(i) 54° (ii) 18° (iii) 21° (iv) 27°

સારાંશ

- *કાટકોણ ત્રિકોણમાં ત્રિ-ગુણોત્તર મૂલ્યો નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરેલા છે.*

$$\sin\,\theta = \frac{\theta \text{ ખૂણાની સામેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}} = \frac{AB}{AC}$$

- *જુદા-જુદા ત્રી-ગુણોત્તરો વચ્ચેનો સંબંધ નીચે મુજબ છે.*

(i) $\tan q =$ (ii) $\cot q = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

(iii) $\sec q = \dfrac{1}{\cos\theta}$ (iv) $\operatorname{cosec} q = \dfrac{1}{\sin\theta}$

(v) $\cot q = \dfrac{1}{\tan\theta}$

- *ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમ નીચે મુજબ છે.*

(i) $\sin^2 q + \cos^2 q = 1$

(ii) $\sec^2 q - \tan^2 q = 1$

(iii) $\operatorname{cosec}^2 q - \cot^2 q = 1$

- જે બે ખૂણાના માપનો સરવાળો 900 હોય, તે ખૂણાઓ એકબીજાના કોટીકોણ કહેવાય છે.
- $\sin(90^\circ - A) = \cos A$, $\cos(90^\circ - A) = \sin A$ અને $\tan(90^\circ - A) = \cot A$.
- $\operatorname{cosec}(90^\circ - A) = \sec A$, $\sec(90^\circ - A) = \operatorname{cosec} A$ અને $\cot(90^\circ - A) = \tan A$

અનુમોદિત વેબસાઈટ

- http://www.wikipedia.org
- http://mathworld:wolfram.com

સત્રાંત સ્વાધ્યાય

1. જો $\sin A = \frac{4}{5}$, હોય, તો $\cos A$ અને $\tan A$ ની કિંમત શોધો.

2. જો $\tan A = \frac{20}{21}$, હોય, તો $\operatorname{cosec} A$ અને $\sec A$ ની કિંમત શોધો.

$\frac{5}{4}$

3. જો $\cot\theta = \frac{3}{4}$, હોય, તો $\sin\theta + \cos\theta$ ની કિંમત શોધો.

4. જો $\tan \sec\theta = \frac{m}{n}$, હોય, તો $\sin\theta$ અને $\tan\theta$ ની કિંમત શોધો.

5. જો $\cos\theta = \frac{3}{5}$, હોય, તો $\frac{\sin\theta\tan\theta - 1}{2\tan^2\theta}$ ની કિંમત શોધો.

6. જો $\sec\theta =$, હોય, તો $\frac{\tan\theta}{1+\tan\theta}$ ની કિંમત શોધો.

7. જો $\tan A = 1$ અને $\tan B = \sqrt{3}$ હોય, તો $\cos A\cos B - \sin A\sin B$ ની કિંમત શોધો.

   પ્રશ્ન 8 થી 20 માં નિત્યસમ સાબિત કરો.

8. $(\sec\theta + \tan\theta)(1 - \sin\theta) = \cos\theta$.

9. $\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = \frac{\operatorname{cosec}\theta}{\sec\theta}$

10. $\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = (\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)^2$

11.

12.

13.

14. $\sqrt{\dfrac{\operatorname{cosec} A+1}{\operatorname{cosec} A-1}}=\dfrac{\cos A}{1-\sin A}$

15. $\sin^3 A-\cos^3 A=(\sin A-\cos A)\,(1+\sin A\cos A)$

16. $\dfrac{\cos A}{1-\tan A}+\dfrac{\sin A}{1-\cot A}=\cos A+\sin A$

17.

18. $(\operatorname{cosec} A-\sin A)(\sec A-\cos A)=\dfrac{1}{\tan A+\cot A}$

19. $(1+\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta)\,(1+\tan\theta+\sec\theta)=2$

20. $2(\sin^6\theta+\cos^6\theta)-3(\sin^4\theta+\cos^4\theta)+1=0$

21. જો $\sec\theta+\tan\theta=p$, તો સાબિત કરો કે $\sin\theta=\dfrac{p^2-1}{p^2+1}$

22. સાબિત કરો કે $\dfrac{\cos(90^\circ-A)}{1+\sin(90^\circ-A)}+\dfrac{1+\sin(90^\circ-A)}{\cos(90^\circ-A)}=2\sec(90^\circ-A)$

23. સાબિત કરો કે $\dfrac{\sin(90^\circ-A)\cos(90^\circ-A)}{\tan A}=\sin^2(90^\circ-A)$

24. જો $\tan q=\dfrac{3}{4}$ અને $\theta+a=90^\circ$, હોય, તો $\cot a$ ની કિંમત શોધો.

25. જો $\cos(2\theta+54^\circ)=\sin\theta$ અને $(2\theta+54^\circ)$ હોય, તો θ ની કિંમત શોધો.

26. જો $\sec Q=\operatorname{cosec} P$ અને P તથા Q લઘુકોણ હોય, તો સાબિત કરો કે $P+Q=90^\circ$.

તમારી પ્રગતિ ચકાસોના જવાબ

22.1

1. (i) $\sin\theta = \frac{5}{13}, \cos\theta = \frac{12}{13}, \tan\theta = \frac{5}{12}$

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{13}{5}, \sec\theta = \frac{13}{12}$ અને $\cot\theta = \frac{12}{5}$

(ii) $\sin\theta = \frac{3}{5}, \cos\theta = \frac{4}{5}, \tan\theta = \frac{3}{4}$

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{5}{3}, \sec\theta = \frac{5}{4}$ અને $\cot\theta = \frac{4}{3}$

(iii) $\sin\theta = \frac{24}{25}, \cos\theta = \frac{7}{25}, \tan\theta = \frac{24}{7}$

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{25}{24}, \sec\theta = \frac{25}{7}$ અને $\cot\theta = \frac{7}{24}$

(iv) $\sin\theta = \frac{4}{5}, \cos\theta = \frac{3}{5}, \tan\theta = \frac{4}{3}$

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{5}{4}, \sec\theta = \frac{5}{3}$ અને $\cot\theta = \frac{3}{4}$

2. $\sin A = \frac{5}{\sqrt{41}}, \cos A = \frac{4}{\sqrt{41}}$ અને $\tan A = \frac{5}{4}$

3. $\sin C = \frac{40}{41}, \cot C = \frac{9}{40}, \cos A = \frac{40}{41}$ અને $\cot A = \frac{40}{9}$

4. $\sec C = \sqrt{2}, \operatorname{cosec} C = \sqrt{2}$ અને $\cot C = 1$

5. (iv)

6. (ii)

22.2

1. $\sin C = \frac{3}{5}, \cos C = \frac{4}{5}$ અને $\tan C = \frac{3}{4}$

2. $\sin A = \frac{24}{25}, \operatorname{cosec} A = \frac{25}{24}$ અને $\cot A = \frac{7}{24}$

3. $\sec P = \sqrt{2}, \cot P = 1,$ અને $\operatorname{cosec} P = \sqrt{2}$

4. $\tan R = \sqrt{3}, \operatorname{cosec} R = \frac{2}{\sqrt{3}}, \sin P = \frac{1}{2}$ અને $\sec P = \frac{2}{\sqrt{3}}$

૫. $\cot \theta = \frac{24}{7}, \sin \theta = \frac{7}{25}, \sec \theta = \frac{25}{24},$ અને $\tan \theta = \frac{7}{24}$

6. $\sin P = \frac{2\sqrt{6}}{7}, \cos P = \frac{5}{7}, \sin R = \frac{5}{7}$ અને $\cos R = \frac{2\sqrt{6}}{7}, \sin P - \cos R = 0$

7. (iii)

22.3

1. $\cos \theta = \frac{21}{29}$ અને $\tan \theta = \frac{20}{21}$

2. $\sin \theta = \frac{24}{25}$ અને $\cos \theta = \frac{7}{25}$

3. $\sin \theta = \frac{24}{25}$ અને $\tan \theta = \frac{24}{7}$

4. $\cot \theta = \frac{m}{\sqrt{n^2 - m^2}}$ અને $\operatorname{cosec} \theta = \frac{n}{\sqrt{n^2 - m^2}}$

5. $-\frac{256}{135}$

6. $\frac{27}{8}$

7. $\sin B = \frac{2}{\sqrt{13}}$ અને $\tan B = \frac{2}{3}$

11. (ii)

22.4

1. $\cot\theta = \sqrt{3}$ અને $\sec\theta = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

2. $\dfrac{3}{4}$

3. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4. $\sin A = \dfrac{1}{2}$ અને $\tan A = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

5. $-\dfrac{14}{3}$

22.5

17. (iii)

18. (ii)

19. (i)

20. (iii)

22.6

1. (i) 3 (ii) $\dfrac{1}{2}$ (iii) $\dfrac{1}{3}$ (iv) 0

   (v) 5 (vi) 0 (vii) 2 (viii) 1

3. (i) 2 (ii) $\dfrac{1}{3}$

8. $\cot 31^\circ + \sec 5^\circ$

9. $\operatorname{cosec} 44^\circ - \sin 3^\circ$

10. $\operatorname{cosec}^2 28^\circ + \operatorname{cosec}^2 21^\circ$

11. (ii)

12. (iv)

સત્રાંત સ્વાધ્યાયના જવાબો

1. $\cos A = \frac{3}{5}$ અને $\tan A = \frac{4}{3}$

2. $\operatorname{cosec} A = \frac{29}{20}$ અને $\sec A = \frac{29}{21}$

3. $\frac{7}{5}$

4. $\sin\theta = \frac{\sqrt{m^2 - n^2}}{m}$ અને $\tan\theta = \frac{\sqrt{m^2 - n^2}}{n}$

5. $\frac{3}{160}$

6. $\frac{3}{7}$

7. $\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

24. $\frac{3}{4}$

25. 12°

23

કેટલાક વિશિષ્ટ ખૂણાઓ માટેના ત્રિ-ગુણોત્તરો

કેટલાક વિશિષ્ટ ખૂણાઓ માટેના ત્રિ-ગુણોત્તરો

છેલ્લા પાઠમાં (પ્રકરણમાં) આપણે કાટકોણ ત્રિકોણના લઘુકોણ માટેના ત્રિ-ગુણોત્તરો વ્યાખ્યાયિત કર્યા એ તેમની વચ્ચેના સબંધો પ્રસ્થાપિત કર્યા. આ પાઠમાં આપણે ભૂમિતિના નિયમોનો ઉપયોગ કરીને $30^\circ, 40^\circ, 45^\circ$ *અને* 60° *ના ખૂણાના ત્રિ-ગુણોત્તર મેળવીશુ* 0° *અને* 90° *ના ત્રિગુણોત્તર પણ મેળવીશું* 0° *અને* 90° *ના કેટલાક ત્રિ-ગુણત્તર વ્યાખ્યીયિત થઈ શકતા નથી તેની જાણકારી મેળવીશું પદાર્થની ઊંચાઈ અને બે પદાર્થો વચ્ચેના અંતરના લગતા કૂટ પ્રશ્નો પણ ત્રિ-ગુણોત્તરની મદદથી ઉકેલીશું*

હેતુઓ

...ા પછી અધ્યેતા :

- $30^\circ, 40^\circ, 45^\circ$ *અને* 60° *ના ખૂણાઓ માટેના ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તર મેળવી શકશે.*
- 0° *અને* 90° *ના ખૂણાઓ માટેના ક્યા ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તર વ્યાખ્યાયિત કરી શકાયા નથી .*
- 0° *અને* 90° *ના ખૂણાઓ માટેના ક્યા ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો વ્યાખ્યિત કરી શકાયા નથી તે કહી શકાશે .*
- *રોજબરોજ ઊંચાઈ અને અંતરને લગતા કૂટ પ્રશ્નો ઉકેલી શકશે.*

અપેક્ષિત પૂર્વજ્ઞાન :

પાયથા ગોરસ પ્રમેય એટલે કે B આગળ કાયકોણ હોય , એવા કાટકોણ $\angle$ ABC *માટે*

$AC^2 = AB^2 + BC^2$.

$$\sin C = \frac{\angle C \text{ ની સામેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}},$$

,

અને

Ë = , sec C $= \dfrac{1}{\cos C}$ અને cot C $= \dfrac{1}{\tan C}$

· sin (90° – q) = cos q, cos (90° – q) = sin q

tan (90° – q) = cot q, cot (90° – q) = tan q

· sec (90° – q) = cosec q and cosec (90° – q) = sec q

23.1 45° ના ખૂણા માટેના ત્રિ-ગુણોત્તરો

ધારોકે OA કિરણ 0 થી શરૂ કરીને ઘડિયાયાળના કાંટાની ફરવાની દિશાથી વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરે છે અને Ox અક્ષ સાથે 45° નો ખૂણો બનાવે છે. (આકૃતિ 23.4)

OA પર કોઈ બિંદુ P લો

PM ⊥ OX. દોરો

$\angle POM + \angle OPM + \angle PMO = 180$

$45^\circ + \angle OPM + 90^\circ = 180^\circ$

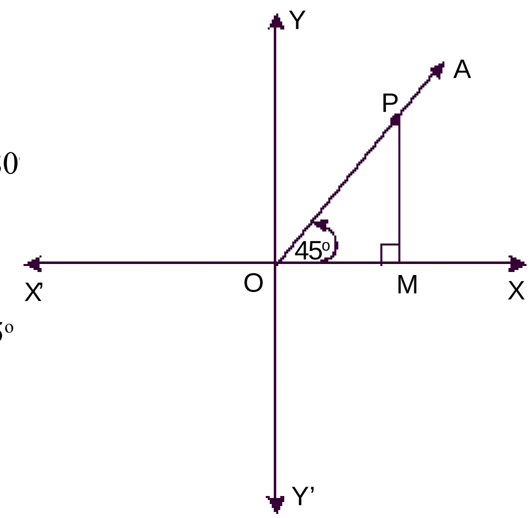
$\angle OPM = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

∴ ΔPMO, $\angle \angle OPM = \angle POM = 45^\circ$

∴ OM = PM

ધારોકે OM = a એકમ છે

કાટકોણ ΔPMO, માં



આકૃતિ. 23.1

$OP^2 = OM^2 + PM^2$ (પાયથાગોરસ પ્રમેય)

$= a^2 + a^2$

$= 2a^2$

∴ OP = $\sqrt{2}\,a$ એકમ

હવે $45^\circ = \dfrac{PM}{OP} = \dfrac{a}{\sqrt{2}a} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos 45^\circ = \dfrac{OM}{OP} = \dfrac{a}{\sqrt{2}a} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\tan 45^o = \frac{PM}{OM} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\operatorname{cosec} 45^o = \frac{1}{\sin 45^o} = \frac{1}{1/\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\sec 45^o = \frac{1}{\cos 45^o} = \frac{1}{1/\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

અને $$\cot 45^o = \frac{1}{\tan 45^o} = \frac{1}{1} = 1$$

23.2 30^O ના ખૂણા માટેના ત્રિ-ગુણોત્તરો

'ધારોકે OA કિરણ 0 થી શરૂ કરીને ઘડિયાયાળના કાંટાની ફરવાની દિશાથી વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરે છે અને Ox અક્ષ સાથે 45^o નો ખૂણો બનાવે છે. (આકૃત્તિ 23.2)

OA પર કોઈ બિંદુ Ox લો $PM \perp OX$ દોરો અને (

રીતે લંબાવો કે જેથી P થાય $PM = P'M$ જોડો

અને ΔPMO અને $DP'MO$, માં

$OM = OM$ ...(સામાન્ય)

$\angle PMO = \angle P'MO = 90^o$

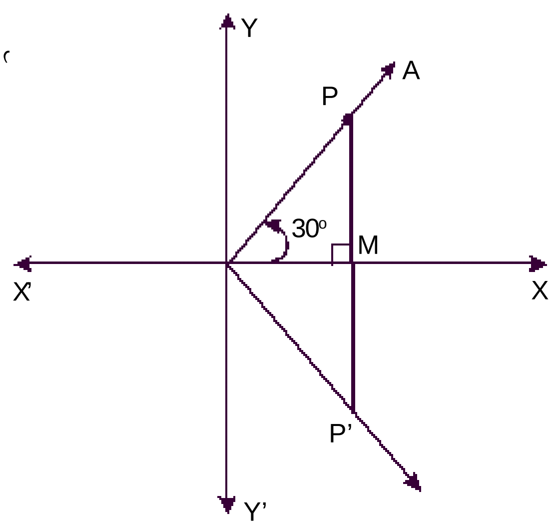
અને $PM = P'M$ ...(રચના)

$\Delta PMO \cong DP'MO$

$\angle OPM = \angle OP'M = 60^o$

OPP' સમબાજુ ત્રિકોણ

$OP = OP'$



આકૃત્તિ. 23.2

ધારોકે $PM = a$ એકમ

$PP' = PM + MP'$

$= (a + a)$ એકમ ...($\because MP' = MP$)

$= 2a$ એકમ

$OP = OP' = PP' = 2a$ એકમ

હવે કાટકોણ PMO, માં

$OP^2 = PM^2 + OM^2$ ...(પાયથાગોરસ પ્રમેય)

$(2a)^2 = a^2 + OM^2$

$OM^2 = 3a^2$

OM = a એકમ

$$\sin 30^o = \frac{PM}{OP} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^o = \frac{OM}{OP} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^o = \frac{PM}{OM} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{cosec } 30^o = \frac{1}{\sin 30^o} = \frac{1}{1/2} = 2$$

$$\sec 30^o = \frac{1}{\cos 30^o} = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

and $$\cot 30^o = \frac{1}{\tan 30^o} = \frac{1}{1/\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

23.3 60^O ના ખૂણા માટેના ત્રિ-ગુણોત્તરો

ધારોકે OA કિરણ OX થી શરૂ કરીને ઘડિયાળના કાંટાની ફરવાની દિશાથી વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરે છે અને અક્ષ સાથે 60^o નો ખૂણો બનાવે છે. (આકૃતિ 23.2)

OA પર કોઈ બિંદુ P લો PM ⊥ OX દોરો કિરણ OX પર M′ થાય બિંદુ એવું મેળવો કે જેથી

OM = MM′ PM′ જોડો

OM = a એકમ

એકમPMO અને DPMM′,

PM = PM ...(સામાન્ય)

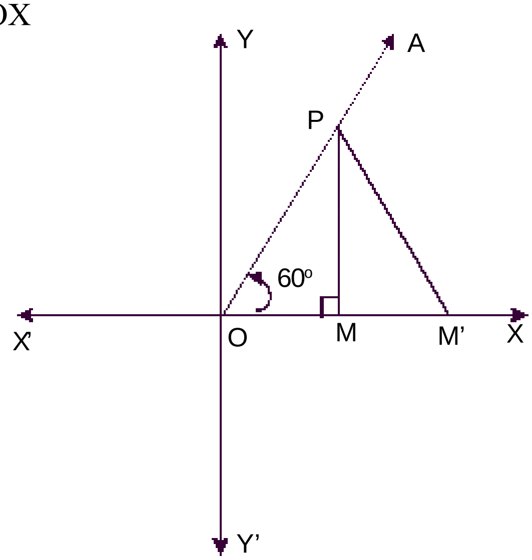
∠PMO = ∠PMM′ ...= 90^o)

OM = MM′ ...(રચના)

DPMO ≅ DPMM′

∠ POM = ∠ PM¢M = 60^o

DPOM¢ is an equilateral triangle.



આકૃત્તિ. 23.3

$OP = PM' = OM' = 2a$ એકમ

હવે Δ PMO,

$OP^2 = PM^2 + OM^2$ ...(પાયથાગોરસ પ્રમેય)

$(2a)^2 = PM^2 + a^2$

$PM^2 = 3a^2$

$PM = \sqrt{3}\,a$ એકમ

$$\sin 60^o = \frac{PM}{OP} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^o = \frac{OM}{OP} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^o = \frac{PM}{OM} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$$

$$\text{cosec } 60^o = \frac{1}{\sin 60^o} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 60^o = \frac{1}{\cos 60^o} = \frac{1}{1/2} = 2$$

and $$\cot 60^o = \frac{1}{\tan 60^0} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

23.4 0^O અને 90^Oમાટેના ત્રિ-ગુણોત્તરો

આપણે વિભાગ 23.4, 23.5 અને 23.6માં 45°,30°,અને 60°,માટેના ત્રિ-ગુણોત્તરો વ્યાખ્યાયિત કર્યો 0°, અને 90°,માટે આપણે નીચેના પરિણામો સ્વીકારી લઈશું અને એ માટે તાર્કિક સાબિતીની ચર્ચા કરીશું નહી.

(i) $\sin 0^o = 0$ અને તેથી 0^o વ્યાખ્યાયિત થશે નહીં. કારણ કે 0 વ્યસ્ત અસ્તિત્વમાં નથી.

(ii) $\cos 0^o = 1$ અને તેથી $\sec 0^o = 1$

(iii) $\tan 0^o = 0$ અને તેથી $\sec 0^o$ વ્યાખ્યાયિત થશે નહી કારણકે 0નો વ્યસ્ત અસ્તિતિવમાં નથી.

(iv) $\sin 90^o = 1$ અને તેથી $\text{cosec } 90^o = 1$

(v) $\cos 90^\circ = 0$ અને તેથી $\sec 90^\circ$ વ્યાખ્યાયિત થશે નહી કારણકે 0નો વ્યસ્ત અસ્તિત્વમાં નથી.

(vi) $\cot 90^\circ = 0$ અને તેથી 90° વ્યાખ્યાયિત થશે નહી કારણકે 0નો વ્યસ્ત અસ્તિત્વમાં નથી.

0°, 30°, 45°, 60° અને 90° અને માટેના ત્રિ-ગુણોત્તરોનાં મૂલ્યો દર્શાવવા માટે એક કોઠા તૈયાર કરીએ જેથી તેનો ઉપયોગ સરળ બને. નીચેના કોઠા એ રીતે તૈયાર કર્યો છે (એ રીતે લખ્યો છે) જેથી તે યાદ રાખવામાં પણ રહેલું બને .

ત્રિ - ગુણોત્તર	0°	30°	45°	60°	90°
sin q	$\sqrt{\frac{0}{4}}=0$	$\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{\frac{4}{4}}=1$
cos q	$\sqrt{\frac{4}{4}}=1$	$\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{0}{4}}=0$
tan q	$\sqrt{\frac{0}{4-0}}=0$	$\sqrt{\frac{1}{4-1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{4-2}}=1$	$\sqrt{\frac{3}{4-3}}=\sqrt{3}$	વ્યાખ્યાયિત નથી
cot q	વ્યાખ્યાયિત નથી	$\sqrt{\frac{3}{4-3}}=\sqrt{3}$	$\sqrt{\frac{2}{4-2}}=1$	$\sqrt{\frac{1}{4-1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{\frac{0}{4-0}}=0$
cosec q	વ્યાખ્યાયિત નથી	$\sqrt{\frac{4}{1}}=2$	$\sqrt{\frac{4}{2}}=\sqrt{2}$	$\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{\frac{4}{4}}=1$
sec q	$\sqrt{\frac{4}{4}}=1$	$\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{\frac{4}{2}}=\sqrt{2}$	$\sqrt{\frac{4}{1}}=2$	વ્યાખ્યાયિત નથી

શૂન્ય વડે ભાગાકાર વ્યાખ્યાયિત નથી તેથી આ પરિણામો વ્યાખ્યાયિત નથી.

આ ત્રિ- ગુણોત્તરોનો ઉપયોગ થતો હોય એવા કેટલાક ઉદાહરણ જોઈએ

ઉદાહરણ23.1: $\cos^2 60^\circ - \sin^2 30^\circ$ ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે $60^\circ = \sqrt{3}$ અને $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$$\tan^2 60^\circ - \sin^2 30^\circ = \left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$$

ઉદાહરણ 23.2: *કિંમત શોધો.*

$$\cot^2 30^\circ \sec^2 45^\circ + \operatorname{cosec}^2 45^\circ \cos 60^\circ$$

ઉકેલ : *આપણે જાણીએ છીએ કે*

$$\cot 30^\circ = \sqrt{3},\ \sec 45^\circ = \sqrt{2},\ \operatorname{cosec} 45^\circ = \sqrt{2} \text{ અને } \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cot^2 30^\circ \sec^2 45^\circ + \operatorname{cosec}^2 45^\circ \cos 60^\circ$$

$$= \left(\sqrt{3}\right)^2 \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 . \frac{1}{2}$$

$$= 3 \times 2 + 2 \times \frac{1}{2}$$

$$= 6 + 1$$

$$= 7$$

ઉદાહરણ 23.3: *કિંમત શોધો* : $2(\cos^2 45^\circ + \tan^2 60^\circ) - 6(\sin^2 45^\circ - \tan^2 30^\circ)$

ઉકેલ : $2(\cos^2 45^\circ + \tan^2 60^\circ) - 6(\sin^2 45^\circ - \tan^2 30^\circ)$

$$= 2\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2\right] - 6\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} + 3\right) - 6\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 1 + 6 - 3 + 2$$

$$= 6$$

ઉદાહરણ 23.4: *સાબિત કરો*

$$\frac{\tan 45^\circ}{\operatorname{cosec} 30^\circ} + \frac{\sec 60^\circ}{\cot 45^\circ} - \frac{5 \sin 90^\circ}{2 \cos 0^\circ} = 0$$

ઉકેલ : *ડા.બા* $= \dfrac{\tan 45^\circ}{\operatorname{cosec} 30^\circ} + \dfrac{\sec 60^\circ}{\cot 45^\circ} - \dfrac{5 \sin 90^\circ}{2 \cos 0^\circ}$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{1} - \frac{5 \times 1}{2 \times 1}$$

$$= \frac{1}{2} + 2 - \frac{5}{2}$$

$$= 0 = \text{જ.બા.}$$

આમ, $\dfrac{\tan 45^\circ}{\operatorname{cosec} 30^\circ} + \dfrac{\sec 60^\circ}{\cot 45^\circ} - \dfrac{5 \sin 90^\circ}{2 \cos 0^\circ} = 0$

ઉદાહરણ **23.5:** *સાબિત કરોકે :-*

$$\frac{4}{3}\cot^2 30^\circ + 3\sin^2 60^\circ - 2\operatorname{cosec}^2 60^\circ - \frac{3}{4}\tan^2 30^\circ = \frac{10}{3}$$

ઉકેલ: ડા.બા $= \dfrac{4}{3}\cot^2 30^\circ + 3\sin^2 60^\circ - 2\operatorname{cosec}^2 60^\circ - \dfrac{3}{4}\tan^2 30^\circ$

$$= \frac{4}{3} \times \left(\sqrt{3}\right)^2 + 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$= \frac{4}{3} \times 3 + 3 \times \frac{3}{4} - 2 \times \frac{4}{3} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$$

$$= 4 + \frac{9}{4} - \frac{8}{3} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{48 + 27 - 32 - 3}{12}$$

$$=$$

$$= \text{જ.બા}$$

તેથી, $\dfrac{4}{3}\cot^2 30^\circ + 3\sin^2 60^\circ - 2\operatorname{cosec}^2 60^\circ - \dfrac{3}{4}\tan^2 30^\circ = \dfrac{10}{3}$

ઉદાહરણ **23.6 :** *સાબિત કરો કે*

$$\frac{4\cot^2 60^\circ + \sec^2 30^\circ - 2\sin^2 45^\circ}{\cos^2 30^\circ + \cos^2 45^\circ} = \frac{4}{3}$$

ઉકેલ : *ડા.બા* $= \dfrac{4\cot^2 60^\circ + \sec^2 30^\circ - 2\sin^2 45^\circ}{\cos^2 30^\circ + \cos^2 45^\circ}$

$$= \frac{4.\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= \frac{4 \times \frac{1}{3} + \frac{4}{3} - 2 \times \frac{1}{2}}{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{8}{3} - 1}{\frac{5}{4}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{4}}$$

$$= \frac{5}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{3}$$

$=$ *જ.બા.*

તેથી , $\frac{4\cot^2 60^\circ + \sec^2 30^\circ - 2\sin^2 45^\circ}{\cos^2 30^\circ + \cos^2 45^\circ} = \frac{4}{3}$

ઉદાહરણ 23.7: $=30^\circ$, *લઈને સાબિત કરો કે*

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

ઉકેલ : q = 30°

L.H.S. = tan 2q

= tan ($2 \times 30^\circ$)

= tan 60°

= $\sqrt{3}$

અને *જ.બા* $= \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$$= \frac{2\tan 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ}$$

$$= \frac{2.\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2} = \sqrt{3}$$

ડા.બા = જ.બા

તેથી , $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

ઉદાહરણ **23.8:** $A = 30^\circ$. *તો*

$$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$$

ઉકેલ : For $A = 30^\circ$,

$$\text{L.H.S.} = \sin 3A$$

$$= \sin(3 \times 30^\circ)$$

$$= \sin 90^\circ$$

$$= 1$$

અને $\quad \text{R.H.S.} = 3\sin A - 4\sin^3 A$

$$= 3\sin 30^\circ - 4\sin^3 30^\circ$$

$$= 3 \times \frac{1}{2} - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{4}{8}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= 1$$

L.H.S. = R.H.S.

અને જ.બા $3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$

ઉદાહરણ 23.9: જો $\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$, તો $\sin 15^\circ$ ની કીંમત શોધો.

ઉકેલ : $\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B \qquad ...(i)$

Let $A = 45^\circ$ and $B = 30^\circ$

માં કિંમત મૂકતા (i),

$$\sin (45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$\sin 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}.$$

નોંધ : ઉપરના ઉદાહરણ માં $A = 60^\circ$ અને $B = 45^\circ$.

ઉદાહરણ 23.10: $\sin (A + B) = 1$ અને $\cos (A - B) = 1$, $0^\circ < A + B$ £ 90°, A ³ B, find A અને B.

ઉકેલ : $\because \quad \sin (A + B) = 1 = \sin 90^\circ$

$\therefore \quad A + B = 90^\circ \qquad ...(i)$

પરિણામ $\cos (A - B) = 1 = \cos 0^\circ$

$\therefore \quad A - B = 0^\circ \qquad ...(ii)$

પરિણામ (i) અને (ii), નોસરવાળો કરતા

$2A = 90^\circ$ or $A = 45^\circ$

(ii), પરથી

$B = A = 45^\circ$

$A = 45^\circ \quad B = 45^\circ$

ઉદાહરણ 23.11: If $\cos(20^\circ + x) = \sin 30^\circ$, x.

ઉકેલ : $\cos(20^\circ + x) = \sin 30^\circ = \quad = \cos 60^\circ$ $\quad \ldots\left(\because \cos 60^\circ = \frac{1}{2}\right)$

$$20^\circ + x = 60^\circ$$

$$x = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$$

$$x = 40^\circ$$

ઉદાહરણ 23.12: *કાટકોણ* Δ ABC, *માં* B, BC = 5 *સેમી*, $\angle$ BAC = 30°,*હોય તો* AB *અને* AC.

ઉકેલ : $\angle BAC = 30^\circ$ *પક્ષ* $\angle A = 30^\circ$

અને BC = 5 *સેમી*

Now $\quad \sin A = \frac{BC}{AC}$

or $\quad \sin 30^\circ = \frac{5}{AC}$

or $\quad \frac{1}{2} = \frac{5}{AC}$

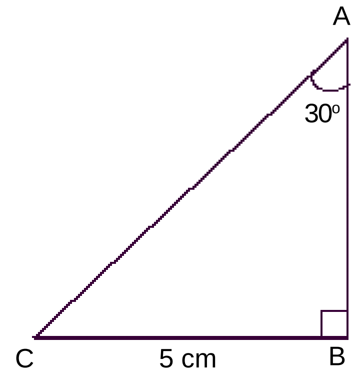
AC = 2 × 5 or 10 *સેમી*

$$AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}$$

$$= \sqrt{(10)^2 - 5^2} \text{ સેમી}$$

$$= \sqrt{75} \text{ સેમી}$$

$$= 5\sqrt{3} \text{ સેમી}$$



આકૃત્તિ. 23.4

Hence AC = 10 *સેમી અને* AB = $5\sqrt{3}$ *સેમી*

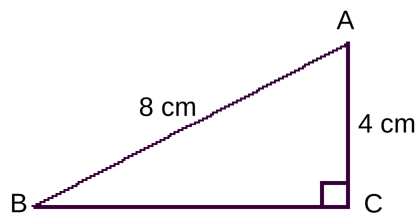
ઉદાહરણ 23.13: Δ ABC, *કાટખૂણો છે જો* C, AC = 4 *સેમી અને* AB = 8 *સેમી*. Find $\angle$ A *અને* $\angle$ B.*હોય તો નીચેવાની કિંમત શોધો.*

ઉકેલ : *પક્ષ* , AC = 4 *સેમી અને* AB = 8 *સેમી*

હવે $\quad \sin B = \frac{AC}{AB}$

$$= \frac{4}{8} \text{ or } \frac{1}{2} \quad B = 30^o$$

$$\ldots\left[\because \sin 30^o = \frac{1}{2}\right]$$



આકૃતિ. 23.5

હવે $\angle A = 90^o - \angle B$

$$\ldots.\left[\because \angle A + \angle B = 90^o\right]$$

$$= 90^o - 30^o$$

$$= 60^o$$

Hence, $\angle A = 60^o$ - $\angle B = 30^o$

ઉદાહરણ 23.14: Δ ABC *માં કાટખૂણ છે.* B. If $\angle A = \angle C$,*હોય તો નીચેની કિંમત શોધો.*

(i) $\sin A \cos C + \cos A \sin C$

(ii) $\sin A \sin B + \cos A \cos B$

ઉકેલ : *કાટખૂણ છે.* Δ ABC,

$$\angle B = 90^o$$

$$\because \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \angle A + \angle C = 180^o - 90^o \qquad \ldots(\ \angle A + \angle B + \angle C = 180^o)$$

$$= 90^o$$

$$\angle A = \angle C$$

$$\angle A = \angle C = 45^o$$

(i) $\sin A \cos C + \cos A \sin C$

$$= \sin 45^o \cos 45^o + \cos 45^o \sin 45^o$$

$$=$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

(ii) $\sin A\ \sin B + \cos A \cos B$

$$= \sin 45^o \sin 90^o + \cos 45^o \cos 90^o$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \times 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ઉદાહરણ 23.15: *જો* x *હોય તો* $2x - \sqrt{3} = 0$. *ની કિંમત શોધો.*

ઉકેલ : $\tan 2x - \sqrt{3} = 0$

$\tan 2x = \sqrt{3} = \tan 60^\circ$

$2x = 60^\circ$

or $x = 30^\circ$

x is 30°.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 23.1

1. *નીચેની કિંમત શોધો.*

(i) $\sin^2 60^\circ + \cos^2 45^\circ$

(ii) $2\sin^2 30^\circ - 2\cos^2 45^\circ + \tan^2 60^\circ$

(iii) $4\sin^2 60^\circ + 3\tan^2 30^\circ - 8\sin^2 45^\circ \cos 45^\circ$

(iv) $4(\sin^4 30^\circ + \cos^4 60^\circ) - 3(\cos^2 45^\circ - 2\sin^2 45^\circ)$

(v) $\dfrac{\tan 45^\circ}{\operatorname{cosec} 30^\circ} + \dfrac{\sec 60^\circ}{\cot 45^\circ} - \dfrac{5\sin 90^\circ}{2\cos 0^\circ}$

(vi) $\dfrac{5\cos^2 60^\circ + 4\sec^2 30^\circ - \tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ}$

2. *નીચેની દરેક સાબિત કરો :*

(i) $\operatorname{cosec}^3 30^\circ \times \cos 60^\circ \times \tan^3 45^\circ \times \sin^2 90^\circ \times \sec^2 45^\circ \times \cot 30^\circ = 8\sqrt{3}$

(ii) $\tan^2 30^\circ + \dfrac{1}{2}\sin^2 45^\circ + \dfrac{1}{3}\cos^2 30^\circ + \cot^2 60^\circ = \dfrac{7}{6}$

(iii) $\cos^2 60^\circ - \sin^2 60^\circ = -\cos 60^\circ$

(iv) $4(\sin^4 30^\circ + \cos^4 60^\circ) - 3(\cos^2 45^\circ - \sin^2 90^\circ) = 2$

(v) $\dfrac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 30^\circ} = \tan 30^\circ$

3. જો $\angle A = 30^\circ$, તો નીચેના દરેક સાબિત કરો.

(i) $\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

(ii) $\cos 2A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

(iii) $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

4. $A = 60^\circ$ અને $B = 30^\circ$,તો નીચેના દરેક ચકાસો .

(i) $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

(ii) $\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1+\tan A \tan B}$

5. $2A = 60^\circ$, લઈને તથા $\sin 30^\circ \cos 30^\circ$, અને $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$ નો ઉપયોગ કરીને શોધો.

6. જો $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$, હોય તો $\cos 75^\circ$ શોધો.

7. જો $\sin(A-B) = \dfrac{1}{2}$, $\cos(A+B) = \dfrac{1}{2}$, $0^\circ < A+B < 90^\circ$, $A > B$,હોય તો A અને B શોધો.

8. $\sin(A+2B) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ અને $\cos(A+4B) = 0$,હોય તો A અને B શોધો.

અને

9. $\angle PQR$ કાટખૂણો છે Q, PQ = 5 સેમી અને $\angle R = 30^\circ$,હોય તો QRઅને PR શોધો.

10. $\angle ABC$, $\angle B = 90^\circ$, AB = 6 સેમી અને AC = 12 સેમી. હોય તો $\angle A$ અને $\angle C$ શોધો.

11. $\angle ABC$, $\angle B = 90^\circ$. If $A = 30^\circ$,હોય તો $\sin A \cos B + \cos A \sin B$ શોધો.

12. $\cos(40^\circ + 2x) = \sin 30^\circ$, હોય તો x શોધો.

પ્રશ્ન 13 થી 15માં આપેલા વિકલ્પોમાંથી સાચો વિકલ્પ પસંદ કરો

13. $\sec 30^\circ =$................

(A) 2 (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ (D) $\sqrt{2}$

14. $\sin 2A = 2\sin A$, હોય તો A ....

(A) 30° (B) 0° (C) 60° (D) 90°

15. $\dfrac{2\tan 60^o}{1+\tan^2 60^o}$ ....

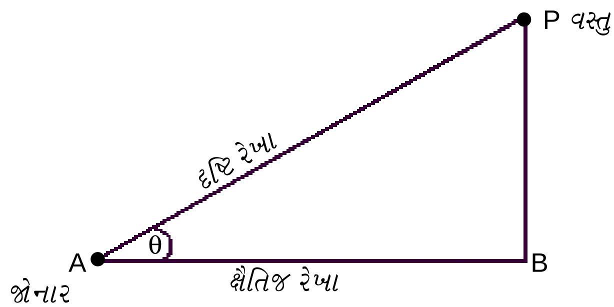
(A) sin 60o (B) sin 30o (C) cos 60o (D) tan 60o

23.5 ત્રિકોણમિતિના ઉપયોગ

આપણે ખૂણાના ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરોની વ્યાખ્યા વિશે શીખ્યા 30°,45°, અને 60°, ના ખૂણાના વ્યાખ્યિત થયેલા ત્રિ-ગુણોત્તરોની કિમત મેળતાં શીખ્યા 0° અને 90° ના વ્યાખ્યાયિત થયેલા ત્રિ-ગુણોત્તરો પણ સમજવા આ વિભાગમાં આપણે ત્રિકોણમિતિના ઉપયોગથી બે પદાર્થો વચ્ચેનું અંતર શોધવાના પદાર્થની ઊંચાઈ શોધવાના વ્યવહારિક ગણીશું ઊંચાઈ અને અંતરની ગણતરી કરતાં પહેલા કેટલાક પદોની વ્યાખ્યા સમજીશું.

23.5.1 ઉત્સેધકોણ અથવા ઉજાતકોણ

જોનારા વ્યક્તિ ઊંચા સ્થળે રહેલી વસ્તુ P ને જુએ છે ત્યારે તેણે તેની આંખ ઊંચી કરવી પડે છે. પરિણામે ક્ષૈતિજ રેખા (પૃથ્વીની સપાટીને સમાંતર રેખા) અને દ્દષ્ટિકોણ વચ્ચે એખ ખૂણા રચાય છે આ ખૂણાને ઉત્સેધ કોણ અથવા ઉન્નકોણ કહે છે.

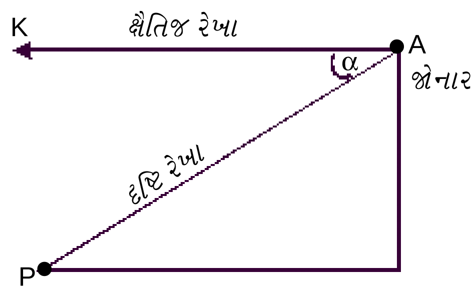


આકૃતિ. 23.6

આકૃતિ 23.6માં એ જોનારા વ્યક્તિ છે , પી જોવાની વસ્તુ છે એપી દૃષ્ટિરેખા છે અને એબી ક્ષૈત્રિજ રેખા છે અહીં. ક્યુ ખૂણો એ ઉત્સેધકોણ અથવા ઉન્નત કોણ છે.

23.5.2 અવેસેધ કોણ અથવા અવનત કોણ

અવસેધ કોણ અથવા અવનત કોણ જ્યારે અવલોકન કરો A (ઉંચાઈ ઉપરથી) નીચેની તરફ કોઈ વસ્તુ જોતો હોય ત્યારે આંખનીચે તરફ નમાવવી પડે છે. પરિણામે ક્ષૈતિજ રેખા અને દૃષ્ટિકોણ વડે રચાતા ખૂણાને અવસેધ કોણ અથવા અવનત કોણ કહે છે આકૃતિ 20.7માં A જોનારા વ્યક્તિ છે P જોવાની વસ્તુ છે અને AP દૃષ્ટિકોણ રેખા છે અને A કે ક્ષૈતિજ રેખા છે અહી ખૂણો એ અવસેધ કોણ અથવા અવનત કોણ છે.



આકૃતિ. 23.7

ઉદાહરણ 23.16: *ઘરની બારીએ ઢળતી એક સીડી જમીન સાથે 60° નો ખૂણો બનાવે છે જો સીડીની લંબાઈ 6મી હોય તો તેના છેડો કેટલો દૂર હશે ?*

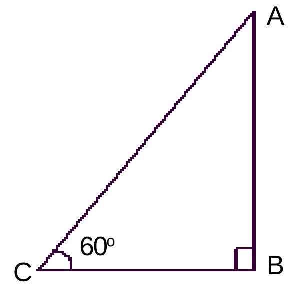
ઉકેલ : *ધારે કે AC દીવાલ છે. જમીન અને સીડી વચ્ચે 60° ખૂણો બને છે અહી AC = 6 મીટર (પક્ષ)*

કાટકોણ ABC માં

$$\frac{BC}{AC} = \cos 60^o$$

$$\frac{BC}{6} = \frac{1}{2}$$

$$BC = \frac{1}{2} \times 6 \text{ or } 3 \text{ m}$$



આકૃતિ. 23.8

સીડીનો જમીન પરનો છેડો દીવલથી 3 મી. દુર હશે.

ઉદાહરણ 23.17: એક સ્તંભ કરતાં તેનો પડછાયો $\frac{1}{\sqrt{3}}$ છે બતાવો કે આ વખતે સૂર્યનો ઉત્સેધ કોણ 60°હશે.

ઉકેલ : ધારોકે AB જમીનને કાટખૂણો ઉભેલો (ખોડેલો) સ્તંભ છે અને BC તેનો પડછાયો છે.

$$BC = h \times \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ એકમ}$$

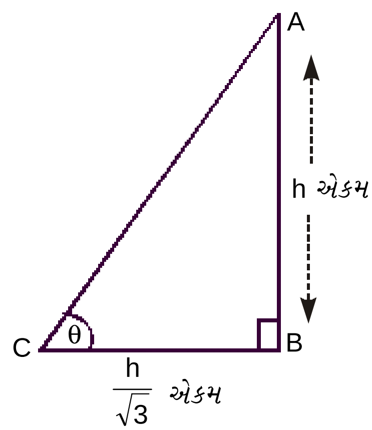
ΔABC,

ધારોકે સૂર્યનો ઉત્લેધકોણ 0 છે

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{h}{h/\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\tan q = \tan 60^o$$

$$q = 60^o$$



આકૃતિ. 23.9

સૂર્યનો ઉત્સેધકોણ 60° હશે.

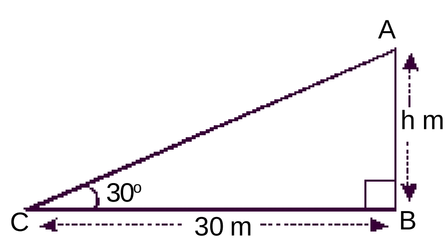
ઉદાહરણ 23.18: એક મિનારો જમીન સાથે કાટખૂણો બનાવે છે.ટાવરના તળીએથી 30 મીટર દૂરના સ્થળેથી જોતાં મિનારીની ટોચનો ઉત્સેધ કોણ 30 માલુમ પડે છે મિનારાની ઊંચાઈ શોધો. $\sqrt{3}$ = 1.73)

ઉકેલ : ધારોકે મિનારાની ઊંચાઈ 4 મીટર છે. જમીન પર B થી 30મી દૂર C છે BC =30

$$\angle ACB = 30^o$$

કાટકોણ ΔABC,

$$\frac{AB}{BC} = \tan 30o$$



આકૃતિ. 23.10

$$\frac{h}{30}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$h=\frac{30}{\sqrt{3}} \text{ મીટર}$$

$$=\frac{30}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \text{ મીટર}$$

$$=10\sqrt{3} \text{ મીટર}$$

$$=10\times 1.73 \text{ મીટર}$$

$$= 17.3 \text{ મીટર}$$

મિનારાની ઊંચાઈ = 17.3 મીટર થાય.

ઉદાહરણ 23.19: એક બલુન 100 મીટર લાબા કેબલ (પાયર) થી મેટ્રોલોજિકલ ગ્રાઉન્ડ સ્ટેશન સાથે જોડાયેલું છે. આ કેબલ જમીન સાથે 60 નો ખૂણો બનાવે છે. બલૂનની ઊંચાઈ શોધો.

(કેબલ સખત રીતે ખેંચાયેલો છે)

ઉકેલ : આકૃતિ 23.11 મા .. બલૂનનું સ્થાન દર્શાવે છે .. 100 મી લંબાઈનો કેબલ છે.

$\angle ABC, = 60^{o}$

ધારોકે બલૂનની ઊંચાઈ , $\angle ABC,$

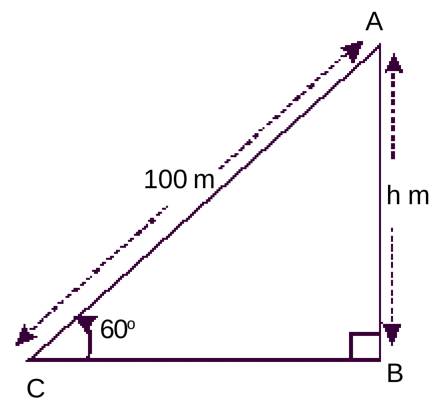
$$\frac{AB}{AC}=\sin 60^{o}$$

$$\frac{h}{100}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$h=50\sqrt{3}$$

$$=50\times 1.732$$

$$=86.6$$



આકૃતિ. 23.11

તેથી બલૂનની ઊંચાઈ 86.6 મીટર હશે.

ઉદાહરણ 23.20: વાવાઝોડામાં એક ઉંચુ ઝાડ વચ્ચેથી ભાંગીને નીચે નમી ગયું ઝાડની ટોચ જ્યાં જમીનને અડે છે ત્યાં તે 30 નો ખૂણો બનાવે છે. અને આ જમીન પર આવેલી ટોચ અને ઝાડના થડ વચ્ચેનું અંતર 10 મીટર છે. ઝાડની ઊંચાઈ શોધો.

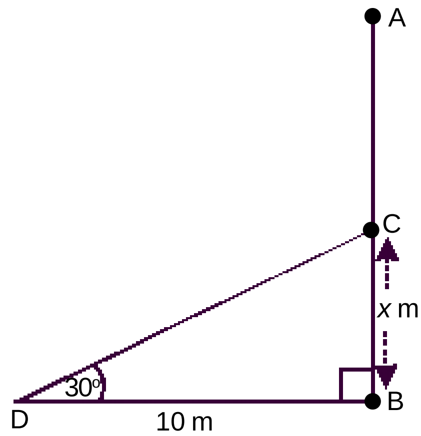
ઉકેલ : AB ઝાડ છે જે C આગળથી ભાંગી જાય છે અને ઝાડની ટોચ A જમીનને B આગળ સ્પર્શે છે. $\angle CDB= 30^{0}$ અને

BD =10 મી

$$\frac{BC}{BD} = \tan 30^o$$

$$\frac{x}{10} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{10}{\sqrt{3}} \text{ મી} \qquad ...(i)$$



આકૃતિ. 23.12

હવે કાટકોણ ΔCBD માં

$$\frac{BC}{DC} = \sin 30^o$$

$$\frac{x}{DC} = \frac{1}{2}$$

$$DC = 2x$$

$$= \frac{20}{\sqrt{3}} \text{ m} \qquad ...[By (i)]$$

$$AC = DC = \frac{20}{\sqrt{3}} \qquad ...(ii)$$

$$= BC + AC$$

$$= \left(\frac{10}{\sqrt{3}} + \frac{20}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{30}{\sqrt{3}} \text{ or } 10\sqrt{3} \text{ m}$$

$$= 17.32 \text{ મી}$$

ઝાડની ઊંચાઈ મા 17.32 મીટર હશે.

ઉદાહરણ 23.21: જ્યારે સૂર્યનો ઉત્સેધકોણ 45^o હોય છે, ત્યારે એક ટાવરનો પડછાયો , સૂર્યનો ઉત્સેધકોણ 60^o હોય ત્યારે મળતા પડછાયા કરતાં 10 મી વધુ લાંબો જોવા મળે છે. ટાવરની ઊંચાઈ શોધો.

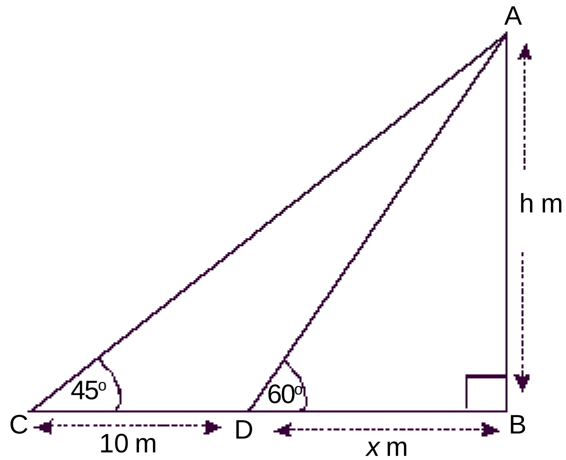
ઉકેલ : ધારોકે ટાવર AB ની ઊંચાઈ 4 મીટર છે. C અને D બિદુંઓ એવાં છે કે જ્યાંથી અનુક્રમે સૂર્યનો ઉત્સેધ 45^o અને 60^o જોવા મળે છે.

CD = 10 મી, $\angle ACB = 45^\circ$ અને $\angle ADB = 60^\circ$

ધારોકે BD = x મી છે.

BC = BD + CD = (x + 10) m

હવે કાટકોણ $\angle$d DABC,



આકૃતિ. 23.13

$$\frac{AB}{BC} = \tan 45^\circ$$

$$\frac{h}{x+10} = 1$$

$$x = (h - 10)\text{ m} \qquad \text{...(i)}$$

$\angle$DABD,

$$\frac{AB}{BD} = \tan 60^\circ$$

$$\frac{h}{x} = \sqrt{3}$$

$$h = \sqrt{3}\,x \qquad \text{...(ii)}$$

પરિણામ (i) અને (ii), પરથી

$$h = \sqrt{3}\,(h - 10)$$

$$h = \sqrt{3}\,h - 10\sqrt{3}$$

$$(\sqrt{3} - 1)h = 10\sqrt{3}$$

$$h = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$$

$$= \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \times \frac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)} = \frac{10\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2}$$

$$= 5\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1) = 15 + 5 \times 1.732 = 15 + 8.66 = 23.66$$

ટાવરની ઊંચાઈ 23.66 મી.

ઉદાહરણ 23.22: *એક વિમાન 3000 મીટરની ઉંચાઈએ ઉડી રહ્યું છે તેની નીચે એક બીજું વિમાન પણ ઉડી રહ્યું છે. બંને એક જ લંબ રેખામાં આવે છે ત્યારે જમીન પરના એક બિંદુએથી તેમના ઉત્સેધકોણ અનુક્રમે 60° અને 45° માલુમ પડે છે. બંને વિમાન વચ્ચેનું અંતર શોધો.*

ઉદાહરણ : *ધારોકે અવલોકન બિંદુ 0 છે. અને P તથાQ એ બે વિમાન છે.*

પક્ષ $AP = 3000$ *મી અને* $\angle AOQ = 45^\circ$

અને $\angle AOP = 60^\circ$

$\angle$d $\angle QAO$,

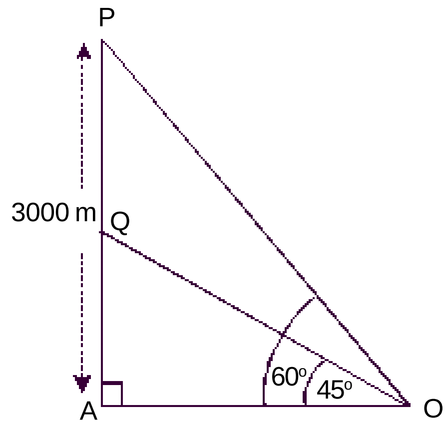
$$\frac{AQ}{AO} = \tan 45^\circ = 1$$

$$AQ = AO \qquad ...(i)$$

$\angle$d DPAO,

$$\frac{PA}{AO} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\frac{3000}{AO} = \sqrt{3} \text{ or } AO = \frac{3000}{\sqrt{3}} \qquad ...(ii)$$



આકૃતિ. 23.14

પરિણામ (i) *અને* (ii), *પરથી*

$$AQ = \frac{3000}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1000\sqrt{3} = 1732 \text{ મી}$$

$$PQ = AP - AQ = (3000 - 1732) \text{ m} = 1268 \text{ મી}$$

બંને વિમાન વચ્ચેનું ઉભું અંતર 1268 *મીટર*

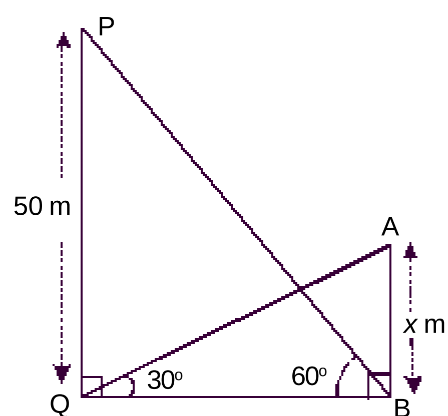
ઉદાહરણ 23.23: *એક ટાવરના તળિયેથી સામેના મકાનની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 30° જણાય છે અને આ મકાનના તળિયેથી પેલા ટાવરની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 60° જણાય છે. જો ટાવરની ઊંચાઈ 50મી હોય, તો મકાનની ઊંચાઈ શોધો.*

ઉકેલ : *ધારોકે* PQ *ટાવર છે અને* AB *મકાન છે.*

50*મી* $\angle AQB = 30^\circ$ *અને* $\angle PBQ = 60^\circ$

$\angle$d ΔABQ, $\frac{x}{BQ} = \tan 30^\circ \qquad ...(i)$

કાટકોણ $\angle$d ΔPQB, $\frac{PQ}{BQ} = \tan 60^\circ$ *માં* ...(ii)



આકૃતિ. 23.15

પરિણામ (i) ને (ii), ભાગતાં

$$\frac{x}{50} = \frac{\tan 30^\circ}{\tan 60^\circ} = \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{50}{3} = 16.67$$

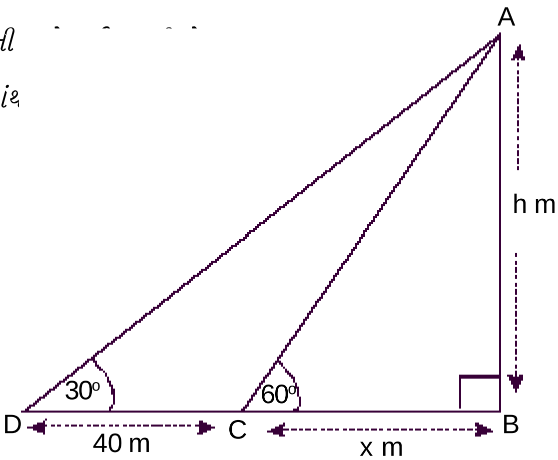
મકાનની ઊંચાઈ = 16.67 મી

ઉદાહરણ 23.24: નદીના એક કિનારે ઉભેલો માણસ બીજા કિનારે રહેલા ઝાડની ટોચને જુએ છે તો ઉત્સેધકોણ 60° જણાય છે આ માણસ કિનારાને કાટખૂણે નદીથી વિરુદ્ધ દિશામાં 40 મીટર ચાલીને ફરી ઝાડની ટોચ જુએ છે, ત્યારે ઉત્સેધકોણ 30°નો માલુમ પડે છે. ઝાડની ઊંચાઈ અને નદીની પહોળાઈ શોધો.

ઉકેલ : ધારોકે ઝાડની ઊંચાઈ 4મી છે અને નદીની

C અને D એ જોનાર માણસની બે સ્થિતિ છે જ્યાંથ

60° અને 30° છે.



આકૃતિ. 23.16

$$\frac{AB}{BC} = \tan 60^\circ$$

$$\frac{h}{x} = \sqrt{3}$$

$$h = \sqrt{3}\,x \qquad \text{...(i)}$$

હવે કાટકોણ ΔABD, માં

$$\frac{AB}{BD} = \tan 30^\circ$$

$$\frac{h}{x+40} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{...(ii)}$$

પરિણામ (i) અને (ii), પરથી

$$\frac{\sqrt{3}x}{x+40} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$3x = x + 40$$

$$2x = 40$$

$$x = 20$$

પરિણામ (i) પરથી

$h = \sqrt{3} \times 20 = 20 \times 1.732$

$= 34.64$

ઝાડની ઊંચાઈ 34.64 મી છે.

ઉદાહરણ 23.25: 100મી ઊંચા ટાવરની ટોચ પર ઉભા રહી સ્વાતિ ટાવરની સામસામેની બાજુએ ઉભેલી બે મોટરકાર જુએ છે જો તેમનાં અવસેધ બાજુએ ઉભેલી બે મોટરકાર જુએ છે જો તેમનાં અવસેધ (અવનતકોણ) અનુક્રમે 60^o અને 45^o હોય તો બે મોટરકાર વચ્ચેનું અંતર શોધો.

ઉકેલ : ધારોકે ટાવર PM = 100 મીટર છે A અને B બે મોટરકાર છે.

A નો અવસેધકોણ $\angle RPB = 60^o$ અને $\angle RPB = 45^o$ નો અવસેધ કોણ

$\angle QPA = 60^o = \angle PAB$

$\angle RPB = 45^o = \angle PBA$

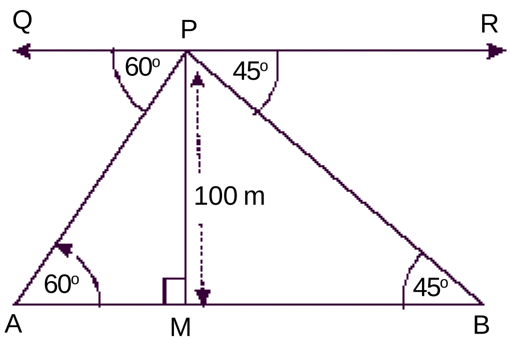
ΔPMB,

$\frac{PM}{MB} = \tan 45^o$

$\frac{100}{MB} = 1$

MB = 100 મીટર ...(i)

હવે કાટકોણ ΔPMA,



આકૃતિ. 23.17

$\frac{PM}{MA} = \tan 60^o$

$\frac{100}{MA} = \sqrt{3}$

$MA = \frac{100}{\sqrt{3}}$

$= \frac{100\sqrt{3}}{3}$

$= \frac{100 \times 1.732}{3}$

$= 57.74$

MA = 57.74 મીટર ...(ii)

$= MA + MB$

$= (57.74 + 100)$ મીટર [(i) અને (ii)]

$= 157.74$ મીટર

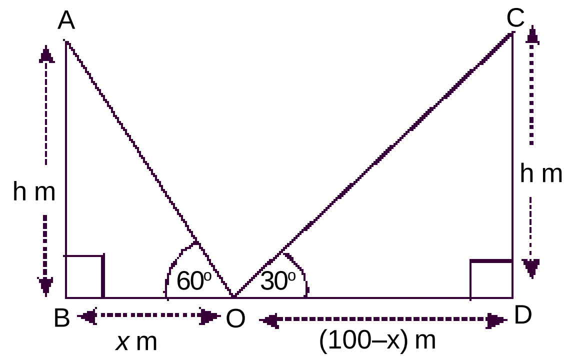
ઉદાહરણ 23.26: *સમાન ઉંચાઈના બે સ્તંભો 100મી પહોળા રસ્તાની બંન્ને બાજુએ ઉભા કરેલા છે. સ્તંભ વચ્ચેના રસ્તાના કોઈ બિંદુંએ સ્તંભના ટોચના ઉત્સેધકોણ 60^o અને 30^o છે. સ્તંભોની ઊંચાઈ શોધો અને બિદુંનું સ્થાન જાણવો.*

ઉકેલ : *ધારોક* AB *અને* CD 4 *મીટર ઊંચાઈના સ્તંભો છે. રસ્તા ઉપરનું બિંદુ* 0 *છે ધારોકે* $BO = x$ *મી*

$OD = (100 - x)$ m

$\angle AOB = 60o$ and $\angle COD = 30o$

$\Delta ABO,$



આકૃતિ. 23.18

$$\frac{h}{x} = \sqrt{3}$$

$$h = \sqrt{3}\ x \qquad ...(i)$$

$\Delta CDO,$

$$\frac{CD}{OD} = \tan 30^o$$

$$\frac{h}{100 - x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad ...(ii)$$

પરિણામ (i) *અને* (ii), *પરથી*

$$\frac{\sqrt{3}x}{100 - x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$3x = 100 - x$$

$$4x = 100$$

$$x = 25$$

પરિણામ (i) *અને* (x), *કિંમત મૂકતાં*

$h = \sqrt{3} \times 25 =$

$1.732 \times 25\ \ 43.3$

સ્તંભોની ઊંચાઈ 43.3 મીટર

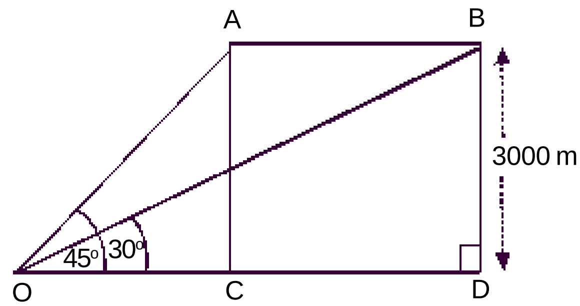
ઉદાહરણ23.27: જમીન પરના એક બિંદુંએથી આકાશમાં ઉડતા બલુનનો ઉત્સેધકોણ 45^0 માલુમ પરડે છે. 15 સેકન્ડ પછી બલૂનનો ઉત્સેધકોણ 30^0 માલુમ પડે છે જો બલૂન જમીનથી 3000 મીટર ઊંચાઈ જાળવીને ઉડતું હોય તો બલુનની ઝડપ શોધો.

ઉકેલ : ધારોકે 0 અવલોકન બિંદુ છે બલૂનની પહેલી સ્થિતિ A અને 15 સેકન્ડ પછીની સ્થિતિ B છે.

ધારોકે $\angle AOC = 45^o$ અને $\angle BOD = 30^o$

By question, AC = BD = 3000 મીટર

હવે કાટકોણ $\angle BDO$, માં



આકૃતિ. 23.19

$$\frac{AC}{OC} = \tan 45^o$$

$$\frac{3000}{OC} = 1$$

$OC = 3000$ મીટર ...(i)

$\angle$ BDBDO,

$$\frac{BD}{OD} = \tan 30^o$$

$$\frac{3000}{OC+CD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$3000\sqrt{3} = 3000 + CD$ ...[By (i)]

$CD = 3000(\sqrt{3} - 1)$

$= 3000 \times 0.732$

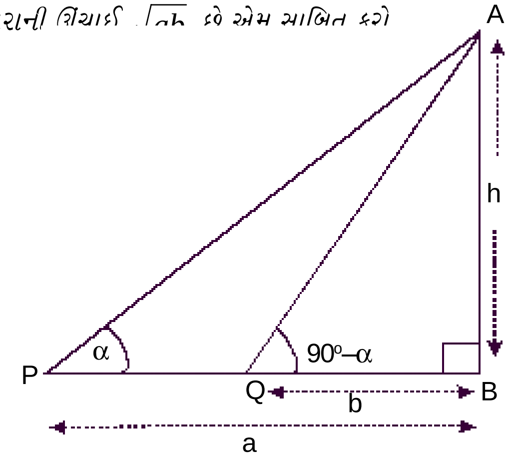
$= 2196$

$= AB = CD = 2196$ મીટર

$$= \left(\frac{2196}{15} \times \frac{60 \times 60}{1000}\right) \text{ કિલોમીટર}$$

$= 527.04$ કિમીકલાક

ઉદાહરણ 23.28: *એક મિનારીના તળિયામાંથી પસાર થતી રેખા ઉપર P અને Q બિંદુઓ મિનારીની એક જ બાજુએ આવેલા છે P અને Q થી મળતા મિનારાની ટોચના ઉત્સેધકોણના માપ પરસ્પર કોટિકોણ છે P અને Q નું મિનારાથી અંતર અનુક્રમે a અને b હોય તો મિનારાની ઊંચાઈ $\sqrt{ab}$ છે એમ સાબિત કરો*



આકૃત્તિ. 23.20

ઉકેલ : *ધારોકે ઊંચાઈ ધરાવતો મિનારો* AB *છે.*

ĐAPB = a *અને* ĐAQB = 90° – a

જો PB = *a તો* QB = *b*.

હવે કાટકોણ $\frac{AB}{QB} = \tan(90^\circ - \alpha)$

or $\frac{h}{b} = \cot\alpha$ ...(i)

કાટકોણ ∠d DABP,

$\frac{AB}{PB} = \tan\alpha$

or $\frac{h}{a} = \tan\alpha$ ...(ii)

પરિણામ (i) *અને* (ii), *પરથી*

$\frac{h}{b} \times \frac{h}{a} = \cot\alpha \, . \tan\alpha = 1$

$h^2 = ab$

$h = \sqrt{ab}$

મિનારાની ઊંચાઈ $= \sqrt{ab}$.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 23.2

1. *દીવાલનને લંબ છે. દિવાલ સાથે ત્રાંસી ગોઠવેલી સીડી જમીન સાથે* 60^0*નો ખૂણો બનાવે છે. સીડીનો જમીન પરનો છેડો દીવાલથી* 3 *મી દૂર હોય તો, સીડીની લંબાઈ શોધો.*

2. *મિનારાની તળિયેથી* 50 *મી દૂરના બિંદુએ મિનારાની ટોચનો ઉત્સેધકોણ* 60^0 *માલુમ પડે છે મિનારાની ઊંચાઈ શોધો.*

3. *જમીન પરના એખ બિંદુએથી જોતાં મિનારીની ટોચનો ઉત્સેધકોણ* 30^0 *જણાવે છે જો આ બિંદુ મિનારાના તળીયાથી* 150 *મીટર દૂર હોય, તો મિનારાની ઊંચાઈ શોધો.*

4. એક પતંગની 100 મીટર લાંબી દોરી જમીન સાથે 60^0નો ખૂણો બનાવે છે પતંગની ઊંચાઈ શોધો. પતંગની દોરીમાં ઢીલ નથી તેમ માની લો.

5. એક પતંગ જમીનથી 100 મીટરની ઊંચાઈએ ઉડી રહ્યો છે જો પતંગની દોરી જમીન સાથે 60^0નો ખૂણો બનાવતી હોય તો દોરીની લંબાઈ શોધો. પતંગની દોરીમાં ઢીલ નથી એમ માપી લો.

6. $10\sqrt{3}$ મી ઊંચા મિનારાની તળિયેથી 100 મી આવેલા બિંદુએથી જોતાં મિનારીની ટોચનો ઉત્સેધકોણ કેટલો મળે ?

7. 12મી ઊંચાઈનું ઝાડ પવનના તોફાનમાં વચ્ચેના કોઈ ભાગથી ભાંગી જાય છે આ ભાગ ઝાડથી છુટો પડતો નથી પણ ઝાડની ટોચ નમીને જમીન સાથે 60^0નો ખૂણો બનાવે છે જમીનથી કેટલી ઊંચાઈએથી ઝાડ ભાંગી ગયું હશે .

8. એક ઝાડનું થડ પવનના તોફાનમાં તૂટી જાય છે. ઝાડની ટોચ થડથી 10મી દૂર જમીનને અડકે છે અને ત્યાં જમીન સાથે 45^0નો ખૂણો બનાવે છે. ઝાડની ઊંચાઈ શોધો.

9. જમીનપરના એક બિંદુએથી મિનારાની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 45^0માલુમ પડે છે. આ બિદુંએથી મિનારા તરફ 40મી ચાલ્યા પછી મિનારાની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 60^0માલુમ પડે છે. મિનારાની ઊંચાઈ શોધો.

10. 80મી ઊંચી ટેકરીની સામસામેની બાજુએ બે માણસો ભભા છે. તેઓ ટેકરીની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 30^0અને 60^0માપે છે. આ બે માણસો વચ્ચેનું અંતર શોધો.

11. 60^0મી ઉંચા મકાન પરથી એક મિનારાની ટોચનો અને તળિયાનો અવસેધ કોણ અનુક્રમે 45^0 અને 60^0 માલુમ પડે છે મિનારાની ઊંચાઈ શોધો,અને મકાન પરથી મિનારાનું અંતર પણ શોધો.

12. એક મકાનની બારીથી ટેકવેલી 4મી લાંબી સીડી જમીન સાથે 30^0નો ખૂણો બનાવે છે. સીડીનો જમીન પરનો છોડો સ્થિર રાખીને ઉલટી દિશામાં સામેના મકાન સાથે ગોઠવતાં સીડી જમીન સાથે 60^0નો ખૂણો બનાવે છે. આવે તો મકાન વચ્ચેનું અંતર શોધો.

13. એક બહુમાળી ઈમારતથી 15 મીટર દૂર જમીન પરના એક બિંદુઓ જોતાં પહેલા માળની છતનો ઉત્સેધકોણ 300^0 અને બીજા માળની છતનો ઉત્સેધકોણ 45^0 માલુમ પડે છે. બીજા માળની ઊંચાઈ શોધો.

14. જમીનથી 1 કિલોમીટરની ઊંચાઈએ ઉડતા એક વિમાનનો ઉત્સેધકોણ એક સ્થળેથી 60^0મપાય છે. 10 સેકન્ડ પછી તેજ સ્થેથી વિમાનનો ઉત્સેધકોણ 30^0 મપાય છે. જો વિમાન એખ સરખી ઊંચાઈએ ઉડતું હોય, તો વિમાનની ઝડપ શોધો.

15. એક મિનરાના તળિયેથી સામાને મકાનની ટોચનો ઉત્સેધ 30^0 માલુમ પડે છે અને મકાનના તળિયેથી મિનારાની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 60^0 માલૂમ પડે છે જો મિનારાની ઊંચાઈ 50મી હોય તો મકાનની ઊંચાઈ શોધો.

સારાંશ

ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરોની કિંમત દર્શાવતો કોઠો.

ત્રિ ગુણોત્તર

Q / ત્રિ ગુણોત્તર	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
SIN Q	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
COS Q	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
TAN Q	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	અવ્યાખ્યાયિત
COT Q	અવ્યાખ્યાયિત	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
COSEC Q	અવ્યાખ્યાયિત	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
SEC Q	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	અવ્યાખ્યાયિત

સહાયક વેબસાઈટ

- http://www.wikipedia.org
- http://mathworld:wolfram.com

સ્રાંત સ્વાધ્યાય

1. *નીચેની પ્રત્યેકની કિંમત શોધો*

(i) $4 \cos^2 60^o + 4 \sin^2 45^o - \sin^2 30^o$

(ii) $\sin^2 45^o - \tan^2 45^o + 3(\sin^2 90^o + \tan^2 30^o)$

(iii) $\dfrac{5\sin^2 30^\circ + \cos^2 45^\circ - 4\tan^2 30^\circ}{2\sin^2 30^\circ \cos^2 30^\circ + \tan 45^\circ}$

(iv) $\dfrac{\cot 45^\circ}{\sec 30^\circ + \operatorname{cosec} 30^\circ}$

2. *નીચેના પ્રત્યેક સાબિત કરો :*

   (i) $2\cot^2 30^\circ - 2\cos^2 60^\circ - \dfrac{3}{4}\sin^2 45^\circ - 4\sec^2 30^\circ = -\dfrac{5}{24}$

   (ii) $2\sin^2 30^\circ + 2\tan^2 60^\circ - 5\cos^2 45^\circ = 4$

   (iii) $\cos 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \sin 45^\circ = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$

   (iv) $\dfrac{\cot 30^\circ \cot 60^\circ - 1}{\cot 30^\circ + \cot 60^\circ} = \cot 90^\circ$

3. *જો* $Q = 30^\circ$, *તો ચકાસો*

   (i) $\sin 2q = 2\sin q \cos q$

   (ii) $\cos 2q = 1 - 2\sin^2 q$

   (iii) $\tan 2q = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

4. *જો* $A = 60^\circ$ *અને* $B = 30^\circ$, *તો ચકાસો*

   (i) $\sin(A+B)\ ^1 \sin A + \sin B$

   (ii) $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A \sin B$

   (iii) $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

   (iv) $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$

   (v) $\tan A = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2 A}}{\cos A}$

5. $(A - B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$, *સૂત્ર વાપરીને* $\cos 15^\circ$ *ની કિંમત મેળવો,*

6. $\sin(A+B) = 1$ *અને* $\cos(A-B) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $0^\circ < A + B\ £\ 90^\circ$, $A > B$, A *અને* B.

7. *એક માણસ એક ઊંચા મકાનથી 40મી દૂર ભભો છે. ત્યાંથી મકાન ઉપર રાખેલા ધ્વજદંડની ટોચનો અને ધ્વજવંદન ના તળિયાનો અઉત્સેધ કોણ અનુક્રમે* 60^0 *અને* 45^0 *જુએ છે મકાનની ઉંચાઈ અને ધ્વજ દંડની લંબાઈ શોધો.*

8. એક ટેકરીની ટોચ પરથી જોતાં રસ્તા પરના કિલોમીટર દર્શક બે પથ્થરોના અવસેધકોણ અનુક્રમે 30^0 અને 60^0 જણાય છે. ટેકરીની ઉંચાઈ શોધો.

9. 7 મીટર ઉંચા મકાન પરથી જોતાં એક કેબલ ટાવરની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 60^0 અને તેના તળિયાનો અવસેધકોણ 45^0 માલૂમ પડે છે. કેબલ ટાવરની ઉંચાઈ શોધો.

10. દરિયા કિનારે આવેલા એક ટાવર પર ઉભેલો માણસ એક વણને તેની તરફ આવતું જુએ છે, જે 10 મિનિટ પછી 60^0 થાય છે. આ વહાણ કિનારે ક્યારે પહોચશે (વહાણને કિનારે પહોંચશે.

11. દીવાદાંડીની સામસામની બાજુએથી દીવાદાંડી તરફ આવતા બે વહાણમાંથી દીવાદાંડીની ટોચનો ઉત્સેધકોણ અનુક્રમે 30^0 અને 45^0 માલૂમ પડે છે . જો બે વહાણ વચ્ચેનું અંતર 100 મીટર હોય, તો દીવાદાંડીની ઉંચાઈ

12. જ્યારે સૂર્યનો ઉત્સેધકોણ 30^0 હોય ત્યારે એક ટાવરનો મળતો પડછાયો , સૂર્યનો ઉત્સેધકોણ 60^0 હોય ત્યારે મળતા પડછાય કરતાં $45\sqrt{3}$ મી લાંબો હોય છે. ટાવરની ઉંચાઈ શોધો.

13. બે મિનારા વચ્ચેનું અંતર 80મીટર છે. બીજા મિનારાની ટોચ પર થી જોતાં પહેલ મિનારાની ટોચનો અવસેધ કોણ 30^0 માલૂમ પડે છે જો બીજા મિનારાની ઉંચાઈ 160મી હોય, તો પહેલા મિનારાની ઉંચાઈ શોધો.

14. એક શેરીમાં બે મકાન સામ સામે આવેલા છે. એખમાકનની 10મી ઉંચે આવેલી બારીમાંથી જોતાં બીજા મકાનની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 60^0 અને તળિયાનો અવસેધકોણ 45^0 માલૂમ પડે છે. બીજા મકાનની ઉંચાઈ શોધો. ($\sqrt{3}$ =1.73)

15. એક ઓટલા ઉપર 1.6મીટર ઉંચાઈનું એખ પૂતળું મુકેલું છે. જમીન પરના એક બિદુએથી જોતાં પુતળાની ટોચનો અને ઓઠલાની ટોચનો ઉત્સેધકોણ આનુક્રને 60^0 અને 45^0 માલૂમ પડે છે. ઓટલાની ઉંચાઈ શોધો.

તમારી પ્રગતિ ચકાસોના જવાબો

23.1

1. (i) $\frac{5}{4}$ (ii) $\frac{5}{2}$ (iii) 0 (iv) 2 (v) 0 (vi) $\frac{67}{12}$

5. $\sin 30^o = \frac{1}{2}, \cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$

6. $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

7. $A = 45^o$ અને $B = 15^o$

8. $A = 30^o$ અને $B = 15^o$

9. $QR = 5\sqrt{3}$ અને $PR = 10$ સેમી

10. $\angle A = 60^\circ$ અને $\angle C = 30^\circ$

11. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

12. $x = 10^\circ$

13. C

14. B

15. A

23.2

1. 6 મીટર	2. 86.6 મીટર	3. 86.6 મીટર
4. 86.6 મીટર	5. 115.46 મીટર	6. 60°
7. 5.57 મીટર	8. 24.14 મીટર	9. 94.64 મીટર
10. 184.75 મીટર	11. 25.35 મીટર	12. 5.46 મીટર
13. 6.34 મીટર	14. 415.66 કી/મી	15. 16.67 મીટર

સત્રાંત સ્વાધ્યાય જવાબ

1. (I)

$\frac{11}{4}$ $\qquad$ $\frac{7}{2}$ $\qquad$ $\frac{40}{121}$

$\frac{\sqrt{3}}{2\left(\sqrt{3}+1\right)}$

5. $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	6. $A = 60^\circ$ અને $B = 30^\circ$	7. 40m , 29.28 મીટર
8. 433 મીટર	9. 19.124 મીટર	10. 5 મિનીટ
11. 36.6 મીટર	12. 67.5 મીટર	13. 113.8 મીટર
14. 27.3મીટર	15. 2.18656 મીટર	

માધ્યમિક પાઠ્યક્રમ
ગણિત

મહાવરા કાર્ય ત્રિકોણિમિતિ

કુલગુણ **: 25** | *સમય* **: 45** *મિનિટ*

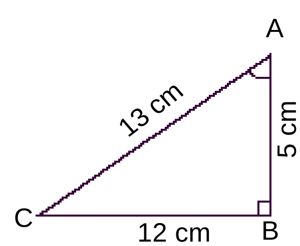
સૂચના :

1. *તમારા પ્રશ્નોના જવાબ અલગ કાગળમાં આપો.*
2. *તમારી જવાબવહીમાં નીચેની માહિતી આપો.*
   - *. નામ*
   - *. નામાંકન ક્રમાંક*
   - *. વિષય*
   - *. મહાવરા કાર્યનો મુદ્દો*
   - *. સરનામું*
3. *તમારું મહાવરા - કાર્ય તમારા અભ્યાસ કેન્દ્રના વિષય શિક્ષક પાસેથી તપાસાવી લો , જેથી તમારી કામગીરી માટે તમને વિધાયક પ્રતિપોષણ મળે.*

તમારું મહાવરા - કાર્ય નેશનલ ઈન્સ્ટીટયુટ ઓફ ઓપન સ્કૂલિંગને મોકલવું નહિં.

1. *આપેલી આકૃતિ પરથી* sin A *ની કિંમત જણાવો,*

1



(A) $\frac{5}{13}$

(B) $\frac{12}{13}$

(C) $\frac{5}{12}$

(D) $\frac{13}{12}$

2. $4 \cot A = 3$, *હોય તો,* $\dfrac{\sin A - \cos A}{\sin A + \cos A}$ *કિંમત શોધો.* 1

(A) $\frac{1}{7}$ (B) $\frac{6}{7}$

(C) $\frac{5}{6}$ (D) $\frac{3}{4}$

3. sec 30^o ની કિમત કેટલી છે. 1

(A) 2 (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(C) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (D) $\sqrt{2}$

4. ΔABC, કાટખૂણો છે. જો .t B, if AB = 6 સેમી અને AC = 12 સેમી હોય તો $\angle A$ નું માપ શોધો.
1

(A) 60^o

(B) 30^o

(C) 45^o

(D) 15^o

5. $\frac{\sin 36^o}{2\cos 54^o} - \frac{2\sec 41^o}{3\,\text{cosec}49^o}$ ની કિંમત શોધો.

(A) – 1

(B) $\frac{1}{6}$

(C) $-\frac{1}{6}$

(D) 1

6. If $\sin A = \frac{1}{2}$, હોય તો બતાવો કે 2

$3\cos A - 4\cos^3 A = 0$

7. $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$, $\sin 15^o$ ની કિંમત શોધો. 2

8. ની કિંમત શોધો. $\tan 15^o \tan 25^o \tan 60^o \tan 65^o \tan 75^o$ 2

9. બતાવોકે (સાબિત કરો કે)

$\sqrt{\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$ 2

10. જો $\sin^2\theta + \sin\theta = 1$, હોય તો સાબિત કરો કે 2

$\cos^2\theta + \cos^4\theta = 1$

11. સાબિત કરો કે

$\dfrac{\cot A + \operatorname{cosec} A - 1}{\cot A - \operatorname{cosec} A + 1} = \dfrac{1+\cos A}{\sin A}$ 4

12. એક મકાનથી 40મી દૂર ઉભેલો માણસ , મકાન પર રાખેલા ધ્વજવંદનની ટોચનો અને ધ્વજદંડના તળિયાનો ઉત્સેધકોણ આનુક્રમે 60^0 અને 45^0 જુએ છે મકાનની ઉંચાઈ તથા ધ્વજદંડની લંબાઈ શોધો. 6

24

માહિતી અને તેની રજૂઆત

પરિચય :

આંકડાશાસ્ત્રએ ગણિતશાસ્ત્રની એવી અગત્યની શાખા છે કે જે મુખ્યત્વે માહિતી અને તેની રજૂઆત સંબંધનો વ્યવહાર સમજાવે છે. આમ પાઠમાં આપણે માહિતીનુ એકત્રિકરણ, વર્ગીકરણ, રજૂઆત અને તેનું પૃથક્કરણ કેવી રીતે કરવામાં આવે છે તેની પ્રાથમિક માહિતી મેળવીશું. વિભાજન કરવાનું અને વર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણમાં વિભાજન કરવાનું શીખીશું. તૈયાર કરેલ આવૃત્તિ વિતરણ પરથી સંચમી આવૃત્તિ વિતરણ અને સંચયન આવૃત્તિ કોષ્ટક બનાવતાં પણ શીખીશું.

ઉપરાંત માહિતીની રજૂઆત લંબાલેખ, સ્તંભાલેખ અને ાવૃત્તિ બહુકોણ જેવા આલેખો દ્વારા કરતાં શીખીશું.

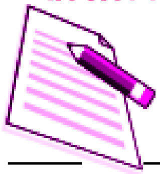
હેતુઓ :

આ પ્રકરણ શીખ્યા પછીની અધ્યેતા

- આંકડાશાસ્ત્ર નો એક વચનમાં અને બહુવચનમાં શું અર્થ થાય છે, તે જાણે
- પ્રાથમિક માહિતી અને ગૌણ માહિતી વચ્ચેનો તફાવત જાણે.
- વર્ગ, આવૃત્તિ ચિહન, વર્ગસીમા, અસતત અને સતત માહિતી, વર્ગ આવૃત્તિ, વર્ગ લંબાઈ વગેરેના ઉદાહરણ દ્વારા અર્થ સમજી શકે.
- આવૃત્તિ કોષ્ટક દ્વારા માહિતીની સંક્ષિપ્ત રજૂઆત કરી શકે.
- એકત્રિત માહિતીનું આવૃત્તિ વિતરણ કોષ્ટક રચી શકે.
- આવૃત્તિ વિતરણ પરથી લંબાલેખ દોરી શકે.
- આપેલી માહિતી માટેનો લંબાલેખ દોરી શકે.
- આપેલી સતત માહિતી માટે સ્તંભાલેખ અને આવૃત્તિ બહુકોણ દોરી શકે.
- દોરેલા લંબાલેખ અને સ્તંભાલેખને વાંચી શકે અને અર્થ તારવી શકે.

અપેક્ષિત પૂર્વજ્ઞાન :

- સંખ્યાઓને ચડતા અને ઉતરતાં ક્રમમાં ગોઠવી શકે.



- બે સંખ્યાઓની સરેરાશ શોધી શકે.
- બે લંબ અક્ષથી વિભાજિત સમતલમાં આવેલ બિંદુનું આલેખ કરી શકે.
- ગુણોતર-પ્રમાણનુ જ્ઞાન અને ગણતરી.

24.1 આંકડાશાસ્ત્ર અને આંકડાકીય માહિતી / સંખ્યાત્મક માહિતી

રોજબરોજના જિવનમાં આપણે નીચે જેવા વિધાનો સંભળવા મળે છે.

1. આ વર્ષે શાળાનું પરિણામ વધારે સારું આવશે.
2. આવતે મહિને પેટ્રોલ-ડીઝલના ભાવ વધશે.
3. સાંજે ભારે વરસાદ આવવાની શક્યાતા.
4. દર્દી જલ્દીથી રોગમુક્ત થઈ જશે વગેરે.

આ વિધાનો ઉપર ધ્યાન કેન્દ્રિત કરો.

- પહેલુ વિધાન શિક્ષક કે શાળાના આચાર્યએ ઉચ્ચાર્યું હોવું જોઈએ. એ દર્શાવવા માગે છે કે આ વર્ષના વિદ્યર્થીઓનો દેખાવ, અગાઉના વર્ષના વિદ્યાર્થીઓ કરતાં વધુ સારો છે.
- બીજુ વિધાન એવી વ્યક્તિએ ઉચ્ચાર્યું હશે, જેણે વર્તમાનપત્રો દ્વારા તેલના ભાવવધારાનું વલણ પારીખ્યું હશે.
- ત્રીજુ વિધાન એવી વ્યક્તિએ ઉચ્ચાર્યું હશે, જે વેધશાળા દ્વારા પ્રગટ થતા હવામાન અંગેના સમાચારથી સતત વાકેફ હરેતો હશે. જો આમ હોય, તો કહી શકાય કે તે વ્યક્તિએ નક્કર અવલોકન કર્યું છે અને હવામાનના વર્તારાનું પૃથક્કરણ કર્યું હશે.
- છેલ્લું વિધાન એવા ડૉક્ટરે ઉચ્ચાર્યું હશે જેની દેખરેખ નીચે પેલો દર્દી સારવાર લેતો હશે.

ઉપર જેવા વિધાનોની વિશ્વસનીયતાનો આધાર વ્યક્તિની અવલોકન શક્તિ પર અને તેની પાસેની સંખ્યાત્મક માહિતીના તેણે કરેલા વિશ્લેષણ પર રહેલો છે. કોઈ ચોક્કસ હેતુસર સંખ્યાત્મક માહિતી એકઠી કરવી, તેનું વર્ગીકરણ કરવું પછી તેનું વિશ્લેષણ (પૃથક્કરણ) કરવું અને છેલ્લે તેમાંથી અર્થઘટન કરીને ચોક્કસ તારણ કાઢવું એ કામ કરતું શાસ્ત્ર એટલે આંકડાશાસ્ત્ર.

સંખ્યાત્મક માહિતીનું એકત્રીકરણ અને વિશ્લેષણનો અભ્યાસ ઘણા સામાજિક પ્રશ્નોના નિરાકરણ માટે ઉપયોગી નીવડે છે, જેમ કે, દેશ્ના આર્થિક વિકાસના પ્રશ્નો, શિક્ષણનો વ્યાપ અને તેના નિકાસનાં પ્રશ્નો, સ્વાસ્થ્ય અને જનસંખ્યાને લગતા પ્રશ્નો, ખેત ઉત્પાદનની વૃદ્ધિ માટેના પ્રશ્નો વગેરે.

નીચેના વિધાનોનું અવલોકન કરતાં તમે જાણી શકશો કે ‘આંકડાશાસ્ત્ર’ શબ્દનો અર્થ જુદા જુદા સંદર્ભમાં જુદો જુદો થાય છે.

1. ભારતની વર્તમાન શૈક્ષણિક પરિસ્થિતિ આંકડાકીય માહિતીની નકલ મારી પાસે હોય ! ()
2. મને આંકડાશાસ્ત્રનો અભ્યાસ ગમે છે. એ એક રસપ્રદ વિષય છે.

પહેલા વિધાનમાં ‘આંકડાશાસ્ત્ર’ શબ્દ એક નામ તરીકે એકવચનમાં વપરાયો છે. એનો અર્થ એવો થાય છે, કે આ એક વિષય છે, જે માહિતીનું વર્ગીકરણ કરે છે, માહિતીને કોષ્ટક સ્પરૂપે દર્શાવે છે,

જે માહિતીનું વર્ગીકરણ કરે છે તેમજ માહિતીની અર્થપૂર્ણ સંક્ષિપત રજૂઆત પણ કરે છે.

24.2 માહિતીનું એકત્રીકરણ

સંશોધનના કોઈપણ ક્ષેત્રનો પ્રારંભ માહિતી એકઠી કરવાથી થાય છે. સંશોધક આ માહિતીનું વિશ્લેષણ કરશે અથવા આંકડાશાસ્ત્રી તેમાંથી કોઈ અનુમાન તરફ દોરી જશે. અને તેથી માહિતી ખૂબ જ વિશ્વસનિય અને નક્કી કરેલા હેતુ સંબંધિત જ હોય તેમજ અગાઉથી નક્કી કરેલી યોજના મુજબ જ એકઠી કરેલી હોય, એ અત્યંત આવશ્યક છે.

જ્યારે સંશોધક પોતે જ માહિતી એકઠી કરવાની જવાબદારી નીભાવે છે, ત્યારે મેળવેલી માહિતી પ્રાથમિક માહિતી કહેવાય છે. દા.ત. મતદારોની યાદી, વસ્તીપત્રક વગેરે માહિતીના ઉદાહરણ છે.

જાતે માહિતી એકઠી કરવાનું સંશોધકને માટે કાયમ શક્ય હોતું નથી. કારણ કે દૂર દૂરના પ્રાપ્તિસ્થાનો એ પહોંચવાનો સમય મેળવી શકાતો નથી. આવા વખતે સંશોધક સરકાર દ્વારા અથવા ખાનગી એકન્સી દ્વારા પ્રસિદ્ધ થતા અહેવાલમાંથી માહિતી મેળવે છે. આવી માહિતીને ગૌણ માહિતી કહે છે. સરકાર કે ખાનગી એજન્સી માટે જ 'પ્રાથમિક માહિતી' છે, તે જ માહિતી સંશોધક ઉપયોગમાં લે, તો તે 'ગૌણ માહિતી' છે.

કોઈ સંશોધકે પોતાના હેતુઓને ધ્યાનમાં રાખીને એકઠી કરેલી માહીતીનો ઉપયોગ અન્ય સંશોધક કરે છે, ત્યારે પોતાના અભ્યાસને લગતી બધી વિગત તેમાંથી ન મળે એમ બનવાની પૂરી શક્યતા છે તેથી આવી માહિતીનો ઉપયોગ ખૂબ જ ચોક્સાઈ પૂર્વક કરવો જોઈએ.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 24.1

1. નીચેના વિધાનોને અર્થપૂર્ણ બનાવવા યોગ્ય 'શબ્દ' કે 'શબ્દસમૂહ' મૂકીને ખાલી જગ્યા પૂરો.

(અ) એકવચનમાં આંકડાશાસ્ત્રનો અર્થ એવો થાય છે કે, તે માહિતીનું .... કરે છે, તેને ...... કરે છે, તેનું વિશ્લેષણ કરે છે તેમજ માહિતી અર્થપૂર્ણ પણ કરે છે

(બ) બહુવચનમાં આંકડાશાસ્ત્ર એટલે ....

(ક) એકઠી કરેલી માહિતી માટે સંશોધક પોતે જવાબદાર હોય, તો તે .... માહિતી કહેવાય.

(ડ) સરકાર દ્વારા અથવા ખાનગી સંસ્થા દ્વારા પ્રસિદ્ધ થતા અહેવાલમાંથી માહિતી મેળવવામાં આવે, ત્યારે તે .... માહિતી કહેવાય છે.

(ઈ) આંકડાશાસ્ત્ર એ એક શાસ્ત્ર/વિજ્ઞાન છે, જે .... નું એકત્રીકરણ, વ્યવસ્થિકરણ, પૃથક્કરણ (વિશ્લેષણ) અને અર્થઘટન છે.

2. સમાજમાં મોટા ભાગના માણસો કયા નંબરના બૂટ પહેરે છે તે નીવેદનને જાણવું છે, તેથી તે દરેકના ઘેર જઈને પ્રશ્ન પૂછે છે અને માહિતી પત્રકમાં ટપકાવે છે. આ રીતે મેળવેલી માહિતી એ .... માહિતીનું ઉદાહરણ છે.

3. ધોરણ 1 થી 12 માં દરેક દિવસ ગેરહાજર વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા જાણવા તમે શાળાના રજીસ્ટરમાંથી માહિતી મેળવોછે. આ રીતે મેળવેલી માહિતીએ .... માહિતીનું ઉદાહરણ છે.

24.3 માહિતીની રજૂઆત :

જ્યારે માહિતી એકઠી કરવાનું કામ પૂરુ થઈ જાય છે, ત્યરે સંશોધનનું પછીનું કામ છે : માહિતીને ટૂંકાવવી, વ્યવસ્થિત કરવી અને ચોક્કસ ક્રમમાં ગોઠવવી કે જેથી અભ્યાસના મુખ્ય મુદ્દાઓ ઉપસી આવે. માહિતીની આવી ગોઠવણીને **માહિતીની રજૂઆત** કહેવામાં આવે છે.

ધારો કે એક વર્ગમાં 20 વિદ્યાર્થીઓ છે. ગણિતની 100 ગુણની કસોટીમાંથી તેઓએ મેળવેલ ગુણ નીચે મુજબ છે :

45, 56, 61, 56, 31, 33, 70, 61, 76, 56,

36, 59, 64, 56, 88, 28, 56, 70, 64, 74

આ માહિતીને કાચી માહિતી કહેવામાં આવે છે. દરેક નોંધ જેમ કે 45,56 વગેરેને કિંમત અથવા અવલોકન કહે છે. માહિતીના આ સ્વરૂપ પર દૃષ્ટિપાત કરીને તમે સૌથી વધુ ગુણ અને સૌથી ઓછા ગુણ શોધી શકશો ?

ચાલો, આપણે આ સંખ્યાઓને ચડતાક્રમમાં ગોઠવીએ :

28, 31, 33, 36, 45, 56, 56, 56, 56, 56,

59, 61, 61, 64, 64, 70, 70, 74, 76, 88 ...(1)

હવે તમે ઝડપથી નીચેનીબાબતો જાણી શકશો :

(અ) સૌથી વધુ ગુણ : 88

(બ) સૌથી ઓછા ગુણ : 28

(ક) 56 ગુણ મેળનાર વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા : 5

(ડ) 60 થી વધુ ગુણ મેળવનાર વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા : 9

પરિણામ (1) મુજબ કરેલી માહિતીની ગોઠવણીને **ક્રમિક ગોઠવણી** કહેવામાં આવે છે.

જ્યારે અવલોકનોની સંખ્યા વધારે હોય, ત્યારે આ રીતની ગોઠવણીમાં ઘણો સમય વેડફાય છે. ઉપરની માહિતીને વધુ અસરકારક બનાવવા માટે આપણે તેને નીચે મુજબના કોષ્ટક દ્વારા દર્શાવીએ.

20 વિદ્યાર્થીઓના ગણિતના ગુણ

ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
28	1
31	1
33	1
36	1
45	1

56	5
59	1
61	2
64	2
70	2
74	1
76	1
88	1
કુલ	20

માહિતીની આ કોષ્ટક સ્વરૂપે રજૂઆતએ સંખ્યાઓની ક્રમિક ગોઠવણીથી કાંઈક વિશેષ છે. કોષ્ટક દ્વારા માહિતીનું ચિત્ર વધુ સ્પષ્ટ બનેછે. કોષ્ટક પરથઈ સરળતાથી જોઈ શકા છે કે 1 *વિદ્યાર્થી* 28 *ગુણ મેળવે છે,* 5 *વિદ્યાર્થીઓ* 56 *ગુણ મેળવે છે,* 2 *વિદ્યાર્થીઓ* 70 *ગુણ મેળવે છે, વગેરે અવલોકનો (અવલોકનોને 'ચલ' પણ કહે છે.)* 28, 31, 33, 36, 45, 56, 70 *વગેરે સામે અનુક્રમે દર્શાવેલ સંખ્યાઓ* 1, 1, 1, 1, 1, 5, 2, ... *ને આવૃત્તિ કહે છે.*

આવા કોષ્ટકને **અવર્ગીકૃત માહિતી માટેનું આવૃત્તિ વિતરણ કોષ્ટક** *અથવા ટૂંકમાં* **અવર્ગીકૃત આવૃત્તિ કષ્ટક** *કહે છે.*

નોંધ : *જ્યારે અવલોકનોની સંખ્યા ઘણી વધારે હોય, ત્યારે એક-એકની ગણતરી કરીને આવૃત્તિ શોધવાનું પ્રતિકૂળ બને છે આવા કિસ્સામાં આપણે ઉભી લીટી (1) જેને આવૃત્તિ ચિહન કહે છે જેનો ઉપયોગ કરીશું. આ રીતે આવૃત્તિ શોધવાનું ઘણું સરળ બનશે.*

(જ્યારે અવલોકનોની સંખ્યા ઘણી વધારે હોય) માહિતીનું રજૂઆતનું વધારે ઘનિષ્ટ સ્વરૂપ મેળવવા આપણે અવલોકનોનું વર્ગોમાં વિભાજન નીચે મુજબ કરીશું.

સોપાન- 1 : *આપણે મૂળ માહિતી/કાચી માહિતીનો વિસ્તાર (મહત્તમ કિંમત અને લઘુત્તમ કિંમત વચ્ચેનો તફાવત) શોધીશું ઉપરના ઉદાહરણમાં વિસ્તાર* $= 88 - 28 = 60$ *છે.*

સોપાન- 2 : *મૂળ માહિતીનું વર્ગેમાં વિભાજન કરવું તે આપણે નક્કી કરશું. કેટલા વર્ગો બનાવવા તે અંગેનો કોઈ ચૂસ્ત નિયમ નથી પરંતુ સામાન્યતઃ* 5 *થી ઓછા નહી અને* 15 *ની વધારે નહી એ રીતે વર્ગોની સંખ્યા રાખવામાં આવે છે.*

સોપાન- 3 : *વર્ગ અંતરાલનું માપ નક્કી કરવા માટે આપણે વિસ્તારને, નક્કી કરેલા વર્ગોની સંખ્યા વડે ભાગીશું. ઉપરના ઉદાહરણમાં ધારો કે આપણે* 9 *વર્ગો બનાવવા છે, તો વર્ગ સંખ્યા*

$$= \frac{60}{9} \approx 7 \; .$$

સોપાન- 4 : *સોપાન-3 માં નક્કી કરેલા વર્ગ અંતરાલનો ઉપયોગ કરીને આપણે વર્ગસીમા નક્કી કરીશું. આપણે ખાતરી કરી લેવી જોઈએ કે લઘુત્તમ કિંમતને સમાવતો અને મહત્તમ કિંમતને*

સમાવશે એવા બે વર્ગો વચ્ચે અંતર હોવું જોઈએ નહીં અને વર્ગો સમાન વર્ગલંબાઈ ના હોવા જોઈએ.

સોપાન-5: *આપણે આપેલી માહિતીમાંથી એક અવલોકન લઈ તેને આવૃત્તિ-ચિહ્ન (--) વડે જે તે વર્ગોમાં દર્શાવીએ. સગવડચા ખાતર આવૃત્તિ-ચિહ્ન પાંચના જૂથમાં નોંધીશું. પાંચમું આવૃત્તિ-ચિહ્ન ચાર આવૃત્તિ-ચિહ્નોને કાપતી ત્રાંસી લીટીથી દર્શાવીશું. ---*

સોપાન- 6 : *દરેક વર્ગમાં આપણે આવૃત્તિ-ચિહ્નોની ગણતરી કરવાથી જે-તે વર્ગની આવૃત્તિ મળે છે. (દેખીતું છે કે બધી ૃત્તિઓ સરવાળો અવલોકનોની સંખ્યા જેટલો થનો જોઈએ.)*

સોપાન- 7 : *આવૃત્તિ કોષ્ટને યોગિય શિર્ષક આપવું જોઈએ જેથી કોષ્ટક કઈ માહિતી દર્શાવી છે તેનો ખ્યાલ આવે છે.*

ઉપરોક્ત સોપાનોનો ઉપયોગ કરીને 20 વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગુણોનું કોષ્ટક નીચે મુજબ મળશે.

20 વિદ્યાર્થીઓએ ગણતરીની કસોટીમાં મેળવેલા, ગુણનું આવૃત્તિ- કોષ્ટક

વર્ગ અંતરાલ (100 ગુણ માંથી મેળવેલ ગુણ)	આવૃત્તિ-ચિહ્ન	આવૃત્તિ
28-34	|||	3
35-41	|	1
42-48	|	1
49-55	....	0
56-62	~~||||~~ |||	8
63-69	||	2
70-76	||||	4
77-83	......	0
84-90	|	1
કુલ		**20**

ઉપરોક્ત કોષ્ટકને વર્ગીકૃત માહિતી માટેનું આવૃત્તિ વિતરણ કોષ્ટક પણ કહેવાય છે. માહિતીના ઉપરોક્ત સ્વરૂપને વર્ગીકૃત માહિતી કહે છે.

ઉપરના કોષ્ટકના વર્ગ 28-34 માં 28, 29, 30, 31, 32, 33 અને 34 અવલોકનો સમાયેલા છે. તે જ રીતે 35-41 ના વર્ગમાં 35, 36, 37, 38, 39, 40 અને 41 અવલોકનો સમાયેવલા છે, વગેરે.

અહીં કોઈ અવલોકનનું પુનરાવર્તન થતું નથી.

28-34 ના વર્ગમાં 28 ને અધઃવર્ગસીમા અને 34 ને ઉર્ધ્વ વર્ગસીમા કહે છે.

આ પ્રકારની રજૂઆતથી માહિતી માટેની વિશેષ જાણકારી (તારણ) મેળવી શકાય છે. જેમ કે,

(1) 28-34 ગુણ મેળવનારા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા 3 છે.

(2) 49 થી 55 ના વર્ગમાં એક પણ વિદ્યાર્થી નથી એટલે કે કોઈ વિદ્યાર્થીએ 49, 50, 51, 52, 53, 54 અને 55 ગુણ મેળવ્યા નથી.

(3) 56 થી 62 ગુણ મેળવનારા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા સૌથી વધુ છે.

20 વિદ્યાર્થીઓના આ સમૂહને નીચેના કોષ્ટક મુજબ 28-35, 35-42, 42-49, 49-56, 56-63, 63-70, 70-77, 77-84 અને 84-91 એવા નવ વર્ગોમાં પણ દર્શાવી શકાય.

અહીં 28-35, 35-42સ વગેરે વર્ગો છે. જુઓ કે 35 બંને વર્ગમાં દેખાય છે પણ તમે જાણો છો કે એક જ અવલોકન એક સાથે બે વર્ગમાં હોઈ શકે નહિં. આ દેખાતી ક્ષતિ નીવારવા માટે સામાન્ય અવલોકન 35 ને ઉંચા વર્ગમાં (બેમાંથી ઉંચી કિંમતવાળા વર્ગમાં) ગણવામાં આવે છે. એટલે કે 35 નું સ્થાન 28-35 ના વર્ગોમાં નહિ પણ 35-42 ના વર્ગમાં છે. એ જ રીતે 42 નું સ્થાન 42-49 ના વર્ગોમાં છે, વગેરે. આમ, 28-35 નો વર્ગ 28 અને 28 થી વધુ કિંમતના પરંતુ 35 થી ઓછી કિંમતના અવલોકનો સમાવે છે.

20 વિદ્યાર્થીઓએ ગણિતની કસોટીમાં મેળવેલા ગુમનું આવૃત્તિ કોષ્ટક

વર્ગ અંતરાલ (100 ગુણ માંથી મેળવેલ ગુણ)	આવૃત્તિ-ચિહ્ન	આવૃત્તિ
28-35	|||	3
35-42	|	1
42-49	|	1
49-56	—	0
56-63	卌 |||	8
63-70	||	2
70-77	||||	4
77-84	—	0
84-91	|	1
કુલ		**20**

શા માટે આપણે ઉપર આપ્યા મુજબનું આવૃત્તિવિતરણ કોષ્ટક તૈયાર કરવું ? બીજા ઉદાહરણ દ્વારા તમને સ્પષ્ટીકરણ મળી જશે.

ધારો કે 50 વિદ્યાર્થીઓના વજનનું આવૃત્તિ વિતરણ કોષ્ટર નીચે મુજબ છે.

વજન (કિ.ગ્રામમાં)	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
31-35	10
36-40	7
41-45	15
45-50	4
51-55	2
56-60	3
61-65	4
66-70	3
71-75	2
કુલ	**50**

ધોરો કે 35.5 કિગ્રા અને 50.54 કિગ્રા વજનવાળા બે વિદ્યાર્થીઓ વર્ગમાં પ્રવેશ મેળવે છે. આપણે તેઓને વજનના કયા વર્ગમાં સમાવીશું ? 35.5 કિગ્રા વજનવાળાને 31-35 ના વર્ગમાં ગોઠવી શકાય ? 36-40 ના વર્ગમાં ગોઠવી શકાય ? ના 31-35 નો વર્ગ માત્ર 35 સુધીનો છે અને 36-40 નો વર્ગ 36-35 માત્ર 35 સુધીનો છે અને 36-40 નો વર્ગ 36 (થી શરૂ થાય છે) અને તેની ઉપરનો છે. આમ, એક વર્ગની ઉધ્ર્વસીમા અને પછીના વર્ગની અધઃસીમા વચ્ચે ગાળો ઊભો થાય છે. આ મુશ્કેલી નિવારવા માટે આ ગાળાને આપણએ એવી રીતે વિભાજિત કરીશું કે જેથી એક વર્ગની ઉર્ધ્વસીમા અને પછીના વર્ગની અધઃસીમા એક જ હોય. આ માટે આપણે એક વર્ગની ઉર્ધ્વસીમા અને પછી વર્ગની અધઃસીમા વચ્ચેનો તફાવત જાણીશું.

આ તફાવતનું અડધું પ્રત્યેક ઉર્ધ્વસીમામાં ઉમેરીશું અને પ્રત્યેક અધઃસીમામાંથી બાદ કરીશું. દાખલા તરીકે,

31-35 અને 36-40 એવા પાસપાસેના બે વર્ગો લઈએ, તો 36-40 ના વર્ગની અધઃસીમા 36 અને 31-35 ની વર્ગની ઉર્ધ્વસીમા 35 છે.

તેથી તફાવત $= 36\text{-}35 = 1$, અને તફાવતનું અડધું $= \frac{1}{2} = 0.5$ હવે 31-35 નો નવો અંતરાલ $(31 - 0.5) - (35 + 0.5)$, એટલે $30.5 - 35.5$. બનશે. એજ રીતે 36-40 વાળો વર્ગ $(36 - 0.5) - (40 + 0.5)$, એટલે $35.5 - 40.5$ બનશે, વગેરે.

આ રીતે નવા વર્ગો 30.5-35.5, 35.5-40.5, 40.5-45.5, 45.5-50.5, 50.5-55ર.5,55.5-60.5,60.5-65.5, 65.5-70.5 અને 70.5-75.5. બનશે. આ વર્ગો હવે સતત વર્ગો છે.

જુઓ કે વર્ગની વર્ગલંબાઈ પહેલાની જેમ 5 જ છે. આ ફેરફાર કરેલી સીમાને વાસ્તવિક વર્ગ સીમા કહે છે. આમ, 30.5-35.5 ના વર્ગ માટે 30.5 એ વાસ્તવિક અધ:સીમા અને 35.5 એ વાસ્તવિક ઉર્ધ્વસીમા છે.

હવે નવા વિદ્યાર્થીઓના વજન સામેલ કરી શકીશું ? કયા વર્ગમાં ?

દેખીતી રીતે, 35.5 ને 35.5-40.5 વાળા વર્ગમાં અને 50.54 ને 50.5-55.5 વાળા વર્ગમાં સમાવી શકાશે. (તમે કારણ આપ્ર સખશો?).

આ રીતે, નવું આવૃત્તિ વિતરણ નીચે મુજબ મળશે.

વજન (કિગ્રામાં)	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
30.5-35.5	10
35.5-40.5	8
40.5-45.5	15
45.5-50.5	4
50.5-55.5	3
55.5-60.5	3
60.5-65.5	4
65.5-70.5	3
70.5-75.5	2
કુલ	52

૩૫.૫ આ વર્ગમાં સામેલ કર્યું.

૫૦.૫૪ આ વર્ગમાં સામેલ કર્યું.

નોંધ : ઉપરના ઉદાહરણ માટે આપણે 30-35, 35-40, 40-45, ..., 65-70 અને 70-75 એવા વર્ગો પણ લઈ શક્યા હોત.

ઉદાહરણ 24.1: નીચે 32 માણસોનું દૈનિક ભથ્થું (રૂપિયા) આપ્યું છે. તે પરથી 10 વર્ગ લંબાઈવાળા આવૃત્તિવિતરણની રચના કરો.

110	184	129	141	105	134	136	176	155
145	150	160	160	152	201	159	203	146
177	139	105	140	190	158	203	108	129
118	112	169	140	185				

ઉકેલ : માહિતીનો વિસ્તાર $= 205 - 105 = 98$

10 વર્ગલંબાઈ વાળા 10 વર્ગો બનશે.

ઉપરોક્ત માહિતી માટેનું આવૃત્તિ વિતરણ કોષ્ટક નીચે આપ્યું છે.

32 માણસોનું દૈનિક ભથ્થુ દર્શાવતું આવૃત્તિ કોષ્ટક

દૈનિક ભથ્થું (રૂા. માં)	આવૃત્તિ ચિહ્ન	માણસોની સંખ્યા અથવા આવૃત્તિ
105-115	𝍸	5
115-125	|	1
125-135	|||	3
135-145	𝍸	5
145-155	||||	4
155-165	𝍸	5
165-175	|	1
175-185	|||	3
185-195	||	2
195-205	|||	3
કુલ		**32**

ઉદાહરણ 24.2: 30 *વિદ્યાર્થીઓની ઉંચાઈ (સેમીમાં) નીચે મુજબ છે.*

161	151	153	165	167	154
162	163	170	165	157	156
153	160	160	170	161	167
154	151	152	156	157	160
161	160	163	167	168	158

(1) વર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણ કોષ્ટક તૈયારી કરો, જેમાં 161-165, 166-170.

(2) આ કોષ્ટક ઉપરથી વિદ્યાર્થીઓની ઉંચાઈ અંગે તમારું તારણ જણાવો ?

ઉકેલ :

(1)30 વિદ્યાર્થીઓની ઉંચાઈ દર્શાવતું આવૃત્તિ વિતરણ કોષ્ટક

ઉંચાઈ (સેમીમાં)	આવૃત્તિ ચિહ્ન	આવૃત્તિ
151-155	卌 ||	7
156-160	卌 ||||	9
161-165	卌 |||	8
166-170	卌 |	6
કુલ		**30**

(2) ઉપરના કોષ્ટક પરથી એ તારવી શકાય છે કે 50 % થી વધારે વિદ્યાર્થીઓ (એટલે કે 16) ની ઉંચાઈ 160 સેમીથી ઓછી છે.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 24.2

1. કાચી (મૂળ) માહિતી અને વ્યવસ્થિત (ક્રમિક ગોઠવણી) માહિતીનું એક ઉદાહરણ આપો.

2. ધોરણ 9 ની 30 વિદ્યાર્થીઓની ઉંચાઈ (સેમીમાં) નીચે મુજબ છે તે પરથી માહિતીનો વિસ્તાર શોધો.

140	140	160	139	153	146	151	150	150	154
148	158	151	160	150	149	148	140	148	153
140	139	150	152	149	142	152	140	146	148

3. પ્રાથમિક માહિતી અને ગૌણ માહિતી વચ્ચેનો તફાવત જણાવો.

4. ગણિત મહોત્સવમાં ધોરણ-9 ના 30 વિદ્યાર્થીઓએ ભાગ લીધો તેમણે મેળવેલા ગુણ નીચે મુજબ છે.

46	31	74	68	42	54	14	93	72	53
59	38	16	88	27	44	63	43	81	64
77	62	53	40	71	60	8	68	50	58

આ માહિતી પરથી 0-9, 10-19, વગેરે વર્ગો લઈને આવૃત્તિ વિતરણ તૈયાર કરો. તે પરથી 49 થી વધુ ગુણ મેળવનારા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા શોધો.

5. નીચેની માહિતી માટે સરખી વર્ગલંબાઈવાળું આવૃત્તિવિતરણ તૈયાર કરો જેનો એક વર્ગ 250-270 (270 તે વર્ગમાં નથી) હોય.

268	230	368	248	242	310	272	342
310	300	300	320	315	304	402	316
406	292	355	248	210	240	330	316
406	215	262	238				

6. શાળાના 40 શિક્ષકોની ઉંમર (વર્ષમાં) નું આવૃત્તિ વિતરણ કોષ્ટક નીચે મુજબ છે.

ઉંમર (વર્ષમાં)	શિક્ષકોની સંખ્યા
25-31	12
31-37	15
37-43	7
43-49	5
49-55	1
કુલ	40

(1) વર્ગલંબાઈ કેટલી છે ?

(2) 37-43 ના વર્ગની ઉર્ધ્વ વર્ગ સીમા જણાવો ?

(3) 49-55 વર્ગની અધ:વર્ગસીમાં જણાવો ?

24.4 સંચયી આવૃત્તિ વિતરણ

નીચેનું આવૃત્તિ વિતરણ વિચારો :

વજન (કિગ્રામાં)	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
30-35	10
35-40	7
40-45	15
45-50	4
50-55	2
55-60	3
60-65	4
65-70	3
70-75	2
કુલ	**50**

હવે, નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપવાનો પ્રયત્ન કરો.

(1) કેટલા વિદ્યાર્થીઓનું વજન 35 કિગ્રાથી ઓછું છે ?

(2) કેટલા વિદ્યાર્થીઓનું વજન 50 કિગ્રાથી ઓછું છે ?

(3) કેટલા વિદ્યાર્થીઓનું વજન 60 કિગ્રાથી ઓછું છે ?

(4) કેટલા વિદ્યાર્થીઓનું વજન 70 કિગ્રાથી ઓછું છે ?

ચાલો, આપણે નીચેની રીતે જવાબ તૈયાર કરીએ :

વજન		*વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા*
35 *કિગ્રાથી ઓછું*	:	10
40 *કિગ્રાથી ઓછું*	:	$(10) + 7 = 17$
45 *કિગ્રાથી ઓછું*	:	$(10 + 7) + 15 = 32$
50 *કિગ્રાથી ઓછું*	:	$(10 + 7 + 15) + 4 = 36$
55 *કિગ્રાથી ઓછું*	:	$(10 + 7 + 15 + 4) + 2 = 38$
60 *કિગ્રાથી ઓછું*	:	$(10 + 7 + 15 + 4 + 2) + 3 = 41$
65 *કિગ્રાથી ઓછું*	:	$(10 + 7 + 15 + 4 + 2 + 3) + 4 = 45$
70 *કિગ્રાથી ઓછું*	:	$(10 + 7 + 15 + 4 + 2 + 3 + 4) + 3 = 48$
75 *કિગ્રાથી ઓછું*	:	$(10 + 7 + 15 + 4 + 2 + 3 + 4 + 3) + 2 = 50$

ઉપરની ગોઠવણી પરથી પ્રશ્નોના જવાબ મેળવવાનું ઘણું-ઘણું સરળ બની જાય છે. પ્રશ્ન (1), (2), (3) અને (4) નો જવાબ અનુક્રમે 10, 36, 41 અને 48 છે.

ઉપર મેળવેલી આવૃત્તિ 10, 17, 32, 36, 38, 41, 48, 50 ને જે-તે વર્ગની સંચય આવૃત્તિ કહે છે. જુઓ, છેલ્લા વર્ગની (એટલે કે 70-75ની) સંચયી આવૃત્તિ અવલોકનોની કુલ સંખ્યા 50 જેટલી છે. (અહીં અવલોકનોની કુલ સંખ્યા એટલે વિદ્યાર્થીઓની કુલ સંખ્યા છે.)

જો વર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણના કોષ્ટકમાં સંચયી આવૃત્તિ દર્શાવતો એક સ્તંભ ઉમેરી દઈએ, તો દરેક વર્ગની સંચયી આવૃત્તિ સરળતાથી જાણી શકાય. આવા કોષ્ટકને માહિતીનું સંચયી આવૃત્તિ વિતરણ અથવા સંચયી કોષ્ટક કહે છે.

સંચયી આવૃત્તિ વિતરણ કોષ્ટક

વજન (કિ.ગ્રામાં)	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા અથવા આવૃત્તિ	સંચયી આવૃત્તિ
0-35	10	10
35-40	7	17
40-45	15	32
45-50	4	36
50-55	2	38
55-60	3	41
60-65	4	45
65-70	3	48
70-75	2	50
કુલ	**50**	

ઉદાહરણ 24.3: *એક હજાર કર્મચારીઓની અઠવાડીક આવક દર્શાવતું આવૃત્તિ વિતરણ નીચે મુજબ છે.*

અઠવાડિક આવક (રૂ.માં)	કર્મચારીઓની સંખ્યા
0-1000	12
1000-2000	35
2000-3000	75
3000-4000	225
4000-5000	295
5000-6000	163
6000-7000	140
7000-8000	55
કુલ	**1000**

ઉપરના કોષ્ટકનું સંચયી આવૃત્તિ વિતરણ તૈયાર કરો અને નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

અઠવાડીયા દરમિયાન ,

(1) રૂ. 2000 થી ઓછું કમાતા કર્મચારીઓની સંખ્યા કેટલી છે ?

(2) રૂ. 5000 થી ઓછું કમાતા કર્મચારીઓની સંખ્યા કેટલી છે ?

(3) રૂ. 8000 થી ઓછું કમાતા કર્મચારીઓની સંખ્યા કેટલી છે ?

ઉકેલ : *સંચયી આવૃત્તિવિતરણ નીચે મુજબ મળશે.*

સંચયી આવૃત્તિ કોષ્ટક

અઠવાડિક આવક (રૂ. માં)	કર્મચારીઓની સંખ્યા (આવૃત્તિ)	સંચયી આવૃત્તિ
0-1000	12	12
1000-2000	35	47
2000-3000	75	122
3000-4000	225	347
4000-5000	295	642
5000-6000	163	805
6000-7000	140	945
7000-8000	55	1000
કુલ	**1000**	

કોષ્ટક પરથી જાણી શકાય છે કે,

(1) રૂા. 2000 થી ઓછું કમાતા કર્મચારીઓ 47 છે.

(2) રૂા. 5000 થી ઓછું કમાતા કર્મચારીઓ 642 છે.

(3) રૂા. 8000 થી ઓછું કમાતા કર્મચારીઓ 1000 છે.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 24.3

1. નીચેના આવૃત્તિ વિતરણોને સંચયી આવૃત્તિ વિતરણમાં ફેરવો.

(i)

વર્ગ	આવૃત્તિ
1-5	4
6-10	6
11-15	10
16-20	13
21-25	6
26-30	2

(ii)

વર્ગ	આવૃત્તિ
0-10	3
10-20	10
20-30	24
30-40	32
40-50	9
50-60	7

2. નીચેની માહિતી માટે સંચય આવૃત્તિ વિતરણ રચો.

ઉંચાઈ (સેમીમાં)	110-120	120-130	130-140	140-150	150-160	કુલ
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	14	30	60	42	14	160

કેટલા વિદ્યાર્થીઓની ઉંચાઈ 150 સેમીથી ઓછી છે ?

24.5 માહિતીની આલેખાત્મક રજૂઆત

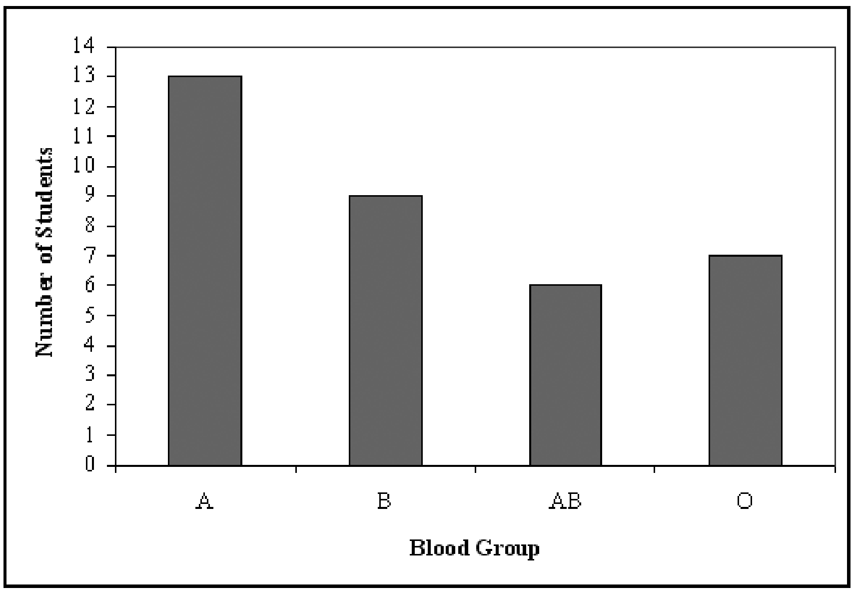
24.5.1 લંબરેખા (Ber Charts / Graphs)

અગાઉ આપણે માહિતી અંગેની ચર્ચા કોષ્ટક દ્વારા કરી છે. માહિતીને રજૂ કરવાની બીજી રીત છે- આલેખાત્મક રજૂઆત. આલેખાત્મક રજૂઆતએ માહિતીની બાબતોની પારસ્પરિક સરખામણી કરવાનો સૌથી સરળ રસ્તો છે. સંખ્યાત્મક માહિતીની આલેખાત્મક રજૂઆત કરવાની એક રીત **લંબાલેખ** છે. દાખલા તરીકે નીચે બ્લડગ્રૂપ અંગેની રજૂઆત કોષ્ટક સ્વરૂપે કરેલી છે.

વર્ગના 35 વિદ્યાર્થીઓના બ્લડગ્રૂપ દર્શાવતું કોષ્ટક

બ્લડ ગ્રૂપ	*વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા*
A	13
B	9
AB	6
O	7
કુલ	**35**

આપણે વર્લ્ડ આ માહિતીની રજૂઆત આકૃતિ 24.1 મુજબ કરીએ :



આલેખ 24.1

આને **લંબાલેખ** *કહેવામાં આવે છે.*

બધા સ્તંભ સરખી પહોળાઈના ઉભા લંબ ચરસ છે. તેમની વચ્ચે સરખું અંતર રાખવામાં આવે છે. અને બધા સ્તંભ X- અક્ષ ઉપર દોરવામાં આવે છે. લંબચોરસની (સ્તંભની) ઉંચાઈ Y- અક્ષ ઉપર દર્શાવવામાં આવે છે.અને આવૃત્તિના સમપ્રમાણમાં હોય છે. (અહિં આવૃત્તિ એટલે વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા) સ્તંભની પહોળાઈ ખાસ કોઈ અર્થ નથી, માત્ર આકર્ષક દેખાય એજ હેતુ છે. જો તમને આકૃતિ 24-1 નો લંબાલેખ આપવામાં આવે, તો તેમે તેમાંથી શું સાર મેળવી શકો ?

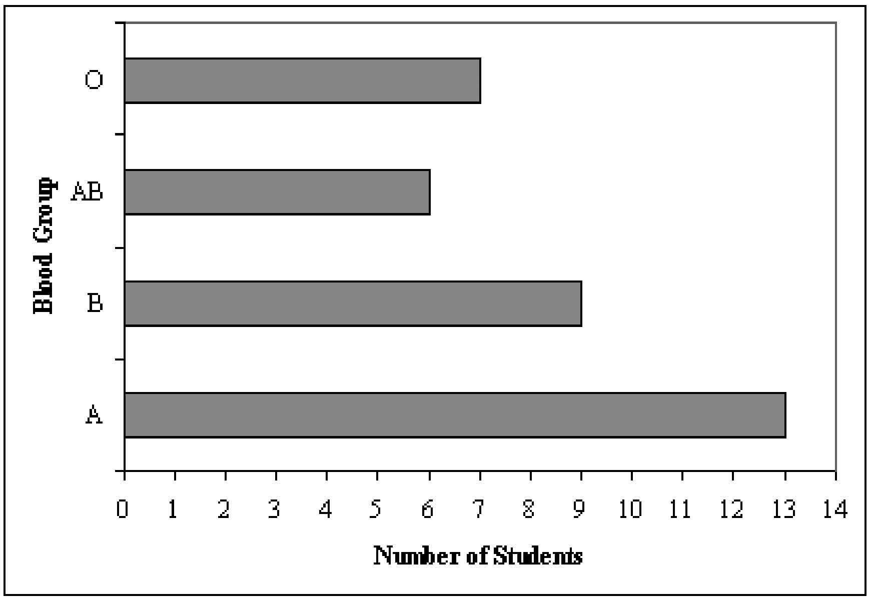
તમે તારવી શકશો કે,

(1) વર્ગમાં A બ્લડગ્રૂપ ધરાવતા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા સૌથી વધારે છે.

(2) વર્ગમાં AB બ્લડગ્રૂપ ધરાવતા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા સૌથી ઓછી છે.

સામાન્યત : અર્થશાસ્ત્રીઓ, વ્યાપારીઓ, આરોગ્ય સંબંધિત સામયિકો, સરકારી ખાતાઓ, વગેરે માહિતીની રજૂઆતમાં લંબાલેખનો ઉપયગ કરે છે.

લંબાલેખનું બીજુ સ્વરૂપ નીચે આકૃત્તિ 24.2 માં દર્શાવ્યું છે. અહીં બ્લડગ્રૂપ y- અક્ષ ઉપર અને આવૃત્તિ x- અક્ષ ઉપર દર્શાવ્યા છે.



આકૃત્તિ 24.2

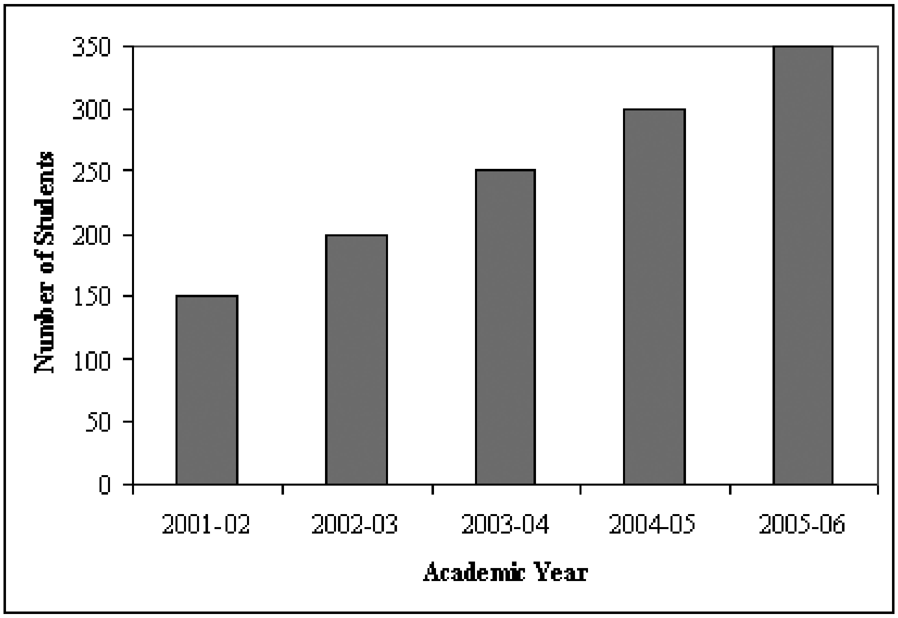
આકૃત્તિ 24.1 અને 24.2 માં ખાસ કોઈ મહત્વનો તફાવત નથી. કોઈ સંશોધકની પસંદ ઉભા સ્તંભની હોય, તો કોઈની આડા સ્તંભની સામાન્ય રીતે ઉભા સ્તંભ દોરવાનું પસંદ કરવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ 24.4: શૈક્ષણિક વર્ષ 2001-02 થી 2005-06 દરમિયાન ધોરણ-9 ના વર્ગમાં રહેલી વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા દર્શાવતો લંબાલેખ નીચે મુજબ છે. (આકૃત્તિ24.3) તે જોઈને નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(1) લંબાલેખ દ્વારા કઈ માહિતી પૂરી પાડવામાં આવી છે ?

(2) કયા વર્ષનાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા પાડવામાં 250 હતી ?

(3) વર્ષ 2001-02 કરતાં વર્ષ 2002-03 માં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા બમણી થઈ. સાચું કે ખોટું?



આકૃતિ 24.3

ઉકેલ:

(1) શૈક્ષણિક વર્ષ 2001-02 થી 2005-06 દરમિયાન શાળાના ધોરણ-9 ના વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા દર્શાવતો લંબાલેખ છે.

(2) શૈ. વર્ષ 2003-04 દરમિયાન વર્ગમાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા 250 હતી.

(3) વર્ષ 2002-03 માં નામાંકન $= 200$

વર્ષ 2001-02 માં નામાંકન $= 150$

$$\frac{200}{150} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3} < 2$$

તેથી આપેલું વિધાન ખોટું છે.

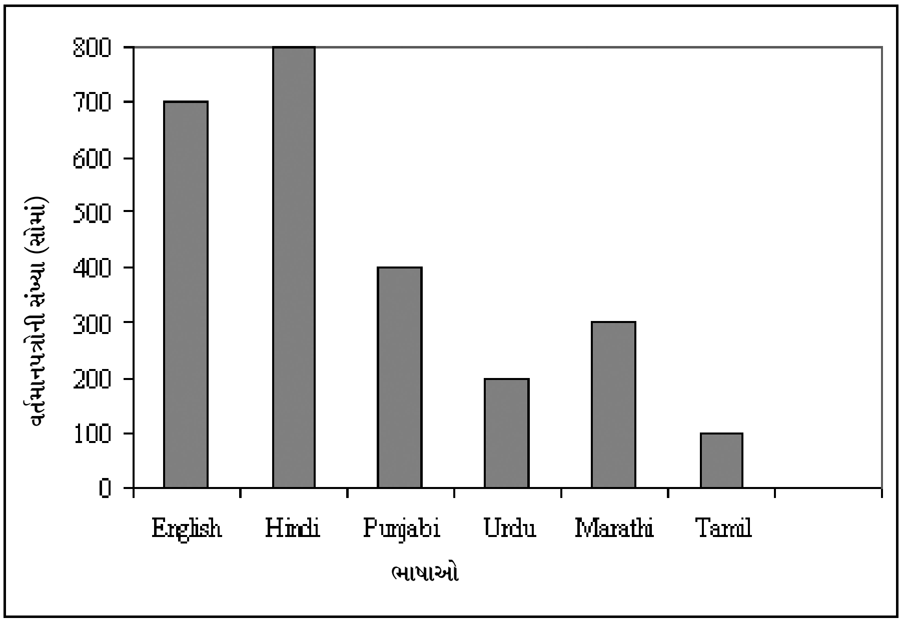
ઉદાહરણ 24.5: એક શહેરમાં છ ભાષાઓમાં પ્રસિદ્ધ થતાં વિર્તમાનપત્રોન ફેલાવાના આંકડા (સોમાં) દર્શાવતો લંબાલેખ (આકૃત્તિ 24.4) આપ્યો છે. તેનો અભ્યાસ કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(1) હિન્દી, અંગ્રેજી અને તમીલના વંચાતા વર્તમાનપત્રોની કુલ સંખ્યા કરતાં હિન્દીમાં વંચાતા વર્તમાનપત્રોની સંખ્યા કેટલી વધારે છે ?

(2) ઉર્દુ, મરાઠી અને તામીલના વંચાતા વર્માનપત્રોની કુલ સંખ્યા કરતાં હિન્દીમાં વંચાતા વર્તમાનપત્રોની સંખ્યા કેટલી વધારે છે ?

(3) કઈ ભાષાના વર્તમાનપત્રો સૌથી ઓછી સંખ્યામાં વંચાય છે ?

(4) વંચાતા વર્તમાનપત્રોને ભાષાઓને ચડતા ક્રમમાં ગોઠવો.



આકૃત્તિ 24.4

ઉકેલ :

(1) હિન્દી, અંગ્રેજી અને પંજાબીમાં વંચાતા વર્તમાનપત્રોની સંખ્યા $= 800 + 700 + 400 = 1900$ (સો)

(2) હિન્દીમાં વંચાતા વર્તમાનપત્રોની સંખ્યા $= 800$ (સો)

ઉર્દુ, મરાઠી અને તમીલમાં વંચાતા વર્માનપત્રોની સંખ્યા $= 200 + 300 + 100 = 600$ (સો)

તેથી તફાવત $= 800 - 600) = 200$ (સો)

(3) તમીલમાં વંચાતા વર્તમાનપત્રોની સંખ્યા સૌથી ઓછી છે.

(4) તમીલ, ઉર્દુ, મરાઠી, પંજાબી, અંગ્રેજી, હિન્દી

લંબાલેખની રચના

હવે આપણે લંબાલેખની રચના ઉદાહરણ દ્વારા સમજીએ :

ઉદાહરણ 24.6: વર્ષ 2000 થી 2004 દરમિયાન બેંકે આપેલા લોન (ધિરાણ) ના આંકડા (કરોડ રૂપિયામાં) નીચે મુજબ છે.

વર્ષ	લોન (કરોડ રૂપિયામાં)
2000	25
2001	30
2002	40
2003	55
2004	60

ઉપરોક્ત માહિતી માટે લંબલેખ દોરો.

ઉકેલ :

સોપાન 1: *એક આલેખ પત્ર લો અને તેના પર બે લંબ રેખાઓ દોરો અને તેમને ક્ષૈતિજ અક્ષ્ ને લંબઅક્ષ એવા નામ આપો.*

સોપાન 2: *વર્ષને ક્ષૈતિજ અક્ષ પર અને વર્ષ સંબંધિત લોનની રકમ (કરોડ રૂપિયામાં) ને લંબ અક્ષ પર દર્શાવો.*

સોપાન3: *સ્તંભોની અનુકૂળ પહોળાઈ અને બે સ્તંભો વચ્ચેનું અનુકૂળ અંતર આલેખપત્રની મર્યાદામાં નક્કી કરો.*

સોપાન 4: *આપેલી માહિતીને ધ્યાનમાં લઈને લંબ-અક્ષ માટે યોગ્ય પ્રમાણમાપ નક્કી કરો.*

આલેખપત્રનો 1 એકમ = આપેલી માહિતીના 10 કરોડ રૂપિયા એવું પ્રમાણમાપ લઈએ.

સોપાન 5: *જુદા જુદા વર્ષ માટેની સ્તંભની ઉંચાઈ નીચે મુજબ ગણો.*

$$2000 : \frac{1}{10} \times 25 = 2.5 \text{ એકમ}$$

$$2001 : \frac{1}{10} \times 30 = 3 \text{ એકમ}$$

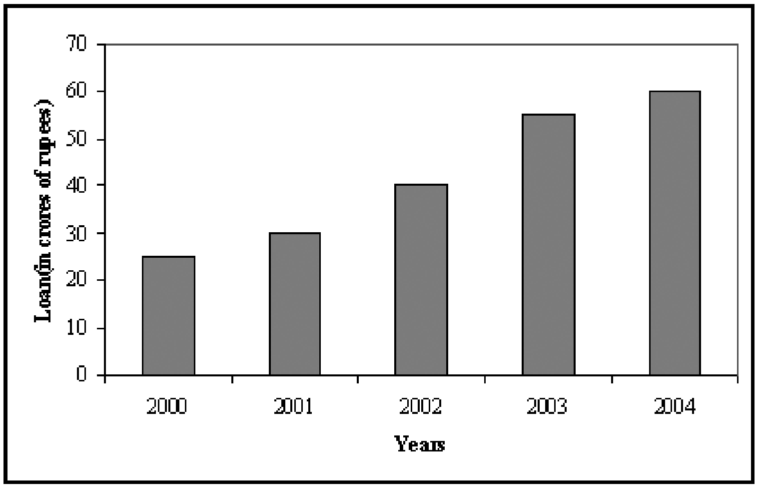
$$2002 : \frac{1}{10} \times 40 = 4 \text{ એકમ}$$

$$2003 : \frac{1}{10} \times 55 = 5.5 \text{ એકમ}$$

$$2004 : \frac{1}{10} \times 60 = 6 \text{ એકમ}$$

સોપાન 6: *એક સરખી જાડાઈ (પહોળાઈ) ના સ્તંભ દરેક વચ્ચે સરખું અંતર રાખીને સોપાન 5 માં ગણ્યા મુજબની ઉંચાઈના દોરો. આકૃતિ 24.5*

વર્ષ 2000 થી 2004 દરમિયાન બેંકે આપેલા લોનનો લંબાલેખ
(રકમ કરોડ રૂપિયામાં દર્શાવી છે)

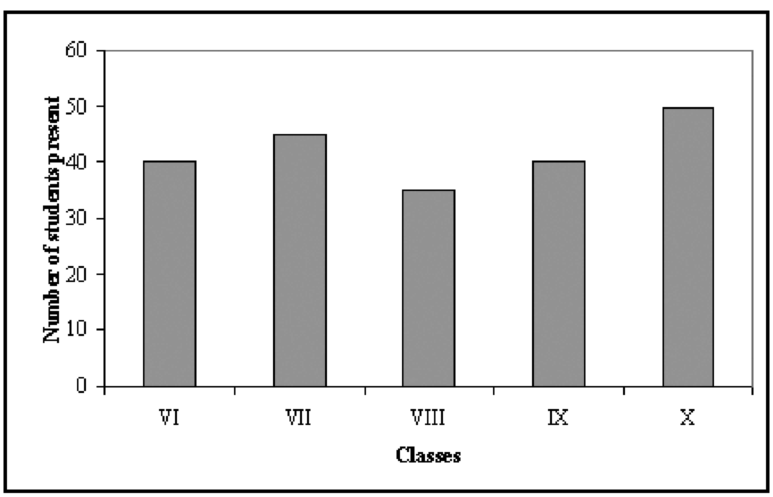


આકૃતિ 24.5

ઉદાહરણ 24.7: *શાળાના જુદા જુદા વર્ગમાં કોઈ એક દિવસે હાજર વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા નીચે મુજબ છે. તેને અનુરૂપ લંબાલેખ દોરો.*

વર્ગ	VI	VII	VIII	IX	X
હાજર સંખ્યા	40	45	35	40	50

ઉકેલ : *ઉપરની માહિતી માટેનો લંબાલેખ નીચે આકૃતિ 24.6 મુજબ થશે. પ્રમાણમાપ : લંબ અક્ષ ઉપર 1 સેમી = 10 વિદ્યાર્થીઓ*



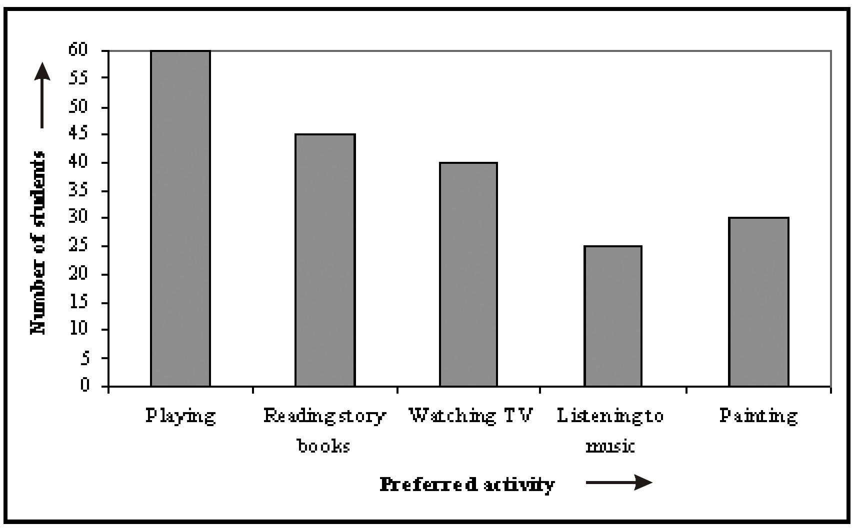
આકૃતિ 24.6

ઉદાહરણ 24.8: *'તમને ફાજલ સમયમાં કઈ પ્રવૃત્તિ કરવાનું ગમે છે ?' એવા પ્રશ્નનો ઉત્તર શાળાના 200 વિદ્યાર્થીઓ પાસેથી મેળવ્યો, જે નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવ્યું છે. તે પરથી લંબાલંખની રચના કરો.*

પ્રવૃત્તિની પસંદગી	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
રમતો રમવી	60
વાર્તાની ચોપડીઓ વાંચવી	45
ટી.વી. જોવું	40
સંગીત સાંભળવું	25
ચિત્રો દોરવા	30

ઉકેલ : *ઉપરની માહિતી પરથી મળતો લંબાલેખ આકૃતિ 24.7 માં દર્શાવ્યો છે.*

પ્રમાણમાપ : લંબઅક્ષ ઉપર 1 સેમી = 10 વિદ્યાર્થીઓ



આકૃતિ 24.7

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 24.4

1. *ખાલી જગ્યા પૂરો :*

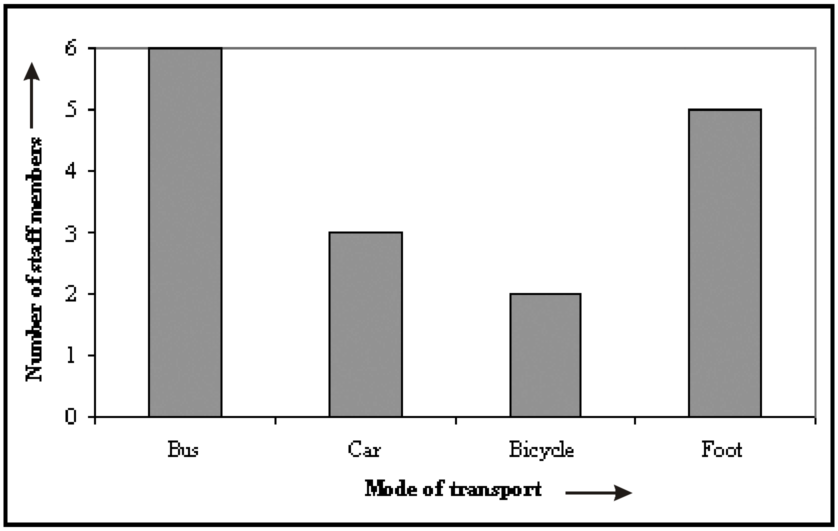
(અ) સરખી પહોળાઈના .... વડે રચેલો લંબાલેખએ સંખ્યાત્મક માહિતીની આલેખાત્મક રજૂઆત છે.

(બ) લંબાલેખમાં બધા ઉભા લંબચોરસ વચ્ચે .... જગ્યા છોડવામાં આવે છે.

(ક) લંબાલેખમાં પ્રત્યેક લંબચોરસની ઉંચાઈ માહિતીના .... છે.

2. શાળાના કર્મચારીઓ કઈ રીતે શાળાએ પહોંચે છે તે દર્શાવતો લંબાલેખ નીચે આપ્યો છે.
(પ્રમાણમાપ = y - અક્ષ પર 1 સેમી = 1 કર્મચારી)

શાળાના કર્મચારીઓનું પરિવહન



આકૃતિ 24.8

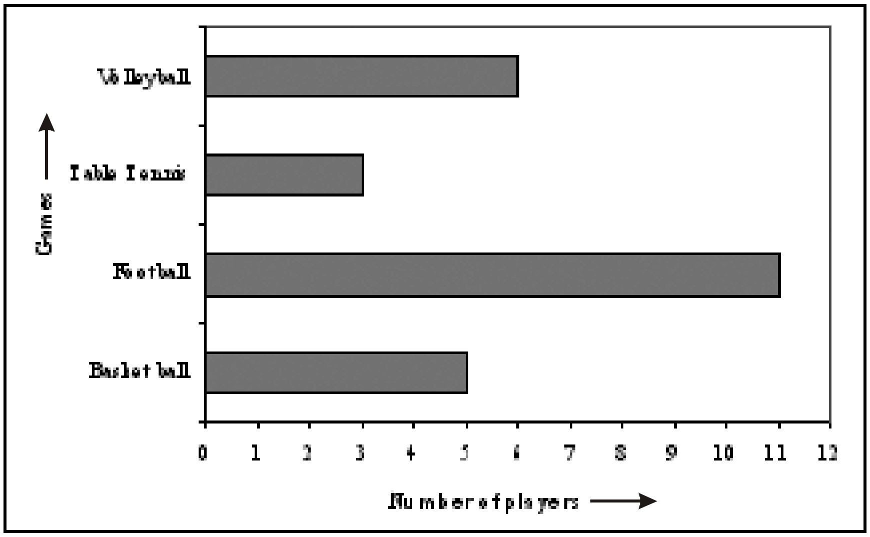
ઉપરના લંબાલેખનો અભ્યાસ કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(1) કેટલા કર્મચારીઓ સાઈકલ દ્વારા શાળાએ પહોંચે છે ?

(2) કેટલા કર્મચારી બસ દ્વારા શાળાએ પહોંચે છે ?

(3) મોટાભાગના કર્મચારીઓ પરિવહનનો કયો માર્ગ અપનાવે છે ?

3. નીચેના લંબાલેખમાં ચાર રમતોમાં ભાગ લેતા ખેલાડીઓની સંખ્યા દર્શાવી છે.
(પ્રમાણમાપ = ક્ષૈતિજ અક્ષ પર 1 સેમી = 1 ખેલાડી)



આકૃતિ 24.9

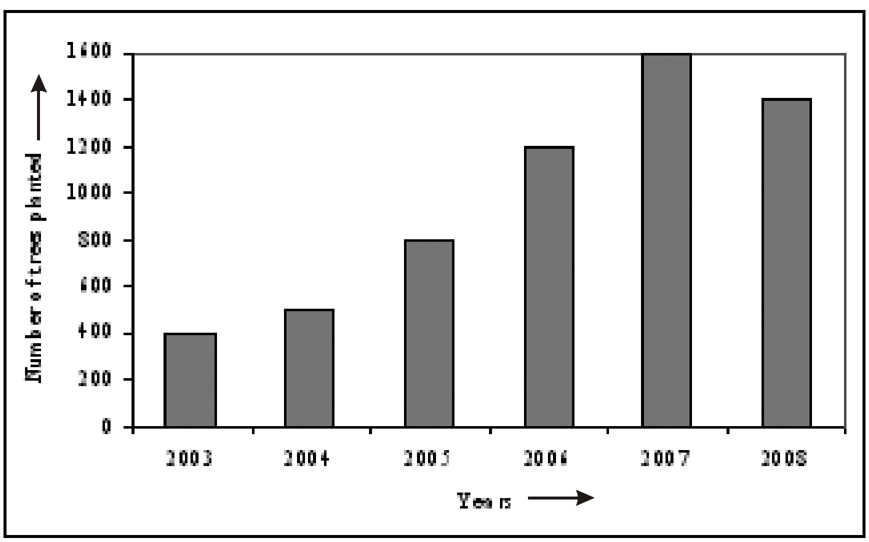
આપેલા લંબાલેખનો અભ્યાસ કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(1) વોલીબોલ ટીમમાં કેટલા ખેલાડીઓ રમે છે ?

(2) સૌથી વધુ ખેલાડીઓ રમતા હોય, તેવી રમત કઈ છે ?

(3) કઈ રમતમાં માત્ર ત્રણ ખેલાડીઓ રમે છે ?

4. વૃક્ષારોપણ પર્વ વખતે એક સંસ્થાએ જુદા જુદા વર્ષે કેટલા છોડ રોપ્યા તેની માહિતી નીચેના લંબાલેખમાં દર્શાવી છે. (પ્રમાણમાપ = લંબ અક્ષ પર 1 સેમી = 200 છોડ)



આકૃતિ 24. 10

ઉપરના લંબાલેખ પરથી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

1. 2003 થી 2008 દરમિયાન સંસ્થાએ કુલ કેટલા છોડ રોપ્યા ?
2. કયા વર્ષે સૌથી વધુ છોડ રોપ્યા ?
3. કયા વર્ષો સૌથી ઓછા છોડ રાપ્યા ?
4. આગળના વર્ષ કરતાં ઓછા છોડ રોપાયાં હોય એવું વર્ષ કયું છે ?

(5) એક કંપનીએ વર્ષ દરમિયાન જુદા જુદા ખાતામાં કરેલ ખર્ચની વિગત નીચે મુજબ છે. આ માહિતીને રજૂ કરતો લંબાલેખ દોરો.

ખાતાનું નામ	**ખર્ચ (લાખ રૂપિયામાં)**
કર્મચારીઓનો પગાર	200
મુસાફરી / પ્રવાસ	100
પાણી અને વિજળી	50
ભાડું	125
અન્ય	150

24.5.2 સ્તંભાલેખ અને આવૃત્તિ બહુકોણ

અગાઉ આપણે માહિતીની રજૂઆત લંબાલેખ દ્વારા કેવી રીતે થાય છે, તે સમજ્યા. હવે આપણે વર્ગીકૃત સતત આવૃત્તિ વિતરણની આલેખાત્મક રજૂઆત શીખીશું વર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણની આલેખાત્મક રજૂઆત દ્વારા થાય છે.

સ્તંભાલેખ, લંબાલેખ જેવો જ છે, ફેર માત્ર એટલો છે કે અહીં બે સ્તંભો વચ્ચે જગ્યા નથી.

1. વર્ગીકૃત માહિતીના વર્ગોને અનૂકુળ પ્રમાણમાપ લઈને ક્ષૈતિજ અક્ષ પર દર્શાવવામાં આવે છે.
2. માહિતીની આવૃતિને અનૂકુળ પ્રમાણમાપ લઈને લંબ અક્ષ પર દર્શાવવામાં આવે છે.
3. દરેક વર્ગ ઉપર વર્ગલંબાઈ જેટલી પહોળાઈ અને તેને સંગત આવૃત્તિ લંબચોરસ રચવામાં આવે છે.

   દરેક લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ તેની આવૃત્તિના સમપ્રમાણમાં હોય છે. ઉદાહરણ દ્વારા આ બાબત સમજીએ.

ઉદાહરણ 24.9: વર્ગના 20 વિદ્યાર્થીઓએ એક કસોટીમાં મેળવેલા ગુણનું આવૃત્તિ વિતરણ નીચે મુજબ છે. તે પરથી સ્તંભાલેખની રચના કરો.

મેળવેલા ગુણ	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	1	3	1	6	4	5

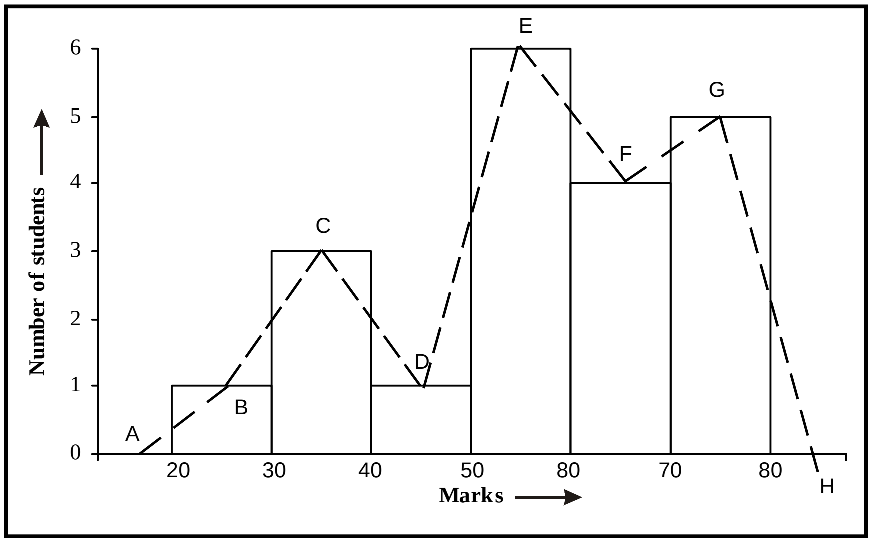
ઉકેલ : સ્તંભાલેખ દોરવા માટે આપણે નીચેના સોપાનોને અનુસરીશું.

સોપાન 1: *આલેખપત્ર પર બે લંબ રેખાઓ દોરીએ. અડીને ક્ષિતિજ અક્ષ અને ઊભીને લંબઅક્ષ એવાં આપીએ. (આપણે અનુક્રમે* x- *અક્ષ અને* y- *અક્ષ તરીકે ઓળખીશું.)*

સોપાન2: x- *અક્ષ પર આપણે વર્ગો (ગુણ)* 20-30, 30-40, ... *વગેરે (વર્ગલંબાઈ* 10*) લઈશું. (અનૂકુળ પ્રમાણમાપ પસંદ કરવું જોઈએ)*

સોપાન 3 : y- *અક્ષ પર યોગ્ય પ્રમાણમાપ લઈને આવૃત્તિ (વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા) દર્શાવીશું.*

સોપાન 4: *આકૃત્તિ* 24.11 *માં દર્શાવ્યા મુજબ પ્રત્યેક વર્ગ પર લંબચોરસ દોરીશું.*



આકૃત્તિ 24.11

આકૃતિ 24.11 *એ એક વર્ગના* 20 *વદ્યાર્થીઓએ કસોટીમાં મળેલા ગુણના આવૃતિ વિતરણ પરથી દોરેલો સ્તંભાલેખ છે.*

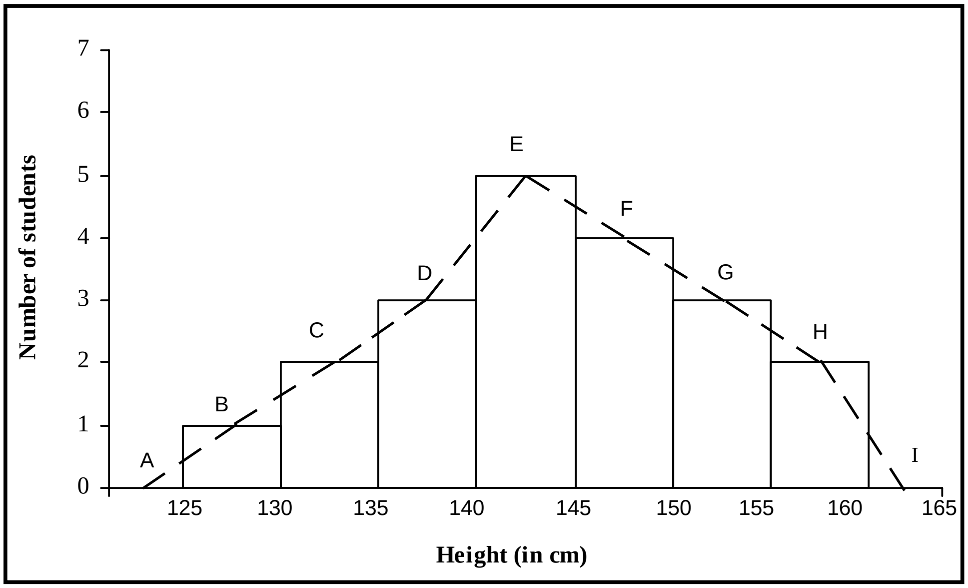
ઉદાહરણ 24.10: *નીચેની માહિતી પરથી સ્તંભાલેખ રચો.*

ઉંચાઈ (સેમીમાં)	૧૨૫-૧૩૦	૧૩૦-૧૩૫	૧૩૫-૧૪૦	૧૪૦-૧૪૫	૧૪૫-૧૫૦	૧૫૦-૧૫૫	૧૫૫-૧૬૦
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	1	2	3	5	4	3	2

ઉકેલ : *ઉદાહરણ* 24.9 *માં આપેલા સોપાન મુજબ કામ કરતાં મળતો સ્તંભાલેખ નીચે મુજબ છે.*

(પ્રમાણમાપ : x-*અક્ષ ઉપર* 1 *સેમી* = 25 *સેમી ઉંચાઈ)*

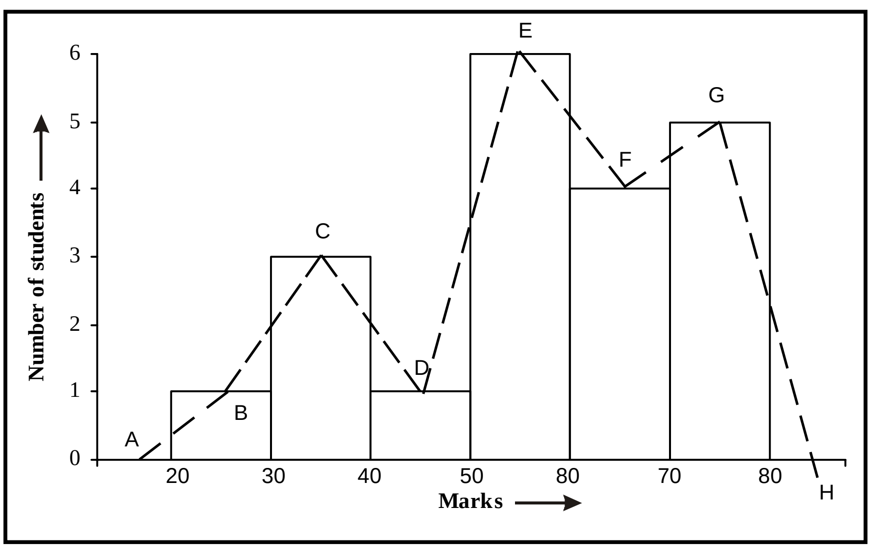
y-*અક્ષ ઉપર* 1 *સેમી* = 1 *વિદ્યાર્થી*



આકૃતિ 24.12

આવૃત્તિ બહુકોણ

વર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણની આલેખાત્મક રજૂઆત કરવાની બીજી પણ એક રીત છે અને તેનું નામ છે. આવૃત્તિ બહુકોણ આનો અર્થ સમજવા માટે આકૃતિ 24.11 નો સ્તંભાલેખ લો.



આકૃતિ 24.13

ક્રમિક સ્તંભના મથાળાના મધ્યબિંદુઓને અનુક્રમે B, C, D, E, F *અને* G *નામ આપો.* B *અને* C, C *અને* D, D *અને* E, E *અને* F *તેમજ* F *અને* G *તુટકરેખા* (dottod line) *થી જોડો. (આકૃતિ* 24.13*)*

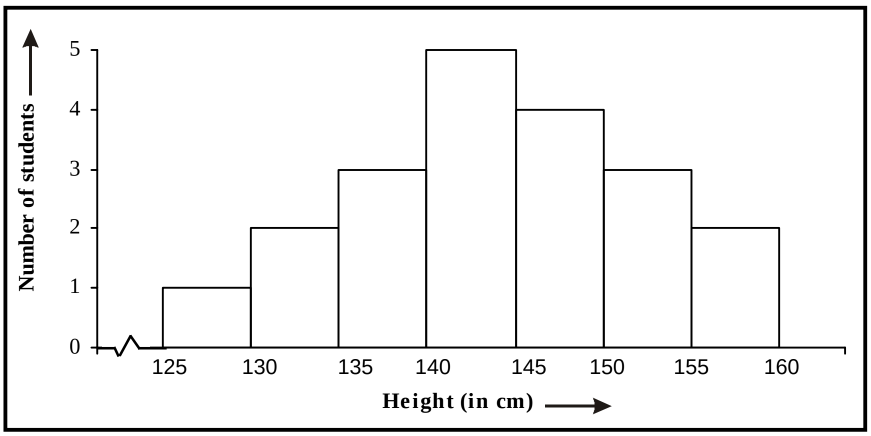
આવૃત્તિ બહુકોણ પૂરો કરવા માટે 10-20 ના વર્ગનું મધ્યબિંદુ A એક 80-90 ના વર્ગનું મધ્યબિંદુ H મેળવો. A અને B તથા G અને H તૂટક રેખાથી જોડો.

આ રીતે, A B C D E F G H એ ઉદાહરણ 24.9 નો આવૃત્તિ બહુકોણ છે.

નોંધ : પ્રારંભિક વર્ગની આગળ અને અંતિમ વર્ગની પાછળ કોઈ વર્ગ ન હોવા છતાં આપણે શૂન્ય આવૃત્તિ સાથે તેમને દાખલ કર્યા છે અને તેમનાં મધ્યબિંદુઓના ઉપયોગથી આવૃત્તિ બહુકોણ પૂરો કર્યો છે કે જેથી આવૃત્તિ બહુકોણનું ક્ષેત્રફળ, સ્તંભાલેખના ક્ષેત્રફળ જેટલું થાય.

ઉદાહરણ 24.11: ઉદાહરણ 24.10 (અકૃતિ 24.12) ની માહિતી પરથી આવૃત્તિ બહુકોણ દોરો.

ઉકેલ : ઉદાહરણ 24.10 માટેનો સ્તંભાલેખ આકૃતિ 24.12 માં દોરેલો છે. આવૃત્તિ બહુકોણ દોરવાની રીત આપણએ શીખી ગયા છીએ. એ મુજબ નીચેની આકૃતિમાં A B C D E F G H I એ આપેલી માહિતીનો આવૃત્તિ બહુકોણ છે.



આકૃત્તિ 24.14

ઉદાહરણ 24.12: ધોરણ 9 ના 30 વિદ્યાર્થીઓએ ગણિતની 50 ગુણની કસોટીમાંથી મેળવેલ ગુણ નીચેના કોષ્ટરમાં દર્શાવ્યા છે. આ માહિતી માટે આવૃત્તિ બહુકોણ દોરો.

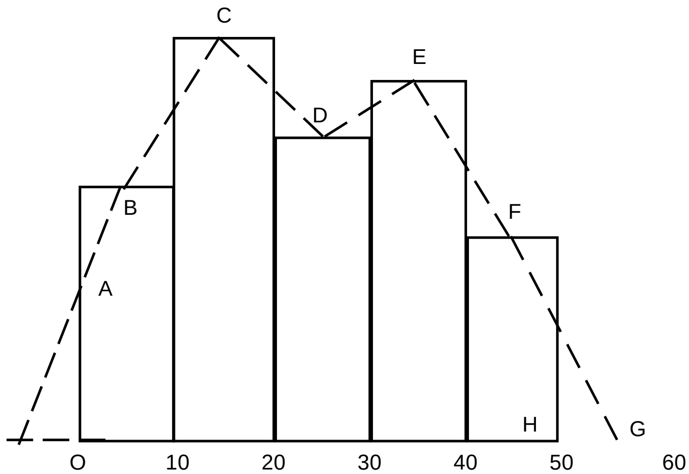
ગુણ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	5	8	6	7	4

ઉકેલ : પ્રથમ આ માહિતી માટેનો સ્તંભાલેખ દરીએ.

આકૃતિ 24.15 માં દર્શાવ્યા મુજબ બધા સ્તંભના મથાળાના મધ્યબિંદુ B,C,D,E અને F નક્કી કરો. અહીં પહેલો વર્ગ 0-10 છે તેથી તેની આગળનો વર્ગ જાણવા X- અક્ષને ડાબી તરફ ઋણ દિશામાં લંબાવવો પડશે. મેળવેલા કાલ્પનિક વર્ગનું ((-10)-0નું) મધ્યબિંદુ A મેળવો. એજ રીતે 50-60 ના વર્ગનું મધ્યબિંદુ G મેળવો. હવે A થી શરૂ કરીને બધા મધ્યબિંદુઓને ક્રમશઃ તૂટક રેખાથી જોડો. ABCDEFG એ માગેલો આવૃત્તિ બહુકોણ છે.

(પ્રમાણમાપ : x-અક્ષ ઉપર 1 સેમી = 10 ગુણ)

y-અક્ષ ઉપર 1 સેમી = 1 વિદ્યાર્થી



આકૃતિ **24.15**

નોંધ : *અગાઉ આપણે* A *અને* G *બિંદુઓ કેમ મેળવ્યા ન હતા ? કારણ કે કોઈ પણ વિદ્યાર્થીએ મેળવેલા ગુણ* 0 *થી ઓછા હોઈ શકે નહિં અને* 50 *થી વધારે હોઈ શકે નહીં.*

આવૃત્તિ બહુકોણ, સ્તંભાલેખ દોર્યા સિવાય સ્વતંત્ર રીતે પણ દોરી શકાય. ઉદાહરણ દ્વારા સમજીએ.

ઉદાહરણ 24.13: *ઉદાહરણ* 24.9 *માટે સ્તંભાલેખ દોર્યા વગર આવૃત્તિ બહુકોણ દોરો.*

ઉકેલ : *સ્તંભાલેખ દોર્યા વગર આવૃત્તિ બહુકોણ દોરવા માટે આપણે નીચેના સોપાનોને અનુસરીએ.*

સોપાન 1: *પરસ્પર લંબ હોય એવી બે રેખાઓ દોરો (*X- *અક્ષ અને* Y-*અક્ષ દોરો.)*

સોપાન2: *પ્રત્યેક વર્ગની મધ્યકિંમત શોધો.*

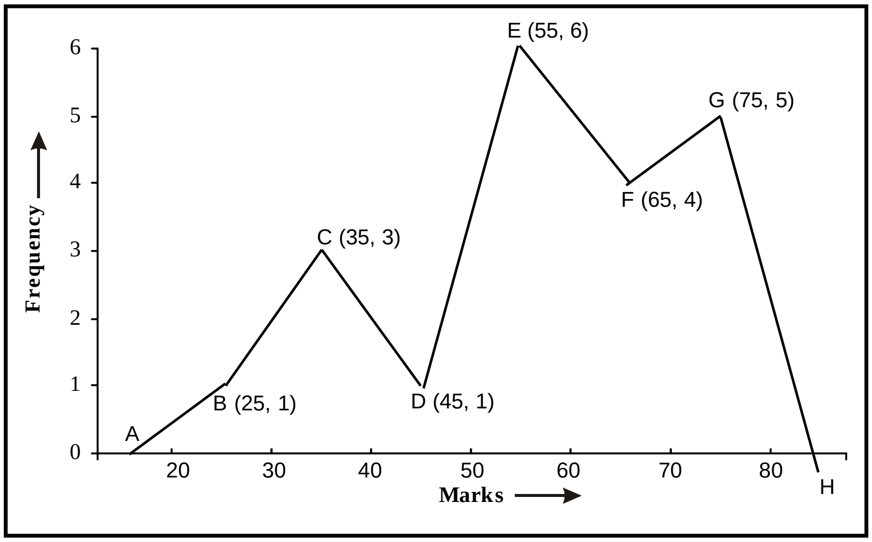
$$: \quad \frac{20+30}{2}, \frac{30+40}{2}, \frac{40+50}{2}, \frac{50+60}{2}, \frac{60+70}{2} \text{ and } \frac{70+80}{2}$$

આમ, મધ્યકિંમતો અનુક્રમે 25, 35, 45, 55, 65 *અને* 75 *છે.*

સોપાન 3: *યામ સમતલમાં બિંદુઓ* B (25, 1), C(35, 3), D(45, 1), E(55, 6), F(65, 4) *અને* G(75, 5) *નું આલેખન કરો.*

સાપોન 4: *બિંદુઓ* B, C, D, E, F *અને* G *ને રેખાખંડોથી જોડો અને અગાઉની જેમ બિંદુઓ અને* A *અને* H *મેળવીને આવૃત્તિ બહુકોણ પૂરો કરો.*

*આ રીતે મળત આવૃત્તિ બહુકોણ (*ABCDEFGH*)નીચે મુજબ હશે.*

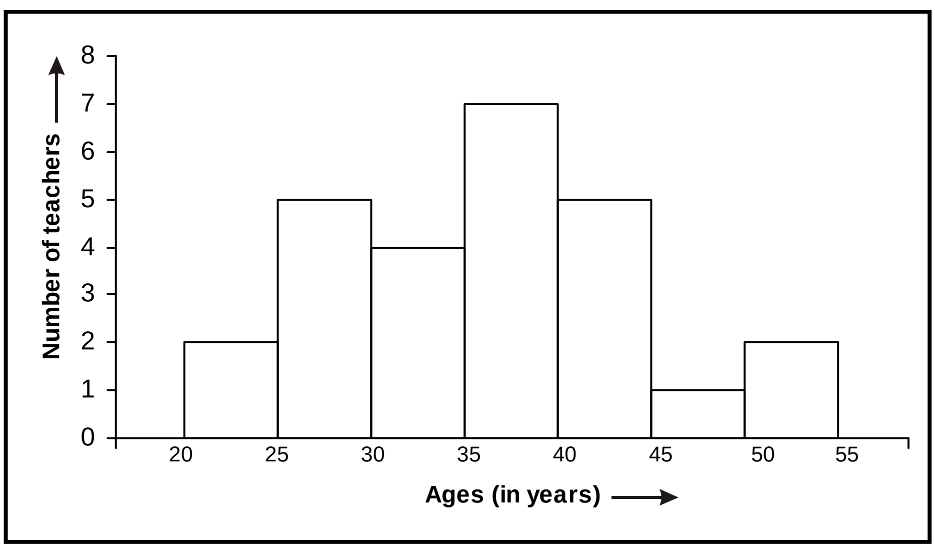


આકૃતિ 24.16

સ્તંભાલેખનું વાંચન

નીચેનું ઉદાહરણ જુઓ.

ઉદાહરણ 24.14: *નીચેના સ્તંભાલેખનો અભ્યાસ કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.*



આકૃત્તિ . 24.17

1. *શાળાના સૌથી ઓછી ઉંમરના અને સૌથી વધુ ઉંમરના વર્ગમાં શિક્ષકોની સંખ્યા કેટલી છે ?*
2. *ઉંમના કયા વર્ગમાં શિક્ષકોની સંખ્યા સૌથી વધારે છે ?*

3. ઉંમરના કયા વર્ગમાં શિક્ષકોની સંખ્યા 4 છે ?

4. ઉંમરના કયા કયા વર્ગમાં શિક્ષકોની સંખ્યા સરખી છે. ?

ઉકેલ :

1. સૌથી ઓછી ઉંમરના અને સૌથી વધુ ઉંમરના વર્ગમાં શિક્ષકોની સંખ્યા $2 + 2 = 4$ છે.

2. 35-40 વર્ષની ઉંમરના વર્ગમાં શિક્ષકોની સંખ્યા સૌથી વધારે છે.

3. 30.35 વર્ષની ઉંમરના વર્ગમાં શિક્ષકોની સંખ્યા 4 છે.

4. 20-25 અને 50-55 વય જૂથમાં બે-બે શિક્ષકો છે તેમજ 25-30 અને 40-45 વય જૂથમાં પાંચ-પાંચ શિક્ષકો છે.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 24.5

1. ખાલી જગ્યા પૂરો :

(1) સામાન્યતઃ સ્તંભાલેખમાં વર્ગાન્તર .... અક્ષ પર લેવામાં આવે છે.

(2) સામાન્યતઃ સ્તંભાલેખમાં આવૃત્તિને .... અક્ષ પર લેવામાં આવે છે.

(3) સ્તંભાલેખમાં લંબચોરસનું ક્ષેત્રભફળ તેને સંગત વર્ગની .... ના સમપ્રમાણમાં હોય છે.

(4) સ્તંભાલેખ એ .... ની આલેખાત્મક રજૂઆત છે.

2. 26 મજૂરોની દૈનિક દાડી (પગાર) નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવી છે. તે પરથી સ્તંભાલેખની રચના કરો.

રોજી (રૂપિયામાં)	150-200	200-250	250-300	300-350	350-400
મજૂરોની સંખ્યા	4	8	5	6	3

3. ઉપરના પ્રશ્ન 2 ની માહિતી માટેનો આવૃત્તિ બહુકોણ દોરો.

   1. સ્તંભાલેખ દોરીને

   2. સ્તંભાલેખ દોર્યા વગર

4. નીચે આપેલા સ્તંભલેખનો અભ્યાસ કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

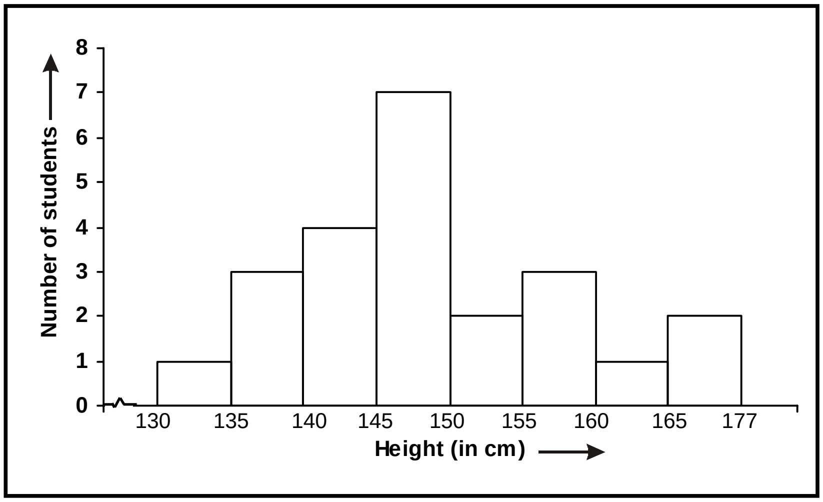
1. આપેલ સ્તંભાલેખ કઈ માહિતી દર્શાવે છે ?

2. ઉંચાઈના કયા વર્ગમાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા સૌથી વધુ છે ?

3. 145 સેમી અને તેથી વધુ ઉંચાઈ ધરાવતા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા કેટલી છે ?

4. 140 સેમીથી ઓછી ઉંચાઈ કેટલા વિદ્યાર્થીઓની છે ?

5. 140 સેમી કે તેથી વધુ પણ 155 સેમીથી ઓછી ઉંચાઈવાળા કેટલા વિદ્યાર્થીઓ છે ?



આકૃતિ. 24.18

સારાંશ

- *આંકડાશાસ્ત્રએ ગણિતશાસ્ત્રની એવી શાખા છે કે જે માહિતી એકઠી કરે છે, તેનું વર્ગીકરણ કરે છે, તેનું પૃથક્કરણ (વિશ્લેષણ) કરે છે અને પરિણામ તારવે છે.*
- *આંકડાશાસ્ત્ર, 'એક વચન' અને 'બહુવચન' એવા બંને અર્થમાં વપરાય છે.*
- *સંશોધક પોતાની યોજના મુજબ પોતાની જાતે માહિતી મેળવે, તે માહિતીને* **પ્રાથમિક માહિતી** *કહે છે.*
- *સંશોધક પોતે માહિતી લેવા ન જાય પણ પ્રકાશિત થયેલા અહેવાલોમાંથી કે અન્ય સ્રોતોમાંથી માહિતી મેળવે (બીજાએ મેળવેલી માહિતી પાસે વાપરે) ત્યારે તેવી માહિતીને* **ગૌણ માહિતી** *કહે છે.*
- *ચડતા કે ઉતરતા ક્રમમાં ગોઠવેલી કાચી (મૂળ) માહિતીને* **વ્યવસ્થિત માહિતી** *કહે છે.*
- *જ્યારે વ્યવસ્થિ માહિતીને આવૃત્તિ સાથે ગોઠવવામાં આવે ત્યારે તેને '***અવર્ગીકૃત આવૃત્તિ કોષ્ટક***' કે '***અવર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણ કોષ્ટક***' કહે છે.*
- *જ્યારે માહિતી જૂથ (કે વર્ગ) માં વિભાજીત કરવામાં આવે છે, ત્યારે તેને* **વર્ગીકૃત માહિતી** *કહે છે.*
- *માહિતીના સોથી મોટા અને સૌથી નાના અવલોકન વચ્ચેના તફાવતને માહિતી* **વિસ્તાર** *કહે છે.*
- *માહિતીનો વિસ્તાર જોઈને તથા વર્ગોની વર્ગલંબાઈ નક્કી કરીને વર્ગોની સંખ્યા નક્કી કરવામા આવે છે.*
- 10-15 *ના વર્ગમાં* 10 *ને વર્ગની અધઃસીમા અને* 15 *ને વર્ગની* **ઉર્ધ્વસીમા** *કહે છે.*
- *જે-તે વર્ગના અવલોકનોની સંખ્યાને તે વર્ગની આવૃત્તિ કહે છે અને વર્ગ સાથે આવૃત્તિની ગોઠવણીવાળી યાદીને* **આવૃત્તિ કોષ્ટક** *કહે છે.*

- કેટલીક વાર વર્ગને સતત વર્ગમાં ફેરવવાની જરૂર પડે છે, ત્યારે તેની સીમાઓને વાસ્તવિક વર્ગસીમાં કહેવામાં આવે છે.
- વર્ગોની આવૃત્તિઓને ક્રમશઃ આવતા વર્ગની આવૃત્તિમાં ઉમેરતા જવાથી મળતા આવૃત્તિ વિતરણને **સંચયી આવૃત્તિ કોષ્ટ** કહે છે.
- સંખ્યાત્મક માહિતીની રજૂાત લંબાલેખ દ્વારા કરવામાં આવે છે, ત્યારે બધા લંબચોરસ સ્તંભ ક્ષૈતિજ અક્ષ પર અથવા લંબ-અક્ષ પર દર્શાવવામાં આવે છે. વળી બધા લંબચોરસ સ્તંભની પહોળાઈ એક સરખી રાખવામા આવે છે અને બે સ્તંભ વચ્ચેનું અંતર પણ સરખું રાખવામાં આવે છે.
- સતત વર્ગોમાં દર્શાવેલી વર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણની આલેખાત્મક રજૂઆત સ્તંભાલેખ દ્વારા કરવામા આવે છે. સ્તંભાલેખમાં લંબચોરસ સ્તંભનું ક્ષેત્રફળ તેમને સંગત આવૃત્તિ સમપ્રમાણમાં હોય છે.
- આવૃત્તિ બહુકોણની રચનામાં બધા સ્તંભના મથાળાના મધ્યબિંદુઓને ક્રમશઃ જોડવામાં આવે છે. ઉપરાંત, પહેલા મધ્યબિંદુએ શૂન્ય આવૃત્તિવાળા પુરોગામી (શરૂઆતથી પહેલાનો) વર્ગના મધ્યબિંદુ સાથે અને સૌથી છેલ્લા માધ્યબિંદુ સાથે જોડીને આવૃત્તિ બહુકોણ પૂરો કરવામાં આવે છે.
- પ્રત્યેક વર્ગની મધ્યકિંમત સાથે સંબંધિત આવૃત્તિને સાંકળીને પણ સ્વતંત્ર રીતે આવૃત્તિ બહુકોણ રચી શકાય છે. અહીં પણ પુરોગામી વર્ગની મધ્યકિંમત અને અનુગામી વર્ગની મધ્યકિંમત સાથે શૂન્ય આવૃત્તિ લઈને તેનું નિરૂપણ કરવાનું હોય છે.

સત્રાંત સ્વાધ્યાય

1. નીચેના વિધાનો સાચા બને એ રીતે આપેલી ખાલી જગ્યામાં શબ્દ કે શબ્દસમૂહ મૂકી પૂરુ કરો.

(1) જ્યારે માહિતીનું વર્ગીકરણને સરખી વર્ગલંબાઈવાળા વર્ગોમાં આવૃત્તિ સાથે દર્શાવવામાં આવે ત્યારે તેને .... માહિતી અને કોષ્ટકને .... કોષ્ટક કહે છે.

(2) જ્યારે વર્ગસીમાઓ સતત ચલ સ્વરૂપે ગોઠવવામાં આવે ત્યારે વર્ગસીમાઓને ...... એવું નામ આપવામાં આવે છે.

(3) જે-તે વર્ગમાં દર્શાવેલા તેના અવલોકનોની સંખ્યાને .... કહે છે.

(4) વર્ગની વાસ્તવિક ઉર્ધ્વ સીમા અને વાસ્તવિક અધઃસીમા વચ્ચેના તફાવતને .... કહે છે.

(5) વર્ગની આવૃત્તિ સહિત તેની ઉપરના (અગાઉના) તમામ વર્ગોની આવૃત્તિઓના સરવાળાને તે વર્ગની .... કહે છે.

(6) વર્ગલંબાઈ = ... અને .... વચ્ચેનો તફાવત

(7) જ્યારે માહિતીને ચડતા કે ઉતરતા ક્રમમાં ગોઠવવામાં આવે છે, ત્યાપે તેને .... માહિતી કહેવાય છે.

(8) સૌથી નાના અવલોકન અને સૌથી નાના અવલોકન વચ્ચેના તફાવતને .... કહે છે.

2. 30 કુટુંબોમાં પરાત ટી.વી. સેટની સંખ્યા નીચે મુજબ છે. તે પરથી આવૃત્તિ કોષ્ટક કરો.

નોંધ

1, 2, 2, 4, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 1, 3

1, 2, 2, 1, 2, 0, 3, 3, 1, 2, 1, ,1 0, 1, 1

3. 50 કુટુંબોમાં વપરાતા વાહનોની સંખ્યાની મોજણી કરતાં નીચે મુજબ માહિતી મળી. તેને માટેનું આવૃત્તિ વિતરણ કોષ્ટક-તૈયાર કરો.

   2, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 1, 1, 1,

   2, 2, 1, 1, 3, 1, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 4, 1

   3, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 3, 2, 1, 2

4. 40 દિવાળી કાર્ડના વજન (ગ્રામમાં) નીચે મુજબ માલૂમ પડ્યા

10.4	6.3	8.7	7.3	8.8	9.1	6.7	11.1	14.0	12.2
11.3	9.4	8.6	7.1	8.4	10.0	9.1	8.8	10.3	10.2
7.3	8.6	9.7	10.9	13.6	9.8	8.9	9.2	10.8	9.4
6.2	8.8	9.4	9.9	10.1	11.4	11.8	11.2	10.1	8.3

   આ માહિતી માટેનું વર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણ તૈયાર કરો જેમાં 5.5, 7.5, 5-9.5 વગેરે વર્ગો હોય છે.

5. 30 ગાજરની લંબાઈ (પૂર્ણાંક સેમીમાં) નીચે મુજબ છે.

15	21	20	10	18	18	16	18	20	20
18	16	13	15	15	16	13	14	14	16
12	15	17	12	14	15	13	11	14	17

   ઉપરની માહિતી માટે સરખી વર્ગલંબાઈવાળું આવૃત્તિ વિતરણ રચો. જેનો એક વર્ગ 10-12 (12 સામેલ નથી) હોય.

6. 40 પુરુષોનું વજન (કિલોગ્રામમાં) દર્શાવતું આવૃત્તિ વિતરણ નીચે મુજબ છે.

વજન (કિગ્રામાં)	પુરુષોની સંખ્યા
40-45	4
45-50	5
50-55	10
55-60	7
60-65	6
65-70	8
કુલ	**40**

(1) દરેક વર્ગની મધ્યકિંત જણાવો.

(2) સંચયી આવૃત્તિ વિતરણ તૈયાર કરો.

7. નીચે દરેક વર્ગની મધ્યકિંમત અને તેને સંલગ્ન આવૃત્તિનું કોષ્ટક આપેલું છે. તે પરથી મૂળ આવૃત્તિ વિતરણ મેળવે અને સંચયી આવૃત્તિ વિતરણ કોષ્ટક તૈયાર કરો.

વર્ગની મધ્યકિંમત	5	15	25	35	45	55	65	75
આવૃત્તિ	2	6	10	15	12	8	5	2

8.

વર્ગ	**આવૃત્તિ**
15-20	2
20-25	3
25-30	5
30-35	7
35-40	4
40-45	3
45-50	1
કુલ	**25**

ઉપર આપેલા આવૃત્તિ વિતરણનો અભ્યાસ કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(1) 15-20 વર્ગની અધઃસીમા લખો.

(2) 25-30 ની વર્ગ સીમાઓ લખો.

(3) 35-40 ની મધ્યકિંમત શોધો.

(4) વર્ગલંબાઈ જણાવો

(5) સંચયી આવૃત્તિ વિતરણ તૈયાર કરો.

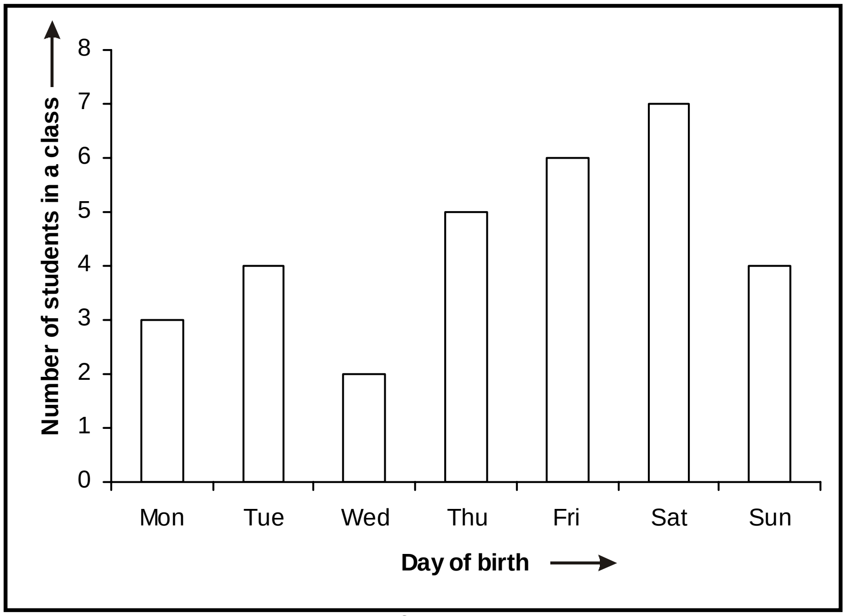
9. અહીં 50 વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગુણનું સંચયી આવૃત્તિ વિતરણ આપ્યું છે, તે પરથી મૂળ આવૃત્તિ તિરણ તૈયાર કરો.

ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
20 થી નીચે	15
40 થી નીચે	24
60 થી નીચે	29
80 થી નીચે	34
100 થી નીચે	50

10. એક દુકાનદારનો અઠવાડી

દિવસ	સોમવાર	મંગળવાર	બુધવાર	ગુરવાર	શુક્રવાર	શનિવાર
વકરો(રૂપિયામાં)	16000	18000	17500	9000	85000	16500

11. નીચેના લંબાલેખનો અભ્યાસ કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.



આકૃતિ 24.19

1. લંબાલેખ કઈ માહિતી દર્શાવે છે ?
2. કયા વારે સૌથી વધુ વિદ્યાર્થીઓ જનમ્યા ?
3. મંગળવાર કરતાં ગુરુવારે કેટલા વધુ વિદ્યાર્થીઓ જન્મ્યા ?
4. વર્ગમાં કુલ કેટલા વિદ્યાર્થીઓ છે ?

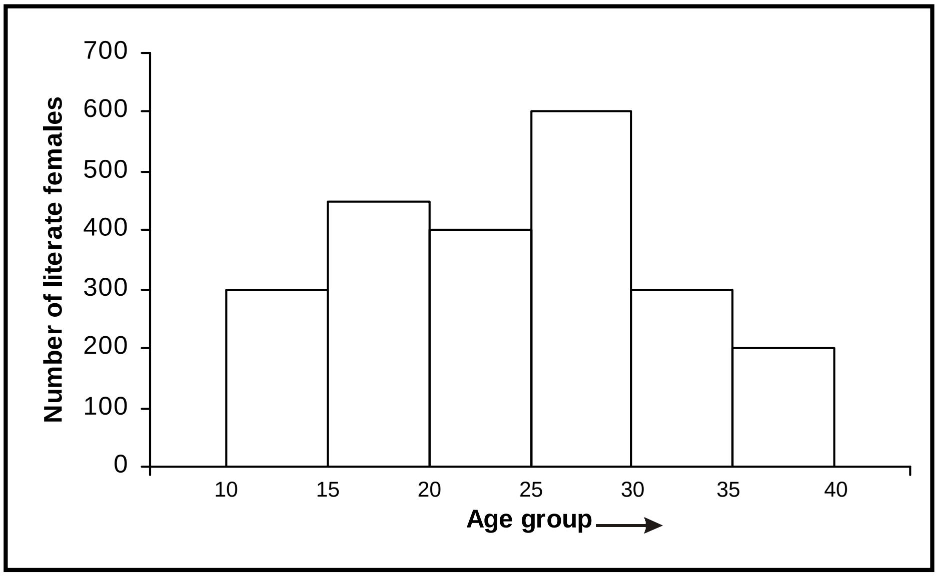
12. 50 હરિફોએ શબ્દ કસોટી પૂરી કરવાની હરિફાઈમાં લીધેલો સમય (મિનિટમાં) નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવ્યા છે.

સમય (મિનિટમાં)	હરિફોની સંખ્યા
20-25	8
25-30	10
30-35	9
35-40	12
40-45	6
45-50	5

1. આપેલી માહિતી પરથી સ્તંભાલેખ દોરો.
2. આવૃત્તિ બહુકોણ પણ દોરો.

13. પ્રશ્ન 12 માં આપેલી માહિતી પરથી સ્તંભાલેખ દોર્યા વગર આવૃત્તિ બહુકોણ દોરો.

14. એક શહેરમાં 10 થી 40 વર્ષની વય જૂથમાં શિક્ષિત મહિલાઓની સંખ્યા દર્શાવાવતો સ્તંભાલેખ નીચે આપ્યો છે.



આકૃતિ 24.20

ઉપરના સ્તંભાલેખોનો અભ્યાસ કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. 10-40 વર્ષની વય જૂથમાં શિક્ષિત મહિલાઓની કુલ સંખ્યા કેટલી છે ?
2. વય જૂથના કયા વર્ગમાં શિક્ષિત મહિલઓની સંખ્યા સૌથી વધુ છે ?
3. વયજૂથ કયા બે વર્ગોમાં શિક્ષિત મહિલાઓની સંખ્યા સરખી છે ?
4. નીચેનું વિધાન ખરું છે કે ખોટું ?

   વય જૂથ 25-30 માં શિક્ષિત મહિલાઓની સંખ્યા, 20-25 અને 35-40 વય જૂથમાં શિક્ષિત મહિલાઓની સંખ્યાના સરવાળા જેટલી છે.

   સાચો વિકલ્પ પસંદ કરો :

15. વર્ગો 90-120 અને 120-150 ની મધ્યકિંમતોનો સરવાળો કેટલો થાય ?

    (A) 210 (B) 220 (C) 240 (D) 270

16. માહિતીના અવલોકનો 28, 17, 20, 16, 19, 12, 30, 32 અને 10 છે. તેનો વિસ્તાર જણાવો.

    (A) 22 (B) 28 (C) 30 (D) 32

17. આવૃત્તિ વિતરણના એક વર્ગની મધ્યકિંમત 12 છે અને વર્ગલંબાઈ 6 છે. આ વર્ગની અધઃસમા જણાવો.

(A) 6 (B) 9 (C) 12 (D) 18

18. સતત આવૃત્તિ વિતરણના પાંચ વર્ગોમાં સૌથી નાના વર્ગની અધઃસીમા 10 છે. જો વર્ગલંબાઈ 5 હોય, તો મોટા વર્ગની ઉર્ધ્વસીમા શોધો.

(A) 15 (B) 20 (C) 30 (D) 35

19. એક સતત આવૃત્તિ વિતરણના વર્ગોની મધ્યકિંમતો અનુક્રમે 10, 15, 20, ...છે. 15 મધ્યકિંમત ધરાવતો વર્ગ જણાવો.

(A) 11.5-18.5 (B) 17.5-22.5

(C) 12.5-17.5 (D) 13.5-16.5

20. સતત આવૃત્તિ વિતરણ પરથી સીધો જ આવૃત્તિ બહુકોણ દોરવા માટે એવાં બિંદુઓનું આલેખન કરવામાં આવે છે જેનો ક્ષૈતિજયાન (X- યામ) .... અને લંબયામ (Y- યામ) તેને સંગત આવૃત્તિ હોય છે.

(A) વર્ગનું મધ્યબિંદુ (B) વર્ગની અધઃસીમા

(C) વર્ગની ઉર્ધ્વસીમા (D) આગળના વર્ગની ઉર્ધ્વસીમા

તમારી પ્રગતિ ચકાસોના જવાબો.

24.1

1. (a) વર્ગીકરણ, વ્યવસ્થિત, તારવણી (b) સંખ્યાત્મક (આંકડાકીય) માહિતી

(c) પ્રાથમિક (d) ગૌણ (e) સંખ્યાત્મક માહિતી

2. પ્રાથમિક 3. ગૌણ

24.2

2. 21 સેમી

4 ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	5. વર્ગાન્તર	આવૃત્તિ
0-10	1	210-230	2
10-19	2	230-250	5
20-29	1	250-270	2
30-39	2	270-290	2
40-49	5	290-310	4

50-59	6	310-330	6
60-69	6	330-350	2
70-79	4	350-370	2
80-89	2	370-390	0
90-99	1	390-410	3
કુલ	30	કુલ	25

49 ગુણથી વધુ ગુણ મેળવનારા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા 19 છે.

6. (1) 6 (2) 43 (3) 49

24.3

1. (1)

વર્ગ	આવૃત્તિ	સંચયી આવૃત્તિ
1-5	4	4
6-10	6	10
11-15	10	20
16-20	13	33
21-25	6	39
26-30	2	41
કુલ	41	

(2)

વર્ગ	આવૃત્તિ	સંચયી આવૃત્તિ
0-10	3	3
10-20	10	13
20-30	24	37
30-40	32	69
40-50	9	78
50-60	7	85
કુલ	85	

(2) ઊંચાઈ (સેમી)	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	સંચયી આવૃત્તિ
110-120	14	14
120-130	30	44

13-140	60	104
140-150	42	146
150-160	14	160
કુલ	160	

140 વિદ્યાર્થીઓની ઉંચાઈ 150 સેમીથી ઓછી છે.

24.4

1. (અ) સ્તંભો (2)સરખી (ક) સમપ્રમાણમાં
2. (અ) 2 (બ) 6 (ક) બસ
3. (અ) 6 (બ) ફૂટબોલ (ક) ટેબલટેનિસ
4. (અ) 5900 (બ) 2007 (ક) 2003 (ડ) 2008

24.5

1. (અ) ક્ષૈતિજ અક્ષ (બ) લંબ અક્ષ (ક) આવૃત્તિ (ડ) વર્ગીકૃત સતત આવૃત્તિ વિતરણ
2. (અ) વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈ (સેમીમાં) (બ) 145-150 (ક) 15 (ડ) 4 (ઈ) 13

સત્રાંત સ્વાધ્યાયના જવાબો :

1. (અ) વર્ગીકૃત ; આવૃત્તિ કોષ્ટક (બ) વાસ્તવિક સીમા
   (ક) વર્ગલંબાઈ (ડ) સંચયી આવૃત્તિ
   (ઇ) ઉર્ધ્વ સીમા, અર્ધસીમા (ઈ) વ્યવસ્થિત
   (એફ) વિસ્તાર

2.

ટીવી સેન્ટરની સંખ્યા	કુટુંબોની સંખ્યા
0	2
1	15
2	8
3	4
4	1
કુલ	30

3.

વાહનોની સંખ્યા	કુટુંબોની સંખ્યા
0	2
1	27
2	16
3	4
4	1
કુલ	50

4.

વજન (ગ્રામમાં)	દિવાળી કાર્ડની સંખ્યા
5.5-7.5	6
7.5-9.5	15
9.5-11.5	15
11.5-13.5	2
13.5-15.5	2
કુલ	40

5.

લંબાઈ (સેમીમાં)	ગાજરની સંખ્યા
10-12	2
12-14	5
14-16	9
16-18	6
18-20	4
20-22	4
કુલ	30

6. (અ) 42.5, 47.5. 52.5. 57.5 62.5. 67.5

(બ)

વજન (કિગ્રામાં)	પુરુષોની સંખ્યા	સંચયી આવૃત્તિ
40-45	4	4
45-50	5	9
50-55	10	19
55-60	7	26
60-65	6	32
65-70	8	40
કુલ	40	

7.

વર્ગાન્તર	આવૃત્તિ	સંચયી આવૃત્તિ
0-10	2	2
10-20	6	8
20-30	10	18
30-40	15	33
40-50	12	45
50-60	8	53
60-70	5	58
70-80	2	60
કુલ	60	

8. (અ) 15 (બ) અધ: સીમા 25, ઉર્ધ્વસીમા : 30

(ક) 37.5 (ડ) 5

(ઈ)

વર્ગ	આવૃત્તિ	સંચયી આવૃત્તિ
15-20	2	2
20-25	3	5
25-30	5	10
30-35	7	17
35-40	4	21
40-45	3	24
45-50	1	25
કુલ	25	

9.

ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા (આવૃત્તિ)
0-20	15
20-40	9
40-60	5
60-80	5
80-100	16
કુલ	50

10. (1) વર્ગના વિદ્યાર્થીઓનો જન્મદિવસ

(2) શનિવાર

(3) 1

(4) 31

11. (1) 2250 (2) 25-30

(3) 10-15 અને 30-35 (4) ખરું

12. (C) 13. (A) 14. (B) 15. (D) 16. (C) 17. (A)

25

મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં માપો

પરિચય

અગાઉના પાઠમાં આપણે શીખ્યા કે મહિતીને આવૃત્તિ કોષ્ટક સ્વરૂપે રજૂ કરીને તેનું સંક્ષિપ્તી કરણ કેટલીક હદ સુધી કરી શકીને તેનું લંબોલેખ , સ્તંભાલેખ અને આવૃત્તિ બહુકોણ જેવી આલેખાત્મક રજૂઆત વડે માહિતીની વલણ અંગેનો વિસ્તુત ખ્યાલ પણ મેળવી શકાય છે.

સમગ્ર માહિતીના ગુણધર્મોને સંખ્યાત્મક રીતે રજૂ કરે એવા પ્રતિનિધિરૂપ માપની જરૂરિયાત ઉભી થાય છે. સરેરાશ આવું એક માપ છે. સરેરાશ એ એવી સંખ્યા છે. જે માહિતીનું હાર્દ રજૂ કરે છે. તે બે છેડાની અંતિમ કિંમતો વચ્ચેની કોઈક સ્થિતિમાન તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

આ પાઠમાં આપણે મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનના નીચેના ત્રણ માપો ઓળખવામાં આવે છે.

(i) મધ્યક (અંકગણિતીય સરેરાશ)

(ii) મધ્યસ્થ

(iii) બહુલક

હેતુઓ

આ પ્રકરણ શીખ્યા પછીની અધ્યેતા

- આવૃત્તિ અને વર્ગીકૃત માહિતીની વ્યાખ્યા આપી શકશે.
- અવર્ગીકૃત અને વર્ગીકૃત માહિતીનો મધ્યક સામાન્ય પદ્ધતિથી અને ટૂંકી રીતથી ગણિ શકાશે
- અવર્ગીકૃત માહિતીની મધ્યસ્થ અને બહુલકની ગણતરી કરી શકશે.

અપેક્ષિત પૂર્વજ્ઞાન

- સંખ્યાઓનો ચડતો અને ઉતરતા ક્રમ
- બે સંખ્યાઓની સરેરાશ
- સંખ્યાઓ પર ચાર મૂળભૂત પ્રક્રિયાઓ

25.1 સરેરાશ અથવા મધ્યક

લોકોની વાતોમાં આવતા સરેરાશઝડપ , સરેરાશ વરસાદ, સરેરાશ ઊંચાઈ , સરેરાશગુણ , વગેરે શબ્દો તમે સાંભળ્યા હશે. જો આપણે કહીએ કે વિદ્યાર્થીઓની સરેરાશ ઉંચાઈ 150 *સેમી છે , તો એનો અર્થ એવો નથી કે બધા વિદ્યાર્થીઓ* 150 *સેમી ઉંચાઈ ધરાવે છે પણ એણાંથી એવો અર્થ લેવા જોઈએ કે વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈ* 150 *સેમી આસપાસની છે . કેટલાક વિદ્યાર્થીઓની ઉંચાઈ તેથી ઓછી હોય, કેટલાકની તેથી વધુ હોય અને કેટલાકની બરોબર* 150 *સેમી હોય.*

૨૫.૧.૧ મૂળ માહિતીને મધ્યક

મૂળ માહિતીનો મધ્યક શોધવા માટે બધા અવલોકનોના સરવાળાને, અવલોકનની સંખ્યા વડે ભાગવામાં આવે થે, એ રીતે x_1, x_2, x_3 .... *એવા* x_n *અવલોકનો હોય તો.*

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

જ્યાં $\overline{x}$ *એ મધ્યકનો સંકેત છે.*

$$=$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad (1)$$

$\sum_{i=1}^{n} x_i$ *,(વંચાય : સિગ્મા) એ ગ્રીક ભાષાનો મૂળાક્ષર છે અને સરવાળાના સંકેત તરીકે તેનો ઉપયોગ થાય છે.*

x_1,+ x_2,.............. x_n *ને સંકેત વડે દર્શાવાય છે.*

જ્યાં i *એ* 1 *થી* n *કિંમત ધારણ કરે છે.*

ઉદાહરણ 25.1: *ઘઉંની ચાર થેલીઓનું કિલોગ્રામમાં વજન અનુક્રમે* 103,105,102,104, *છે. વજનનો મધ્યક શોધો.*

ઉકેલ : *વજનનો મધ્યક* ($\overline{x}$) =

$$= \qquad = 103.5 \text{ કિગ્રા.}$$

ઉદાહરણ 25.2: *એક શાળામાં છેલ્લા પાંચ વર્ષમાં થયેલું નામાંકન (દાખેલ થયેલા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા) અનુક્રમે* 605,710,745,835 *અને* 910 *છે. પ્રતિવર્ષ થતા નામાંકનની સંખ્યા (સરેરાશ) જણાવો.*

ઉકેલ : સરેરાશ નામાંકન (નામાંકનનો મધ્યક)

$$= \frac{605 + 710 + 745 + 835 + 910}{5} = \frac{3805}{5} = 761$$

ઉદાહરણ 25.3: એકશાળાના ધોરણ - 9ના 30 વિદ્યાર્થીઓએ ગણિતની કસોટીમાં મેળવેલા ગુણ નીચે મુજબ છે.

40	73	49	83	40	49	27	91	37	31
91	40	31	73	17	49	73	62	40	62
49	50	80	35	40	62	73	49	31	28

મધ્યકગુણ શોધો.

ઉકેલ : અહીં અવલોકનોની સંખ્યા (n) = 30

$x_1 = 40, x_2 = 73, ..., x_{10} = 31$

$x_{11} = 41, x_{12} = 40, ..., x_{20} = 62$

$x_{21} = 49, x_{22} = 50, ..., x_{30} = 28$

સૂત્ર (I), મુજબ ગણતાં

$$(\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{30} x_i}{n} = \frac{40+73+....+28}{30} = \frac{1455}{30}$$

$$= 48.5$$

ઉદાહરણ 25.4: ઉદાહરણ 25.1ના પરિણામોપરથી દર્શાવો કે x_1- , x_2- , x_3- અને x_4- નો સરવાળો 0, થાય છે જ્યાં x_i' ચાર થેલીઓનું વજન છે અને તેમનો મધ્યક છે.

ઉકેલ: $x1-$ = 103 – 103.5 = – 0.5, $x2-$ = 105 – 103.5 = 1.5

$x3-$ = 102 – 103.5 = – 1.5, $x4-$ = 104 – 103.5 = 0.5

So, ($x1-$) + ($x2-$) + ($x3-$) + ($x4-$) = – 0.5 + 1.5 + (–1.5) + 0.5 = 0

ઉદાહરણ 25.5: ધોરણ 10A ના 30 વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલ ગુણનો મધ્યક 48 છે અને 10બીના 35 વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગુણનો મધ્યક 50 છે ધોરણ 10ના 65 વિદ્યાર્થીઓએ મેલવેલા ગુણનો મધ્યક શોધો,

ઉકેલ : ધોરણ 10A ના 30 વિદ્યાર્થીઓના મધ્યકગુણ = 48

તેથી 10A ના વિદ્યાર્થીઓના કુલગુણ = 30 × 48 = 1440

એજ રીતે 10B ના 35વિદ્યાર્થીઓના મધ્યક ગુણ 50 છે.

તેથી 10B ના વિદ્યાર્થીઓના કુલ ગુણ = 35 × 50 = 1750

બંને વર્ગના વિદ્યાર્થીઓના કુલ = 1440 + 1750 = 3190

65 વિદ્યાર્થીઓના ગુણનો મધ્યક = = 49.1 ગુણ (આશરે)

ઉદાહરણ 25.6: 6 અવલોકનોનો મધ્યક 40 છે, એમ ગણાય પછી ખબર પડી કે એક અવલોકન ભૂલથી 82 ને બદલે 28લેવાર્યું છે. સાચો મધ્યક શોધો.

ઉકેલ :- સૂત્ર ને ટૂંકમાં લખીશું

$$x\frac{\sum xi}{n}$$

$$40\frac{\sum xi}{6}$$

$$\sum xi = 40x6 = 240$$

સાચો સરવાળો = પ્રથમ મેળવેલો સરવાળો - ખોયે પ્રામાંકો + સાચો પ્રામાંક

= 240 – 28 + 82 = 294

સાચો મધ્યક $= \frac{294}{6} = 49$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 25.1

1. x_1 , x_2 ..., x_n. એવા એન અવલોકનોનો મ્ય જાણવા માટેનું સૂત્ર લખો.

2. પ્રથમ દસ પ્રકૃત્તિક સંખ્યાઓનો મધ્યક શોધો.

3. અનાજની એખ દુકાનમાં 6 દિવસમાં થયેલું ખાંડનું વેચાણ નીચે મુજબ છે. તે પરથી ખાંડનું દૈનિક સરેરાશ વેચાણ શોધો.

સોમવાર	મંગળવાર	બુધવાર	ગુરુવાર	શુક્રવાર	શનિવાર
74 કિગ્રા	121 કિગ્રા	40 કિગ્રા	82 કિગ્રા	70.5 કિગ્રા	130.5 કિગ્રા

4. 10 છોકરીઓની ઉંચાઈ (સેમીમાં) નીચે મુજબ છે. તે પરથી તેમની મધ્યક ઉંચાઈ શોધો.

ઊંચાઈ સેમીમાં, 142, 149, 135, 150, 128, 140, 149, 152, 138, 145

5. એક શહેરનું છેલ્લા 12 દિવસનું મહત્તમ તાપમાન (^{0}.સે.) માં નીચે મુજબ છે તે પરથી રોજના તાપમાનનો મધ્યક શોધો. તાપમાન (^{0} સે.માં)

32.4	29.5	26.6	25.7	23.5	24.6
24.2	22.4	24.2	23.0	23.2	28.8

6. ઉદાહરણ 25.2 નાં મૂલ્યો લઈને જણાવો કે x_i અને $\overline{x}$ નો તફાવતનો સરવાળો 0 થાય છે.

7. 9 અવલોકનોના મધ્યક 35 માલુમ પડે છે પછીથી ધ્યાનમાં આવે છે કે એક પ્રાપ્તાંક ભૂલથી 81 ને બદલે 18 લેવાયો છે. સાચો મધ્યક શોધો.

8. 25 વિદ્યાર્થીઓના મધ્યકગુણ 35 છે અને 35 વિદ્યાર્થીઓના મધ્યકગુણ 25 છે. બધા વિદ્યાર્થીઓના ગુણનો મધ્યક શોધો.

25.1.2 અવર્ગીકૃત માહિતીનો મધ્યક

એક ઉદાહરણ દ્વારા અવર્ગીકૃત માહિતીના મધ્યકની ગણતરી સમજીએ .

15 *ગુણની પરીક્ષામાંથી* 20 *વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલ ગુણ નીચે મુજબ છે. તે પરથી મધ્ય ગુણ શોધો.*

12	10	5	8	15	5	2	8	10	5
10	12	12	2	5	2	8	10	5	10

આ કાચી મુળ માહિતી છે. *સૂત્રોનો ઉપયોગ કરીને આપણે મધ્યક શોધી શકીએ પરંતુ એમાં સમય વધારે જાય. પ્રથમ આ માહિતીનું આવૃત્તિ વિતરણ કોષ્ક તૈયાર કરીઓ અને પછી નીચેના સૂત્રથી મધ્યક શોધી તો સમય ઓછો થાય*

મધ્યક = *ટૂંકમાં* $x\frac{\sum fixi}{\sum fi}$

$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$ $\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$

પરંતુ આકૃત્તિઓનો સરવાળો એ કુલ સંખ્યા છે ,તેથી f_i = n *જ્યાં અવલોકનો પ્રાપ્તાંકો) છે અને* f_i *આવૃત્તિ છે.*

ગુણ **(x_i)**	**વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા આવૃત્તિ** **(f_i)**
2	4
5	5
8	3
10	5
12	2
15	1
	$f_i = 20$

આ વર્ગીકરણનો મધ્ય શોધવા દરેક x_i *અને તેને સંલગ્ન* f_i *નો ગુણાકાર કરીને* $f_i x_i$ *શોધીશું નીચે મુજબ કોષ્ટક તૈયાર કરીએ.*

(x_i)	(f_i)	$(f_i x_i)$
2	4	$2 \times 4 = 8$
5	5	$5 \times 5 = 25$
8	3	$3 \times 8 = 24$
10	5	$5 \times 10 = 50$
12	2	$2 \times 12 = 24$
15	1	$1 \times 15 = 15$
	$f_i = 20$	$f_i\, x_i = 146$

$x =$

ઉદાહરણ 25.7: *કર્મચારીઓનો સાપ્તાહિક પગાર દર્શાવતું કોષ્ટક નીચે મુજબ છે તે પરથી તેમના સાપ્તાહિત પગારનો મધ્યક શોધો.*

સાપ્તાહિક પગાર (રૂપિયામાં)	900	1000	1100	1200	1300	1400	1500
કર્મચારીઓની સંખ્યા	12	13	14	13	14	11	5

ઉકેલ : *સાપ્તાહિક પગાર દર્શાવતા અંકો x_i છે.*

કર્મચારીઓની સંખ્યા દર્શાવતા અંકો f_i છે.

$\sum f_i\, x_i$ *કરવાથી જે તે વિભાદનો કુલ પગાર જાણી શકાય.*

ગણતરી માટે નીચેનું કોષ્ટક તૈયાર છે.

x_i	f_i	$f_i\, x_i$
900	12	10800
1000	13	13000
1100	14	15400
1200	13	15600
1300	12	15600
1400	11	15400
1500	5	7500
	$f_i = 80$	$f_i\, x_i = 93300$

$= \qquad = ' \dfrac{93300}{80} = '$ 1166.25 *રૂપિયા આમ, સાપ્તાહિક પગારોનો મધ્યક રૂા.1166.25 છે.*

જ્યારે xi અને fi ની કિંમત ઘણી મોટી હોય, ત્યારે બંન્નો ગુણાકાર કરવાનું કંટાળા જનક અને સમય માગી લે તેવું બની જાય છે. તેથી આપણે ટૂંકૂ રીતે શોધવાનું ઈચ્છીએ છીએ. ચડતા ક્રમમાં ગોઠવેલ પ્રાપ્તાંકોમાંથી વચ્ચેનો પ્રાપ્તાંક ધારો (વચ્ચેનો પ્રાપ્તાંક જ ધારવો એવો કોઈ નિયમ નથી કોઈ પણ પ્રાપ્તાંક ધારી શકાય છે - પ્રાપ્તાંક ન હોય એવી કોઈ અન્ય સંખ્યા ધારી શકાય છે- પ્રાપ્તાંક ન હોય એવી કોઈ અન્ય સંખ્યા પણ ધારી શકાય છે. એમ કરવાથી મધ્યક તો મળે જ પણ ટૂંકી રીતનો ઉદ્દેશ જળવાય નહી)

ધારેલી સંખ્યાને આપણે ધારેલો મધ્યક a કહીશું પ્રત્યેક પ્રાંપ્તાંક a માંથી d: બાદ કરીને .. (તફાવત/વિચાલન) મેળવો.

આમ, $di = xi - a$

$$xi = -a + di$$

$$fixi = afi + fidi$$ (સમી fi ને વડે ગુણતાં)

$$\sum_{i=1}^{n} f_i x_i = \sum_{i=1}^{n} af_i + \sum_{i=1}^{n} f_i d_i$$ [બધા પદોનો સરવાળો કરતાં]

$$\bar{x} = \sum f_i + \frac{1}{\mathrm{N}}\sum f_i d_i\,,\quad Sf_i = \mathrm{N}$$ (a અચળ સંખ્યા છે)

$$\bar{x} = a + \frac{1}{\mathrm{N}}\sum f_i d_i \qquad \text{(III)}$$

$\sum$

[$x = a + = \mathrm{N}$]

સૂત્રને શબ્દોમાં રજૂ કરીએ તો એમ કહેવાય કે ધારેલા મધ્યકમાં , તફાવતોનો મધ્યક ઉમેરવાથી સાચો મધ્યક મળે છે. મધ્યક ગુણવાની આ રીતને ધારેલા મધ્યકની રીત કહેવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ : 25.7 ને ફરીથી ધારેલા મધ્યકની રીતે ગણીએ ધારેલો મધ્યક $a = 1200$ લઈએ.

સાપ્તહિક પગાર **(in `) (x_i)**	કર્મચારીઓની સંખ્યા **(f_i)**	તફાવત **$d_i = x_i - 1200$**	**$f_i d_i$**
900	12	– 300	– 3600
1000	13	– 200	– 2600
1100	14	– 100	– 1400
1200	13	0	0
1300	12	100	+ 1200
1400	11	200	+ 2200
1500	5	300	+ 1500
	$\sum f_i = 80$		$f_i\, d_i = -2700$

$=$

$$= 1200 + \frac{1}{80}(-2700)$$

$$= 1200 - 33.75 = 1166.25$$

સામાહિત પગારનો મધ્યક = રૂા. 1166.25

જુઓકે સીધી રીતે ગણેલો મધ્યક અને મધ્યકની રીત ગણો મધ્યક એક જ છે.

ઉદાહરણ 25.8: નીચેની માહિતીનો મધ્યક 20.2 હોય તો k ની કિંમત શોધો.

x_i	10	15	20	25	30
f_i	6	8	20	k	6

ઉકેલ : $$x = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{60+120+400+25k+180}{40+k}$$

$$= \frac{760+25k}{40+k}$$

$$, \quad \frac{760+25k}{40+k} = 20.2$$

$$760 + 25k = 20.2\,(40 + k)$$

$$7600 + 250k = 8080 + 202k$$

$$k = 10$$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 25.2

1. નીચેના વિતરણ માટેનો મધ્યક શોધો.

ગુણ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
આવૃત્તિ	1	3	5	9	14	18	16	9	3	2

2. નીચેની બંન્ને માટે મધ્યક શોધો.

(i)

x	6	10	15	18	22	27	30
f	12	36	54	72	62	42	22

(ii)

x	5	5.4	6.2	7.2	7.6	8.4	9.4
f	3	14	28	23	8	3	1

3. *એક કારખાનાના 70 કારીગરો નું વજન (કિગ્રામાં)નીચે મુજબ છે કારીગરોના વજનનો મધ્યક શોધો.*

વજન (કિગ્રામાં)	કારીગરોની સંખ્યા
60	10
61	8
62	14
63	16
64	15
65	7

4. *નીચેની માહિતનો મધ્યક 17.45 હોય, તો P ની કિંમત શોધો.*

x	15	16	17	18	19	20
f	3	8	10	p	5	4

25.1.3 વર્ગીકૃત માહિતીનો મધ્યક

નીચેનું વર્ગીકૃત આવૃતિ વિતરણ જુઓ :

$\frac{170+180}{2}=175$ $\frac{160+170}{2}$

દૈનિક વેતન (રૂા.માં)	કારીગરોની સંખ્યા
150-160	5
160-170	8
170-180	15
180-190	10
190-200	2

આ કોષ્ટકના અભ્યાસ પરથી એવું તારવી શકાય છે કે 5 કારીગરો રોજ રૂા. 150 થી 160 (160 સામેલનથી) કમાય છે. આ પાંચ કારીગરોમાંના દરેક ચોક્કસ કેટલીક રકમ કમાય છે, તે કહી શકાય નહીં,

તેથી વર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણમાંથી મધ્યક શોધવા માટેં વું અનુમાન કરવામાં આવે છે કે વર્ગના મધ્યકિંમતની આજુબાજુ કેન્દ્રિત છે.

હવે આપણે કહી શકીએ કે 150-160ના વર્ગમાં આવેલા 5 કારીગરો દરેક રોજ $\frac{150+160}{2}=155$

કમાય છે પછીના વર્ગમાં રહેલા 8 કારીગરો દરેક રોજ રૂા. $=$ ' 165 *કમાય છે 15 કારીગરો રોજ*

રૂા. કમાય છે. વગેરે હવે આપણે () ની મદદથી આપેલી માહિતીનો મધ્યક શોધી શકીશું.

દૈનિક વેતન(n)	કારીગરોની સંખ્યા(f_i)	વર્ગની મધ્યકિંમત(x_i)	$f_i x_i$
150-160	5	155	775
160-170	8	165	1320
170-180	15	175	2625
180-190	10	185	850
190-200	2	195	390
	$nf_i = 40$		$\sum f_i x_i = 6960$

$A =$

તેથી દૈનિક વેતનનો મધ્યક= રૂ. 174

મધ્યક શોધવાની આ રીતને સીધી રીત કહે છે.

આપણે ધારવાની રીત પણ સૂત્ર ને ઉપયોગ કરીને ઉપરોક્ત માહિતીનો મધ્યક શોધી શકીએ છીએ. - ગણીએ

ધારોકે મધ્યક = 175

દૈનિક વેતન (in)	કારીગરોની સંખ્યા workers (f_i)	મધ્યકિંમત (x_i)	તફાવત $d_i = x_i – 175$	$f_i d_i$
150-160	5	155	– 20	– 100
160-170	8	165	– 10	– 80
170-180	15	175	0	0
180-190	10	185	+ 10	100
190-200	2	195	+ 20	40
	$n = 40$			– 40

$$x = a + \frac{1}{N}\sum f_i d_i$$

$$= 175 + \frac{1}{40}(–40)$$

$$= 175 – 1 = 174$$

174 તેથી દૈનિક વેતનનો મધ્યક = 174

ઉદાહરણ 25.9: *નીચેની આવૃત્તિ વિતરણનો મધ્યક* (i) *સીધી રીતે* (ii) *દારેલા મધ્યકની રીત ગણો.*

વર્ગ	આવૃત્તિ
20-40	9
40-60	11
60-80	14
80-100	6
100-120	8
120-140	15
140-160	12 ત
કુલ	75

ઉકેલ : (i) સીધી રીતે

વર્ગ	આવૃત્તિ (f_i)	મધ્યકિંમત (x_i)	$f_i x_i$
20-40	9	30	270
40-60	11	50	550
60-80	14	70	980
80-100	6	90	540
100-120	8	110	880
120-140	15	130	1950
140-160	12	150	1800
	$nf_i = 75$		= 6970

$$x = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{6970}{75} = 92.93$$

(ii) ધારવાની રીત

ધારોકે મધ્યક $= a = 90$ છે

વર્ગ	આવૃત્તિ (f_i)	મધ્યકિંમત(x_i)	તફાવત $d_i = x_i - 90$	$f_i d_i$
20-40	9	30	– 60	– 540
40-60	11	50	– 40	– 440
60-80	14	70	– 20	– 280
80-100	6	90	0	0
100-120	8	110	+ 20	160
120-140	15	130	+ 40	600
140-160	12	150	+ 60	720
	$n = 75$			= 220

$$= \qquad = 90 + \frac{220}{75} = 92.93$$

જુઓ કે બંને રીતે એખજ જવાબ આવે છે.

ઉપરના કોષ્ટકના ચોથા ભાગમાં આવેલી રકમો 20ના અવયઅવીઓ છે. તેથી જો આપણે આ બધી કિંમતોને 20 વડે ભાગીએ તો ઘણી નાની સંખ્યાઓ મળે જેનો f_i સાથે ગુણાકાર કરવાનો છે.

જુઓ કે આ 20 એ દરેક વર્ગની વર્ગ લંબાઈ છે.

તેથી $= \frac{x_i - a}{h}$ મેળવી એ જ્યા .. ધારેલો મધ્યક અને 4= જો લંબાઈ છે.

હવે એ રીતે $u_i f_i$ મેળવીએ પછી મેળવીએ અને નીચેના સૂત્રની મદદથી મધ્યક મેળવીએ.

(IV)

હવે ઉદાહરણ 25.9 આ રીતે ગણીએ

ધારોકે $a = 90$ અને વર્ગલંબાઈ $h = 20$

વર્ગ	આવૃત્તિ (f_i)	મધ્યકિંમત (x_i)	તફાવત $d_i = x_i - 90$	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$
20-40	9	30	– 60	– 3	– 27
40-60	11	50	– 40	– 2	– 22
60-80	14	70	– 20	– 1	– 14
80-100	6	90	0	0	0
100-120	8	110	+ 20	1	8
120-140	15	130	+ 40	2	30
140-160	12	150	+ 60	3	36
	$f_i = 75$				$f_i u_i = 11$

સૂત્ર (IV) નો ઉપયોગ કરતાં

$$= 90 + \frac{11}{75} \times 20$$

$$= 90 + \frac{220}{75} = 92.93$$

સૂત્ર (IV) નાં દર્શાવેલી રીતને વિચલન રીત કહે છે.

જુઓએ સીધીરીતે ધરાવાની રીત અને વિચલનની રીત ગણેલો મધ્યક એખ સરખો મળે છે.

ઉદાહરણ 25.10: નીચેના વિતરણ પરથી દૈનિક વેતનનો મધ્યક વિચલનની રીત ગણો.

દૈનિક વેતન (રૂ.માં)	150-160	160-70	170-180	180-190	190-200
કર્મચારીઓની સંખ્યા	5	8	15	10	2

ઉકેલ : ધારોકે a=175 રૂ. અને અહીં $h = 10$

દૈનિક વેતન રૂ.માં	કર્મચારીઓની (f_i)	મધ્યકિંમત (x_i)	વિચલન $d_i = x_i - 90$	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$
150-160	5	155	−20	−2	−10
160-170	8	165	−10	−1	−8
170-180	15	175	0	0	0
180-190	10	185	10	1	10
190-200	2	195	20	2	4
	$f_i = 40$				$f_i u_i = -4$

સૂત્ર (IV),નો ઉપયોગ કરતાં

$$= a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$$ દૈનિક વેતનનો મધ્યક $$= 175 + \frac{-4}{40} \square\ 10 = '\,174$$

નોંધ : જુઓ,કે મધ્યક કોઈપણ રીતે-સાદીરીતે, ધારવાની રીતે કે વિચલનની રીતે- ગણવામાં આવે જવાબ એક સરખો જ મળે છે.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 25.3

1. 100વિદ્યાર્થીઓએ ગણિત શાસ્ત્રની પરીક્ષામાં મેળવેલા ગુણનું આવૃત્તિ વિતરણ નીચે મુજબ છે. સીધી રીતનો ઉપયોગ કરી મધ્યક શોધો.

ગુણ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	12	15	25	25	17	6

2. પેટીઓમાં ગોઠવેલા વિદ્યુત ગોળાનું આવૃત્તિવિતરણ નીચે મુજબ છે.

ગોળાની સંખ્યા સૂચક આંક	50-52	52-54	54-56	56-58	58-60
સપ્તાહોની સંખ્યા	15	100	126	105	30

પેટીઓમાં બંધ ગોળાનો મધ્યક શોધો . મધ્યકની ગણતરી માટે તમે કઈ રીતે પસંદ કરશો ?

3. કોઈ ચોક્કસ વર્ષમાં એક શહેરનો જીવન નિર્વાહનો સૂચક આંક અને સાપ્તાહિક અહેવાલ નીચે મુજબ છે.

જીવન નિર્વાહ સૂચક આંક	140-150	150-160	160-170	170-180	180-190	190-200
સપ્તાહોની સંખ્યા	5	8	20	9	6	4

સાપ્તાહિક સૂચક આંકનો મધ્યક વિચલનની રીતે ગણો

4. નીચેની માહિતી માટેનો મધ્યક (i) ધારેલા મધ્યકની રીતે (ii) વિચલનની માટે ગણો.

વર્ગ	150-200	200-250	250-300	300-350	350-400
આવૃત્તિ	48	32	35	20	10

25.2 મધ્યસ્થ

એક ઓફિસમાં પાંચ કર્મચારીઓ છે. એક સુપરવાઈઝર અને 4 મજુરો મજુરોનો પગાર રૂા. 5000, રૂા. 6500, રૂા. 7500 અને રૂા. 8000 છે, જ્યારે સુપરવાઈઝર નો માસિક પગાર રૂા. 20000 છે. તેમનો સરેરાશ પગાર,

= રૂા.

= રૂા. = રૂા. 9400

જુઓ કે પાંચમાંથી ચાર કર્મચારીઓનો પગાર રૂા. 9400 થી ઘણો ઓછો છે. મધ્યક પગાર રૂા. 9400 પરથી કોઈના પગારનું અનુમાન કરી શકાતનું નથી. મધ્યકની આ ખામી છે. તે માહિતીના અવલોકનો પર વિશ્ષ કેન્દ્રિત છે -વ્યવહાર પર નહીં મધ્યકની આ ખામી દૂર કરવા કેટલાક અંતિમ પ્રાપ્તાંકોની અસર દૂર કરવા આપણે અન્ય મધયવર્તિ સ્થિતિમાનની જરૂર પડશે. મધ્યવર્તી સ્થિમાનનું આવું એક માપ છે - મધ્યસ્થ મધ્યસ્થ એ મધ્યવર્તિ સ્થિતિમાનનું એવું માપ છે દે માહિતીને ચડતા (કે ઉતરતા) ક્રમમાં ગોઠવ્યા પછી બરોબર વચ્ચેના પ્રાપ્તાંકોનું પ્રતિનિધિત્વ કરે છે.

25.2.1મૂળ (કારત) માહિતીનો મધ્યસ્થ

મૂળ માહિતીનો મધ્યસ્થ નીચેની રીતે ગણી શકાય છે.

(i) સંખ્યાત્મક માહિતીને ચડતા (કે ઉતરતા) ક્રમમાં ગોઠવો

(i) જ્યારે પ્રાપ્તાંકોની સંખ્યા એકી હોય ત્યારે $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ મો પ્રાપ્તાંકમધ્યસ્થ છો.

(i) જ્યારે પ્રાપ્તાંકોની સંખ્યા બેકી હોય , ત્યારે $\left(\frac{n}{2}\right)$ મા પ્રાપ્તાંક અને $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ માં પ્રાપ્તાંકની સરેરાશ એ મધ્યસ્થ છે.

કેટલાક ઉદાહરણ દ્વારા સમજીએ

ઉદાહરણ 25.11: 15 કુતરાનું વજન (કિગ્રામાં) નીચે મુજબ છે 9, 26, 10 , 22, 36, 13, 20, 20, 10, 21, 25, 16, 12, 14, 19

મધ્યસ્થ વજન શોધો.

ઉકેલ : માહિતીને ચડતા ક્રમમાં ગોઠવતાં

9, 10, 10, 12, 13, 14, 16, 19, 20, 20, 21, 22, 25, 36

અહિં 15 અવલોકનો છે.

તેથી .. $= 8$નું અવલકોન 19 કિગ્રા એ મધ્યસ્થ છે

નોંધ : મધ્યસ્થ વજન 19 કિગ્રા એ બનાવે છે કે 50% કુતરાઓનું વજન 19 કિગ્રાથી ઓછું છે અને 50% કુતરાઓનું વજન 19 કિગ્રાથી વધુ છે.

ઉદાહરણ 25.12: બાસ્કેટ બોલની ટુકડીએ મેચની શુંખલા માં મેળવેલા પેન્ટ્સ નીચે મુજબ છે.

16, 1, 6, 26, 14, 4, 13, 8, 9, 23, 47, 9, 7, 8, 17, 28

મધ્યસ્થ શોધો.

ઉકેલ : અવલોકનોની સંખ્યા 16 છે (બેકી છે)

તેથી $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ મા અને $\left(\frac{15+1}{2}\right)$ મા અવલોકનનોની સરેરાશ એ મધ્યસ્થ હશે. એટલે કે 8મા અને 9મા અવલોકનોની સરેરાશ શોધવી રહી.

અવલોકનને ચડતા ક્રમમાં ગોઠવતાં :

1, 4, 6, 7, 8, 8, 9, 9, 13, 14, 16, 17, 23, 26, 28, 47

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16

મધ્યસ્થ $= \frac{9+13}{2} = 11$

નોંધ : અહીં ફરી મધ્યસ્થ 11 એ દર્શાવે છે કે 50% પ્રાપ્તાંકો 11 થી મોટા છે અને 50% પ્રાપ્તાંકો 11 થી નાના છે.

25.2.2 અવર્ગીકૃત માહિતીનો મધ્યસ્થ

અવર્ગીકૃત માહિતીનો મધ્યસ્થ શોધવાની ગણતરી ઉદાહરણ દ્વારા સમજીએ.

ઉદાહરણ25.13: 35 વિદ્યાર્થીઓએ 15 ગુણની ગણતરી પરીક્ષામાં મેળવાલે ાગુણનીચે મુજબ છે તેથી તે પરથી મધ્યસ્થ ગુણ શોધો,

મેળવેલા ગુણ	3	5	6	11	15	14	13	7	12	10
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	4	6	5	7	1	3	2	3	3	1

ઉકેલ : મળેલા ગુણને ચડતા ક્રમમાં ગોઠવીને આવૃત્તિ વિતરણ કરી લખીએ.

મેળવેલ ગુણ x_i	3	5	6	7	10	11	12	13	14	15
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા (આવૃત્તિ) f_i	4	6	5	3	1	7	3	2	3	1

$n = 35$, એકી સંખ્યા હોવાથી $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ મું એટલે કે $\left(\frac{35+1}{2}\right)$ મું એટલે કે 18 મું અવલોકન મધ્યસ્થ હશે.

18 મું અવલોકન જાણવા માટે આપેલ આવૃત્તિ વિતરણનું સંચપી આવૃત્તિ વિતરણ નીચે મુજબ તૈયાર કરીએ.

મેળવેલ ગુણ x_i	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા f_i	સંચપી આવૃત્તિ
3	4	4
5	6	10
6	5	15
7	3	18
10	1	19
11	7	26
12	3	29
13	2	31
14	3	34
15	1	35

કોષ્ટક પરથી જોઈ શકાય છે કે 18 મું અવલોકન 7 ગુણ છે. મધ્યસ્થ $= 7$ ગુણ

ઉદાહરણ 25.14: નીચેની માહિતીનો મધ્યસ્થ શોધો.

વજન (કિગ્રામાં)	40	41	42	43	44	45	46	48
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	2	5	7	8	13	26	6	3

ઉકેલ : $n = 2 + 5 + 7 + 8 + 13 + 26 + 6 + 3 = 70$, જે બેકી સંખ્યા છે અને વજન બધા ચડતા ક્રમમાં ગોઠવેલા છે તેથી હવે માત્ર સંચપી વિતરણ તૈયાર કરવું પડશે

વજન (કિગ્રામાં)	સંખ્યા f_i	સંકપી આવૃત્તિ cf	
40	2	2	
41	5	7	
42	7	14	
43	8	22	
44	13	35	35th observation
45	26	61	36th observation
46	6	67	
48	3	70	

... બેકી સંખ્યા હોવાથી $\left(\frac{n}{2}\right)$ મા અને $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ મા અવલોકનની સરેરાશ લેવાથી મધ્યસ્થ જાણી શકાશે. એટલે કે 35મા અને 36 અવલોકનો જોવાના રહેશે. કોષ્ટક પરથી જોઈ શકાય છે. કે 35 મું અવલોકન 44 કિગ્રા છે. અને 36 મું અવલોકન 45 કિગ્રા છે.

તેથી મધ્યસ્થ $= \frac{44+45}{2} = 44.5$ કિલોગ્રામ

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 25.4

1. 11 મેચની શૃંખલામાં ટુકડીએ નોંધાવેલા ગોલ નીચે મુજબ છે.

   1, 0 , 3, 2, 4, 5, 2, 4, 4, 2, 5

   મધ્યસ્થ શોધો.

2. ગણિતની 100 ગુણની ક્ષતિ પરીખ 12 વિદ્યાર્થીઓએ આધી તેમણે મેળવેલ ગુણ નીચે મુજબ છે તે પરથી ગુણનો મધ્યક શોધો.

   46, 52, 48, 39, 41, 62, 55, 53, 96, 39, 45, 99

3. રમતનો એક પાસો 100 વખત ઉછાળવામાં આવે છે મળેલા પરિણામોનું આવૃત્તિ વિતરણ નીચે મુજબ છે. તે પરથી પરિણામોનો મધ્યસ્થ શોધો.

પરસાપરમળતું	1	2	3	4	5	6
આવૃત્તિ	17	15	16	18	16	18

4. નીચેની ત્રણ આકૃત્તિ વિતરણનો મધ્યસ્થ શોધો.

(a)

x_i	2	3	4	5	6	7
f_i	4	9	16	14	11	6

(b)

x_i	5	10	15	20	25	30	35	40
f_i	3	7	12	20	28	31	28	26

(c)

x_i	2.3	3	5.1	5.8	7.4	6.7	4.3
f_i	5	8	14	21	13	5	7

25.3 બહુલક

નીચેનું ઉદાહરણ જુઓ

એક કંપની જુદા જુદા માપના શર્ટ તૈયાર કરે છે. એક સપ્તાહ દરમિયાન માપના કેટલા શર્ટનું વેચાણ થયું તેની નોંધ નીચે મુજબ મળે છે.

માપ (સેમીમાં)	90	95	100	105	110	115
શર્ટની સંખ્યા	50	125	190	385	270	28

કોષ્ટક પરથી એ જાણી શકાય થે કે 105 સેમી માપના શર્ટનું વેચાણ સૌથી વધારે છે. તેથી કંપની તેના ઉત્પાદનમાં આ માપના સર્ટનું ઉત્પાદન વધારે માત્રમાં કરશે. અહીં 105ને માહિતીનો બહુલક કહેવાય બહુકલ પણ મદયવતી સ્થિતિમાનો માંહેનું એક માપ છે.

માહિતીમાં સૌથી વધુ વખત આવતા પ્રાપ્તાંકને તે માહિતીનો બહુલક કહેવાય છે.

બીજા શબ્દોમાં કહીએ, તો જે પ્રાપ્તાંકની (અવલોકનની) આવૃત્તિ સૌથી વધુ છે, તે માહિતીનો બહુકલ છે.

તૈયાર વસ્ત્રો અને બુટ ઉત્પાદકો, વગેરે આ પ્રકારના મધ્યવર્તી માપનો ઉપયોગ કરે છે. બજારની માંગના સંદર્ભે બહુકલ પર આધારિત આ ઉત્પાદકો, નક્કી કરે છે કે જે માપની વસ્તુનું વેચાણ સૌથી વધારે થાય છે તેનું ઉત્પાદન વધારે કરવું કે જેથી ગ્રાહકોની માંગને સંતોષી શકાય.

25.3.1 મૂળ (કાચ્ચ) માહિતીનો બહુકલ

મૂળ માહિતીના કિસ્સામાં તો માહિતી પર દષ્ટિપાત કરીને તરતજ બહુકલ નક્કી કરી શકાય છે. નીચેના ઉદાહરણ દ્વારા સમજીએ.

ઉદાહરણ 25.15: *ફુટબોલની ટૂકડી 12 મેચ રમીને નીચે મુજબના બોલ નોધાવે છે. ગોલની સંખ્યાનો બહુકલ જણાવો.*

ગોલ = 1, 2, 2, 3, 1, 2, 2, 4, 5, 3, 3, 4

ઉકેલ : *માહિતી પર નજર કરતાં જણાય છે કે રગોલની આવૃત્તિ 4 છે અને તે સૌથી વધુ છે.*

તેથી , માહિતીના બહુકલ 2 ગોલ કહેવાય.

ઉદાહરણ25.16: માહિતીનો બહુક શોધો.

9, 6, 8, 9, 10, 7, 12, 15, 22, 15

ઉકેલ : પ્રાપ્તાંકોને ચડતા ક્રમમાં ગોઠવો.

6, 7, 8, 9, 9, 10, 12, 15, 15, 22

જુએ કે 9 અને 15 બે પ્રાપ્તાંકો એવા છે જેની આવૃત્તિ સૌથી વધુ છે. તેથી 9 અને 15 બંન્ને માહિતીના બહુકલ છે.

નોધ : આ પાઠમાં આપણે માત્ર એક જ બહુકલ ધરાવતી માહિતીનો ઉપયોગ કરીશું .

2. જો આપેલ માહિતીના બધા પ્રાપ્તોકો એક સરખી આવૃત્તિ ધરાવતા હોય, તો આવી માહિતીને બહુકલ નથી એમ કહીશું.

25.3.2 અવર્ગીકૃત માહિતીનો બહુકલ

અવર્ગીકૃત માહિતીનો બહુકલ શોધવાનું કામ ઉદાહરણ દ્વારા સમજીએ.

ઉદાહરણ 25.17: નીચેની માહિતી પરથી બહુકલ નક્કી કરો.

વજન (કિગ્રામાં)	40	41	42	43	44	45	46	48
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	2	6	8	9	10	22	13	5

ઉકેલ : કોષ્ટક પરથી જાણી શકાય છે કે 45 કિગ્રામી આવૃત્તિ 22 સૌથી મોટી છે. એટલે કે 45 કિગ્રામ વજનવાળા વિદ્યાર્થીઓમોટી સંખ્યામાં છે તેથી બહુકલ 45 કિગ્રા છે.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 25.5

1. બહુકલ શોધો : 5, 10, 3, 7, 2, 9, 6, 2, 11, 2

2. 15 કુટુબોની મોજણી કરતાં પ્રત્યેક કુટુંબમાં વપરાતા ટીવી સેટની સંખ્યા નીચે મુજબ માલુમ પડી ટીવી સેટની સંખ્યાનો બહુકલ શોધો : 2, 2, 4, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 3, 3, 1, 3, 0

3. એક સમતોલ પાસો 100 વખત ઉછાળીને મેળવેલા પરિણામો નીચેની કોષ્ટકમાં દર્શાવ્યા છે. તે પરથી મળતો બહુક જણાવો.

મળતું પરિણામ	1	2	3	4	5	6
આવૃત્તિ	15	16	16	15	17	20

4. 80 વિદ્યાર્થીઓએ 10ગુણની ગણિતની કસોટીમાં મેળવેલા ગુણનું વિતરણ નીચે મુજબ છે. માહિતીનો બહુકલ શોધો.

મેળવેલા ગુણ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	5	2	3	5	9	11	15	16	9	3	2

સારાંશ

- મધ્યક મધ્યસ્થ અને બહુકલ મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં માપો છે.

- મુળ માહિતીનો મધ્યક (ગણિતિક સરેરાશ) શોધવાનું સુત્ર =

- જ્યાં $x_1, x_2 \ldots, x_n$ એવા n પ્રાપ્તાંકો છે.

- અવર્ગીકૃત માહિતીના મધ્યકનું સૂત્ર $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \dfrac{\sum f_i x_i}{N}$

  જ્યાં i માં આવેલા x_i ની આવૃત્તિ f_i છે.

અવર્ગીકૃત માહિતીના ધારેલા મધ્યકની રીતે મધ્ય શોધવાનું

સૂત્ર =

$d_i = x_i - a,\ a$ છે..

વર્ગીકૃત માહિતીનો મધ્યક

- વર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણનો મધ્ય શોધતી વખતે આપણે ધારી લઈએ છીએ કે કોઈપણ વર્ગની આવૃત્તિઓ (વર્ગના અવલોકનો) તે વર્ગની મધ્યકિંમત પર કેન્દ્રિત થયેલી છે.

- **સીધીરીત :**

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

  જ્યાં x_i એ વર્ગની મધ્યકિંમતો છે અને f_i એ x_i ને સંગલ્ન આવૃત્તિ છે.

- **ધારેલા મધ્યકની રીત (મધ્યક ધારવાની રીત)**

$$\bar{x} = a + \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i d_i}{N}$$

જ્યાં a = ધારેલા મધ્ય અને $d_i = x_i - a$,

- **વિચલનની રીત**

$$\bar{x} = a + \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i u_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \right) \times h$$

જ્યાં a = ધારેલો મધ્યક, $= \frac{x_i - a}{h}$ અને વર્ગની લંબાઈ છે.

નોંધ - ઉપરના ત્રણે સૂત્રોમાં સાથે $i = 1$ થી n એવું લખ્યુ છે તે દર્શાવવું અનિવાર્ય નથી તેથી સૂત્રો નીચે મુજબ પણ

	$\pi = ax \frac{\sum f_i d_i}{N}$	$\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{N} xh$

$$\bar{x} = a + \left(\frac{\sum n+1}{2}\right) \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i d_i}{N}$$

જ્યારે માહિતીને ચડતા (કે ઉતરતા) ક્રમમાં ગોઠવેલી હોય, ત્યારે બરોબર વચ્ચેના અવલોકનને (પ્રાપ્તાંકને) મધ્યસ્થ કહે છે.

- મુળ માહિતીપરથી મધ્યસ્થ :

(i) જ્યારે અવલોકનો (n) એકી સંખ્યામાં હોય , ત્યારે મું અવલોકન મધ્યસ્થ છે.

(ii) જ્યારે અવલોકનો (n) બેકી સંખ્યામાં હોય , ત્યારે $\left(\frac{n}{2}\right)$ મા અને $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ મા અવલોકનની સરેરાશ એ મધ્યસ્થ છે.

- અવર્ગીકૃત માહિતી પરથી મધ્યસ્થ :

સંચપી આવૃત્તિ તૈયાર કરવી જોઈએ અને પછી ઉપર જણાવેલ (i) અન (ii) મુજબ મધ્યસ્થ જાણી શકાય છે.
સૌથી વધ આવૃત્તિ ધરાવતું અવલોકન માહિતીના બહુકલ તરીકે ઓળખાય છે.

સત્રાંત સ્વધ્યાયય

1. પહેલી પાંચ અભિવાજ્ય સંખ્યાનો મધ્યક શોધો.
2. જો 5, 7, 9, x, 11 અને 9 હોય તો x શોધો.

3. વર્ગના 9 વિદ્યાર્થીઓના ગુણ 51, 36, 63, 46, 38, 43, 52, 42 અને 43 છે. () ગુણનો મધ્યસ શોધો (i) જો 75 ગુણ ધરાવતો વિદ્યાર્થી વર્ગમાં દાખલ થાય.(ii) તો ગુણનો મધ્યક કેટલો થાય ?

4. 10 વિદ્યાર્થીઓના મધ્યકગુણ 70 છે આ વિદ્યાર્થીઓને 6 અને 4 ના ગ્રુપમાં વહેંચવામાં આવે છે. જો પહેલા ગ્રુપના વિદ્યાર્થીઓના મધ્યક ગુણ 60 હોય, તો બીજા ગ્રુપના વિદ્યાર્થીઓના મધ્યક ગુણ શોધો.

5. જો $x_1, x_2, \ldots, x_n$ અવલોકન નો મધ્યક $\overline{x}$ હોય તો સાબિત કરો કે

6. 50 સંખ્યાઓ આપેલી છે. આ દરેક સંખ્યા 53માંથી બાદ કરવામાં આવે છે અને એ રીતે મળતી સંખ્યાઓનો મધ્યક જો (-3.5) મળે, તો મૂળ સંખ્યાઓનો મધ્યક શોધો.

7. નીચેની માહિતી પરથી મધ્યક શોધો.

(a)

x_i	5	9	13	17	22	25
f_i	3	5	12	8	7	5

(b)

x_i	16	18	28	22	24	26
f_i	1	3	5	7	5	4

8. નીચેની માહિતી પરથી મધ્યકશોધો.

(a)

વર્ગ	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
આવૃત્તિ	2	3	5	7	5	3

(b)

વર્ગ	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700
આવૃત્તિ	3	5	8	6	5	3

(C) 50 વિદ્યાર્થીઓની ઉંમર (માલસમાં)નું આવૃત્તિ વિતરણ નીચે મુજબ છે મધ્ય ઉંમર શોધો.

ઉંમર માસમાં 156-158 158-160 160-162 162-164 164-
વિદ્યાર્થીઓની 2 4 8 16 14 6
સંખ્યા

9. નીચેની માહિતીનો મધ્યસ્થ શોધો.

(a) 5, 12, 16, 18, 20, 25, 10

(b) 6, 12, 9, 10, 16, 28, 25, 13, 15, 17

(c) 15, 13, 8, 22, 29, 12, 14, 17, 6

10. નીચે લખેલા અવલોકનો ચડતા ક્રમમાં ગોઠવેલ છે જો માહિતીનો મધ્યસ્થ 60 હોય, તો x ની કિંમત શોધો.

26, 29, 42, 53, x, $x + 2$, 70, 75, 82, 93

11. નીચેની માહિતી પરથી મધ્યસ્થ શોધો.

(a)

x_i	25	30	35	45	50	55	65	70	85
f_i	5	14	12	21	11	13	14	7	3

(b)

x_i	35	36	37	38	39	40	41	42
f_i	2	3	5	4	7	6	4	2

12. નીચેની માહિતીનો બહુકલ શોધો.

(a) 8, 5, 2, 5, 3, 5, 3, 1

(b) 19, 18, 17, 16, 17, 15, 14, 15, 17, 9

13. યાદચ્છિક રીતે લીધેલા 80 બલ્બનું આવૃત્તિ વિતરણ નીચે મુજબ છે. તે પરથી બહુકલ શોધો.

આયુષ્ય (કાલકમાં)	300	500	700	900	1100
બલ્બની સંખ્યા	10	12	20	27	11

14. નીચેની આવૃત્તિ વિતરણનો મધ્ય 7 હોય, તો p ની કિંમત શોધો.

x_i	4	p	6	7	9	11
f_i	2	4	6	10	6	2

15. વીમા કંપનીએ પસંદ કરેલા લોકોના સમુદાય પાસેથી મેળવેલી માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવી છે. તે પરથી માહિતીનો મધ્યક શોધો.

ઉંમર વર્ષમાં	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
મરણની સંખ્યા	2	12	55	95	71	42	16	7

16. અવલોકનો $x + 1, x + 4, x + 5, x + 8,$ અને $x + 11$નો મધ્યક 10 હોય, તો છેલ્લા ત્રણ અવલોકનોનો મધ્યક કેટલો થાય .

(A) 12.5 (B) 12.2 (C) 13.5 (D) 14.2

17. માહિતીના દરેક અવલોકનમાં 2 ઉંમરવામાં આવે , તો મધ્યકમાં કેવો ફેરફાર થાય ?

(A) એટલોજ રહે (B) મધ્યક બમણો થાય.

(C) મધ્યક 2 જેટલો ઘટે (D) મધ્યક 2 જેટલો વધે.

18. અવલોકનો 15, 14, 19, 20, 14, 15, 14, 18, 14, 15, 17, 14, 18નો બહુકલ શું છે ?

(A) 20 (B) 18 (C) 15 (D) 14

તમારી પ્રગતિ ચકાસોના જવાબ

25.1

1. $\sum_{i=1}^{n} x_i/n$ 2. 5.5 3. 86.33 kg

4. 142.8 cm 5. 25.68°C 7. 42

8. 29.17

25.2

1. 5.84 2. (i) 18.99 (ii) 6.57

3. 11.68 4. 10

25.3

1. 28.80 2. 55.19 3. 167.9 4. 244.66

25.4

1. 3 2. 50 3. 4

4. (a) 4 (b) 30 (c) 5.8

25.5

1. 2 2. 1 3. 6 4. 7

સત્રાંત સ્વાધ્યાના જવાબો

1. 5.6 2. 10 3. (i) 46 (ii) 48.9

4. 85 6. 56.5 7. (a) 15.775 (b) 21.75

8. (a) 42.6 (b) 396.67 (c) 163 *માસ (લગભગ)*

9. (a) 16 (b) 14 (c) 14

10. 59 11. (a) 45 (b) 24 12. (a) 5 (b) 17

13. 900 14. 5 15. 39.86 વર્ષ 16. (A)

17. (D) 18. D

26

સંભાવનાનો પરિચય

પ્રાસ્તાવિક

રોજ બરોજના જીવન-વ્યવહારમાં આપણે નીચે જેવા વાક્યો બોલીએ છીએ.

(i) *<u>કદાચ</u> આજે વરસાદ આવે.*

(ii) *ટ્રેનગાડી આવશે <u>એવું લાગે</u> છે.*

(iii) *બેંકની ભૂત થઈ હોય, એ <u>શક્ય</u> નથી.*

(iv) *આવતા સપ્ટેમ્બરમાં કઠોળના ભાવ ઘટવાની પૂરી <u>શક્યતા</u> છે.*

(v) *મને <u>શક</u> છે કે શરત જીતી જાય.*

વગેરે ,,, વગેરે

કદાચ લાગવું ,શક્યતા,તક,વહેમ,સંભવ,વગેરે શબ્દો આપણે જેવી વાત કરીએ છીએ તે ઘટના (બનાવ) બનશે એનું ચોક્કસ નથી, એવું સૂચવે છે. સંભાવનાનો સિદ્ધાંત એ ગણિત શાસ્ત્રીની એક શાખા છે, જે ઘટના સંકળાયેલી અનિશ્ચિતતાનું માપ આપે છે.

16 *શતાબ્દિમાં પાસ ફેંકવા જેટલી રમતોમાં રહેલી હારવા - જીતવા ની તકમાં જીવન શાસ્ત્ર જેવી શરૂઆત થઈ તે સંભાવના શાસ્ત્ર આજે જીવન શાસ્ત્ર અર્થ શાસ્ત્ર, ભૈતિક શાસ્ત્ર , સમાજ શાસ્ત્ર, વગેરે વિષયોના સંશોદનમાં ખૂબજ ઉપયોગી રહ્યું છે.*

હેતુઓ

આ પાઠ શીખ્યા પછીની અધ્યેતા

- *યાદચ્છિક પ્રયોગનો અર્થ સમજી શકશે.*
- *યાદચ્છિક પ્રયોગના પરિણામો અને ઘટનાઓનો તફાવત તારવી શકાશે.*
- *ઘટના . ઘટનાની સંભાવના* P(E) *ની વ્યાખ્યા આપી શકાસે.*
- *સંભાવના* P(E) *નું મૂલ્ય* P(E) *છે તે દર્શાવી શકાશે.*
- *સિક્કો ઉછાળવો, પાસો ફેંકવો, તાસમાંથ પાનું વગેરેને લગતા કુટ પ્રશ્નો ઉકેલવામાં સંભાવનાના સિદ્ધાંતો / નિયમોનો ઉપયોગ કરી શકાશે.*

અપાક્ષિત પૂર્વજ્ઞાન

- સિક્કા સાથે સંકળાએલા શબ્દો -કીંગ ક્રોસ , દેહ -ટેઈલ ચત્તો -ઉંધો , વગેરે
- પાસો,પાસાની સપાટી સપાટી પુરની સંખ્યા ,
- ગંજીયાં , પત્તા,પાનાં-પાનાંની સંખ્યા તેરતેર પાનાના ચારગ્રુપ ,(કાળી,લાલ,ચોરસ,ફુલ્લી) ધરે ગ્રુપમાં રાજા,રાણી, ગુલાબ વગેરે .
- ગુણોત્તર - પ્રમાણ, અપૂર્ણાંક , દશાંશ અપૂર્ણાંકની સંકલ્પના અને તેના પરની ગણિતિક પ્રક્રિયાઓ

26.1 યાદચ્છિક પ્રયોગ અને તેના પરિણામો

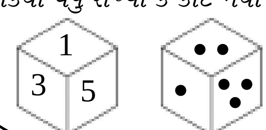
નીચેની પરિસ્થિતિનું અવલોકન કરો .

1. ધારોકે એક સિક્કો ઉછાળવામાં આવે છે. આપણે અગાઉથી જાણીએ છીએ કે સિક્કો જમીન ઉપર પડશે , ત્યારે કાંતો છાપ (H) ઉપર દેખાશે અથવા કાંટો (T) ઉપર દેખાશે.

જ્યારે આપણે 'સિક્કો' બોલીએ છીએ ત્યારે એવું ધારી લઈએ છીએ કે તે સપ્રણ બનેલો છે એટલે કે એક બાજુ,કરતાં વધુ વખત આવે કે ઓછી વખત આવે તે માટેનું કોઈ કારણ નથી.

2. ધારોકે એક પાસો ફેંકવામાં આવે છે. આપણે અગાઉથી જાણીએ છીએ કે પાસો જમીન ઉપર એવી રીતે સ્થિર થશળે કે જેથી તેની ઉપરની સપાટી પર કોઈ એક સંખ્યા (1,2,3,4,5 કે 6) દેખાય.

પાસો એટલે સમતોલ સમધન જેને છે સપાટી છે અને દરેક સપાટી ઉપર 1 થી 6 સંખ્યાઓ લખેલી છે અથવા ડૉટ ચિતરેલા છે એક સપાટી પર એકથી વધુ સંખ્યા કે કોટ નથી



3. ધારોકે આપણે 4 બીજ વાવીએ અને ત્રણ દિવસ પછી જોઈએ કે કેટલા અંકૂરિત થાય છે અકૂરિત થયેલા બીજની સંખ્યા 0,1,2,3,કે 4 હશે .

1. માં યાદચ્છિક પ્રયોગનું ઉદાહરણ યાદચ્છિક પ્રયોગનું ઉદાહરણ છે. છાપ (H) અથવા કાંટો છે.

2. માં પ્રયોગના શક્ય પરિણામો 1,2,3,4,5,6 છે.

3. માં શક્ય પરિણામો 0,1,2,3,4 છે. યાદચ્છિક પ્રયોગના શક્ય પરિણામો હંમેશા એકથી વધુ હોય છે. જ્યારે પ્રયોગ કરવામાં આવે છે, ત્યારે બધા શક્ય પરિણામો માંથી માત્ર એક પરિણામ દેખાય છે. ઉપરાંત પ્રયોગ કરતાં પહેલાં કોઈ ચોક્કસ પરિણામ મળશે એવી આગાહી (એનું અનુમાન) કરી શકતા નથી. પ્રયોગનું પુનરાવર્તન બીજી પરિણામ તરફ દોરી જાય છે. બીજા કેટલાક યાદચ્છિક પ્રયોગો .નીચે મુજબ છે.

(1) એક સરખા આકારના પરંતુ જુદા જુદા રંગના કેટલાક દડાઓ એક કોથળીમાં રાખ્યા હોય, તેમાંથી અંદર જોવા વગર એક દડો લેવો,

(2) સરખી રીતે આપેલ ગંજીફામાંથી એક પત્તું ખેંચવું. આ પાઠમાં હવેથી આપણેયાદચ્છિક પ્રયોગ ને બદલે માત્ર પ્રયોગ શબ્દ જ વાપરીશું.

ગંજીફામાં કુલ 52 પત્તા હોય છે જે 13-13 પાનાના ચાર જૂથ કાળી (♠) લાલ (♥) ચોકટ (♦) અને ફુલ્લી (♣). માં વહેંચાયેલ થે. કાળી અને ફુલ્લી કાળા રંગના છે પરંતું લાલ અને ચોકડી લાલ રંગના છે. દરેક જૂથમાં એક્કો બાદશાહ ,રાણી, ગુલાબ,10,9,8,7,6,5,4,3 અને 2 હોય છે. બાદશાહ , રાણી અને ગુલામના પત્તા 'મહોરાવાળા પત્તા' કહેવાય છે.

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 26.1

1. નીચેનામાં યાદચ્છિક પ્રયોગો ક્યા છે ?

(i) એક બહુવિકલ્પ કસોટી આપેલી છે. તેના ચાર જવાબો A,B,C,D આપેલા છે. તેમાંથી માત્ર એખ જ વિકલ્પ ખરો છે. ધારોકે આ કસોટીના જવાબનું તમે અનુમાન કરો છો.

(ii) એક ચબરખીઓ એક સખ્યા એ રીતે 1 થી 20 પ્રાકૉત્તિક સંખ્યાઓ લખેલી ચબરખીઓ એક થેલીમાં મૂકેલી છે. અને તેમાં જોયા વગર તમે એક ચબરખી ઉપાડો છો.

(iii) તમે ઊંચાઈ પરથી એક પથ્થર પડદો મૂકો છો.

(iv) હરિ અને જોહન 1,2,3 માંથી એક સંખ્યા સ્વતંત્રરીતે પસંદ કરે છે.

2. ઉપરના પ્રશ્ન 1 માં આપેલા યાદચ્છિક પ્રયોગોનું શક્ય પરિણામ જણાવો.

૨૬.૨ ઘટનાની સંભાવના

ધારોકે એક સિક્કો યાદચ્છિક રીતે ઉછાળવામાં આવે છે. આપણને બે શક્ય પરિણામો મળશે- છે Head (H) અને કાંટો Tail (T) આપણે ધારી લઈએ

કે દરેક પરિણામ (H) અને (T) ને ઉદ્‌ભવવાની શક્યતા સરખી છે. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો (H) અને (T) સંસંભાવી છે એજ રીતે એક પાસો ફેંકીએ , તો ઉદ્‌ભવા પરિણામે 1,2,3,4,5 અને 6 કોઈ પણ મળવાની શક્યતા સરખી છે એટલે કે બધા પરિણામો સમસંભાવી છે.

સિક્કો યાદચ્છિક રીતે ઉછાળવો એટલે સિક્કાને કોઈપણ જાતની આડખેલી વગર પડવા દેવો.

ઘટનાની સંભાવનાની વ્યાખ્યા આપતાં પહેલાં આપણે ઘટના શબ્દનો ... સમજી લઈએ કોઈપણ પ્રયોગના પરિણામ છે દાખલા તરીકે પાસો બેકી સંખ્યા દર્શાવે છે એ પાસો ફેંકવાથી મળતી એક ઘટના છે આ ઘટના 2,4, કે 6 એવા ત્રણ જુદા જુદા પરિણામો સાથે સંકળાયેલી છે. તેમ છતાં ઘટના ઘટનાશબ્દ

માટે ભાગે એક પરિણામ ની ચર્ચામાં વપરાતા છે. સિક્કાની ઉપરના ભાગે કાંટો દેખાય છે. એ દરેક એ દરેક ઘટના છે. પહેલી ઘટના પરિણામ H (છાપ) સાથે બીજા પરિણામ T (કાંટો) સાથે સંકળાયેલી છે. જો આપણે H મળવાની ઘટનાને F વડે અને T મળવાની ઘટનાને E વડે દર્શાવી એ, તો E અને F ને પ્રાથમિક ઘટનાઓ કહેવાય છે જે પ્રયોગનું એક અને માત્ર એકજ પરિણામ મળતું હોય, તેને પ્રાથમિક ઘટના કહે છે.

સમસંભાવી ઘટનાઓ માટે, ઘટના E ની સંભાવના P(E) છે દર્શાવાય છે. અને તેનું મૂલ્ય નીચેના સૂત્રથી મેળવી શકાય છે.

$$P(E)=\frac{\text{ઘટના E ઉદ્‌ભવના માટે અનુકુળ પરરિણામોની સંખ્યા}}{\text{પ્રયોગના કુલ પરરિણામોની સંખ્યા}}$$

આ પાઠમાં આપણે માત્ર એવા પ્રયોગના પરિણામોની

ચર્ચા કરીશું જેના પરિણામો સમસંભાવી હોય.

કેટલાક ઉદાહરણો દ્વારા ઘટનાની સંભાવના શોધીએ.

ઉદાહરણ 26.1: એખ સિક્કો એક વખત ઉઠાળવામાં આવે છે (i) છાપ મળે (ii) કાંટો મળે તેની

ઉકેલ : જો છાપ (i) મળવાની ઘટના (ii) હોય તો પ્રયોગના શક્ય પરિણામો છે. છાપ (H) કાંટો (T) તેથી શક્ય પરિણામો 2 ઘટના E માટે અનુકુળ પરિણામો ની સંખ્યા = 1

$$P(E)=\frac{\text{E માટે અનુકુળ પરરિણામોની સંખ્યા}}{\text{કુલ પરરિણામોની સંખ્યા}}=\frac{1}{2}$$

એજ રીતે જો કાંટો T મળવાની ઘટના F હોય, તો

$$\text{P(F)} = \frac{1}{2}$$

ઉદાહરણ 26.2: એક પાસો એક વખત ઉછાળવવામા આવે છે. પાસા પર 3 સિવાઈનો નંબર મળે તેની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : 3 સિવાયનો નંબર મળે એટલે નંબર 1,2,3,4,5,6 મળે આ ઘટનાને F વડે દર્શાવીએ

પાસાના શક્ય પરિણામો , 1,2,3,4,5,6, મળે આ ઘટના

અને અનુકુળ પરિણામોની સંખ્યા =5 (અનુકુળ એટલે 1,2,4,5,6 મળે)

$$\text{P(F)} = \frac{1}{2}$$

ઉદાહરણ 26.3: 2 એક પાસો એક વખત ઉછાળવવામા આવે છે. પાસા પર 3 સિવાઈનો નંબર મળે તેની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : (i) ધારોકે દડો લાલ રંગનો હોવાથી ઘટના E છે પ્રયોગના શક્ય પરિણામોની સંખ્યા 2+3+4 = 9 (લાલ)

← Number of outcomes favourable to E

← Number of all possible outcomes

(વાદળી) કાળા)

ઘટના (E) ને અનુકુળ પર પરિણામોની સંખ્યા = 2

ઉકેલ 26.4: *લાલ વાજળી અને 4 કાળા દડા મૂકેલી થેલી માંથી એક દડો યાદચ્છિક રીતે લેવામાં આવે છે.*

(i) દડો લાલ રંગનો મળે (ii) દડો વાદળી રંગનો મળે (iii) દડો કાળા રંગનો મળે (iv) દડો વાદળી રંગનો ન હોય, તેવા મળે તેવી સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : (i) *ધારોકે દડો લાલ રંગનો હોવાથી ઘટના* E *છે પ્રયોગના શક્ય પરિણામોની સંખ્યા* 2+3+4 = 9 *(લાલ) (વાદળી) કાળા)*

(i)*ઘટના (E) ને અનુકુળ પર પરિણામોની સંખ્યા* = 2

(ii) *ધારોકે દડો વાદળી કંગનો હોવાની ઘટના* F *છે.*

$$P(F) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

(iii) ધારોકે દડો વાદળી રંગનો હોવાની ઘટના G *છે*

$$= P(G) = \frac{4}{9}$$

(iv) ધારોકે દડો વાદળી રંગનો ન હોય તો ઘટના H *છે.*

(દડો વાદળી રંગનો હોય એટલે દડો લાલ અથવા કાળા રંગનો હોય)

વળી ઘટના H *બનાવવા અનુકુળ પરિણમોની સંખ્યા* H = 2 + 4 = 6

$$, P(H) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

ઉદાહરણ 26.5: *સરખી રીતે અપેલા* 52 *પત્તાનો ગંજીફો છે તેમાંથી એક પત્તુ ખેંચવામાં આવે છે, તે* (i) *લાલરંગનું હોય* (ii) *કાળા રંગનું હોય, તેની સંભાવના શોધો .*

ઉકેલ : *() પત્તુ લાલ રંગનું હોય તે ઘટના ધારોકે .. છે.*

લાલ રંગના પત્તાની કુલ સંખ્યા = 13 *(લાલના)* + 13 *(ચોકટના)* =26 *ઘટના* E, *ને અનુકુળ પરિણામોની સંખ્યા* 26 *અને પત્તાની કુલ સંખ્યા* = 52

(i) 7 *માંથી નાનો નંબર મળે તે ઘટના ધારોકે .. છે.*

E *ને અનુકુળ ઘટોકી સંખ્યા* = 6 *(કારણ કે બધી સપાટી પરનો નંબર* 7 *થી નાનો છે)*

અને કુલ પરિણામોની સંખ્યા = 6

$$P(E) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

(ii) પત્તું કાળા રંગનું હોય, તો ઘટના ધારો કે F છે

કાળા રંગના પત્રાની કુલ સંખ્યા = (કાળાની) B + (ફુલ્લીનો) = 13 + 13 = 26

$$P(F) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2} \text{ .... (ii)}$$

ઉદાહરણ 26.6: એક પાસો એક વખત ઉછાળવામાં આવે છે.

(i) પાસા પર 7 થી નાનો નંબર મળે તેની સંભાવના શોધો.

(ii) પાસા પર 7 થી મોટો નંબર મળે તેની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : 7 થી નાનો નંબર મળે તે ઘટના ધારોકે E છે

E ને અનુકુળ ઘટકોની સંખ્યા

$$= 6 \; P(E) = \frac{6}{6} = 1$$

(ii) 7 થી મોટો નંબર મળે તે ઘટના ધારોકે F છે

F ને અનુકુળ ઘટકોની સંખ્યા = 0 (કારણ કે એક પણ સપાટી પર 7 થી મોટા નંબર નથી)

$$P(F) = \frac{0}{6} = 0$$

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 26.2

1. એક વખત પાસો ઉછાળીને 5 મળવાની સંભવના શોધો.
2. પાસો એક વખત ઉછાળવામાં આવે છે. નીચેના પ્રયોગની (ઘટનાની) સંભાવના શોધો.
3. સરખી રીતે ચીપેલા 52 પત્તાના ગંજીફામાંથી એક પાનું ખેંચવામાં આવે છે, તે બાદશાહનું હોય તેની સંભાવના શોધો.
4. 0 થી 20 માંથી એક પૂર્ણાંક પસંદ કરવામાં આવે છે. આ પૂર્ણાંક અવિભાજ્ય સંખ્યા હોય તેની સંભાવના શોધો.
5. એક થેલીમાં 3 સફેદ અને 3 લાલ દડા છે. તેમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક દડો લેવામાં આવે છે. પસંદ થયેલો દડો (i) લાલ રંગનો હોય (ii) સફેદ રંગનો હોય તેની સંભાવના શોધો.
6. એક વ્યક્તિને નોકરી આપવાની છે. તેના ઈન્ટરવ્યુમાં પુરુષો અને 4 મહિલાઓ આવી છે નોકરી મેળવનાર (i) પુરુષ હોવાની (ii) મહિલા હોવાની સંભાવના શોધો.

26.3 સંભાવના વિશે કેટલું ક વિશેષ

સંભાવના કેટલાક વિશિષ્ટ અને રસપડે તેવા ગુણધર્મો ધરાવે છે કેટલાક ઉદાહરણો દ્વારા તે ગુણધર્મો વાણીએ / સમજીએ.

અવલોકન 1: *જુઓ ઉપરનું ઉદાહરણ* 26.6

(a) *ઘટના* E *ચોક્કસ બનાવાની છે, બનાવવાની છે, કારણકે પાસા પરનો દરેક નંબર* 7 *થી નાનો છે. આવી ઘટના કે જે ચોક્કસ જ બનાવવાની છે તેને ચોક્કસ ઘટા કહેવામાં આવે છે. ચોક્કસ ઘટનાની સંભાવના* 1 *છે.*

(b) *ઘટના* F *બનાવવાનું અ શક્ય છે કારણ કે પાસા પરનો કોઈ નંબર* 7 *થી મોટો નથી. આવી ઘટના કે જે બનાવવું શક્ય જનથી તેને અશક્યઘટના કહેવામાં આવે છે. અશક્ય ઘટનાની સંભાવના* 0 *છે.*

(c) *સંભાવનાની વ્યાખ્યા મુજબ કોઈ પણ ઘટનાની સંભાવના* P(E) 1 *થી મોટી હોઈ શકે નહિ કારણ કે સૂત્રના અંશમાં રહેલી* P(E) *ના અનુકુળ પરિણામોની સંખ્યા, છેદમાં રહેલી કુલ પરિણમોની સંખ્યા કરતાં મોટી હોઈ શકે નહિ.*

*(*D*)અંશ અને છેદની બંને સંખ્યાઓ પ્રાકૃત્તિક સંખ્યાઓ છે તેથી () નું મૂલ્ય ઋણ હોઈ શકે નહિ.*

અવલોકન (a), (b), (c)*અને* (d), *પરથી કહી શકાય કે* P(E) *ની કિંમત* 0 *થી* 1 *સુધીમાં જ હોય, એટલે કે* $0 \le P(E) \le 1$

અવલોકન 2: *ઉદાહરણ* 26.1 *માં ઘટનાઓ છાપ (*H*) અને કાંટો (*T*) એ પ્રાથમિક ઘટનાઓ અને*

$$= \frac{1}{2}\ P(H) + P\ (T) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

તે જ રીતે પાસો એક વખત ઉછાળવાથી મળતી પ્રાથમિક ઘટનાઓ 1,2,3,4,5, *અને* 6 *છે અને*

$$P(1) + P\ (2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

જુઓ કે કોઈ પ્રયોગની તમામ પ્રાથમિક ઘટનાઓની સંભાવનાનો સરવાળો 1 *થાય છે.*

અવલોકન 3: *ઉદાહરણ* 26.2 *અને* 26.3 *માંથી નંબર* 3 *મળવાની સંભાવના +* 3 *સિવાયનાં નંબર મળવાની*

સંભાવના = $= \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$

એટલે કે P(3) + P(*નહી* 3) = 1

અથવા P(E) + P(*નહી* E) = 1 ...(1)

એજ રીતે ઉદાહરણ 26.1 *માટે*

P(*છાપ મળે*) = P(F) = $\frac{1}{2}$

નોંધ

P(*કાંટો મળે*) + P(F) = $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

So, P(E) + P(not E) = 1 [*કાંટો મળવો એટલે છાપ ન મળવી*] ...(2)

પરિણામ (1) અને (2) પરથી તારવી શકાય છે કે કોઈપણ ઘટના E *માટે*

એટલે કે P(3) + P(*નહી* 3) = 1

અથવા P(E) + P(*નહી* E) = 1 [$\overline{E}$ *એ* E*નહિ નો સંકેત છે*]

ઘટના ઘટના E *ની પૂરક ઘટના કહેવાય છે અથવા એ* E *એકબીજાની પૂરક ઘટનાઓ કહેવાય છે.*

વ્યપક રીતે ઘટના E *માટે એ સત્ય છે કે*

P(E) + P( ) = 1

ઉદાહરણ 26.7: *જો* P(E) = *હોય, તો* E *નહિ ની સંભાવના શોધો,*

ઉકેલ : (E) + P(*નહી* E) = 1

$$P(\text{નહી } E) = 1 - P(E) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

ઉદાહરણ 26.8: *એક વખત ઉછાળેલા પાસા પર* 5 *ન મળે તોની સંભાવના શોધો,*

ઉકેલ : *ધારોકૃ પાસા ઉપર* 5 *મળે છે તે ઘટના* E *છે તેથી આપણે* P(E*નહી*) *એટલે કે* P(E) *નું મૂલ્ય શોધવાનું છે.*

આપણે જાણીએ છીએ કે $P(E) = \frac{1}{6}$

અને P($\overline{E}$) == 1 – = $\frac{5}{6}$

ઉદાહરણ26.9: *સરખી રીતે આપેલી ગજીફાના* 52 *પત્તામાંથી એક પત્તુ ખેંચવામાં આવે છે.. આ પત્તું મહોરાપત્તું હોય તેની સંભાવના શોધો.*

ઉકેલ : *શક્ય પરિણામોની સંખ્યા* = 52

પ્રયોગને અનુકિળ પરિણામોની સંખ્યા એટલે કે મહોરાપત્તું ના પરિણામોની સંખ્યા = 3 × 4 = 12

(રાજા રાણી અને ગુલાબ એ મહોરાવાળાં પત્તાં છે)

: P *(મહોરાવાળું પત્તું)* = $\frac{12}{52} = \frac{3}{13}$

ઉદાહરણ 26.10: *એક સિક્કો બે વખત ઉછાળવામાં આવે છે. બંન્ને વખત સિક્કા પર છાપ H મળે તેની સંભાવના શોધો.*

ઉકેલ : *છાપ માટે H અને કાટાં માટે T સંકેત લઈએ તો આ પ્રયોગના શક્ય પરિણામો છે એટલે બંને ઉછાળવામાં છાપ HH, HT, TH, TT, છે.*

HH *એટલે એક ઉછાળમાં છાપ અને બીજા ઉછાળવામાં કાંટો*

TH *એટલે એક ઉછાળમાં કાંટો અને બીજા ઉછાળવામાં છાપ*

TT *એટલે બંને ઉછાળવામાં કાંટો*

શક્ય પરિણામોની સંખ્યા $= 4$

બંન્ને ઉચાળવામાં છાપ (HH) *મળવાની ઘટનાને* E *કહીએ*

તો $P(HH) = \dfrac{1}{4}$

ઉદાહરણ 26.11: 10 *ખામીવાળી રિંગ એક સ્માતે* 100 *સારી (ખામી વગરની) રિંગના જથ્થામાં ભળી ગઈ કોઈ રિંગ ખામી વગરની છે કે ખામીવાળી છે એ પહેલી નજરે નક્કી કરવાનું મુશ્કેલ છે. રિંગના આ જથ્થામાંથી એક રિંગ યાદચ્છિક રીતે લેવામાં આવે, તો તે ખામી વગરની હોવાની સંભાવના શોધો.*

ઉકેલ : *તમામ શક્ય પરિણામોની સંખ્યા* $= 10 + 100 = 110$

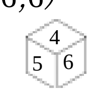
ખામી વગરની રિંગ (ઘટના E*) માટેના અનુકુળ પરિણામોની સંખ્યા* $= 100$

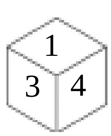
$$P(E) = \frac{100}{110} = \frac{10}{11}$$

ઉદાહરણ26.12: *એક કાળો અને એક વાદળી એવા બે પાસા એક સાથે ઉછાળવામાં આવે છે. બધા શક્ય પરિણામોની યાદી બનાવો બંન્ને પાસા પર એક સરખી નંબર મળે તેની સંભાવના શોધો.*

ઉકેલ : *બધા શક્ય પરિણામોની યાદી ઉપર મુજબ છે. કોંસમાં દર્શાવેલો નંબર છે અને બીજાક્રમે દર્શાવેલો નંબર વાદળી પાસા પર દેખાતો નંબર છે. બધા શક્ય પરિણામોની સંખ્યા* $6 \times 6 = 36$ *બંન્ને પાસા પર એખ સરખા નંબરની ઘટનાને* E *કહીએ તો* E *માટેના અનુકુળ પરિણામો* (1,1) (2,2) (3,3) (4,4) (5,5) *અને* (6,6)

વાદળી પાસો





કાળો પાસો		1	2	3	4	5	6
	1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
	2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
	3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
	4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
	5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
	6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

તમારી પ્રગતિ ચકાસો 26.3

1. ખાલી જગ્યાઓ પૂરી નીચેના વિધાનો પૂરા કરો

A . કોઈપણ ઘટનાની સંભાવનાનું મૂલ્ય __________ કે તેથી મોટું અને __________ કે તેથી નાનું હોય છે.

B. જે ઘટના ચોક્કસ બનાવવાની છે, તેની સંભાવનાનું મૂલ્ય __________ છે અને આવી ઘટનાને __________ ઘટના કહે છે.

C . જે ઘટના બનાવવાનું શક્ય નથી તેની સંભાવનાનું મૂલ્ય __________ છે અને આવી ઘટનાને __________ કહે છે.

D . બે પૂરક ઘટનાઓની સંભાવનાના મૂલ્યનો સરવાળો __________ થાય છે.

E . પ્રયોગના તમામ પ્રાથમિક ઘટનાઓની સંભાવનાના મૂલ્યોનો સરવાળો __________ થાય છે.

2. એક પાસો એક વખત ઉછાળવામાં આવે છે તેની નીચેની ઘટનાઓની સંભાવનાનું મૂલ્ય જણાવો.

(A) બેકી નંબર મળે

(B) એકી નંબર મળે

(C) અવિભાજક સંખ્યા મળે.

3. પ્રશ્ન 2ના મૂલ્યો પરથી ચકાસો કે ,

P(બેકી નંબર) + P(એકી નંબર) = 1

4. એક પાસો એક વખત ઉછાળવામાં અવે છે. નીચેની ઘટનાઓની સંભાવનાનું મૂલ્ય શોધો.

(i) 4 થી નાની સંખ્યા મળે

(ii) 4 કે તેથી મોટી સંખ્યા મળે

(સંયુક્ત એટલે 1 અને અવિભાજ્ય સિવાયની સંખ્યા)

(iii) સંયુક્ત સંખ્યા મળે

(iv) સંયુક્ત સંખ્યા ન હોય, તેવી સંખ્યા મળે.

5. જો $P(E) = 0.88$, હોય તો E શોધો.

6. જો $P(\overline{E}) = 0$, હોય તો $P(E)$ શોધો.

7. એક સરખી રીતે આપેલી ગંજીફાના 52 પત્તામાંથી એક પત્તું ખેંચવામાં આવે છે. નીચેની પરિસ્થિતિમાં આ પત્તાની સંભાવના શોધો.

(i) પત્તુલાલ રંગનું હોય

(ii) પત્તું કાળા રંગનું હોય

(iii) પત્તુલાલ રંગની રાણી

(iv) પત્તુંકાળા રંગનો એકો હોય.

(v) પત્તુ કાળીનો ગુલામ હોય

(vi) પત્તું ફુલ્લીનો બદશાહ હોય

(vii) પત્તું મહોરપત્તું ન હોય. (viii) પત્તું ચોકટનો ગુલામ ન હોય.

8. એક થેલીમાં 15 સફેદ અને 10 વાદળી દડા છે. થેલીમાંથી એક દડો યાદચ્છિક રીતે લેવામાં આવે છે. નીચેની ઘટના માટેની સંભાવના શોધો

(i) દડો વાદળી ન હોય (ii) દડો સફેદ ન હોય

9. એક થેલીમાં 3 લાલ,4લીલા અને 2 વાદળી લખોટીઓ છે. જો એક લખોટી યાદચ્છિક રીતે લેવામાં આવે તો

(i) તે લીલી ન હોય (ii) તે વાદળી ન હોય

10. બે સિક્કા એક સાથે ઉછાળવામાં આવે છે. અને મળતા પરિણામોની યાદી બનાવો , એક સિક્કો સપવળો H અને એક સિક્કો ઉંધો T હોય તેની સંભાવના શોધો.

11. ઉપરના પ્રશ્ન 10 માં બંને સિક્કા પર કાંટો મળે (બંને સિક્કા ઉંધા હોય) તેની સંભાવના શોધો.

12. બે પાસા એક સાથે ફેંકવામાં આવે છે અને મળતા પરિણામોના અંકોનો સરવાળો નોંધવામાં આવે છે.

(i) 7 (ii) 8 (iii) 9 (iv) 10 (v) 12

13. દેખવામાં અને કદમાં એક સરખા હોય એવા 8 ખામીવાળા રમકડા અક સ્માતે 92 ખામી વગરના રમકડા સાથે ભેળવી દેવાયા છે. આ જથ્થામાંથી એક રમકડું યાદચ્છિક રીતે લેવામાં આવે છે. આ રમકડું ખામીવાળુ હોવાની સંભાવના શોધો.

$\overline{E}$ Numbe... comes favourable to E
Number of all ... outcomes of the experiment

સારાંશ

- પ્રયોગ કે જેમાં તમામ શક્ય પરિણામો આઉથી જ્ઞાત હોય, પરંતુ પ્રયત્નું પરિણામ શું હશે તે વિશ નિશ્ચિત આગાહી કરી શકાય નહિ, તેને યાદચ્છિક પ્રયોગ કહે છે.
- પ્રયોગના એક કે તેથી વધુ પરિણામોથી એક ઘટના બને છે
- જે ઘટના પ્રયોગના એક જ પરિણામની બનેલી છે તે પ્રાપથમિક ઘટના કહેવાય છે.
- જ્યારે પરિણામો સમસંભાવી હોય ત્યારે ઘટના ની સંભાવના નીચે મુજબ વ્યાખ્રિયત કરેલી છે.

P(E) = , When the outcomes

$0 \le P(E) \le 1$

· જો $P(E) = 0$, E તો ઘટના $P(E) = 1$, E ને અશક્ય ઘટના કહે છે અને જો $P(E) + P(\overline{E}) = 1$, તો E ને ચોક્કસ ઘટના કહે છે.

સત્રાંત સ્વાધ્યાય

1. નીચેના માંથી ક્યું વિધાન સાચું અને ક્યું વિધાન ખોટું છે તે જણાવે

- કોઈ ઘટનાની સંભાવનાનું મૂલ્યાં 1.01 હોઈ શકે છે.
- જો P(E) = 0.08 હોય તો P( )= 0.02
- અશક્યઘટનાની સંભાવના 1 છે.
- P( ) = 1 + P(E)

2. સરખી રીતે આપેલા ગંઝીફાન 52 પત્તામાંથી એક પત્તું ખેંચવામાં આવે છે. આ પત્તું લાલ રંગનું મોર પત્તું હોવાની સંભાવના શોધો,
3. બે સિક્કા એક સાથે ઉછાળવામાં આવે છે. ઓછામાં ઓછી એક છાપ (H) મળે તેની સંભાવના

(માર્ગ દર્શન P (ઓછામાં એક છાપ) = 1 – P (છાપ નહિ))

4. એક પાસો બે વખત ફેંકવામાં આવે છે અને પાસા પર દેખાતી સંખ્યાની નોંધ દરેક વખતે કરવામાં આવે છે. આ રીતે મળતી બે સંખ્યાઓનો સરવાળો

   (i) 12 થી વધુ થાય (ii) 12 થી ઓછા થાય
   (iii) 11 થી વધુ થાય (iv) 2 થી વધુ થાય તેની સંભાવના શોધો,
5. ઉપરનો પ્રશ્ન 4 ફરી જુઓ મળતી બે સંખ્યાનો ગુણાકાર 12 થાય તેની સંભાવના શોધો
6. ઉપરનો પ્રશ્ન 4 ફરી જુઓ : મળતી બે સંયાઓનો તફાવત 2 મળે તેની સંભાવના શોધો.
7. એક થેલીમાં 15 લાલ અને કેટલાક લીલા દડા છે યાદચ્છિક રીતે લીધેલા દડાની સંભાવના છે તો, લીલા દડાની સંખ્યા શોધો,
8. નીચેના માંથી કઈ કિંમત ઘટનની સંભાવના હોઈ શકે નહિ .

   (A) $\frac{2}{3}$ (B) – 1.01 (C) 12% (D) 0.3
9. બે પાસા એક સાથે ફેંકવામાં આવ`છ. પાસા પર દેખાતી સંખ્યાઓનો સરવાળો 2 થવાની સંભાવના કઈ છે.

   (A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{1}{18}$ (C) $\frac{1}{36}$ (D) $\frac{35}{36}$
10. બે સિક્કા એક સાથે ઉછાળવામાં આવે છે. એક છાપ અને એક કાંટો મળવાની સંભાવના કેટલી .

   (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$

તમારી પ્રગતિ ચકાસોના જવાબો

26.1

1. (i), (ii) અને (iii) 2. (i) A, B, C, D (ii) 1, 2, 3, ..., 20

(iii) (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)

26.2

1. $\frac{1}{6}$ 2. (i) 0 (ii) $\frac{2}{3}$ 3. $\frac{1}{13}$ 4. $\frac{8}{19}$

5. (i) $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{5}{8}$ 6. (i) $\frac{3}{7}$ (ii) $\frac{4}{7}$

26.3

1. (a) 0, 1 (b) 1, ચોક્કસ ઘટના (c) 0, અશક્ય ઘટના
(d) 1 (e) 1

2. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{2}$

4. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{3}$ (iv) $\frac{2}{3}$

5. 0.12 6. 1

7. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{26}$ (iv) $\frac{1}{26}$ (v) $\frac{1}{52}$ (vi) $\frac{1}{52}$

(vii) $\frac{10}{13}$ (viii) $\frac{51}{52}$

8. (i) $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{2}{5}$

9. (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{2}{3}$ (iii) $\frac{7}{9}$

10. HH, HT, TH, TT, $\frac{1}{2}$

11. $\frac{1}{4}$ 12. (i) $\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{5}{36}$ (iii) $\frac{1}{9}$ (iv) $\frac{1}{12}$ (v) $\frac{1}{36}$

13. $\frac{2}{25}$

સત્રાંત સ્વાધ્યાયના જવાબો

1. (i) F   (ii) T   (iii) F   (iv) T   (v) F

2. $\frac{3}{26}$ 3. $\frac{3}{4}$ 4. (i) 0   (ii) 1   (iii) $\frac{1}{36}$ (iv) 1

5. $\frac{1}{9}$ 6. $\frac{2}{9}$ 7. 3   8. (B)   9. (C)   10. (C)

માધ્યમિક પાઠ્યક્રમ
ગણિત

અભ્યાસકાર્ય - આંકડા શાસ્ત્ર

કુલ ગુણ : 25 **સમય : 45 મિનિટ**

સૂચના :

1. *તમામ પ્રશ્નોના જવાબ અલગ કાગળમાં લખો,*
2. *તમારી જવાબવહી પર તેમની માહિતી આપો.*
   - *નામ*
   - *નામાંકન ક્રમાંક*
   - *વિષય*
   - *મહાવરા કાર્યનો મુદ્દો*
   - *સરનામું*
3. *તમારું અભ્યાસ કાર્ય તમારા અભ્યાસ કેન્દ્રના વિષય શિક્ષક પાસેથી તપાસાવી લો જેથી તમારી કામગીરી માટે તમને વિધાયક પ્રતિપોષણ મળે.*

તમારું અભ્યાસ કાર્ય નેશનલ ઈન્સ્ટિટ્યુટ ઓફ ઓપન સ્કૂલિંગનો મોકલવું નહિં,

1. *માહિતીમાં પ્રત્યેક વિગત કેટલીક વખત આવે છે, તે દર્શાવનારને શું કહેવાય છે.* 1

   (A) *આવૃત્તિ*

   (B) *સંચયી આવૃત્તિ*

   (C) *વર્ગ લંબાઈ*

   (D) *અનેક વિધિ*

2. *નીચેની આપેલ સંચયી આવૃત્તિ વિતરણ કોષ્ટક પરથી* 40-50 *ના વર્ગની આવૃતિ શોધો.* 1

મુસાફરાની સંખ્યા	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
આવૃત્તિ	15	45	70	80	100	110

   (A) 80 (B) 25

   (C) 10 (D) 20

3.12,16,15 અને 17 નો મધ્યક શોધો. 1

(A) 14.5 (B) 15

(C) 15.5 (D) 17

4. જો માહિતી દરેક પ્રાપ્તાંકનું મૂલ્ય 5 જેટલું વધારવામાં આવે તો નીચેના માંથી ક્યું પરિણામ મળે. 1

(A) મધ્યક એટલો જ રહે

(B) મધ્યક 5 જેટલો વધે છે

(C) મધ્યક 5 ગણો થાય છે.

(D) મધ્યક 5 જેટલો ઘટે છે.

5. એવલોકન 8, 9, 16, 15, 11, 13, 12, 14, 10 નો મધ્યક શોધો. 1

(A) 10 (B) 11.5

(C) 12 (D) 12.5

6. પાસાની જોડ ફેંકવામાં આવે છે. બધા શક્ય પરિણામો લખો

7. બે સિક્કા એક સાથે ઉછાળવામાં આવે છે. ઓછામાં ઓછી એક છાપ () મળે તેની સંભાવના કેટલી થાય

8. એક પાસો ફેંકવામાં આવે છે. પાસા પર અવિભાજ્ય સંખ્યા મળવાની સંભાવના શોધો.

9. નીચે આપેલા પ્રાપ્તાંકો ચડતા ક્રમમાં ગોઠવેલ છે અને તેનો મધ્યસ્થ 32 છો ની કિંમત શોધો, 2

12, 14, 15, 27, a + 2, a + 3, 35, 36, 40, 49

10. નીચે આપેલા પ્રાપ્તાંકોનો બહુકલ 12 છે ની કિંમત શોધો 2

15, 16, 19, 12, 13, 16, 12, 12, 12, 16, x is 12.

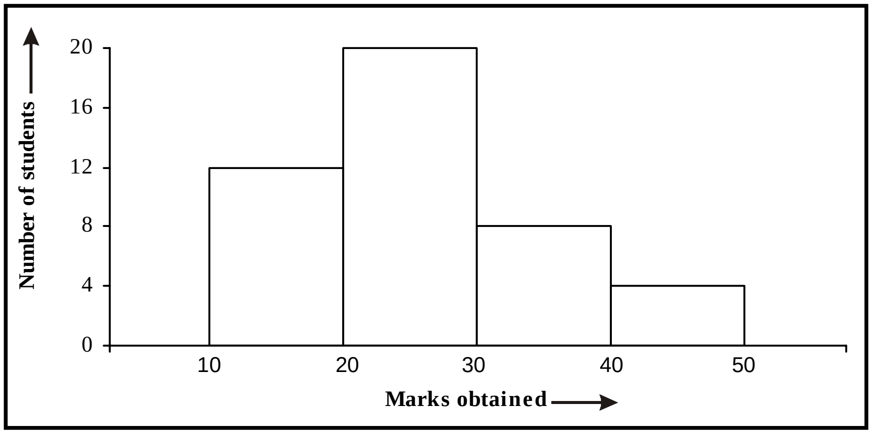
11. એક શાળાના 125 વિદ્યાર્થીઓની ખિસ્સાખર્ચી નીચે મુજબ છે. તે પરથી સ્તંભો લેખ દોરી 4

દૈનિક ખિસ્સા ખર્ચી (ıv)	વિદ્યાર્થીઓન સંખ્યા
10-20	20
20-30	30
30-40	25
40-50	35
50-60	15

અથવા

(ફક્ત અંધ વિદ્યાર્થીઓ માટે)

નીચેનો સ્તંભાલંખનું અધ્યયન કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.



(i) 20 *થી* 40 *વચ્ચેના ગુણ મેળવનારા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા કેટલી છે.*

(ii) *કેટલા વિદ્યાર્થીઓએ* 20 *થી ઓછા ગુણ મેળવ્યા છે.*

12. *નીચેની આવૃત્તિ વિતરણોનો મધ્યક* + 35 *છે. જો આવૃત્તિઓનો સરવાળો* 25 *હોય તો,* x_1 *અને* x_2 *ની કિંમત શોધો.*

વર્ગ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
આવૃત્તિ	1	x_1	5	7	x_2	3	1

પ્રશ્નપત્ર સંરચના

વિષય : ગણિત

માધ્યમિક પ્રવાહ

ગુણ : 85 **સમય :** 2.30 કલાક

૧. હેતુલક્ષી પર ભારાંક :

ક્રમ	હેતુ	ગુણ	ટકા
1	જ્ઞાન	25	30
2	સમજ	42	50
3	ઉપયોજન	10	11
4	કૌશલ્ય	08	09

૨. પ્રશ્નોના પ્રકાર પરથી તારાંક :

ક્રમ	પ્રશ્નોના પ્રકાર :	કુલ પ્રશ્નો	ગુણ	અંદાજીત સમય (મિનિટમાં)
1	લાંબા પ્રશ્નો	03	18	10 X 3 = 30
2	ટૂંકા પ્રશ્નો	08	32	8 X 6 = 48
3	ઘણા ટૂંકા પ્રશ્નો (2 માર્ક્સ)	10	20	3 X 10 = 30
4	બહુ ટુકા પ્રશ્નો (1 માર્ક્સ)	15	15	2 X 15 = 30
	કુલ	**36**	**85**	**138 મિનિટ** ★ 12 મિનિટ રીવીઝન માટે

3. મુખ્ય વિષય વસ્તુનો ગુણભાર:

ક્રમ	મોડ્યુલ	ગુણ
1	બીજગણિત	20
2.	વાણિજ્ય ગણિત	08
3.	ભૂમિતી	25
4.	ક્ષેત્રફળ	10
5.	ત્રિકોણમિતિ	10
6.	આંકડાશાસ્ત્ર	12
	કુલ	**85**

પ્રશ્નપત્રનો નમૂનો

વિષય : ગણિત (211)

માધ્યમિક પ્રવાહ

ગુણ : 85 **સમય :** 2.30 કલાક

નોંધ :

1. પ્રશ્નો (1-10) હેતુલક્ષી પ્રશ્નો છે. દરેકનો 1 માર્ક છે. દરેક પ્રશ્ન માટે ચાર વિકલ્પ A,B,C અને D આપેલા છે. જે માંથી એક ખરો વિકલ્પ છે. તમારે ખરો વિકલ્પ શોધી આપેલ બોક્ષમાં જવાબ લખવો.
2. પ્રશ્નો (11-15) બહુ ટુંકા પ્રશ્નો છે. દરેકનો 1 માર્ક્સ છે. અહીં જવાબ એક શબ્દ કે એક વાક્ય હોય છે.
3. પ્રશ્નો (16-25) દરેકના 2 માર્ક્સ છે.
4. પ્રશ્નો (26-33) દરેકના 4 માર્ક્સ છે.
5. પ્રશ્નો (34-36) દરેકના 6 માર્ક્સ છે.
6. દરેક પ્રશ્નો ફરજીયાત છે.

1. 1260 ને અવિભાજ્ય સંખ્યાના ઘાતાંક સ્વરૂપે .... રીતે લખાય છે.

   (A) $2^2 \times 3 \times 5^2$ (B) $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$ (C) $2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$ (D) $2^2 \times 3 \times 5 \times 7^2$ ☐

2. $(2x - 3)$ અને $(2x + 3)$ નો ગુણાકાર .... થાય.

   (A) $2x^2 - 3$ (B) $4x^2 - 3$ (C) $4x^2 - 9$ (D) $4x^2 + 9$ ☐

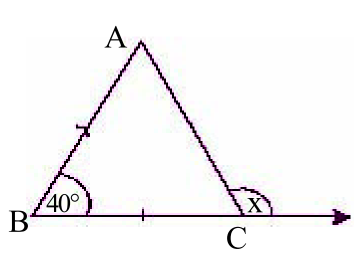
3. 0.35% નું દશાંક સ્વરૂપ .... છે.

   (A) 0.35 (B) 0.035 (C) 0.0035 (D) 3.5 ☐

4. 15% of 1080 = ...

   (A) 161.20 (B) 162 (C) 322.40 (D) 3224 ☐

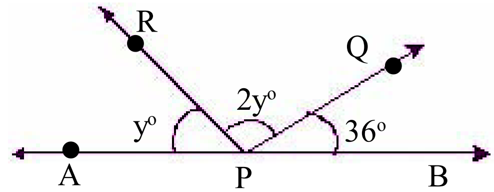
5. આકૃતિમાં ABC માં AB = BC અને $\angle B = 40°$, તો x =



આકૃતિ. 1

   (A) 110° (B) 120° (C) 140° (D) 70° ☐

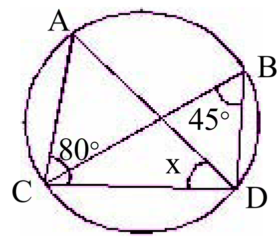
6. આકૃતિ 2 માં $\angle BPQ = 36°$, તો y = ...



આકૃતિ. 2

(A) 36° (B) 72° (C) 46° (D) 48°

7. આકૃતિ -3 માં $\angle ACD = 80°$ અને
$\angle CBD = 45°$, તો x =



આકૃતિ. 3

(A) 50° (B) 55° (C) 35° (D) 135°

8. tan 1°. tan 89° = ...

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) 1 (D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

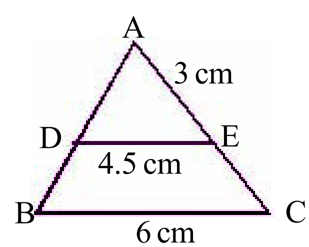
9. જો $\sin\theta = \frac{a}{b}$, તો $\cos\theta$ = ...

(A) $\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$ (B) $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$ (C) $\frac{b}{\sqrt{b^2-a^2}}$ (D) $\frac{b}{a}$

10. કોઈ આવૃત્તિ વિતરણ, કોઈ વર્ગનો વર્ગ આંક (મધ્યબીંદુ) 10 છે અને તે વર્ગની લંબાઈ 5 છે. તો અધ:સીમાબીંદુ .... છે.

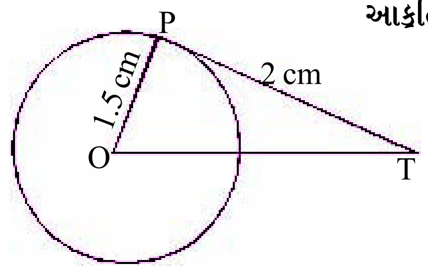
(A) 5 (B) 7.5 (C) 10 (D) 12.5

11. આકૃતિ 4 માં DE || BC, BC = 6 સેમી, DE = 4.5 સેમી
અને AE = 3 સેમી તો AC શોધો.



આકૃતિ. 4

12. આકૃતિ (5) માં O કેન્દ્ર અને 1.5 સમી ત્રિજ્યા વાળુ
વર્તુળ છે જો PT એ P આગળ સ્પર્શક છે.
તો OT શોધો.



આકૃતિ. 5

13. સમલંબ ચતુષ્કોણની બે સમાંતર બાજુઓ 20 સમી અને 16 સેમી છે. તેમની વચ્ચેનું લંબ અંતર 6 સેમી છે તો સમલંબ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

14. 1.4 મી ત્રિજ્યા અને 10 મી. ઊચાઈ વાળા લંબ નળાકારનું ઘનફળ શોધો.

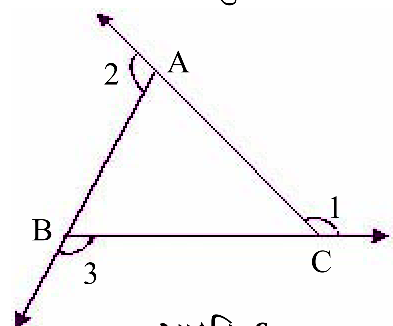
15. 2,1,5,7,1 નો મધ્યસ્થ શોધો.

16. $T_5 = 14$, $T_{12} = 35$ તો T_1 અને તફાવત ‘d’ શોધો.

17. $x^2 - 5x + 6$ અને $x^2 - 7x + 12$ બહુપદીઓનો ગુ.સા.અ. $x - 3$ છે તો તેમનો લસાઅ શોધો.

18. કેટલા 2700 રૂપિયાનું 4% લેખે સાદુ વ્યાજ 2250 રૂપિયા નું 3 % ટકા લેખે 4 વર્ષ માટે જેટલું થાય ?

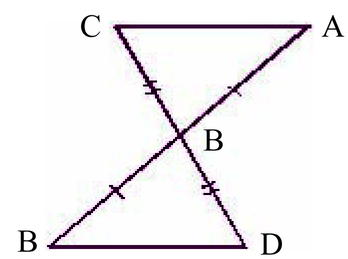
19. આકૃતિ 6 માં બહિષ્કોણો 1,2,3 દર્શાવેલ છે તો સાબિત કરો $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360°$ થાય



આકૃતિ. 6

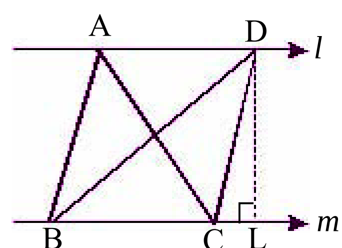
20. આકૃતિ-7 માં AB અને CD એકબીજાને O માં દુભાગે છે, સાબિત કરો કે,

CA = BD



આકૃતિ. 7

21. આકૃતિ-8 માં ABC અને DBC એક જ પાયા પર છે અને બે સમાંતર રેખા l અને m વચ્ચે છે. જો ABC નું ક્ષેત્રફળ= 18 સમી² અને DL $\perp$ m, BC = 4.5cm સેમી, તો DL ની લંબાઈ શોધો.



આકૃતિ. 8

22. એક વર્તુળાકાર બગીચાની ત્રીજ્યા 15 મીટર છે. 2 મીટર પહોળો રસ્તો તેની અંદરની બાજુએ પરીઘ પર છે તો રસ્તાનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

23. 616 સેમી² પૃષ્ઠફળ વાળા ગોળાની ત્રીજ્યા શોધો.

24. સાદુરૂપ આપો : $\cos 43°. \cot 79° - \sin 47°. \tan 11°$

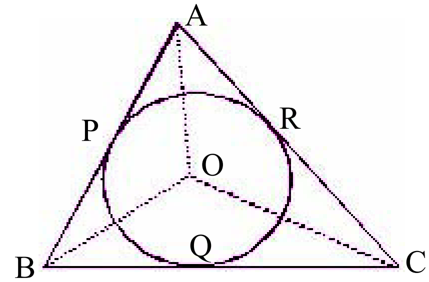
25. જો એક સ્તંભની ઊંચાઈ 6 મી છે. તેના પડછાયાની લંબાઈ 2 છે તો સૂર્યનો ઉત્સંદકાળ શોધો.

26. જો $a+b = 7$, $ab = 12$ તો a^3+b^3 શોધો.

27. બે આંકડાની સંખ્યામાં આંકડાઓનો સરવાળો 12 થાય જો મૂળ સંખ્યામાં 36 ઉમેરવામાં આવે તો આંકડાઓનો ક્રમ બદલાઈ જાય છે તો તે સંખ્યા શોધો.

28. એક મોબાઈલ ફોનની વે.કી. રૂા. 3880 અથવા રૂા. 840 રોકડા ભરી ત્રણ સરખા હપ્તામાં બાકીની રકમ ભરી શકાય. જો હપ્તા પદ્ધતિમાં 16 % વ્યાજ દર લાગે તો માસિક હપ્તાની રકમ શોધો.

29. આકૃત્તિ-9 માં, Δ ABC ની પરીમીતી 27 સેમી છે. ABC નું અંતઃવર્તુળ AB, BC અને AC ને P, Q અને R માં અનુક્રમે સ્પર્શે છે, જો PA = 4 સેમી, QB = 5 તો QC ની લંબાઈ શોધો.



આકૃતિ. 9

30. PQR રચો જેમાં PQ = 5 સેમાં, QR = 4.2 સેમી અને મધ્યક RS = 3.8 થાય.

31. એક શંકુનું ઘનફળ 12936 સેમી^{3} અને પાયાની ત્રિજ્યા 21 સેમી છે કો શંકુનું કુલ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

32. 80 મી ઉચા ટાવર પરથી એક વ્યક્તિ ટાવરની વિરુદ્ધ દિશામાં ઉભેલી બે કાર જુવે છે. જો તે કારો ના અવસેધકોણ 45 અને 30 હોય તો બે કારો વચ્ચેનું અંતર શોધો. ($\sqrt{3} = 1.73$)

33. 70 વાદળાઓની લંબાઈ માપીને નીચે પ્રમાણે નોધવામાં આવી છે.

લંબાઈ(મીમી) :	110-120	120-130	130-140	140-150	150-160	160-170
વાદળાઓની સંખ્યા :	10	12	20	15	8	5

તો વાદળાોની સરેરાશ લંબાઈ શોધો.

34. એક માણસ એક ખુરશી અને એક ટેબલ રૂા.2100 માં વેચે છે. તેથી તેને ખુરશી પર 25% અને ટેબલ પર 10 % નફો થાય છે. જો તે માણસ રૂા.2130 માં વેચે તો તેને ખુરશી પર 10 % અને ટેબલ પર 25 % નફો થાય. તો ખુરશી અને ટેબલની ખરીદ કિંમત શોધો.

35. કાટકોણ ત્રિકોણમાં કર્ણનો વર્ગ, બાકીની બે બાજુઓના વર્ગોનો સરવાળો જેટલો થાય તેમ સાબિત કરો.

36. એક વિમાનમાં યાત્રીઓ માટે 120 સીટો છે. 100 ઉડાન દરમિયાન કેટલી સીટો ભરાઈ તે નીચે કોઠામાં દર્શાવેલ છે.

સીટોની સંખ્યા	**આવૃત્તિ**
100-104	15
104-108	18
108-112	34
112-116	16
116-120	17

સરેરાશ કેટલી સીટો ભરાઈ તે શોધો.

માર્કિંગ સ્કીન

1. (B)	2. (C)	3. (C)	4. (B)	5. (A)
6. (D)	7. (B)	8. (C)	9. (A)	10 (B)
11. 4 સેમી	12. 2.5 સેમી	13. 108 સેમી^{2}	14. 61.6 મી^{3}	15. 2

16. a + 4d = 14 અને a + 11d = 35 ... 1

તેથી d = 3 અને a = 2 ... 1

17. લ.સા.અ. $= \dfrac{\text{બહુપદી} \times \text{બહુપદી}}{\text{ગુસાઅ}}$ ...

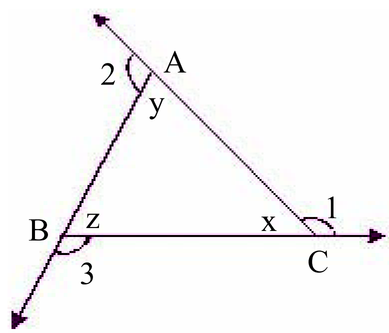
$$= \frac{(x^2-5x+6)(x^2-7x+12)}{x-3} \quad \ldots \frac{1}{2}$$

$$= (x^2-5x+6)(x-4) = x^3-9x^2+26x-24 \quad \ldots 1$$

18. પ્રથમ કેસનું વ્યાજ = રૂા. $\left(\dfrac{2250\times4\times3}{100}\right)$ = Rs 270 ... $\frac{1}{2}$

બીજા કેસમાં P = Rs. 2700, R = 4%, t = ?, I = Rs. 270 ... $\frac{1}{2}$

$\therefore t = \dfrac{270\times100}{2700\times4} = 2\dfrac{1}{2}$ ...1



19. (i)Đ1 + Đx = 180° (ii) Đ2 + Đy = 180°

(iii) Đ3 + Đz = 180° ...1

$\Rightarrow$(Đ1 + Đ2 + Đ3) + (Đx + Đy + Đz) = 540° ...

$\Rightarrow$(Đ1 + Đ2 + Đ3) = 360° ...

20. Δ BDO અને Δ ACO માં

OB = OA, OD = OC, ĐBOD = ĐAOC (vert. opp. Đs) ...1

$\therefore \Delta BDO \cong \Delta ACO$ ...

\BD = CA (cpct) ... $\frac{1}{2}$

21. ΔABC નું ક્ષેત્રફળ = ΔDBC નું ક્ષેત્રફળ = 18 સેમી^{2} (Δ બે સમાંતર રેખાઓ વચ્ચે છે અને સમાન પાયો છે.) ...1

ΔDBC નું ક્ષેત્રફળ = $\frac{1}{2}$ (4.5) × DL = 18 સેમી^{2}

$\Rightarrow$ DL = $\frac{18 \times 2}{4.5}$ અથવા 8 સેમી ..1

22. બાહ્ય ત્રિજ્યા = 15 મી ...$\frac{1}{2}$

અંતઃ ત્રિજ્યા = 13 મી

રસ્તાનું ક્ષેત્રફળ = $\frac{22}{7}\left(15^2 - 13^2\right)\text{m}^2$ ...1

= 176 સેમી^{2} ...$\frac{1}{2}$

23. ગોળાનું પૃષ્ઠફળ = 616 સેમી^{2}

$4\ \pi r^2 = 616$

$4 \times \frac{22}{7} \times r^2 = 616$

$\Rightarrow r^2 = \frac{616 \times 7}{88}$ ...1

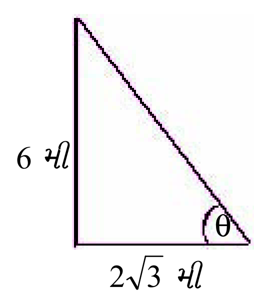
r = 7 સેમી ...1

24. Sin 47° = sin (90 – 43)° = cos 43° = cot (90 – 11)° = tan 11° ...1

cos 43° tan 11° – cos 43° tan 11°

= 0 ...1

25. ધારો કે સૂર્યનો ઉત્સેધકોણ θ છે.



$\tan\theta = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \tan 60°$ ...1

$\theta = 60°$ ...1

26. a + b = 7, ab = 12

$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\,(a + b)$ ...1$\frac{1}{2}$

$343 = (a^3 + b^3) + 3 \times 12 \times 7$ ...1$\frac{1}{2}$

$a^3 + b^3 = 343 - 252 = 91$ ...1

27. ધારો કે x દશાંક પર છે અને y એકમનો આંકડો છે.

$xy = 12 \Rightarrow y = \frac{12}{x}$ ...1

10x + y + 36 = 10 y + x Þ x – y = – 4 ...1

$\therefore x - \frac{12}{x} = -4 \Rightarrow x^2 + 4x - 12 = 0$ ..1

x = 2, – 6 ...$\frac{1}{2}$

x = 2

y = 6 ...$\frac{1}{2}$

બે આંકડાની સંખ્યા 26 છે.

28. રોકડ કિંમત = રૂા. 3880

ડાઉન પેમેન્ટ = Rs. 840, માસિક હપ્તો ધારો કે x છે. 1

વ્યાજ રૂા. (3x – 3040)

1st માસ = Rs 3040

2nd માસ = Rs (3040 – x)

3rd માસ = Rs (3040 – 2x) 1

કુલ P = રૂા. (9120 – 3x) ...$\frac{1}{2}$

વ્યાજ = 16%

$\therefore (9120 - 3x) \times \frac{16}{100} \times \frac{1}{12} = (3x - 3040))$

$\Rightarrow$ x = રૂા. 1040 ...1

માસિક હપ્તો રૂા. 1040 નો છે. ...$\frac{1}{2}$

29. PA = PB = 4 સેમી (એકજ બિંદુથી સ્પર્શકની લંબાઈ સરખી હોય) તેજ રીતે PB = QB = 5 સેમી ...1

ધારો કે QC = x = CA ...$\frac{1}{2}$

$\therefore$ (4 × 2 + 5 × 2 + 2x) = 27 સેમી ...1

$\Rightarrow x = 4.5$ સેમી

$\Rightarrow QC = 4.5$ સેમી ...1

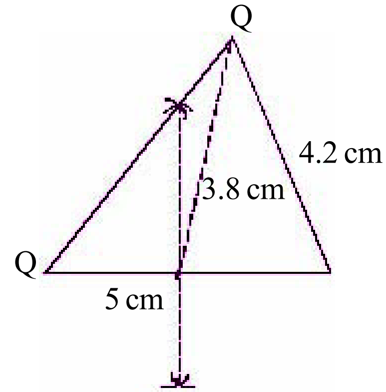
30. 1. PQ = 5 સેમી દોરો. સાચી રચના : 3

2. તેને S માં દુભાગો. સાચા સ્ટેપ : 1

3. S અને Q ને કેન્દ્ર રાખી બે ચાપ રચો જે R માં છેદે.

4. PR અને QR જોડો.

$\therefore$ PQR માગેલ ત્રિકોણ છે.



31. ધારો કે h અને l શંકુની ઉંચાઈ અને ત્રાસી ઉંચાઈ છે.

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ...1

$\therefore \frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times(21)^2\times h = 12936$ ...$\frac{1}{2}$

$\Rightarrow h = 28$ cm

$l^2 = 28^2 + 21^2 = 35^2$ 1

$\frac{PQ}{AQ} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow AQ = 80\sqrt{3}$m

$\therefore$ કુલ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{22}{7}\times 21[35+21]$ સેમી^{2} ...1

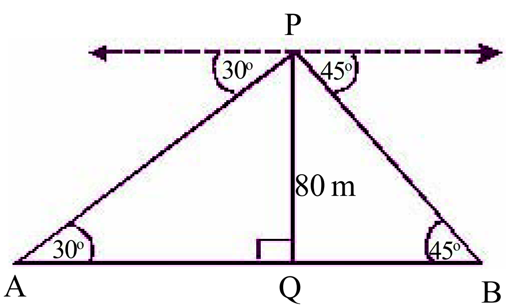
$= 3696$ સેમી^{2} ...$\frac{1}{2}$

32. $\frac{PQ}{QB} = \tan 45^\circ$ ...1

$\Rightarrow PQ = QB = 80$m ...1

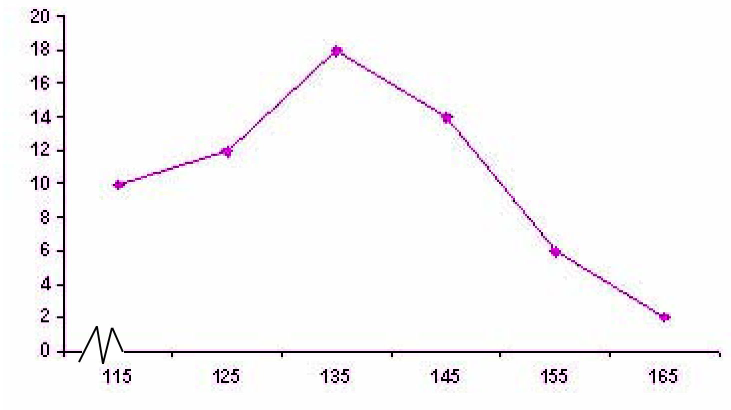
...1

$\therefore AB = 80(1+\sqrt{3})$m $= 218.4$m ...1



33. દરેક વર્ગના મધ્યબીંદુ 115, 125, 135, 145, 155, 165

ગ્રાફ પર બિંદુઓ (115, 10), (125, 12), (135, 20), (145, 15), (155, 8), (165, 5)



34. ધારો કે ખુરશીઓમી કિંમત x અને ટેબલની કિંમત y છે.

$$\therefore \frac{5x}{4} + \frac{11}{10}y = 100$$

$$\frac{11x}{10} + \frac{5x}{4} = 2130$$ ...3

x = Rs. 800, y = Rs 1000 ...3

35. પક્ષ :

સાધ્ય :

સાબિતી : ...2

અકૃત્તિ ...4

36.

મધ્યબિંદુ (x_i)	102	106	110	114	118
f_i	15	18	34	16	17 = Σf_i:100
$d_i = x_i - 110$	–8	–4	0	4	8 ...4
$f_i d_i$	–120	–72	0	64	136 $\Sigma f_i d_i$= 8

મધ્યક$= a + \dfrac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = 110 + \dfrac{8}{100} = 110.08$ ...2

પ્રતિક્રિયા અને પાઠો

પાઠ નં.	પાઠનું નામ	વિષયવસ્તુ			ભાષા		ચિત્ર		તમે શું શીખ્યા	
		મુશ્કેલ	મનોરંજક	મુંઝવતું	સાદી	જટિલ	ઉપયોગી	બિન ઉપયોગી	ખુબ જ ઉપયોગી	બિન ઉપયોગી
1.										
2.										
3.										
4.										
5.										
6.										
7.										
8.										
9.										
10.										
11.										
12.										
13.										

અંતિમ ફોલ્ડ અને સીલ

ચોથું ફોલ્ડ

ત્રીજો ફોલ્ડ

પૂર્ણ કરી આજે પ્રતિક્રિયા ફોર્મ પોસ્ટ કરો

વિદ્યાર્થી મિત્રો,

તમે આ આખા સ્વાધ્યાય પુસ્તકને ચોકકસપણે આનંદથી માણ્યું હશે. અહીં અમારો પ્રયત્ન આ અભ્યાસ સામગ્રીને સુસંગત, અસરકારક અને રસપ્રદ બનાવવાનો રહ્યો છે. અભ્યાસ સામગ્રી તૈયાર કરવી એ દ્વિમાગી પ્રક્રિયા છે. તમારા પ્રતિભાવો અમને આ અભ્યાસ સામગ્રીને સુધારવામાં મદદરૂપ થશે. થોડો સમય કાઢીને અહીં આપેલ પ્રતિભાવપત્રક ભરો જેથી વધુ રસપ્રદ અને ઉપયોગી સામગ્રી બનાવી શકાય.

આભાર

કો–ઓર્ડિનેટર

(ગણિત)

પ્રતિક્રિયા ઉપર પ્રશ્નો

પાઠ નં.	પાઠનું નામ	Intext પ્રશ્નો		ટર્મિનલપ્રશ્નો		
		ઉપયોગી	બિનઉપયોગી	સહેલા	મુશ્કેલ	ખુબ મુશ્કેલ
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						
7.						
8.						
9.						
10.						
11.						
12.						
13.						

બીજો ફોલ્ડ

કોઈ જોડાણ માન્ય નથી

ટપાલ
ટિકિટ

મદદનીશ નિયામક (શૈક્ષણિક)
રાષ્ટ્રીય મુક્ત વિદ્યાલય શિક્ષણ સંસ્થાન
(MHRD), ભારત સરકાર હસ્તક (સ્વાયત્ત) સંસ્થા)
એ-૨૪-૨૫, ઇન્સ્ટિટ્યૂશનલ વિસ્તાર, સેક્ટર- ૬૨, નોઇડા-
૨૦૧૩૦૯ (યુ. પી.)

નામ : ____________________

એનરોલમેન્ટ નં. ____________________

સરનામું : ____________________

____

વિષય : ____________________

પુસ્તક નં. : ____________________

તમારું સુચન

____

____

____

____

શું તમે ગણિત ના અભ્યાસ માટે બીજા કોઈ પુસ્તકનો ઉપયોગ કર્યો ?
હા / ના
જો હા, તો ઉપયોગ કરવાનું કારણ આપો.

____

____