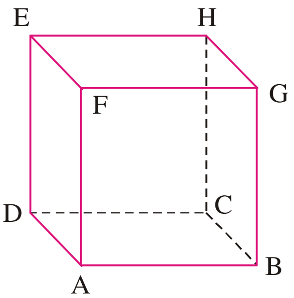
# 35

# समतल

अपने घर में एक कमरे को सूक्ष्मता से देखिये। इसकी चार दीवारें हैं, एक छत तथा एक फर्श है। फर्श तथा छत दो समान्तर समतलों के भाग हैं, जो अपनी सीमा से अपरिमित रूप से फैले हुए हैं। आप समान्तर दीवारों के दो युग्म भी दखेगें, जो समान्तर समतलों के भाग हैं। इसी प्रकार, मेंजों के टाप (ऊपरी पृष्ठ), कमरों के दरवाजे, इत्यादि समतलों के भागों के उदाहरण हैं।

यदि हम किसी समतल में दो बिन्दु लें, तो इनको मिलाने वाली रेखा पूरी की पूरी समतल में स्थित होती है। यह समतल की विशेषता है।



चित्र 35.1

चित्र 35.1 को देखिये। आप जानते हैं कि यह एक आयताकार डिब्बे को प्रदर्शित करता है। इसके 6 फलक हैं, आठ शीर्ष तथा 12 किनारे हैं। विपरीत और समान्तर फलकों के युग्म हैं:

(प) ABCD और FGHE

(ii) AFED और BGHC

(iii) ABGF और DCHE

तथा समान्तर किनारों के समुच्चय निम्न हैं:

(i) AB, DC, EH और FG

(ii) AD,BC, GH और FE

(iii) AF, BG, CH और DE

ऊपर दिये गए 6 फलकों में से प्रत्येक समतल (तल) का एक भाग है और यहाँ समान्तर समतलों के तीन युग्म हैं जिन्हें विपरीत फलक निरूपित करते हैं।

इस पाठ में हम एक समतल का व्यापक समीकरण निकालेंगे, तीन बिन्दुओं से होकर जाने वाले समतल का समीकरण, समतल के समीकरण का अन्त:खण्ड स्वरूप तथा समतल के समीकरण का अभिलम्ब स्वरूप ज्ञात करेंगे।

## उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद, आप निम्नलिखित में समर्थ हो जाएंगे :

- एक समतल को पहचानना
- एक समतल का अभिलंब रूप में समीकरण स्थापित करना
- एक दिए गये बिन्दु से होकर जाने वाले समतल का व्यापक समीकरण ज्ञात करना

मॉड्यूल - IX

सदिश एवं त्रिविमीय ज्यामिति

टिप्पणी

- तीन दिये गए बिन्दुओं से होकर जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात करना
- अंत:खण्ड स्वरूप और अभिलंब स्वरूप में समतल के समीकरण करना
- दो समतलों के बीच का कोण ज्ञात करना

## पूर्व ज्ञान

- त्रिविम (त्रिविमीय) ज्यामिति का मूल ज्ञान
- एक रेखा की दिक-कोज्याएँ और दिक-अनुपात
- एक रेखाखंड का अन्य रेखा पर प्रक्षेप
- आकाश में दो रेखाओं के लम्ब अथवा समान्तर होने के लिए प्रतिबन्ध

## 35.1 समतल का सदिश समीकरण

एक समतल को अद्धितीय रूप से ज्ञात किया जा सकता है यदि निम्नलिखित में से कोई एक ज्ञात है :

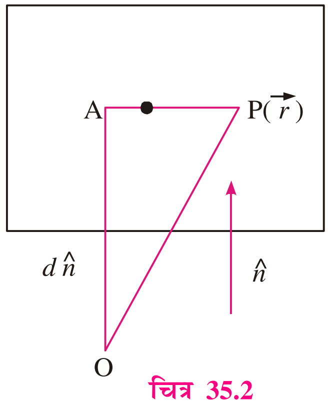
(i) समतल का अभिलंब और मूल बिन्दु से समतल की दूरी।

(ii) समतल का अभिलंब और समतल पर एक बिन्दु, दिया है।

(iii) यह दिए गए तीन असंरेख बिन्दुओं से होकर जाता है।

## 35.2 अभिलंब रूप में समतल का समीकरण

मान लीजिए मूल बिन्दु O से समतल की दूरी (OA) $d$ है और $\hat{n}$, समतल के अभिलंब मात्रक सदिश है। क्योंकि OA, मूल बिन्दु O से समतल की लम्बवत् दूरी है और $\hat{n}$ समतल पर लम्ब मात्रक सदिश है :



चित्र 35.2

$$\therefore \qquad \overrightarrow{OA} = d\hat{n} \qquad ...(1)$$

$$\text{अब} \qquad \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \vec{r} - d\hat{n} \qquad ...(2)$$

$\overrightarrow{OA}$ समतल पर लम्ब है और $\overrightarrow{AP}$ समतल में स्थित है,

इसलिए $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AP}$

$$\Rightarrow \qquad \overrightarrow{AP}\,.\,\overrightarrow{OA} = 0$$

$$\text{i.e.} \qquad (\vec{r} - d\hat{n}).\hat{n} = 0$$

$$\text{i.e.} \qquad \vec{r}.\hat{n} - d = 0$$

$$\text{i.e.} \qquad \vec{r}.\hat{n} = d \qquad ...(3)$$

यह समतल के समीकरण का सदिश रूप है।

## 35.3 समतल के समीकरण के सदिश रूप को कार्तीय रूप में परिवर्तित करना

मान लीजिए बिन्दु P के निर्देशांक $(x, y, z)$ हैं और $l, m, n$ मात्रक सदिश $\hat{n}$ के दिक्–कोसाइन हैं।

टिप्पणी

तब $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$\hat{n} = l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k}$

$\vec{r}$ तथा $\hat{n}$ का मान समीकरण (3) में प्रतिस्थापित करने पर,

$$(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}).(l\hat{i} + m\hat{y} + n\hat{k}) = d$$

$$\Rightarrow \quad lx + my + nz = d$$

जो कि समतल के अभिलंब रूप समीकरण का संगत कार्तीय रूप है।

**टिप्पणी:** समीकरण (3) में यदि $\vec{r}.\vec{n} = d$ समतल का समीकरण है, तो $d$ समतल की मूल बिन्दु से दूरी नहीं है। समतल की मूल बिन्दु से दूरी ज्ञात करने के लिए हमें दोनों पक्षों को $|\vec{n}|$ से विभाजित कर, $\vec{n}$ को $\hat{n}$ में परिवर्तित करना पड़ेगा। इसलिए $\dfrac{d}{|\vec{n}|}$ समतल की मूल बिन्दु से दूरी है।

**उदाहरण 35.1.** समतल $\vec{r}.(6\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}) - 1 = 0$ की मूल बिन्दु से दूरी ज्ञात कीजिए। समतल पर लम्ब मात्रक सदिश के दिक्–कोसाइन भी ज्ञात कीजिए।

**हल :** दिए हुए समीकरण को $\vec{r}.(6\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}) = 1$ के रूप में लिखा जा सकता है।

$$|6\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}| = \sqrt{36 + 9 + 4} = 7$$

दिए हुए समीकरण के दोनों पक्षों को 7 से भाग करने पर

$$\frac{\vec{r}.(6\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k})}{7} = \frac{1}{7}$$

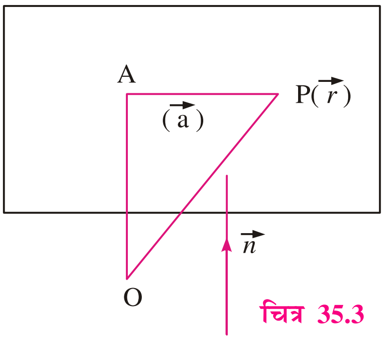
i.e. $$\vec{r}.\left(\frac{6}{7}\hat{i} - \frac{3}{7}\hat{j} - \frac{2}{7}\hat{k}\right) = \frac{1}{7}$$

इसलिए समतल की मूल बिन्दु से दूरी $= \dfrac{1}{7}$ इकाई

समतल के अभिलंब मात्रक सदिश के दिक्–कोसाइन $\dfrac{6}{7}, \dfrac{-3}{7}, \dfrac{-2}{7}$ हैं।

## 35.4 दिए हुए बिन्दु से होकर जाने वाले एवं दिए हुए सदिश के अभिलम्ब समतल का समीकरण

मान लीजिए, दिए हुए बिन्दु A का स्थिति सदिश $\vec{a}$ है तथा $\vec{r}$ समतल पर किसी स्वेच्छ बिन्दु P का स्थिति सदिश है। $\vec{n}$ समतल पर लम्ब एक सदिश है।



चित्र 35.3

अब $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \vec{r} - \vec{a}$

अब $\vec{n} \perp (\vec{r} - \vec{a})$

$\therefore \quad (\vec{r} - \vec{a}).\vec{n} = 0 \quad \ldots(4)$

यह व्यापक रूप में समतल का सदिश समीकरण है।

## 35.5 कार्तीय रूप

मान लीजिए बिन्दु A के निर्देशांक $(x_1, y_1, z_1)$ तथा बिन्दु P के निर्देशांक $(x, y, z)$ हैं। इसके अतिरिक्त $a, b, c$ अभिलंब सदिश $\vec{n}$ के दिक्–अनुपात हैं।

तब
$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$
$$\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$$
$$\vec{n} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$$

$\vec{r}$, $\vec{a}$ तथा $\vec{n}$ के मानों को समीकरण (4) में प्रतिस्थापित करने पर,
$$\{(x - x_1)i + (y - y_1)j + (z - z_1)k\}.\{ai + bj + ck\} = 0$$
$$\Rightarrow \quad a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad ax + by + cz = ax_1 + by_1 + cz_1 = d \text{ (मान लीजिए)}$$
जो कि समतल का व्यापक समीकरण है।

**उदाहरण 35.2.** एक (5, 5, –4) से होकर जाने वाले तथा 2, 3, –1 दिक् अनुपात वाली रेखाओं के लम्बवत् समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

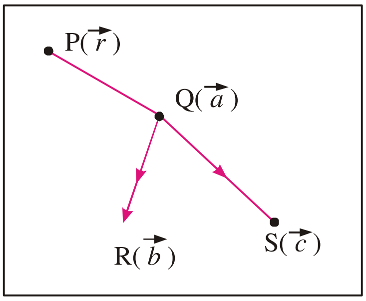
**हल :** यहाँ पर
$$\vec{a} = 5\hat{i} + 5\hat{j} - 4\hat{k}$$
तथा
$$\vec{n} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$$
$\therefore$ समतल का समीकरण है $\left(\vec{r} - (5\hat{i} + 5\hat{j} - 4\hat{k})\right).(2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) = 0$

## 35.6 तीन असरेख बिन्दुओं से होकर जाने वाले समतल का समीकरण

**(a) सदिश रूपः**

मान लीजिए बिन्दुओं Q, R तथा S के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ हैं। इसके अतिरिक्त समतल पर किसी स्वेच्छ बिन्दु P का स्थिति सदिश $\vec{r}$ है।

सदिश $\overrightarrow{QR} = \vec{b} - \vec{a}, \overrightarrow{QS} = \vec{c} - \vec{a}$ तथा $\overrightarrow{QP} = \vec{r} - \vec{a}$ एक ही तल में स्थित हैं और $\overrightarrow{QR} \times \overrightarrow{QS}$ एक ऐसा सदिश है जो $\overrightarrow{QR}$ तथा $\overrightarrow{QS}$ दोनों पर लम्ब है। इसलिए $\overrightarrow{QR} \times \overrightarrow{QS}$, $\overrightarrow{QP}$ पर भी लम्ब है।




चित्र 35.4

$$\therefore \quad \overrightarrow{QP}.(\overrightarrow{QR} \times \overrightarrow{QS}) = 0$$
$$(\vec{r} - \vec{a}).\{(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})\} = 0 \qquad ...(5)$$
यह समतल का सदिश समीकरण है।

**(b) कार्तीय रूपः**

मान लीजिए बिन्दु P, Q, R तथा S के निर्देशांक क्रमशः $(x, y, z)$, $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$ तथा $(x_3, y_3, z_3)$ हैं।

$$\therefore \quad \overrightarrow{QP} = \vec{r} - \vec{a} = (x - x_1)\hat{i} + (y - y_1)\hat{j} + (z - z_1)\hat{k}$$

$$\overrightarrow{QR} = \vec{b} - \vec{a} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$\overrightarrow{QS} = \vec{c} - \vec{a} = (x_3 - x_1)\hat{i} + (y_3 - y_1)\hat{j} + (z_3 - z_1)\hat{k}$$

इनके मान समीकरण (5) में प्रतिस्थापित करने पर

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots(6)$$

यह समतल का कार्तीय रूप में समीकरण है।

**उदाहरण 35.3.** बिन्दुओं Q(2, 5, –3), R(–2, –3, 5) तथा S(5, 3, –3) से होकर जाने वाले समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

**हल :** मान लीजिए, $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ क्रमशः Q, R तथा S के स्थिति सदिश हैं और $\vec{r}$ समतल पर किसी स्वेच्छ बिन्दु का स्थिति सदिश है।

समतल का सदिश समीकरण $\{\vec{r} - \vec{a}\}.\left\{(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})\right\} = 0$

यहाँ

$$\vec{a} = 2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$\vec{b} = -2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\vec{c} = 5\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$\vec{b} - \vec{a} = -4\hat{i} - 8\hat{j} + 8\hat{k}$$

$$\vec{c} - \vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j}$$

इसलिए $\{\vec{r} - (2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k})\}.\{(-4\hat{i} - 8\hat{j} + 8\hat{k}) \times (3\hat{i} - 2\hat{j})\} = 0$

समतल का अभीष्ट समीकरण है।

## 35.7 समतल के समीकरण का अन्तःखण्ड स्वरूप

मान लीजिए कि समतल के x, y और z अक्षों पर काटे गए अन्तःखण्डों की लम्बाइयाँ क्रमशः a, b और c हैं।

दूसरे शब्दों में, समतल बिन्दुओं (a,0,0), (0,b,0) और (0,0,c) से होकर जाता है।

अतः
$x_1 = a \qquad y_1 = 0 \qquad z_1 = 0$

$x_2 = 0 \qquad y_2 = b \qquad z_2 = 0$

$x_3 = 0 \qquad y_3 = 0 \qquad z_3 = c$

समीकरण (6) में रखने पर, समतल का समीकरण है:

$$\begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

या $$bcx + acy + abz - abc = 0 \text{ (सरल करने पर)}$$

या $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{z} = 1 \qquad .....(7)$$

समीकरण (7) समतल के समीकरण का अन्त:खण्ड स्वरूप कहलाता है।

**उदाहरण 35.4.** बिन्दुओं (0, 2, 3), (2, 0, 3) और (2, 3, 0) से होकर जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

**हल :** (6) का प्रयोग करते हुए, समतल का समीकरण है:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-2 & z-3 \\ 2-0 & 0-2 & 3-3 \\ 2-0 & 3-2 & 0-3 \end{vmatrix} = 0$$

या $$\begin{vmatrix} x & y-2 & z-3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

या $$x(6-0) - (y-2)(-6) + (z-3)(2+4) = 0$$

या $$6x + 6(y-2) + 6(z-3) = 0$$

या $$x + y - 2 + z - 3 = 0 \quad \text{या} \quad x + y + z = 5$$

**उदाहरण 35.5.** दिखाइये कि बिन्दुओं (2, 2, 0), (2, 0, 2) और (4, 3, 1) से होकर जाने वाले समतल का समीकरण $x = y + z$ है।

**हल :** बिन्दु (2, 2, 0) से होकर जाने वाले समतल का समीकरण है:

$$a(x-2) + b(y-2) + cz = 0 \qquad .....(i)$$

बिन्दु (2,0,2) में से होकर जाता है

$\therefore$ $$a(2-2) + b(0-2) + 2c = 0$$

या $$c = b \qquad .....(ii)$$

पुन: (i) बिन्दु (4,3,1) से होकर जाता है।

$\therefore$ $$a(4-2) + b(3-2) + c = 0$$

या $$2a + b + c = 0 \qquad ....(iii)$$

(ii) और (iii) से, हमें प्राप्त होता है :

$$2a + 2b = 0 \quad \text{या} \quad a = -b$$

$\therefore$ (i) हो जाता है : $$-b(x-2) + b(y-2) + bz = 0$$

या $$-(x-2) + y - 2 + z = 0$$

या $$y + z - x = 0$$

या $$x = y + z$$

जो कि समतल का अभीष्ट समीकरण है।

**उदाहरण 35.6.** समतल के समीकरण $4x - 5y + 6z - 60 = 0$ को अन्त:खण्ड स्वरूप में व्यक्त कीजिए। इसके निर्देशांक अक्षों पर अन्त:खण्ड ज्ञात कीजिए।

**हल :** समतल का समीकरण है:

$$4x - 5y + 6z - 60 = 0 \quad \text{या} \quad 4x - 5y + 6z = 60 \qquad ....(i)$$

(i) को पुन: लिखपे पर $\frac{4x}{60} - \frac{5y}{60} + \frac{6z}{60} = 1$ या $\frac{x}{15} + \frac{y}{(-12)} + \frac{z}{10} = 1$

जो कि समतल का अन्त:खण्ड स्वरूप में अभीष्ट समीकरण है। साथ ही निर्देशांक अक्षों $x, y$ और $z$ पर क्रमश: अन्त: खण्ड $15, -12$ और $10$ है।

**उदाहरण 35.7.** निम्न में से प्रत्येक समतल के समीकरण को अभिलम्ब स्वरूप में बदलिये :

(i) $2x - 3y + 4z - 5 = 0$ (ii) $2x + 6y - 3z + 5 = 0$

दोनों अवस्थाओं में, मूलबिन्दु से समतलों पर लम्ब की लम्बाइयाँ भी ज्ञात कीजिये।

**हल :** (i) समतल की समीकरण है: $2x - 3y + 4z - 5 = 0$ .......(A)

(A) को $\sqrt{2^2 + (-3^2) + 4^2}$ या $\sqrt{29}$ से भाग देने पर

$$\frac{2x}{\sqrt{29}} - \frac{3y}{\sqrt{29}} + \frac{4z}{\sqrt{29}} - \frac{5}{\sqrt{29}} = 0$$

या
$$\frac{2x}{\sqrt{29}} - \frac{3y}{\sqrt{29}} + \frac{4z}{\sqrt{29}} = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

जो कि समतल का अभिलम्ब स्वरूप में समीकरण है।

$\therefore$ मूलबिन्दु से डाले गए लम्ब की लम्बाई $\frac{5}{\sqrt{29}}$ है।

(ii) समतल का समीकरण है: $2x + 6y - 3z + 5 = 0$ .....(B)

(B) को $\sqrt{2^2 + 6^2 + (-3)^2}$ या $-7$ से भाग देने पर,

$$-\frac{2x}{7} - \frac{6y}{7} + \frac{3z}{7} - \frac{5}{7} = 0 \quad \text{या} \quad -\frac{2x}{7} - \frac{6y}{7} + \frac{3z}{7} = \frac{5}{7}$$

जो कि समतल का अभिलम्ब स्वरूप में समीकरण है।

मूलबिन्दु से समतल पर खींचे गये लम्ब की लम्बाई $\frac{5}{7}$ है।

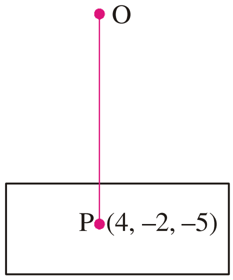
**उदाहरण 35.8.** मूलबिन्दु से किसी समतल पर खींचे गये लम्ब के पाद के निर्देशांक $(4, -2, -5)$ है। उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये।

**हल :** माना मूलबिन्दु O से समतल पर खींचे गये लम्ब का पाद बिन्दु P है।

तब P के निर्देशांक $(4, -2, -5)$ हैं।

बिन्दु P $(4, -2, -5)$ से होकर जाने वाले समतल का समीकरण है :

$$a(x-4)+b(y+2)+c(z+5)=0 \qquad .....(i)$$



चित्र 35.5

अब OP समतल पर लम्ब है तथा OP की दिक्कोज्याएँ निम्न के समानुपाती है :

$$4-0, -2-0, -5-0$$

या $$4, -2, -5$$

(i) में, a, b, c के स्थान पर 4,–2,–5 रखने पर हमें प्राप्त होता है :

$$4(x-4)-2(y+2)-5(z+5)=0$$

या $$4x-16-2y-4-5z-25=0$$

या $$4x-2y-5z=45$$

जो कि समतल का अभीष्ट समीकरण है।

## देखें आपने कितना सीखा 35.1

1. समतल के निम्न समीकरणों को अभिलम्ब स्वरूप में बदलिये:

   (i) $4x+12y-6z-28=0$ (ii) $3y+4z+3=0$

2. मूलबिन्दु से एक समतल पर खींचे गए लम्ब का पाद बिन्दु $(1,-3,1)$ है। उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

3. मूलबिन्दु से समतल पर खीचे गए लम्ब के पाद के निर्देशांक $(1,-2,1)$. हैं। उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

4. निम्न बिन्दुओं से होकर जाने वाले समतलों के समीकरण ज्ञात कीजिए :

   (a) $(2,2,-1)$, $(3,4,2)$ और $(7,0,6)$

   (b) $(2,3,-3)$, $(1,1,-2)$ और $(-1,1,4)$

   (c) $(2,2,2)$, $(3,1,1)$ और $(6,-4,-6)$

5. दिखाइये कि बिन्दुओं $(3,3,1)$, $(-3,2-1)$ और $(8,6,3)$ से होकर जाने वाले समतल का समीकरण $4x+2y-13z=5$ है।

6. एक ऐसे समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसके निर्देशांक अक्षों पर काटे गए अन्त:खण्ड क्रमश: 2, 3 तथा 4 हैं।

7. समतल $2x+3y+4z=24$ द्वारा निर्देशांक अक्षों पर काटे गए अन्त:खण्ड ज्ञात कीजिए।

8. दिखाइये कि बिन्दु $(-1,4,-3)$, $(3,2,-5)$, $(-3,8,-5)$ तथा $(-3,2,1)$ समतलीय हैं।

9. (i) समतल $x-4y+3z=7$ के अभिलंब के दिक्–कोसाइन क्या हैं?

   (ii) समतल $2x+3y-z=17$ की मूल बिन्दु से दूरी क्या है?

   (iii) समतल $\vec{r}.(\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k})=7$ तथा $\vec{r}.(3\hat{i}-12\hat{j}-5\hat{k})=6$, परस्पर ............. हैं।

10. समतल के समीकरण $\vec{r}.(2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k})=1$ को कार्तीय रूप में परिवर्तित कीजिए।
11. बिन्दुओं (1, 1, 0), (1, 2, 1) तथा (–2, 2, –1) से होकर जाने वाले समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।
12. बिन्दु (1, 4, 6) से होकर जाने वाले तथा सदिश $\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ के अभिलंब समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

## 35.8 दो समतलों के बीच का कोण

माना दो समतल $p_1$ और $p_2$ के समीकरण हैं:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad ....(i)$$

और $$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \quad ....(ii)$$

माना दोनों समतल रेखा $l$ में प्रतिच्छेद करते हैं। माना दोनों समतलों के बीच का कोण $\theta$ है।

$\therefore$ दोनों समतलों के अभिलम्बों की दिक्कोज्याएँ हैं :

$$\pm\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}},\quad \pm\frac{b_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}},\quad \pm\frac{c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}$$

और $$\pm\frac{a_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}},\quad \pm\frac{b_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}},\quad \pm\frac{c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$\therefore \qquad \cos\theta = \pm\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\ \sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

चिन्ह + या – का इस तरह चुनाव करना है कि $\cos\theta$ धनात्मक हो।

**उपप्रमेय 1 :** जब दो समतल परस्पर लम्ब हों, तो

$$\theta = 90°, \text{ अर्थात् } \cos\theta = 0$$

दो समतलों $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ और $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ का एक दूसरे पर लम्ब होने के लिए प्रतिबन्ध है कि $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$ हो।

**उपप्रमेय 2 :** यदि दो समतल समान्तर हों, तो इन समतलों के अभिलम्ब भी समान्तर होगें।

$$\therefore \qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

दो समतल $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ परस्पर समान्तर हों, के लिए प्रतिबन्ध है कि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ हो। इससे यह अर्थ निकलता है कि दो समान्तर समतलों के समीकरणों केवल एक अचर राशि ही होता है।

$\therefore$ समतल $ax + by + cz + d = 0$ के समान्तर समतल का समीकरण $ax + by + cz + k = 0$ है, जबकि k एक अचर राशि है।

**उदाहरण 35.9.** निम्न समतलों के बीच का कोण ज्ञात कीजिये :

$$3x + 2y - 6z + 7 = 0 \qquad ......(i)$$

और
$$2x + 3y + 2z - 5 = 0 \qquad ......(ii)$$

**हल** : यहाँ पर, $a_1 = 3, b_1 = 2, c_1 = -6$

और $a_2 = 2, b_2 = 3, c_2 = 2$

यदि समतलों (i) और (ii) के बीच का कोण $\theta$ है, तो

$$\cos\theta = \frac{3.2 + 2.3 + (-6).2}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-6)^2}\ \sqrt{2^2 + 3^2 + 2^2}} = 0$$

$\therefore\ \theta = 90°$

इस प्रकार, समतल (i) और (ii) एक दूसरे पर लम्ब हैं।

**उदाहरण 35.10** समतल $x - 3y + 4z - 1 = 0$ के समान्तर एक समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये, यदि वह बिन्दु (3, 1, –2) से होकर जाता हो।

**हल** : माना समतल $x - 3y + 4z - 1 = 0$ के समान्तर समतल का समीकरण है :

$$x - 3y + 4z + k = 0 \qquad ..... (i)$$

चूँकि (i) बिन्दु $(3, 1, -2)$ से होकर जाता है इसलिए

$\therefore \qquad 3 - 3(1) + 4(-2) + k = 0$

या $\qquad 3 - 3 - 8 + k = 0$ या $k = 8$

$\therefore$ समतल का अभीष्ट समीकरण $x - 3y + 4z + 8 = 0$ है।

**उदाहरण 35.11.** बिन्दुओं (–1, 2, 3) और (2, –3, 4) से होकर जाने वाले उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये, जो समतल $3x + y - z + 5 = 0$ पर लम्ब है।

**हल** : बिन्दु (–1, 2, 3) से होकर जाने वाले किसी समतल का समीकरण है

$$a(x+1) + b(y-2) + c(z-3) = 0 \qquad .....(i)$$

बिन्दु (2,–3, 4) समतल (i) में स्थित है।

$\therefore \qquad 3a - 5b + c = 0 \qquad ....(ii)$

पुनः, समतल (i) समतल $3x + y - z + 5 = 0$ पर लम्ब है।

$\therefore \qquad 3a + b - c = 0 \qquad ....(iii)$

(ii) और (iii) से वज्रगुणन विधि द्वारा,

$$\frac{a}{4} = \frac{b}{6} = \frac{c}{18} \quad \text{या} \quad \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{9}$$

अतः समतल का अभीष्ट समीकरण है :

$$2(x + 1) + 3(y - 2) + 9(z - 3) = 0 \qquad ....[(i) \text{ से}]$$

या
$$2x + 3y + 9z = 31$$

**उदाहरण 35.12.** बिन्दु (2,–1,5) से होर जाने वाले उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये, जो समतलों $x + 2y - z = 1$ तथा $3x - 4y + z = 5$ में से प्रत्येक पर लम्ब हो :

**हल :** बिन्दु (2,–1,5) से होकर जाने वाले समतल का समीकरण है

$$a(x-2) + b(y+1) + c(z-5) = 0 \qquad .....(i)$$

यह समतल, समतलों $x + 2y - z = 1$ तथा $3x - 4y + z = 5$ पर लम्ब है।

$\therefore$ $\quad a.1 + b.2 + c.(-1) = 0$

तथा $\quad a.3 + b.(-4) + c.(1) = 0$

या
$$a + 2b - c = 0 \qquad .........(ii)$$
$$3a - 4b + c = 0 \qquad ........(iii)$$

(ii) और (iii) से, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{a}{2-4} = \frac{b}{-3-1} = \frac{c}{-4-6}$$

या $$\frac{a}{-2} = \frac{b}{-4} = \frac{c}{-10}$$

या $$\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{5} = \lambda \text{ (माना)}$$

$\therefore$ $\quad a = \lambda,\ b = 2\lambda$ और $c = 5\lambda$

a, b तथा c के मान (i) में रखने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\lambda(x-2) + 2\lambda(y+1) + 5\lambda(z-5) = 0$$

या $$x - 2 + 2y + 2 + 5z - 25 = 0$$

या $$x + 2y + 5z - 25 = 0$$

जो कि समतल का अभीष्ट समीकरण है।

## देखें आपने कितना सीखा 35.2

1. समतलों के बीच का कोण ज्ञात कीजिये :

   (i) $2x - y + z = 6$ और $x + y + 2z = 3$

   (ii) $3x - 2y + z + 17 = 0$ और $4x + 3y - 6z + 25 = 0$

2. सिद्ध कीजिये कि निम्न समतल एक दूसरे पर लम्ब हैं :

   (i) $x + 2y + 2z = 0$ और $2x + y - 2z = 0$

   (ii) $3x + 4y - 5z = 9$ और $2x + 6y + 6z = 7$

3. बिन्दु (2, 3, –1) से होकर जाने वाले तथा समतल $2x + 3y + 6z + 7 = 0$ के समान्तर समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये।

4. बिन्दुओं $(-1,1,1)$ और $(1,-1,1)$ से होकर जाने वाले उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये, जो समतल $x+2y+2z=5$ पर लम्ब है।

5. मूलबिन्दु से होकर जाने वाले उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये, जो निम्न में प्रत्येक समतल पर लम्ब है: $x+2y+2z=0$ और $2x+y+2z=0$

## 35.9 एक समतल से एक बिन्दु की दूरी

माना समतल का अभिलम्ब स्वरूप में समीकरण है:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p \text{ , जबकि } p>0 \qquad .......(i)$$

**अवस्था I :** माना बिन्दु P (x', y', z') समतल के उस ओर स्थित है जिस ओर मूलबिन्दु है।

समतल (i) के समान्तर बिन्दु P से होकर जाने वाला, समतल खींचिये।

इसका समीकरण है:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p' \qquad .....(ii)$$

जबकि p', मूलबिन्दु से समतल (ii) पर खींचे गए लम्ब की लम्बाई है।

P की समतल (i) से लाम्बिक दूरी $= p-p'$

क्योंकि समतल (ii) बिन्दु (x',y',z') से होकर जाता है, इसलिए

$$x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma = p'$$

$\therefore$ P की दिये गये समतल से दूरी

$$p-p' = p-(x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma)$$

**अवस्था II :** यदि बिन्दु P समतल के उस ओर स्थित न हो जिस ओर मूल बिन्दु है (अर्थात् P और मूलबिन्दु समतल की विपरीत दिशाओं में हैं), तो

P की समतल (i) से दूरी

$$= p'-p = x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma - p$$

**टिप्पणी:** यदि समतल का समीकरण $ax+by+cz+d=0$, दिया गया हो, तो पहले हम इसे अभिलम्ब स्वरूप में बदल लेते हैं और फिर ऊपर दिया गया सूत्र प्रयोग करते हैं।

**उदाहरण 35.13.** बिन्दु (1,2,3) की समतल $3x-2y+5z+17=0$ से दूरी ज्ञात कीजिये।

**हल :** अभीष्ट दूरी $= \dfrac{3.1-2.2+5.3+17}{\sqrt{3^2+(-2)^2+5^2}} = \dfrac{31}{\sqrt{38}}$ इकाई

**उदाहरण 35.14.** समतलों

$$x-2y+3z-6=0$$

तथा
$$2x-4y+6z+17=0$$

के बीच की दूरी ज्ञात कीजिये।

**हल :** समतलों के समीकरण हैं :

$$x-2y+3z-6=0 \qquad ....(i)$$

$$2x-4y+6z+17=0 \qquad ....(ii)$$

यहाँ, $\qquad \frac{1}{2} = \frac{(-2)}{(-4)} = \frac{3}{6}$

$\therefore$ समतल (i) तथा (ii) समांतर हैं।

समतल (i) पर कोई बिन्दु है: (6,0,0)

$\therefore$ समतल (i) तथा (ii) के बीच की दूरी

= बिन्दु $(6,0,0)$ से समतल (ii) की दूरी

$$= \frac{2 \times 6 - 4.0 + 6.0 + 17}{\sqrt{(2)^2 + (-4)^2 + 6^2}}$$

$$= \frac{29}{\sqrt{56}} \text{ इकाई} = \frac{29}{2\sqrt{14}} \text{ इकाई}$$

## देखें आपने कितना सीखा 35.3

1. दिये गये बिन्दु से समतल की दूरी ज्ञात कीजिए :

   (i) $(2, -3, 1)$, $5x - 2y + 3z + 11 = 0$

   (ii) $(3, 4, -5)$, $2x - 3y + 3z + 27 = 0$

2. समतलों $3x + y - z - 7 = 0$ तथा $6x + 2y - 2z + 11 = 0$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिये।

## आइये दोहराएँ

- समतल एक ऐसा पृष्ठ है कि यदि इसमें स्थित कोई दो बिन्दु लिये जाएँ, तो इनको मिलाने वाली पूरी रेखा इसमें स्थित होती है।
- $\vec{r}.\hat{n} = d$ समतल का सदिश समीकरण है जहाँ $\hat{n}$ समतल के अभिलंब मात्रक सदिश है और $d$ समतल की मूल बिन्दु से दूरी है।
- इसका संगत कार्तीय रूप $lx + my + nz = d$ है, जहाँ $l, m, n$ समतल के अभिलंब सदिश के दिक्-कोसाइन हैं और $d$ समतल की मूल बिन्दु से दूरी है।
- $(\vec{r} - \vec{a}).\vec{n} = 0$ समतल का एक अन्य सदिश समीकरण है जहाँ $\vec{a}$ समतल पर दिए हुए बिन्दु का स्थिति सदिश है और $\vec{n}$ समतल का अभिलंब सदिश है।
- इसका संगत कार्तीय रूप $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$ हैं; जहाँ $a, b, c$ समतल के अभिलंब सदिश के दिक्-अनुपात हैं और $(x_1, y_1, z_1)$ समतल पर दिए हुए बिन्दु के निर्देशांक हैं।
- $(\vec{r} - \vec{a}).\{(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})\} = 0$ एक ऐसे समतल का समीकरण है जो तीन बिन्दुओं से होकर जाता है और उन तीन बिन्दुओं के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ हैं।

- इसका संगत कार्तीय समीकरण $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$ है।

- समतल का व्यापक समीकरण है : $ax + by + cz + d = 0$

- समतल के समीकरण का अन्त:खण्ड स्वरूप है: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

  जबकि a, b और c समतल द्वारा क्रमश: x,y और z अक्षों पर अन्त:खण्ड हैं।

- दो समतलों $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ और $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ के बीच का कोण $\theta$ निम्न सम्बन्ध से ज्ञात होता है:

$$\cos\theta = \pm\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\,\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

- दो समतल एक दूसरे पर लम्ब हैं, यदि और केवल यदि

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

- दो समतल परस्पर समान्तर हैं, यदि और केवल यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ हो।

- समतल $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\nu$ से एक बिन्दु $x', y', z'$ की दूरी $|p - (x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma)|$ है, जबकि बिन्दु $(x', y', z')$ समतल से मूलबिन्दु की ओर ही स्थित हो।

## सहायक वेबसाइट

- *http://www.mathopenref.com/plane.html*
- *http://en.wikipedia.org/wiki/Plane_(geometry)*
- *https://www.youtube.com/watch?v=jNZPcX4lK-8*

## आइए अभ्यास करें

1. बिन्दु (–2, 5, 4) से होकर जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये।
2. उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये जो बिन्दुओं (2, 1, 4) और (2, 6, 4) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 2 : 3 के आन्तरिक अनुपात में विभाजित करता है।
3. बिन्दुओं (1,1,0),(1,2,1) और (–2,2,–1) से होकर जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये।
4. दिखाइये कि चार बिन्दु (0, –1, –1), (4, 5, 1), (3, 9, 4) और (–4, 4, 4) समतलीय हैं। उस समतल का समीकरण भी ज्ञात कीजिये, जिसमें ये बिन्दु स्थित है।

5. बिन्दु (1, –2, –3) से एक समतल पर खींचे गए लम्ब का पाद बिन्दु (3, 2, –1) है। उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।
6. समतलों $x + y + 2z = 9$ और $2x - y + z = 15$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिये।
7. सिद्ध कीजिये कि समतल $3x - 5y + 8z - 2 = 0$ और $12x - 20y + 32z + 9 = 0$ समान्तर हैं।
8. k का वह मान ज्ञात कीजिये जिसके लिए समतल $3x - 2y + kz - 1 = 0$ और $x + ky + 5z + 2 = 0$ एक दूसरे पर लम्ब हों।
9. बिन्दु (3, 2, –5) की समतल $2x - 3y - 5z = 7$ से दूरी ज्ञात कीजिए।
10. बिन्दु (3, –1, 5) से होकर जाने वाले तथा (2, –3, 1) दिक्-अनुपातों वाली रेखा के लम्ब समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।
11. एक ऐसे समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिन्दु से 7 इकाई की दूरी पर है तथा सदिश $3\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}$ के साथ लम्बवत् है।
12. बिन्दुओं A(–2, 6, –6), B(–3, 10, –9) तथा C(–5, 0, –6) से होकर जाने वाले समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

## उत्तरमाला

### देखें आपने कितना सीखा 35.1

1. (i) $\frac{4x}{14} + \frac{12y}{14} - \frac{6z}{14} = 2$ (ii) $-\frac{3}{5}y - \frac{4}{5}z = \frac{3}{5}$

2. $x - 3y + z - 11 = 0$ 3. $x - 2y + z - 6 = 0$

4. (a) $5x + 2y - 3z - 17 = 0$ (b) $3x - y + z = 0$

 (c) $x + 2y - z = 4$

6. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$

7. x, y और z निर्देशांक अक्षों पर अन्तः खण्ड क्रमशः 12,8 और 6 हैं।

9. (i) $\frac{1}{\sqrt{26}}, \frac{-4}{\sqrt{26}}, \frac{3}{\sqrt{26}}$ (ii) $\frac{17}{\sqrt{14}}$ इकाई (iii) लम्ब

10. $2x + 3y - 4z = 1$ 11. $\vec{r}.(2\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k}) = 5$

12. $\vec{r}.(\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) + 1 = 0$

### देखें आपने कितना सीखा 35.2

1. (i) $\frac{\pi}{3}$ (ii) $\frac{\pi}{2}$

3. $2x + 3y + 6z = 7$

4. $2x + 2y - 3z + 3 = 0$

5. $2x - 2y + z = 0$

## देखें आपने कितना सीखा 35.3

1. (i) $\frac{30}{\sqrt{38}}$ इकाई (ii) $\frac{6}{\sqrt{22}}$ इकाई

2. $\frac{25}{2\sqrt{11}}$ इकाई

## आइए अभ्यास करें

1. $a(x+2) + b(y-5) + c(z-4) = 0$

2. $a(x-2) + b(y-3) + c(z-4) = 0$

3. $2x + 3y - 3z - 5 = 0$

4. $5x - 7y + 11z + 4 = 0$ 5. $x + 2y + z = 6$

6. $\frac{\pi}{3}$ 8. $k = -1$ 9. $\frac{18}{\sqrt{38}}$

10. $\left\{\vec{r} - (-3\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k}\right\}.(2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}) = 0$

11. $\vec{r}.\left\{\frac{3\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}}{\sqrt{70}}\right\} = 7$

12. $\left\{\vec{r} - (-2\hat{i} + 6\hat{j} - 6\hat{k}\right\}.\left\{(-\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}) \times (-3\hat{i} - 6\hat{j}\right\} = 0$