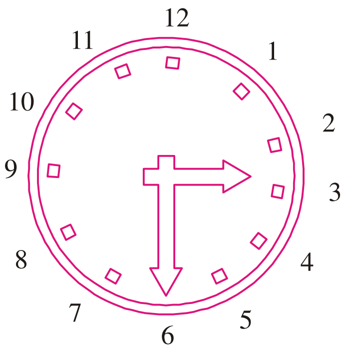
311hi15

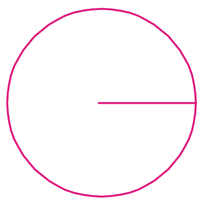
15

वृत्त

घड़ी की सुई की नोक के पथ पर ध्यान दीजिए जिस पर वह गतिमान है, (चित्र 15. 1 देखिए)



चित्र 15. 1



चित्र 15. 2

पुनः उस वक्र पर ध्यान दीजिए जो निम्न प्रकार से अनुरेखित होता है: एक कील गाड़कर किसी निश्चित लम्बाई की एक रस्सी का एक सिरा इससे ऐसा बांधें कि यह उसके चारों ओर घूम सके, और फिर धागे के दूसरे सिरे से पेंसिल बांधें। तब पेंसिल को कील के चारों ओर ऐसा घुमाएं कि रस्सी तनी रहे (चित्र 15.2 देखिए)।

निःसन्देह, उपर्युक्त उदाहरणों के अनुरेखित वक्र एक ही आकृति के हैं और इस प्रकार के वक्र को **वृत्त** कहते हैं।

पेंसिल की नोक तथा बिन्दु, जिस पर कील गड़ी है, के बीच की दूरी को वृत्त का अर्धव्यास (त्रिज्या) कहते हैं।
उपर्युक्त उदाहरणों के अनुरेखित वक्र की चर्चा हम और विस्तार से करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद, आप निम्नलिखित में समर्थ हो जायेंगे:

- दिए हुए केन्द्र तथा त्रिज्या द्वारा वृत्त का समीकरण ज्ञात करना;

- दिए गए प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वृत्त का दो चरों में द्विघात व्यापक समीकरण अभिव्यक्त करना;
- वृत्त का केन्द्र एवं त्रिज्या ज्ञात करना जब इसका समीकरण व्यापक रूप में दिया है;
- वृत्त का समीकरण ज्ञात करना, जो

  (*i*) तीन अंसरेख बिन्दुओं से होकर जाता है, (*ii*) दो दिए हुए बिन्दुओं होकर जाता है और किसी एक अक्ष को स्पर्श करता है

पूर्वज्ञान

- वृत्त से सम्बन्धित पद और अवधारणाऐं।
- दो बिन्दुओं के बीच की दूरी जब उनके निर्देशांक दिए हुए हैं।
- विभिन्न रूपों में सरल रेखा का समीकरण।

15.1 वृत्त की परिभाषा

एक वृत्त उस बिन्दु का बिन्दुपथ है जो तल में इस प्रकार चलता है कि उसकी उसी तल में एक निश्चित बिन्दु से दूरी सदैव अचर रहती है। निश्चित बिन्दु वृत्त का केन्द्र कहलाता है, और अचर दूरी को वृत्त की त्रिज्या कहते हैं।

15.2 वृत्त का समीकरण

क्या हम वृत्त का गणितीय समीकरण ज्ञात कर सकते हैं?

आइए, अनेक दिए हुए प्रतिबन्धों के अन्तर्गत किसी वृत्त का समीकरण ज्ञात करने का प्रयास करें।

15.2.1 जब केन्द्र के निर्देशांक और त्रिज्या दिए हुए हैं:

मान लीजिए, वृत्त का केन्द्र C तथा त्रिज्या 'a' है। माना केन्द्र के निर्देशांक (h, k) दिए हैं।

वृत्त पर कोई बिन्दु $P(x, y)$ लें और CM तथा PN, $X-$अक्ष पर लम्ब खीचें। पुनः, PN पर CL लम्ब खीचें। हमें प्राप्त होता है:

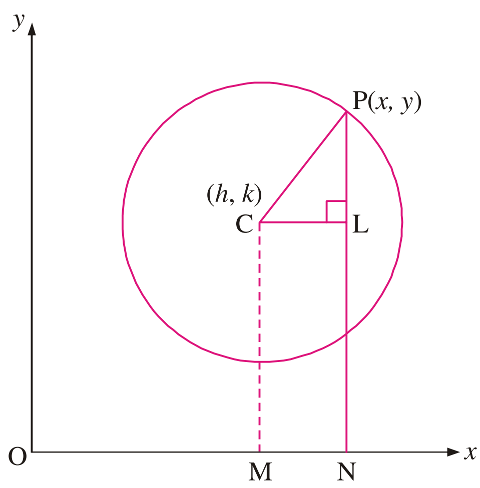
$$CL = MN = ON - OM = x - h$$

तथा $PL = PN - LN = PN - CM = y - k$

समकोण त्रिभुज CLP में, $CL^2 + PL^2 = CP^2$

$$\Rightarrow \quad (x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2 \qquad ...(1)$$

दिए हुए प्रतिबन्ध के अन्तर्गत यही वृत्त का अभीष्ट समीकरण है। वृत्त के इस रूप को वृत्त का **मानक रूप** कहते हैं।



चित्र 15.3

विलोमतः यदि (1) को संतुष्ट करता हुआ तल पर कोई बिन्दु (x, y) है, तो वह (h, k) से 'a' दूरी पर होगा। इसलिए यह बिंदु वृत्त पर होगा।

क्या होता है जब,

(*i*) वृत्त मूल बिन्दु से होकर जाता है?

(*ii*) वृत्त मूल बिन्दु से होकर नहीं जाता है, और केन्द्र x-अक्ष पर है?

(*iii*) वृत्त मूल बिन्दु से होकर जाता है और x-अक्ष उसका एक व्यास है?

(*iv*) मूल बिन्दु, वृत्त का केन्द्र है?

(*v*) वृत्त x-अक्ष को स्पर्श करता है?

(*vi*) वृत्त y-अक्ष को स्पर्श करता है?

(*vii*) वृत्त दोनों अक्षों को स्पर्श करता है?

यहां, हम उपर्युक्त प्रश्नों का उत्तर एक–एक करके ज्ञात करने का प्रयत्न करेंगे।

(*i*) इस स्थिति में, $(0, 0)$, समीकरण (1) को संतुष्ट करता है। इस प्रकार हमें प्राप्त होता है:

$$h^2 + k^2 = a^2$$

अतः समीकरण (1) का रूप

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky = 0 \qquad ...(2)$$

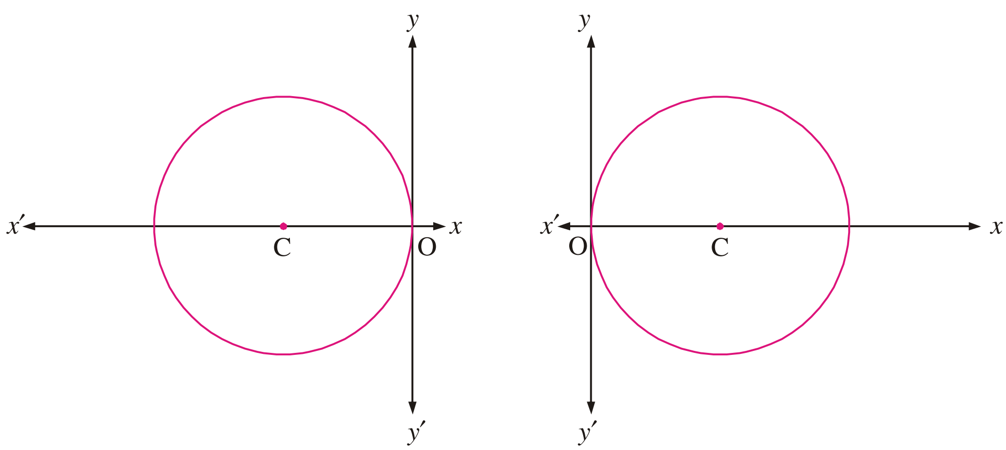
बन जाता है।

(*ii*) इस स्थिति में $k = 0$ है।

अतः समीकरण (1) का रूप

$$(x-h)^2 + y^2 = a^2 \qquad ...(3)$$

बन जाता है।



चित्र 15.4

(*iii*) इस स्थिति में, $k = 0$ तथा $h = \pm a$ (चित्र 15.4 देखिए)

अतः समीकरण (1) का रूप $x^2 + y^2 \pm 2ax = 0$ ...(4)

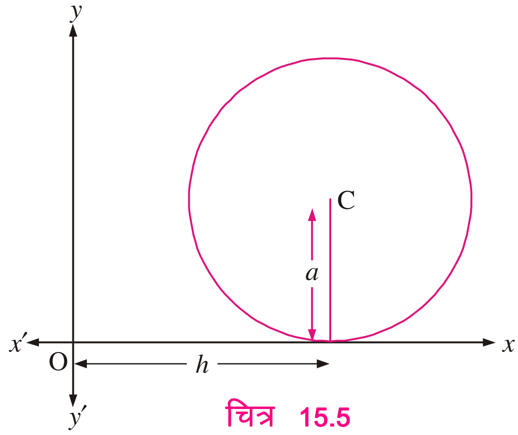
(*iv*) इस स्थिति में, $h = 0 = k$ है,

अतः समीकरण (1) का रूप $x^2 + y^2 = a^2$ ...(5)

हो जाता है।

(*v*) इस स्थिति में, $k = a$ है (चित्र 15.5 देखिए),

अतः समीकरण (1) का रूप $x^2 + y^2 - 2hx - 2ay + h^2 = 0$ बन जाता है। ...(6)



चित्र 15.5

(*vi*) इस स्थिति में $h = a$ है,

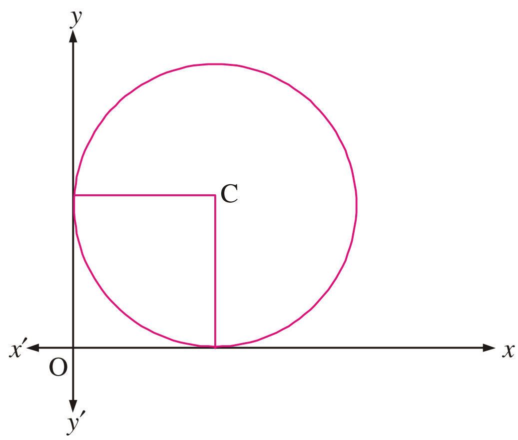
अतः, समीकरण (1) का रूप $x^2 + y^2 - 2ax - 2ky + k^2 = 0$ ...(7)

हो जाता है

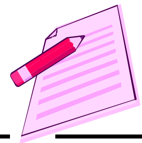
(*vii*) इस स्थिति में $h = k = a$ है (देखिए चित्र 15.6)

अतः, समीकरण (1) का रूप $x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0$ ...(8)

हो जाता है



चित्र 15.6



उदाहरण 15.1. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसका केन्द्र $(3, -4)$ तथा त्रिज्या 6 है।

हल : समीकरण (1) के पदों से तुलना करने पर हमें प्राप्त होता है:

$h = 3, k = -4$ तथा $a = 6$

$\therefore \quad (x-3)^2+(y+4)^2 = 6^2$ या $x^2+y^2-6x+8y-11=0$

उदाहरण 15.2. वृत्त $(x+1)^2+(y-1)^2=4$ का केन्द्र और त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल: दिए हुए समीकरण की तुलना $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ से करने पर हमें प्राप्त होता है:

$-h = 1, -k = -1, a^2 = 4$

$\therefore \quad h = -1, k = 1, a = 2$

इसलिए, दिए हुए वृत्त का केन्द्र $(-1,1)$ तथा त्रिज्या 2 है।

15.3 वृत्त का व्यापक समीकरण

हम जानते है कि केन्द्र (h, k) तथा त्रिज्या r वाले वृत्त का मानक समीकरण

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ है।

आइए, हम निम्न समीकरण पर विचार करें

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \qquad \ldots (1)$$

(1) को हम निम्न प्रकार से भी लिख सकते हैं:

$$(x^2+2gx+g^2)+(y^2+2fy+f^2)=g^2+f^2-c$$

अर्थात् $(x+g)^2+(y+f)^2=\left(\sqrt{g^2+f^2-c}\right)^2$

अर्थात् $[x-(-g)]^2+[y-(-f)]^2=\left(\sqrt{g^2+f^2-c}\right)^2 \qquad \ldots (2)$

अर्थात् $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

जहां $h=-g, \quad k=-f, \quad r=\sqrt{g^2+f^2-c}$

उपर्युक्त यह दर्शाता है कि दिया गया समीकरण एक वृत्त को निरुपित करता है जिसका केन्द्र $(-g, -f)$ तथा त्रिज्या $= \sqrt{g^2+f^2-c}$ है।

15.3.1 प्रतिबन्ध, जिनके अन्तर्गत दो चरों वाला व्यापक द्विघात समीकरण एक वृत्त को निरूपित करता है।

मान लीजिए कि समीकरण $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ है।

(i) यह x, y में द्विघात समीकरण है, जिसमें पदों x^2 और y^2 के गुणांक समान हैं।

(ii) इसमें $x\,y$ का कोई पद नहीं हैं।

टिप्पणी: प्रश्नों को हल करने में, हम x^2 और y^2 का गुणांक एक लेते हैं।

उदाहरण 15.3. वृत्त $45x^2+45y^2-60x+36y+19=0$ का केन्द्र तथा त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल: दिया हुआ समीकरण, 45 से भाग करके निम्न प्रकार लिखा जा सकता है,

$$x^2+y^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{5}y+\frac{19}{45}=0$$

इसकी तुलना समीकरण

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

से करने पर हमें प्राप्त होता है:

$$g=-\frac{2}{3},\, f=\frac{2}{5} \text{ तथा } c=\frac{19}{45}$$

इस प्रकार दिए गए वृत्त का केन्द्र $\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{5}\right)$ तथा त्रिज्या $\sqrt{g^2+f^2-c}=\frac{\sqrt{41}}{15}$ है।

उदाहरण 15.4. इस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिदुंओं (1, 0), (0, – 6) तथा (3, 4) से होकर जाता है।

हल: मान लीजिए कि वृत्त का समीकरण

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \qquad ...(1)$$

है।

चूंकि वृत्त तीन दिए हुए बिन्दुओं से होकर जाता है इसलिए वे समीकरण (1) को संतुष्ट करेंगे। अत:

$$1+2g+c=0 \qquad \cdots(2)$$

तथा

$$36-12f+c=0 \qquad \cdots(3)$$

$$25+6g+8f+c=0 \qquad \cdots(4)$$

(3) में से (2) तथा (4) में से (3) को घटाने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$2g+12f=35$$
$$6g+20f=11$$

इस समीकरणों को g तथा f के लिए हल करने पर हमें प्राप्त होता है: $g=-\frac{71}{4},\ f=\frac{47}{8}$

(2) में g का मान रखने पर, हम प्राप्त करते हैं: $c=\frac{69}{2}$

g, f तथा c के इन मानों को (1) में रखने पर वृत्त का अभीष्ट समीकरण है:

$$4x^2+4y^2-142x+47y+138=0$$

उदाहरण 15.5. उन वृत्तों के समीकरण ज्ञात कीजिए जो x- अक्ष को स्पर्श करते हैं, और बिन्दुओं (1,–2) तथा (3, –4) से होकर जाते है।

हल: चूंकि वृत्त x-अक्ष को स्पर्श करते हैं इस लिए वृत्त के मानक रूप में $k = a$ (परिणाम 6 देखिए) रखने पर, प्राप्त होता है।

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ay + h^2 = 0 \qquad \ldots (1)$$

चूंकि (1) बिन्दु $(1, -2)$ से होकर जाता है,

$$\therefore \quad h^2 - 2h + 4a + 5 = 0 \qquad \ldots (2)$$

वृत्त बिन्दु $(3, -4)$ से होकर भी जाता है,

$$\therefore \quad h^2 - 6h + 8a + 25 = 0 \qquad \ldots (3)$$

(2) और (3) से 'a' का विलोपन करने पर हम प्राप्त करते हैं।

$$\Rightarrow \quad h^2 + 2h - 15 = 0$$

$$h = 3 \text{ or } h = -5.$$

(3) से a के संगत मान क्रमशः -2 तथा -10 हैं। h तथा a के मान (1) में रखने पर, हम प्राप्त करते हैं।

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0 \qquad \ldots (4)$$

तथा $$x^2 + y^2 + 10x + 20y + 25 = 0 \qquad \ldots (5)$$

(4) तथा (5) वृत्त अभीष्ट समीकरण हैं।

देखें आपने कितना सीखा 15.1

1. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसका

   (a) केन्द्र (0, 0) तथा त्रिज्या 3 है। (b) केन्द्र (– 2,3) तथा त्रिज्या 4 है।

2. वृत्त का केन्द्र तथा त्रिज्या ज्ञात कीजिए:

   (a) $x^2 + y^2 + 3x - y = 6$ (b) $4x^2 + 4y^2 - 2x + 3y - 6 = 0$

3. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (0, 2) (2, 0) तथा (0, 0) से होकर जाता है।

4. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो y-अक्ष को स्पर्श करता है तथा बिन्दुओं (–1, 2) और (–2,1) से होकर जाता है।

आइये दोहराएँ

- **वृत्त का मानक रूप**

  $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$ केन्द्र (h, k) तथा त्रिज्या a है।

- वृत्त का व्यापक समीकरण $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ है।

  इसका केन्द्र $(-g, -f)$ तथा त्रिज्या = $\sqrt{g^2+f^2-c}$

सहायक वेबसाइट

- *www.purplemath.com/modules/circle2.htm*
- *www.purplemath.com/modules/circle.htm*
- *https://www.youtube.com/watch?v=U2-4fWtYt7I*

आइए अभ्यास करें

1. वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र $(4, -6)$ तथा त्रिज्या 7 है।
2. वृत्त $x^2+y^2+4x-6y=0$ का केन्द्र और त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
3. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $(1,0)$, $(-1,0)$ तथा $(0,1)$ से होकर जाता है।

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 15.1

1. (a) $x^2+y^2=9$ (b) $x^2+y^2+4x-6y-3=0$
2. (a) $\left(-\frac{3}{2}, 1\right); \frac{\sqrt{37}}{2}$ (b) $\left(\frac{1}{4}, -\frac{3}{8}\right); \frac{\sqrt{109}}{8}$
3. $x^2+y^2-2x-2y=0$
4. $x^2+y^2+2x-2y+1=0$

आइए अभ्यास करें

1. $x^2+y^2-8x+12y+3=0$
2. Centre $(-2, 3)$; Radius = $\sqrt{13}$
3. $x^2+y^2=1$.