

विशेष गुणनफल तथा गुणनखण्डन

- **विशेष गुणनफल:** गुणनफलों 108×108 , 97×97 , 104×96 को क्रमशः $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $(a + b)(a - b)$ की सहायता से आसानी से ज्ञात कर सकते हैं। इस प्रकार के गुणनफल विशेष गुणनफल कहलाते हैं।

विशेष गुणनफल के सूत्र:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3ab(a - b) - b^3$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3ab(a + b) + b^3$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

- **बहुपदों का गुणनखण्डन:** एक बहुपद का गुणनखण्डन, बहुपद को दो (अथवा अधिक) बहुपदों के गुणनफल के रूप में लिखने की प्रक्रिया है। गुणनफल में प्रत्येक बहुपद, दिए गए बहुपद का गुणनखण्ड कहलाता है।
- **गुणनखण्डन की विधियाँ:** वितरण गुण द्वारा गुणनखण्डन।
दो वर्गों के अन्तर वाले बहुपदों का गुणनखण्डन।
पूर्ण वर्ग बहुपद का गुणनखण्डन।
वह बहुपद, जिसे दो वर्गों के अन्तर के रूप में व्यक्त किया जा सके, का गुणनखण्डन।
पूर्णघन बहुपदों का गुणनखण्डन।
ऐसे बहुपदों, जिनमें दो घनों का योग अथवा अन्तर सम्मिलित हो, का गुणनखण्डन।
मध्य पद को विभक्त करके त्रिपदों के गुणनखण्ड करना।

- **बहुपदों का म. स.:** दो या दो से अधिक बहुपदों का महत्तम समापवर्तक (म.स.) अधिकतम घातों वाले बहुपदों तथा सर्वाधिक संख्यात्मक गुणाकों का गुणनफल होता है तथा यह दिए गए बहुपदों का गुणनखण्ड होता है।

- **बहुपदों का ल.स.:** दो या दो से अधिक बहुपदों का लघुत्तम समापवर्त्य (ल.स.) न्यूनतम घात वाले बहुपद और न्यूनतम संख्यात्मक गुणाकों का गुणनफल होता है तथा यह दिए गए बहुपदों द्वारा विभाजित होता है।

- **परिमेय व्यंजक:** एक बीजीय व्यंजक जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ p कोई एक बहुपद तथा q शून्येतर बहुपद है। यह आवश्यक नहीं कि प्रत्येक परिमेय व्यंजक बहुपद भी हो प्रत्येक बहुपद एक परिमेय व्यंजक भी होता है।
- **परिमेय व्यंजकों पर संक्रियाएँ:** परिमेय व्यंजकों में चारों मूलभूत संक्रियाएँ (+, -, ×, ÷) ठीक उसी प्रकार से की जाती हैं, जिस प्रकार से परिमेय संख्याओं में होती हैं।
परिमेय संख्याओं का गुणनफल न्यूनतम पदों अथवा न्यूनतम रूप में होना चाहिए।
परिमेय व्यंजकों का योग, व्यवकलन, गुणनफल तथा भागफल भी परिमेय व्यंजक होता है।

- **व्युत्क्रम व्यंजक (व्यंजक का व्युत्क्रम):** व्यंजक $\frac{S}{R}$,

व्यंजक $\frac{R}{S}$ का व्युत्क्रम व्यंजक है। दो परिमेय व्यंजकों का भाग ज्ञात करने के लिए हम इस प्रकार लिखते

$$\text{है: } \frac{P}{Q} \div \frac{R}{S} = \frac{P}{Q} \times \frac{S}{R}$$

- **परिमेय व्यंजक को न्यूनतम पदों में व्यक्त करना:** यदि परिमेय व्यंजक के अंश तथा हर में कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है, तो उसे काट देते हैं।

देखें आपने कितना सीखा :

1. निम्नलिखित में से कौन परिमेय व्यंजक नहीं है?

(A) $\sqrt{21}$ (B) $x + \frac{1}{x}$ (C) $8\sqrt{x} + 6\sqrt{y}$ (D) $\frac{x + \sqrt{2}}{x - \sqrt{2}}$

2. $(a^2 + b^2)^2 + (a^2 - b^2)^2$ बराबर है:

(A) $2(a^2 + b^2)$ (B) $4(a^2 + b^2)$ (C) $4(a^4 + b^4)$ (D) $2(a^4 + b^4)$

3. यदि $m - \frac{1}{m} = -\sqrt{3}$, तो $m^3 - \frac{1}{m^3}$ बराबर है:

(A) $-6\sqrt{3}$ (B) $-3\sqrt{3}$ (C) 0 (D) $6\sqrt{3}$

4. $\frac{327 \times 327 - 323 \times 323}{327 + 323}$ बराबर है:

(A) 650 (B) 327 (C) 323 (D) 4

5. $8m^3 - n^3$ बराबर है:

(A) $(2m - n)(4m^2 - 2mn + n^2)$

(B) $(2m - n)(4m^2 + 2mn + n^2)$

(C) $(2m - n)(4m^2 + 4mn + n^2)$

(D) $(2m + n)(4m^2 + 2mn + n^2)$

6. $\frac{x+2}{x-2}$ तथा $\frac{x-2}{x+2}$ का योग ज्ञात कीजिए।

7. $x^2 - 1$ तथा $x^2 - x - 2$ का ल.स. ज्ञात कीजिए।

8. $36x^5y^2$ तथा $90x^3y^4$ का म.स. ज्ञात कीजिए।

9. गुणनखण्ड कीजिए: (i) $x^4 - 81y^4$ (ii) $5x^2 - 8x - 4$.

10. निम्नलिखित को सरल कीजिए:

$$\frac{6x^2 + 17x + 12}{10x^2 + 17x + 3} \div \frac{6x^2 - 7x - 20}{10x^2 - 23x - 5}$$

स्वयं विस्तारण:

1. यदि $a^4 + \frac{1}{a^4} = 34$, तो $a^3 - \frac{1}{a^3}$ का मान ज्ञात कीजिए।
2. $\frac{x+1}{x-1}$ तथा इसके व्युत्क्रम का योग ज्ञात कीजिए।
3. वास्तविक गुणा किए बिना $103 \times 103 \times 103$ का मान ज्ञात कीजिए।
4. $x^3 - y^3$ का मान ज्ञात कीजिए, जबकि $x - y = 5$ तथा $xy = 66$ हो।

6. $\frac{2x^2+8}{x^2-4}$ 7. $(x^2-1)(x-2)$
8. $18x^3y^2$
9. (i) $(x^2+9y^2)(x+3y)(x-3y)$
(ii) $(x-2)(5x+2)$
10. 1

स्वयं विस्तारण:

उत्तर:

देखें आपने कितना सीखा :

1. C 2. D 3. A
4. D 5. B

1. 14
2. $\frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)}$
3. 1092727
4. 1115