211hi04

4

विशेष गुणनफल तथा गुणनखण्डन

पिछले अध्याय में, आपने बीजीय व्यंजकों, विशेषतया बहुपदों को गुणा करना सीखा है। बीजगणित के अध्ययन में, हमें कुछ ऐसे गुणनफल मिलते हैं जो बहुत बार प्रयोग किये जाते हैं। इनसे परिचित होने के बाद गुणनफल ज्ञात करने में हमें गुणा के सभी पदों को नहीं लिखना पड़ता, जिससे बहुत अधिक समय एवं मेहनत की बचत होती है। उदाहरण स्वरूप, यदि हम $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $(a + b)\ (a - b)$, $(a - b)^3$ इत्यादि गुणनफलों को जानते हैं तो क्रमशः 108×108, 97×97, 104×96, $99 \times 99 \times 99$, इत्यादि आसानी से ज्ञात किये जा सकते हैं। इस प्रकार के गुणनफल **विशेष गुणनफल** कहलाते हैं।

गुणनखण्डन एक निश्चित दिये गये गुणनफल जैसे $a^2 - b^2$, $a^3 + 8b^3$ इत्यादि, के गुणनखण्ड ज्ञात करने की एक प्रक्रिया है। गुणनखण्डन करते समय हम केवल उन बहुपदों को लेंगे जिनके गुणांक पूर्णांक हैं।

इस अध्याय में, आप बहुपदों के कुछ विशेष गुणनफलों एवं गुणनखण्डनों के विषय में सीखेंगे। इसके अतिरिक्त आप गुणनखण्डन द्वारा बहुपदों के म.स. एवं ल.स. ज्ञात करना सीखेंगे। अन्त में आपको परिमेय व्यंजकों एवं उन पर आधारित मूल संक्रियाओं से परिचित कराया जायेगा।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप समर्थ हो जाएंगे किः

- विशेष गुणनफलों के सूत्र यथा $(a \pm b)^2$, $(a + b)\ (a - b)$, $(x + a)\ (x + b)$, $(a + b)\ (a^2 - ab + b^2)$, $(a - b)\ (a^2 + ab + b^2)$, $(a \pm b)^3$ और $(ax + b)\ (cx + d)$ इत्यादि लिख सकें;
- विशेष गुणफलों का उपयोग करके संख्याओं के वर्ग तथा घनों का परिकलन कर सकें;
- $a^2 - b^2$, $a^3 \pm b^3$ के रूप वाले बहुपदों को सम्मिलित करते हुए, दिये गए बहुपदों के गुणनखण्ड कर सकें;

- मध्य–पद को विभक्त करके बहुपद $ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ के गुणनखण्ड कर सकें;
- दो या दो से अधिक बहुपदों के म.स. तथा ल.स. ज्ञात कर सकें;
- एक अथवा दो चरों वाले परिमेय व्यंजकों के उदाहरण दे सकें;
- परिमेय व्यंजकों पर चारों मूलभूत संक्रियाएँ कर सकें।

अपेक्षित पूर्व ज्ञान

- संख्या पद्धति तथा चारों मूलभूत संक्रियाएँ
- घातांकों के नियम
- बीजीय व्यंजक
- बहुपदों पर चारों मूलभूत संक्रियाएँ
- संख्याओं के म.स. तथा ल.स.
- प्राथमिक और उच्च प्राथमिक स्तर पर सीखी गई ज्यामितीय और क्षेत्रमिति की प्राथमिक अवधारणाओं की जानकारी।

4.1 विशेष गुणनफल

यहाँ, हम कुछ विशेष गुणनफलों को लेते हैं, जो बीजगणित में बार–बार आते हैं:

(1) आइए $(a + b)^2$ ज्ञात करें।

$(a + b)^2 \quad = (a + b)\,(a + b)$

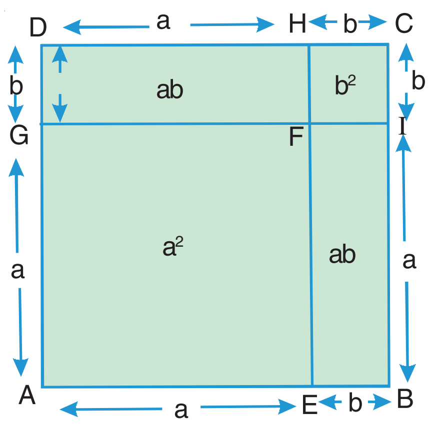
$\qquad\qquad = a(a + b) + b\,(a + b)$ [वितरण नियम]

$\qquad\qquad = a^2 + ab + ab + b^2$

$\qquad\qquad = a^2 + 2ab + b^2$

ज्यामितीय सत्यापन

यहाँ दायीं ओर दी गई आकृति पर ध्यान केन्द्रित कीजिए।



$(a + b)^2$ = वर्ग ABCD का क्षेत्रफल

= वर्ग AEFG का क्षेत्रफल +

आयत EBIF का क्षेत्रफल +

आयत DGFH का क्षेत्रफल +

वर्ग CHFI का क्षेत्रफल

$= a^2 + ab + ab + b^2$

$= a^2 + 2ab + b^2$

इस प्रकार, $\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

(2) आइए $(a - b)^2$ ज्ञात करें।

$(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$

$= a(a - b) - b(a - b)$ [वितरण नियम]

$= a^2 - ab - ab + b^2$

$= a^2 - 2ab + b^2$

विधि 2: $(a + b)^2$ का उपयोग करके

हम जानते हैं कि $a - b = a + (-b)$

$\therefore (a - b)^2 = [a + (-b)]^2$

$= a^2 + 2(a)(-b) + (-b)^2$

$= a^2 - 2ab + b^2$

ज्यामितीय सत्यापन

यहाँ दायीं ओर दी गयी आकृति पर ध्यान केन्द्रित कीजिए।

$(a - b)^2$ = वर्ग PQRS का क्षेत्रफल

= वर्ग STVX का क्षेत्रफल–

[आयत RTVW का क्षेत्रफल+

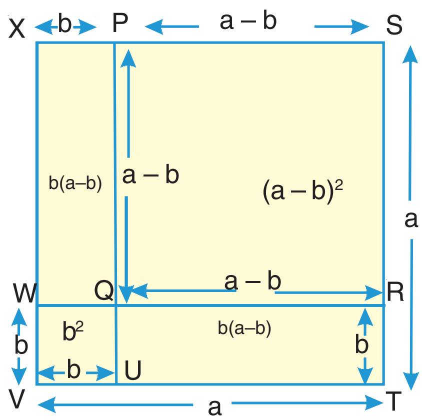
आयत PUVX का क्षेत्रफल–

वर्ग QUVW का क्षेत्रफल]

$= a^2 - (ab + ab - b^2)$

$= a^2 - ab - ab + b^2$

$= a^2 - 2ab + b^2$



इस प्रकार, $\mathbf{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

निगमन:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad .....(1)$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad .....(2)$$

(1) + (2) से प्राप्त होता है

$$\mathbf{(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)}$$

(1) – (2) से प्राप्त होता है।

$$\mathbf{(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab}$$

(3) अब हम गुणनफल $(a + b)(a - b)$ ज्ञात करते हैं।

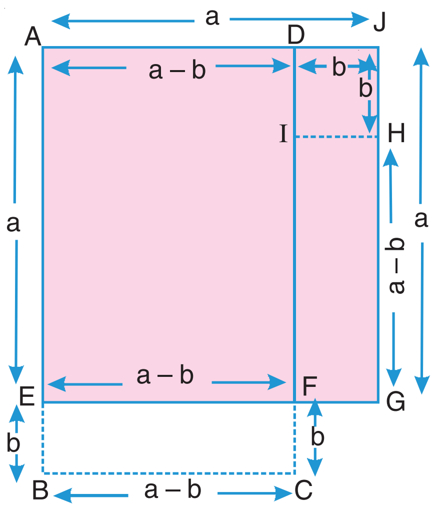
$(a + b)(a - b) \quad = a(a - b) + b(a - b)$ [वितरण नियम]

$= a^2 - ab + ab - b^2$

$= a^2 - b^2$

ज्यामितीय सत्यापन

दायीं ओर दी गई आकृति पर ध्यान दीजिए।



$(a + b)(a - b)$ = आयत ABCD का क्षेत्रफल

= आयत AEFD का क्षेत्रफल + आयत EBCF का क्षेत्रफल

= आयत AEFD का क्षेत्रफल+ आयत FGHI का क्षेत्रफल

= [आयत AEFD का क्षेत्रफल + आयत FGHI का क्षेत्रफल + वर्ग DIHJ का क्षेत्रफल] – वर्ग DIHJ का क्षेत्रफल

= वर्ग AEGJ का क्षेत्रफल – वर्ग DIHJ का क्षेत्रफल

$= a^2 - b^2$

इस प्रकार, $\mathbf{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$

अंकगणित में दो अंकों के योग को उनके अंतर से गुणा करने की प्रक्रिया बहुत ही उपयोगी है। जैसे

$64 \times 56 = (60 + 4) \times (60 - 4)$

$= 60^2 - 4^2$

$= 3600 - 16 = 3584$

(4) अब हम गुणनफल $(x + a)(x + b)$ ज्ञात करते हैं।

$$(x + a)(x + b) = x(x + b) + a(x + b) \quad \text{[वितरण नियम]}$$
$$= x^2 + bx + ax + ab$$
$$= x^2 + (a + b)x + ab$$

इस प्रकार, $\mathbf{(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab}$

निगमन: (i) $\mathbf{(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab}$

(ii) $\mathbf{(x - a)(x + b) = x^2 + (b - a)x - ab}$

विद्यार्थियों को सलाह दी जाती है कि वे इन परिणामों का सत्यापन करें।

(5) आइए, अब गुणनफल $(ax + b)(cx + d)$ ज्ञात करें।

$$(ax + b)(cx + d) = ax(cx + d) + b(cx + d)$$
$$= acx^2 + adx + bcx + bd$$
$$= acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

इस प्रकार, $\mathbf{(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd}$

निगमन: (i) $\mathbf{(ax - b)(cx - d) = acx^2 - (ad + bc)x + bd}$

(ii) $\mathbf{(ax - b)(cx + d) = acx^2 - (bc - ad)x - bd}$

विद्यार्थियों को उपर्युक्त परिणामों को सत्यापित करना चाहिए।

आइए अब उपर्युक्त विशेष गुणनफलों पर आधारित उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 4.1: निम्न गुणनफल ज्ञात कीजिए:

(i) $(2a + 3b)^2$ (ii) $\left(\frac{3}{2}a - 6b\right)^2$

(iii) $(3x + y)(3x - y)$ (iv) $(x + 9)(x + 3)$

(v) $(a + 15)(a - 7)$ (vi) $(5x - 8)(5x - 6)$

(vii) $(7x - 2a)(7x + 3a)$ (viii) $(2x + 5)(3x + 4)$

हल:

(i) यहां हमारे पास a के स्थान पर 2a तथा b के स्थान पर 3b है।

$$(2a + 3b)^2 = (2a)^2 + 2(2a)(3b) + (3b)^2$$
$$= 4a^2 + 12ab + 9b^2$$

(ii) विशेष गुणनफल (2), का उपयोग करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\left(\frac{3}{2}a-6b\right)^2=\left(\frac{3}{2}a\right)^2-2\left(\frac{3}{2}a\right)(6b)+(6b)^2$$

$$=\frac{9}{4}a^2-18ab+36b^2$$

(iii) $(3x+y)(3x-y)=(3x)^2-y^2$ [विशेष गुणनफल (3) का उपयोग करने पर]

$=9x^2-y^2$

(iv) $(x+9)(x+3)=x^2+(9+3)x+9\times3$ [विशेष गुणनफल (4) का उपयोग करने पर]

$=x^2+12x+27$

(v) $(a+15)(a-7)=a^2+(15-7)a-15\times7$

$=a^2+8a-105$

(vi) $(5x-8)(5x-6)=(5x)^2-(8+6)(5x)+8\times6$

$=25x^2-70x+48$

(vii) $(7x-2a)(7x+3a)=(7x)^2+(3a-2a)(7x)-(3a)(2a)$

$=49x^2+7ax-6a^2$

(viii) $(2x+5)(3x+4)=(2\times3)x^2+(2\times4+5\times3)x+5\times4$

$=6x^2+23x+20$

विशेष गुणनफलों, जिन्हें बीजीय सूत्र कहते हैं, का प्रयोग करने पर संख्यात्मक परिकलन सुविधाजनक तरीके से किए जा सकते हैं।

उदाहरण 4.2: विशेष गुणनफलों का उपयोग करके निम्नलिखित में प्रत्येक को परिकलित कीजिए:

(i) 101×101 (ii) 98×98 (iii) 68×72

(iv) 107×103 (v) 56×48 (vi) 94×99

हल: (i) $101\times101=101^2=(100+1)^2$

$=100^2+2\times100\times1+1^2$

$=10000+200+1$

$=10201$

(ii) $98\times98=98^2=(100-2)^2$

$= 100^2 - 2 \times 100 \times 2 + 2^2$

$= 10000 - 400 + 4$

$= 9604$

(iii) $68 \times 72 = (70 - 2) \times (70 + 2)$

$= 70^2 - 2^2$

$= 4900 - 4$

$= 4896$

(iv) $107 \times 103 = (100 + 7)\,(100 + 3)$

$= 100^2 + (7 + 3) \times 100 + 7 \times 3$

$= 10000 + 1000 + 21$

$= 11021$

(v) $56 \times 48 = (50 + 6)\,(50 - 2)$

$= 50^2 + (6 - 2) \times 50 - 6 \times 2$

$= 2500 + 200 - 12$

$= 2688$

(vi) $94 \times 99 = (100 - 6)\,(100 - 1)$

$= 100^2 - (6 + 1) \times 100 + 6 \times 1$

$= 10000 - 700 + 6$

$= 9306$

देखें आपने कितना सीखा 4.1

1. निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कीजिए:

(i) $(5x + y)^2$ (ii) $(x - 3)^2$ (iii) $(ab + cd)^2$

(iv) $(2x - 5y)^2$ (v) $\left(\frac{x}{3} + 1\right)^2$ (vi) $\left(\frac{z}{2} - \frac{1}{3}\right)^2$

(vii) $(a^2 + 5)\,(a^2 - 5)$ (viii) $(xy - 1)\,(xy + 1)$ (ix) $\left(x + \frac{4}{3}\right)\left(x + \frac{3}{4}\right)$

(x) $\left(\frac{2}{3}x^2 - 3\right)\left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}\right)$ (xi) $(2x + 3y)\,(3x + 2y)$ (xii) $(7x + 5y)\,(3x - y)$

2. सरल कीजिए:

   (i) $(2x^2 + 5)^2 - (2x^2 - 5)^2$ (ii) $(a^2 + 3)^2 + (a^2 - 3)^2$

   (iii) $(ax + by)^2 + (ax - by)^2$ (iv) $(p^2 + 8q^2)^2 - (p^2 - 8q^2)^2$

3. विशेष गुणनफलों का प्रयोग कर निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कीजिए:

   (i) 102×102 (ii) 108×108 (iii) 69×69

   (iv) 998×998 (v) 84×76 (vi) 157×143

   (vii) 306×294 (viii) 508×492 (ix) 105×109

   (x) 77×73 (xi) 94×95 (xii) 993×996

4.2 कुछ अन्य विशेष गुणनफल

(6) द्विपद $(a + b)$ पर विचार कीजिए। आइए इसका घन ज्ञात करें।

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 \\
&= (a+b)(a^2+2ab+b^2) \quad \text{[घातांकीय नियमों के प्रयोग से]} \\
&= a(a^2+2ab+b^2) + b(a^2+2ab+b^2) \quad \text{[वितरण नियम]} \\
&= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
&= a^3 + 3ab(a+b) + b^3
\end{aligned}$$

अस प्रकार, $\mathbf{(a + b)^3 = a^3 + 3ab(a + b) + b^3}$

(7) अब हम $(a - b)$ का घन ज्ञात करते हैं।

$$\begin{aligned}
(a-b)^3 &= (a-b)(a-b)^2 \\
&= (a-b)(a^2-2ab+b^2) \quad \text{[घातांकीय नियम के प्रयोग से]} \\
&= a(a^2-2ab+b^2) - b(a^2-2ab+b^2) \quad \text{[वितरण नियम]} \\
&= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 \\
&= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\
&= a^3 - 3ab(a-b) - b^3
\end{aligned}$$

इस प्रकार, $\mathbf{(a - b)^3 = a^3 - 3ab(a - b) - b^3}$

नोट: आप निम्नलिखित में b को –b से बदलकर भी यह परिणाम प्राप्त कर सकते हैं।

$(a + b)^3 = a^3 + 3ab(a + b) + b^3$

(8) $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a\,(a^2 - ab + b^2) + b(a^2 - ab + b^2)$ [वितरण नियम]

$$= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + b^3$$

इस प्रकार, $\mathbf{(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3}$

(9) $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a\,(a^2 + ab + b^2) - b(a^2 + ab + b^2)$ [वितरण नियम]

$$= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3$$

$$= a^3 - b^3$$

इस प्रकार, $\mathbf{(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3}$

आइए अब उपर्युक्त विशेष गुणनफलों पर आधारित उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 4.3: निम्नलिखित ज्ञात कीजिए:

(i) $(7x + 9y)^3$ (ii) $(px - yz)^3$ (iii) $(x - 4y^2)^3$

(iv) $(2a^2 + 3b^2)^3$ (v) $\left(\frac{2}{3}a - \frac{5}{3}b\right)^3$ (vi) $\left(1 + \frac{4}{3}c\right)^3$

हल:

(i) $(7x + 9y)^3 = (7x)^3 + 3(7x)(9y)(7x + 9y) + (9y)^3$

$$= 343\,x^3 + 189\,xy\,(7x + 9y) + 729y^3$$

$$= 343x^3 + 1323x^2y + 1701xy^2 + 729y^3$$

(ii) $(px - yz)^3 = (px)^3 - 3(px)(yz)(px - yz) - (yz)^3$

$$= p^3x^3 - 3pxyz\,(px - yz) - y^3z^3$$

$$= p^3x^3 - 3p^2x^2yz + 3pxy^2z^2 - y^3z^3$$

(iii) $(x - 4y^2)^3 = x^3 - 3x\,(4y^2)(x - 4y^2) - (4y^2)^3$

$$= x^3 - 12xy^2\,(x - 4y^2) - 64y^6$$

$$= x^3 - 12x^2y^2 + 48xy^4 - 64y^6$$

(iv) $(2a^2 + 3b^2)^3 = (2a^2)^3 + 3(2a^2)(3b^2)(2a^2 + 3b^2) + (3b^2)^3$

$$= 8a^6 + 18a^2b^2\,(2a^2 + 3b^2) + 27b^6$$

$$= 8a^6 + 36a^4b^2 + 54a^2b^4 + 27b^6$$

$$\text{(v)}\ \left(\frac{2}{3}a-\frac{5}{3}b\right)^3=\left(\frac{2}{3}a\right)^3-3\left(\frac{2}{3}a\right)\left(\frac{5}{3}b\right)\left(\frac{2}{3}a-\frac{5}{3}b\right)-\left(\frac{5}{3}b\right)^3$$

$$=\frac{8}{27}a^3-\frac{10}{3}ab\left(\frac{2}{3}a-\frac{5}{3}b\right)-\frac{125}{27}b^3$$

$$=\frac{8}{27}a^3-\frac{20}{9}a^2b+\frac{50}{9}ab^2-\frac{125}{27}b^3$$

$$\text{(vi)}\ \left(1+\frac{4}{3}c\right)^3=(1)^3+3(1)\left(\frac{4}{3}c\right)\left(1+\frac{4}{3}c\right)+\left(\frac{4}{3}c\right)^3$$

$$=1+4c\left(1+\frac{4}{3}c\right)+\frac{64}{27}c^3$$

$$=1+4c+\frac{16}{3}c^2+\frac{64}{27}c^3$$

उदाहरण 4.4: विशेष गुणनफलों का प्रयोग करके, निम्नलिखित में से प्रत्येक का घन ज्ञात कीजिए:

(i) 19 (ii) 101 (iii) 54 (iv) 47

हल: (i) $19^3 = (20-1)^3$

$= 20^3 - 3 \times 20 \times 1\ (20-1) - 1^3$

$= 8000 - 60\ (20-1) - 1$

$= 8000 - 1200 + 60 - 1$

$= 6859$

(ii) $101^3 = (100+1)^3$

$= 100^3 + 3 \times 100 \times 1\ (100+1) + 1^3$

$= 1000000 + 300 \times 100 + 300 + 1$

$= 1030301$

(iii) $54^3 = (50+4)^3$

$= 50^3 + 3 \times 50 \times 4\ (50+4) + 4^3$

$= 125000 + 600\ (50+4) + 64$

$= 125000 + 30000 + 2400 + 64$

$= 157464$

(iv) $47^3 = (50 - 3)^3$

$= 50^3 - 3 \times 50 \times 3\,(50 - 3) - 3^3$

$= 125000 - 450\,(50 - 3) - 27$

$= 125000 - 22500 + 1350 - 27$

$= 103823$

उदाहरण 4.5: निम्नलिखित में से प्रत्येक को बिना वास्तविक गुणा किए, परिकलित कीजिए:

(i) $(2a + 3b)\,(4a^2 - 6ab + 9b^2)$

(ii) $(3a - 2b)\,(9a^2 + 6ab + 4b^2)$

हल: (i) $(2a + 3b)\,(4a^2 - 6ab + 9b^2) = (2a + 3b)\,[(2a)^2 - (2a)\,(3b) + (3b)^2]$

$= (2a)^3 + (3b)^3$

$= 8a^3 + 27b^3$

(ii) $(3a - 2b)\,(9a^2 + 6ab + 4b^2) = (3a - 2b)\,[(3a)^2 + (3a)\,(2b) + (2b)^2]$

$= (3a)^3 - (2b)^3$

$= 27a^3 - 8b^3$

उदाहरण 4.6: सरल कीजिए:

(i) $(3x - 2y)^3 + 3\,(3x - 2y)^2\,(3x + 2y) + 3(3x - 2y)\,(3x + 2y)^2 + (3x + 2y)^3$

(ii) $(2a - b)^3 + 3\,(2a - b)\,(2b - a)\,(a + b) + (2b - a)^3$

हल: (i) $3x - 2y = a$ तथा $3x + 2y = b$ रखिए।

दिया हुआ व्यंजक हो जाता है:

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$= (a + b)^3$

$= (3x - 2y + 3x + 2y)^3$

$= (6x)^3$

$= 216x^3$

(ii) $2a - b = x$ तथा $2b - a = y$ रखो ताकि $a + b = x + y$ हो जाए।

दिया हुआ व्यंजक हो जाता है:

$x^3 + 3xy\,(x + y) + y^3$

$= (x + y)^3$

$$= (a + b)^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

उदाहरण 4.7: सरल कीजिए:

(i) $\dfrac{857\times857\times857-537\times537\times537}{857\times857+857\times537+537\times537}$

(ii) $\dfrac{674\times674\times674+326\times326\times326}{674\times674-674\times326+326\times326}$

हल: दिए गए व्यंजक को निम्न प्रकार लिख सकते हैं:

$$\frac{857^3-537^3}{857^2+857\times537+537^2}$$

मान लीजिए $857 = a$ तथा $537 = b$ है। तब, व्यंजक हो जाता है:

$$\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^2+ab+b^2}$$

$$= a - 6$$

$$= 857 - 537$$

$$= 320$$

(ii) दिए गये व्यंजक को निम्न प्रकार लिख सकते हैं:

$$\frac{674^3+326^3}{674^2-674\times326+326^2}$$

$$=\frac{(674+326)(674^2-674\times326+326^2)}{674^2-674\times326+326^2}$$

$$= 674 + 326$$

$$= 1000$$

देखें आपने कितना सीखा 4.2

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक का प्रसार कीजिए:

(i) $(3x+4y)^3$ (ii) $(p-qr)^3$ (iii) $\left(a+\dfrac{b}{3}\right)^3$

(iv) $\left(\frac{a}{3}-b\right)^3$ (v) $\left(\frac{1}{2}a^2+\frac{2}{3}b^2\right)^3$ (vi) $\left(\frac{1}{3}a^2x^3-2b^3y^2\right)^3$

2. विशेष गुणनफलों का प्रयोग करके, निम्नलिखित में से प्रत्येक का घन ज्ञात कीजिए:

(i) 8 (ii) 12 (iii) 18 (iv) 23

(v) 53 (vi) 48 (vii) 71 (viii) 69

(ix) 97 (x) 99

3. बिना वास्तविक गुणा किए निम्नलिखित गुणनफलों में से प्रत्येक को ज्ञात कीजिए:

(i) $(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)$ (ii) $(x-2)(x^2+2x+4)$

(iii) $(1+x)((1-x+x^2)$ (iv) $(2y-3z^2)(4y^2+6yz^2+9z^4)$

(v) $(4x+3y)(16x^2-12xy+9y^2)$ (vi) $\left(3x-\frac{1}{7}y\right)\left(9x^2+\frac{3}{7}xy+\frac{1}{49}y^2\right)$

4. मान ज्ञात कीजिए:

(i) a^3+8b^3, यदि $a+2b=10$ तथा $ab=15$

[संकेत: $(a+2b)^3=a^3+8b^3+6ab\,(a+2b) \Rightarrow a^3+8b^3=(a+2b)^3-6ab\,(a+2b)$]

(ii) x^3-y^3 का यदि $x-y=5$ और $xy=66$ हो।

5. $64x^3-125z^3$ का मान ज्ञात कीजिए, यदि

(i) $4x-5z=16$ और $xz=12$

(ii) $4x-5z=\frac{3}{5}$ और $xz=6$

6. सरल कीजिए:

(i) $(2x+5)^3-(2x-5)^3$

(ii) $(7x+5y)^3-(7x-5y)^3-30y\,(7x+5y)(7x-5y)^3$

[संकेत: $7x+5y=a$ और $7x-5y=b$ रखिए ताकि $a-b=10y$ हो]

(iii) $(3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)-(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$

(iv) $(2x-5)(4x^2+10x+25)-(5x+1)(25x^2-5x+1)$

7. सरल कीजिए:

(i) $\dfrac{875\times875\times875+125\times125\times125}{875\times875-875\times125+125\times125}$

(ii) $\dfrac{678\times678\times678-234\times234\times234}{678\times678+678\times234+234\times234}$

4.3 बहुपदों के गुणनखण्डन

याद कीजिए कि $3 \times 4 = 12$, में हम कह सकते हैं कि 3 और 4, 12 के गुणनखंड हैं। इसी प्रकार बीजगणित में, चूंकि $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ होता है, तो हम कह सकते हैं कि $(x + y)$ और $(x - y)$, $(x^2 - y^2)$ के गुणनखण्ड हैं।

एक बहुपद का गुणनखण्डन, बहुपद को दो (अथवा अधिक) बहुपदों के गुणनफल के रूप में लिखने की प्रक्रिया है। गुणनफल में प्रत्येक बहुपद, दिए गए बहुपद का गुणनखण्ड कहलाता है।

गुणनखण्डन में, जब तक अन्यथा न कहा जाए, हम बहुपदों को पूर्णांकों पर ही सीमित रखते हैं अर्थात् बहुपदों को पूर्णांकीय गुणांकों तक सीमित रखते हैं। ऐसी स्थितियों में यह वांछित है कि गुणनखण्ड भी पूर्णांकीय बहुपद हों। $2x^2 - y^2$ को $\left(\sqrt{2}x + y\right)\left(\sqrt{2}x - y\right)$ के रूप में गुणनखंडित करना वांछनीय नहीं है क्योंकि ये गुणनखण्ड पूर्णांकीय नहीं हैं।

एक बहुपद को पूर्णतः गुणनखंडित समझा जाएगा यदि इसके किसी भी गुणनखंड को उसकी घात से कम घात वाले बहुपदों के गुणनफल के रूप में व्यक्त न किया जा सके तथा यदि पूर्णांकीय गुणांक 1 तथा –1 के अतिरिक्त अन्य कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड न रखते हों। इस प्रकार $(x^2 - 4x)$ का पूर्ण गुणनखंडन $x(x-4)$ है। इसके विपरीत $(16x^4 - 1)$ का $(4x^2 - 1)(4x^2 + 1)$ पूर्ण गुणनखंडन नहीं है क्योंकि गुणनखंड $(4x^2 - 1)$ को आगे $(2x - 1)(2x + 1)$ के रूप में गुणनखंडित किया जा सकता है। इस प्रकार $(16x^4 - 1)$ का पूर्णतः गुणनखंडन $(2x - 1)(2x + 1)(4x^2 + 1)$ है।

गुणनखंडन में, इस पाठ में हम पहले सीखे विशेष गुणनफलों का पूर्ण उपयोग करेंगे। अब, बहुपदों के गुणनखंडन में हम उदाहरणों के द्वारा विभिन्न स्थितियाँ अलग–अलग लेते हैं।

(i) वितरण गुण द्वारा गुणनखण्ड

उदाहरण 4.8: गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए:

(i) $10a - 25$ (ii) $x^2y^3 + x^3y^2$

(iii) $5ab(ax^2 + y^2) - 6mn(ax^2 + y^2)$ (iv) $a(b - c)^2 + b(b - c)$

हल: (i) $10a - 25 = 5 \times 2a - 5 \times 5$

$= 5(2a - 5)$ [क्योंकि दोनों पदों में 5 उभयनिष्ठ है]

इसलिए, $10a - 25$ के गुणनखण्ड 5 और $2a - 5$ हैं।

(ii) $x^2y^3 + x^3y^2$, में ध्यान दीजिए कि दोनों पदों में x^2y^2 उभयनिष्ठ है।

$$\therefore x^2y^3 + x^3y^2 = x^2y^2 \times y + x^2y^2 \times x$$

$$= x^2y^2(y + x)$$

इस प्रकार, $x, x^2, y, y^2, xy, x^2y, xy^2, x^2y^2$ और $y + x$ सभी $x^2y^3 + x^3y^2$ के गुणनखंड हैं।

(iii) ध्यान दीजिए कि $ax^2 + y^2$ दोनों पदों में उभयनिष्ठ है।

$$\therefore\ 5ab\,(ax^2 + y^2) - 6mn(ax^2 + y^2) = (ax^2 + y^2)\,(5ab - 6mn)$$

(iv) $a(b - c)^2 + b(b - c) = (b - c) \times [a(b - c)] + (b - c) \times b$

$$= (b - c) \times [a(b - c) + b]$$

$$= (b - c) \times [ab - ac + b]$$

(2) दो वर्गों के अन्तर वाले बहुपदों का गुणनखण्ड

आप जानते हैं कि $(x + y)\,(x - y) = x^2 - y^2$ होता है। इसलिए $x^2 - y^2$ के गुणनखण्ड $x + y$ और $x - y$ हैं।

उदाहरण 4.9: गुणनखण्ड कीजिए:

(i) $9x^2 - 16y^2$ (ii) $x^4 - 81y^4$

(iii) $a^4 - (2b - 3c)^2$ (iv) $x^2 - y^2 + 6y - 9$

हल: (i) $9x^2 - 16y^2 = (3x)^2 - (4y)^2$, जो दो वर्गों का अन्तर है।

$$= (3x + 4y)\,(3x - 4y)$$

(ii) $x^4 - 81y^4 = (x^2)^2 - (9y^2)$

$$= (x^2 + 9y^2)\,(x^2 - 9y^2)$$

ध्यान दीजिए कि $x^2 - 9y^2 = (x)^2 - (3y)^2$, पुनः दो वर्गों का अन्तर है।

$$x^4 - 81y^4 = (x^2 + 9y^2)\,[(x)^2 - (3y)^2]$$

$$= (x^2 + 9y^2)\,(x + 3y)\,(x - 3y)$$

(iii) $a^4 - (2b - 3c)^2 = (a^2)^2 - (2b - 3c)^2$

$$= [a^2 + (2b - 3c)]\,[a^2 - (2b - 3c)]$$

$$= (a^2 + 2b - 3c)\,(a^2 - 2b + 3c)$$

(iv) $x^2 - y^2 + 6y - 9 = x^2 - (y^2 - 6y + 9)$ [इस चरण को नोट कीजिए]

$$= (x)^2 - [(y)^2 - 2 \times y \times 3 + (3)^2]$$

$$= (x)^2 - (y - 3)^2$$

$$= [x + (y - 3)]\,[x - (y - 3)]$$

$$= (x + y - 3)\,(x - y + 3)$$

(3) पूर्ण वर्ग त्रिपदी का गुणनखण्डन

उदाहरण 4.10 : गुणनखण्ड कीजिए:

(i) $9x^2 + 24xy + 16y^2$ (ii) $x^6 - 8x^3 + 16$

हल: (i) $9x^2 + 24xy + 16y^2 = (3x)^2 + 2\,(3x)\,(4y) + (4y)^2$

$= (3x + 4y)^2$

$= (3x + 4y)\,(3x + 4y)$

इस प्रकार, दिए गए बहुपद के दोनों गुणनखण्ड समान हैं, जिनमें से प्रत्येक $(3x + 4y)$ है।

(ii) $x^6 - 8x^3 + 16 = (x^3)^2 - 2(x^3)\,(4) + (4)^2$

$= (x^3 - 4)^2$

$= (x^3 - 4)\,(x^3 - 4)$

पुनः दिए गए बहुपद के दोनों गुणनखण्ड समान हैं, जिनमें से प्रत्येक $(x^3 - 4)$ है।

(4) उस बहुपद, जिसे दो वर्गों के अन्तर के रूप में व्यक्त किया जा सके, का गुणनखंडन

उदाहरण 4.11: गुणनखंडन कीजिए

(i) $x^4 + 4y^4$ (ii) $x^4 + x^2 + 1$

हल: (i) $x^4 + 4y^4 = (x^2)^2 + (2y^2)^2$

$= (x^2)^2 + (2y^2)^2 + 2\,(x^2)\,(2y^2) - 2\,(x^2)\,(2y^2)$

[$2\,(x^2)\,(2y^2)$ जोड़ने तथा घटाने पर]

$= (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2$

$= (x^2 + 2y^2 + 2xy)\,(x^2 + 2y^2 - 2xy)$

(ii) $x^4 + x^2 + 1 = (x^2)^2 + (1)^2 + 2x^2 - x^2$

[x^2 जोड़ने तथा घटाने पर]

$= (x^2 + 1)^2 - (x)^2$

$= (x^2 + x + 1)\,(x^2 - x + 1)$

देखें आपने कितना सीखा 4.3

गुणनखण्ड कीजिए:

1. $10\,xy - 15xz$

2. $abc^2 - ab^2c$

3. $6p^2 - 15pq + 27p$
4. $a^2(b-c) + b(c-b)$
5. $2a(4x-y)^3 - b(4x-y)^2$
6. $x(x+y)^3 - 3xy(x+y)$
7. $100 - 25p^2$
8. $1 - 256y^8$
9. $(2x+1)^2 - 9x^2$
10. $(a^2+bc)^2 - a^2(b+c)^2$
11. $25x^2 - 10x + 1 - 36y^2$
12. $49x^2 - 1 - 14xy + y^2$
13. $m^2 + 14m + 49$
14. $4x^2 - 4x + 1$
15. $36a^2 + 25 + 60a$
16. $x^6 - 8x^3 + 16$
17. $a^8 - 47a^4 + 1$
18. $4a^4 + 81b^4$
19. $x^4 + 4$
20. $9a^4 - a^2 + 16$
21. 'n' का मान ज्ञात कीजिए, यदि

    (i) $6n = 23 \times 23 - 17 \times 17$ (ii) $536 \times 536 - 36 \times 36 = 5n$

(5) पूर्ण घन बहुपदों का गुणनखण्डन

उदाहरण 4.12: गुणनखण्ड कीजिए:

(i) $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$ (ii) $x^6 - 3x^4y^2 + 3x^2y^4 - y^6$

हल: (i) $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$

$$= (x)^3 + 3x^2(2y) + 3x(2y)^2 + (2y)^3$$
$$= (x+2y)^3$$

इस प्रकार दिए गए बहुपद के तीनों गुणनखण्ड समान हैं, जिनमें से प्रत्येक $x + 2y$ है।

(ii) दिया गया बहुपद बराबर है:

$$(x^2)^3 - 3x^2y^2(x^2 - y^2) - (y^2)^3$$
$$= (x^2 - y^2)^3$$
$$= [(x+y)(x-y)]^3 \quad [\text{क्योंकि } x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)]$$
$$= (x+y)^3(x-y)^3$$

(6) ऐसे बहुपदों, जिनमें दो घनों का योग अथवा अन्तर सम्मिलित हो, का गुणनखंडन

विशेष गुणनफलों में आपने सीखा है कि

$$(x+y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$$

और $$(x-y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$$

इसलिए $x^3 + y^3$ के गुणनखंड $x + y$ तथा $x^2 - xy + y^2$ और $x^3 - y^3$ के गुणनखंड $x - y$ तथा $x^2 + xy + y^2$ हैं।

अब निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार कीजिए:

उदाहरण 4.13: गुणनखंड कीजिए:

(i) $64a^3 + 27b^3$ (ii) $8x^3 - 125y^3$

(iii) $8(x + 2y)^3 - 343$ (iv) $a^4 - a^{13}$

हल: (i) $64a^3 + 27b^3 = (4a)^3 + (3b)^3$

$$= (4a + 3b)\,[(4a)^2 - (4a)(3b) + (3b)^2]$$

$$= (4a + 3b)\,(16a^2 - 12ab + 9b^2)$$

(ii) $8x^3 - 125y^3 = (2x)^3 - (5y)^3$

$$= (2x - 5y)\,[(2x)^2 + (2x)(5y) + (5y)^2]$$

$$= (2x - 5y)\,(4x^2 + 10xy + 25y^2)$$

(iii) $8(x + 2y)^3 - 343 = [2(x + 2y)]^3 - (7)^3$

$$= [2(x + 2y) - 7]\,[2^2 (x + 2y)^2 + 2(x + 2y)(7) + 7^2]$$

$$= (2x + 4y - 7)\,(4x^2 + 16xy + 16y^2 + 14x + 28y + 49)$$

(iv) $a^4 - a^{13} = a^4 (1 - a^9)$ [क्योंकि दोनों पक्षों में a^4 उभयनिष्ठ है]

$$= a^4\,[(1)^3 - (a^3)^3]$$

$$= a^4 (1 - a^3)(1 + a^3 + a^6)$$

$$= a^4 (1 - a)(1 + a + a^2)(1 + a^3 + a^6)$$

[क्योंकि $1 - a^3 = (1 - a)(1 + a + a^2)$]

देखें आपने कितना सीखा 4.4

गुणनखण्ड कीजिए:

1. $a^3 + 216b^3$
2. $a^3 - 343$
3. $x^3 + 12x^2y + 48xy^2 + 64y^3$
4. $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$
5. $8x^3 - 125y^3 - 60x^2y + 150xy^2$
6. $64k^3 - 144k^2 + 108k - 27$
7. $729x^6 - 8$
8. $x^2 + x^2y^6$
9. $16a^7 - 54ab^6$
10. $27b^3 - a^3 - 3a^2 - 3a - 1$
11. $(2a - 3b)^3 + 64c^3$
12. $64x^3 - (2y - 1)^3$

(7) मध्य पद को विभक्त करके त्रिपदों के गुणनखंड करना

आपने सीखा है कि

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab = 1.x^2 + (a + b)x + ab$$

और $(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$

सामान्यतः, यहाँ दायीं ओर दिए गए व्यंजक $Ax^2 + Bx + C$ के रूप में है, जिनके गुणनखण्ड, प्रथम पद में x^2 के गुणांक को अंतिम पद से गुणा करके तथा इस गुणनफल के ऐसे दो गुणनखण्डों, जिनका योग मध्य पद के बराबर हो, का पता लगाकर किये जा सकते हैं। दूसरे शब्दों में, हमें AC के ऐसे दो गुणनखण्डों को ज्ञात करना है, जिनका योग B के बराबर हो। नीचे दिए गए उदाहरण इस प्रक्रिया को और अच्छी प्रकार से स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 4.14: गुणनखण्ड कीजिए:

(i) $x^2 + 3x + 2$ (ii) $x^2 - 10xy + 24y^2$

(iii) $5x^2 + 13x - 6$ (iv) $3x^2 - x - 2$

हल: (i) यहाँ, $A = 1$, $B = 3$ और $C = 2$ है। अतः $AC = 1 \times 2 = 2$

इसलिए हमें 2 के ऐसे दो गुणनखण्डों का पता लगाना है, जिनका योग 3 हो।

स्पष्टतः, $1 + 2 = 3$

(अर्थात् $AC = 2$ के दो गुणनखण्ड 1 तथा 2 हैं)

$\therefore$ हम दिए गए बहुपद को इस प्रकार लिखते हैं:

$$\begin{aligned} & x^2 + (1 + 2)x + 2 \\ = \; & x^2 + x + 2x + 2 \\ = \; & x(x + 1) + 2(x + 1) \\ = \; & (x + 1)(x + 2) \end{aligned}$$

(ii) यहाँ, $AC = 24y^2$ और $B = -10y$ है।

$24y^2$ के दो गुणनखण्ड, जिनका योग $-10y$ हो, $-4y$ और $-6y$ हैं।

$\therefore$ हम दिए गए बहुपद को इस प्रकार लिखते हैं:

$$\begin{aligned} & x^2 - 4xy - 6xy + 24y^2 \\ & = x(x - 4y) - 6y(x - 4y) \\ & = (x - 4y)(x - 6y) \end{aligned}$$

(iii) यहाँ, $AC = 5 \times (-6) = -30$ और $B = 13$ है।

-30 के दो गुणनखण्ड, जिनका योग 13 हो, 15 और -2 हैं।

$\therefore$ हम दिए गए बहुपद को इस प्रकार लिखते हैं:

$5x^2 + 15x - 2x - 6$

$= \quad 5x(x + 3) - 2(x + 3)$

$= \quad (x + 3)(5x - 2)$

(iv) यहाँ, $AC = 3 \times (-2) = -6$ और $B = -1$ है।

-6 के दो गुणनखंड, जिनका योग (-1) हो, (-3) और 2 हैं।

$\therefore$ हम दिए गए बहुपद को इस प्रकार लिखते हैं:

$3x^2 - 3x + 2x - 2$

$= \quad 3x(x - 1) + 2(x - 1)$

$= \quad (x - 1)(3x + 2)$

देखें आपने कितना सीखा 4.5

गुणनखंड कीजिए:

1. $x^2 + 11x + 24$
2. $x^2 - 15xy + 54y^2$
3. $2x^2 + 5x - 3$
4. $6x^2 - 10xy - 4y^2$
5. $2x^4 - x^2 - 1$
6. $x^2 + 13xy - 30y^2$
7. $2x^2 + 11x + 14$
8. $10y^2 + 11y - 6$
9. $2x^2 - x - 1$
10. $(m - 1)(1 - m) + m + 109$
11. $(2a - b)^2 - (2a - b) - 30$

संकेत: $2a - b = x$ रखिए।

12. $(2x + 3y)^2 - 2(2x + 3y)(3x - 2y) - 3(3x - 2y)^2$

संकेत: $2x + 3y = a$ और $3x - 2y = b$ रखिए।

4.4 बहुपदों के म.स. तथा ल.स.

(1) बहुपदों का म.स.

आप अंकगणित में संख्याओं के म.स. से भली–भाँति परिचित हो चुके हैं। यह वह बड़ी से बड़ी संख्या है जो दी हुई दोनों संख्याओं का गुणनखण्ड होती है। उदाहरण के लिए 8 तथा 12 का म.स. 4 है, क्योंकि 8 और 12 के उभयनिष्ठ गुणनखंड 1, 2 तथा 4 हैं और 4 इनमें सबसे बड़ा अर्थात् महत्तम है।

इसी प्रकार, बीजगणित में, दो या दो से अधिक बहुपदों का महत्तम समापवर्तक अधिकतम घातों वाले बहुपदों तथा सर्वाधिक संख्यात्मक गुणांकों का गुणनफल होता है, जिनमें से प्रत्येक दिए गए प्रत्येक बहुपद का एक गुणनखण्ड होता है।

उदाहरण के लिए, $4(x + 1)^2$ तथा $6(x + 1)^3$ का म.स. $2(x + 1)^2$ है।

एकपदी बहुपदों का म.स., प्रत्येक एकपदी बहुपद के संख्यात्मक गुणांकों के म.स. तथा अधिकतम घात वाले चरों, जो सभी एकपदी बहुपदों में उभयनिष्ठ हों, के गुणनफल द्वारा प्राप्त किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, $12x^2y^3$, $18xy^4$ तथा $24x^3y^5$ का म.स. $6xy^3$ है, क्योंकि 12, 18 तथा 24 का म.स. 6 है और चरों की अधिकतम घात जो सभी बहुपदों में उभयनिष्ठ है x और y^3 है।

आइए कुछ उदाहरणों पर ध्यान दें:

उदाहरण 4.15: म.स. ज्ञात कीजिए:

(i) $4x^2y$ और x^3y^2 (ii) $(x – 2)^3 (2x – 3)$ और $(x – 2)^2 (2x – 3)^3$

हल: (i) गुणांकों 4 तथा 1 का म.स. 1 है।

क्योंकि दिए गए बहुपदों में गुणनखण्ड के रूप में x कम से कम दो बार तथा y कम से कम एक बार आता है, इसलिए म.स.

$1 \times x^2 \times y$ अर्थात् x^2y है।

(ii) संख्यात्मक गुणांकों 1 और 1 का म.स. 1 है।

दिए गए बहुपद में, गुणनखण्ड के रूप में $(x – 2)$ कम से कम दो बार तथा $(2x – 3)$ कम से कम एक बार आता है। इसलिए दिए गए बहुपदों का म.स. है:

$1 \times (x – 2)^2 \times (2x – 3)$ अर्थात् $(x – 2)^2 (2x – 3)$

उदाहरण 4.15 (ii) को देखते हुए हम कह सकते हैं कि बहुपदों का म.स. ज्ञात करने के लिए, जिनके आसानी से गुणनखण्ड किये जा सकते हैं, हम प्रत्येक बहुपद को गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में व्यक्त करते हैं। तब दिए गए बहुपद का म.स. दिए गए दोनों बहुपदों के गुणांकों तथा अधिकतम घात वाले गुणनखण्डों का, जो सभी बहुपदों में उभयनिष्ठ हों, का गुणनफल होता है। स्पष्टीकरण के लिए, नीचे दिए गए उदाहरण 4.16 पर ध्यान दीजिए।

उदाहरण 4.16: म.स. ज्ञात कीजिए:

(i) $x^2 – 4$ और $x^2 + 4x + 4$

(ii) $4x^4 – 16x^3 + 12x^2$ और $6x^3 + 6x^2 – 72x$

हल: (i) $x^2 – 4 = (x + 2) (x – 2)$

$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$

गुणांकों का म.स. = 1

अन्य गुणनखण्डों का म.स. $= (x + 2)^1 = x + 2$

इसलिए म.स. $= x + 2$

(ii) $4x^4 - 16x^3 + 12x^2 = 4x^2 (x^2 - 4x + 3)$

$= 4x^2 (x - 1)(x - 3)$

$6x^3 + 6x^2 - 72x = 6x (x^2 + x - 12)$

$= 6x (x + 4)(x - 3)$

म.स. $= 2x(x - 3)$ [क्योंकि गुणांकों का म.स. 2 है]

$= 2x^2 - 6x$

(2) बहुपदों का ल.स.

म.स. की तरह, आप अंकगणित में प्राकृत संख्याओं के ल.स. (लघुतम समापवर्त्य) से भी भली–भाँति परिचित हैं। यह वह छोटी से छोटी संख्या है जो दी हुई प्रत्येक संख्या का गुणज होती है। उदाहरण के लिए, 8 और 12 का ल.स. 24 है, क्योंकि 8 और 12 के उभयनिष्ठ गुणजों में 24 सबसे छोटा है, जैसा नीचे दिया गया है:

8 के गुणज: 8, 16, <u>24</u>, 32, 40, <u>48</u>, 56, 64, <u>72</u>, 80, ...

12 के गुणज: 12, <u>24</u>, 36, <u>48</u>, 60, <u>72</u>, 84, 96, ...

8 और 12 के उभयनिष्ठ गुणज: 24, 48, 72, ...

इसी प्रकार, बीजगणित में, दो या दो से अधिक घात वाले बहुपदों का लघुतम समापवर्त्य (ल.स.) न्यूनतम घात वाले बहुपद और न्यूनतम संख्यात्मक गुणांक, जो दिये गये बहुपदों में से प्रत्येक बहुपद का गुणज हो, के गुणनफल को कहते हैं।

उदाहरण के लिए $4(x + 1)^2$ और $6(x + 1)^3$ का ल.स. $12(x + 1)^3$ है।

एकपदी बहुपदों का ल.स. प्रत्येक एकपदी के संख्यात्मक गुणांकों के ल.स. तथा अधिकतम घात वाले सभी चर गुणनखंडों के गुणनफल से प्राप्त किया जाता है। उदाहरण के लिए $12x^2y^2z$ और $18x^2yz$ का ल.स. $36x^2y^2z$ है, क्योंकि 12 और 18 का ल.स. 36 है तथा चर गुणनखंडों x, y और z की अधिकतम घात क्रमश: x^2, y^2 और z हैं।

आइए अब कुछ उदाहरणों द्वारा स्पष्टीकरण करते हैं:

उदाहरण 4.17: निम्नलिखित का म.स. ज्ञात कीजिए:

(i) $4x^2y$ और x^3y^2 (ii) $(x - 2)^3 (2x - 3)$ और $(x - 2)^2 (2x - 3)^3$

हल: (i) संख्यात्मक गुणांकों 4 और 1 का ल.स. 4 है।

क्योंकि x की अधिकतम घात x^3 तथा y की अधिकतम घात y^2 है,

इसलिए अपेक्षित ल.स. $4x^3y^2$ है।

(ii) निश्चय ही संख्यात्मक गुणांकों 1 और 1 का ल.स. 1 है।

दिये गये बहुपदों में $(x-2)$ की अधिकतम घात $(x-2)^3$

तथा $(2x-3)$ की अधिकतम घात $(2x-3)^3$ है।

इसलिए, दिए गए बहुपदों का ल.स. $= 1 \times (x-2)^3 \times (2x-3)^3$

$= (x-2)^3\,(2x-3)^3$

उदाहरण 4.17 (ii), को देखते हुए हम कह सकते हैं कि बहुपदों, जिनके आसानी से गुणनखंड किए जा सकते हैं, का ल.स. ज्ञात करने के लिए हम प्रत्येक बहुपद को गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में व्यक्त करते हैं। तब दिए गए बहुपद का ल.स. संख्यात्मक गुणांकों के ल.स. तथा अधिकतम घात वाले सभी गुणनखंडों, जो किसी एक बहुपद का गुणनखंड होते हैं, के गुणनफल से प्राप्त किया जाता है और अधिक स्पष्टीकरण के लिए हम नीचे दिए गए उदाहरण 4.18 को लेते हैं।

उदाहरण 4.18: निम्नलिखित का ल.स. ज्ञात कीजिए:

(i) $(x-2)(x^2-3x+2)$ और x^2-5x+6

(ii) $8(x^3-27)$ और $12(x^5+27x^2)$

हल: (i) $(x-2)(x^2-3x+2) = (x-2)(x-2)(x-1)$

$= (x-2)^2(x-1)$

और $x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$

संख्यात्मक गुणांकों का ल.स. $= 1$

अन्य गुणनखंडों का ल.स. $= (x-2)^2(x-1)(x-3)$

अत:, दिए गए बहुपदों का ल.स. $= (x-1)(x-2)^2(x-3)$

(ii) $8(x^3-27) = 8(x-3)(x^2+3x+9)$

$12(x^5+27x^2) = 12x^2(x^3+27)$

$= 12x^2(x+3)(x^2-3x+9)$

संख्यात्मक गुणांकों 8 और 12 का ल.स. $= 24$

अन्य गुणनखंडों का ल.स. $= x^2(x-3)(x+3)(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)$

इसलिए, वांछित ल.स. $= 24x^2(x-3)(x+3)(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)$

देखें आपने कितना सीखा 4.6

1. निम्नलिखित बहुपदों का ल.स. ज्ञात कीजिए:

   (i) $27x^4y^2$ और $3xy^3$ (ii) $48y^7x^9$ और $12y^3x^5$

   (iii) $(x+1)^3$ और $(x+1)^2(x-1)$ (iv) x^2+4x+4 और $x+2$

   (v) $18(x+2)^3$ और $24(x^3+8)$ (vi) $(x+1)^2(x+5)^3$ और $x^2+10x+25$

   (vii) $(2x-5)^2(x+4)^3$ और $(2x-5)^3(x-4)$ (viii) x^2-1 और x^4-1

   (ix) x^3-y^3 और x^2-y^2 (x) $6(x^2-3x+2)$ और $18(x^2-4x+3)$

2. निम्नलिखित बहुपदों का ल.स. ज्ञात कीजिए:

   (i) $25x^3y^2$ और $15xy$ (ii) $30xy^2$ और $48x^3y^4$

   (iii) $(x+1)^3$ और $(x+1)^2(x-1)$ (iv) x^2+4x+4 और $x+2$

   (v) $18(x+2)^3$ और $24(x^3+8)$ (vi) $(x+1)^2(x+5)^3$ और $x^2+10x+25$

   (vii) $(2x-5)^2(x+4)^2$ और $(2x-5)^3(x-4)$ (viii) x^2-1 और x^4-1

   (ix) x^3-y^3 और x^2-y^2 (x) $6(x^2-3x+2)$ और $18(x^2-4x+3)$

4.5 परिमेय व्यंजक

आप पूर्णांकों और परिमेय संख्याओं से भली–भाँति परिचित हैं। जैसे संख्याओं, जिन्हें $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जाता है जहाँ p और q ($\neq 0$) पूर्णांक होते हैं, को परिमेय संख्याएँ कहते हैं, उसी प्रकार बीजीय व्यंजक जिसे $\frac{P}{Q}$ के रूप में लिखा जाता है, जहाँ P और Q (शून्येतर) बहुपद हैं, को परिमेय व्यंजक कहते हैं। इसलिए,

$$\frac{x+1}{x-1},\ \frac{x^2-3x+5}{x^2-5},\ \frac{\frac{1}{2}a^2+b^2-\frac{5}{6}}{a+b},\ \frac{x^2+\sqrt{2}y^2}{\sqrt{3}x-y}$$

में से प्रत्येक व्यंजक, एक अथवा दो चरों में परिमेय व्यंजक है।

नोट:

(1) बहुपद 'x^2+1' परिमेय व्यंजक है, चूंकि इसे $\frac{x^2+1}{1}$ के रूप में लिखा जा सकता है तथा आप पढ़ चुके हैं कि हर में स्थिरांक 1 शून्य घात वाला एक बहुपद है।

(2) बहुपद 7 एक परिमेय व्यंजक है, चूंकि इसे $\frac{7}{1}$ रूप में लिखा जा सकता है, जहां दोनों 7 और 1 शून्य घात वाले बहुपद हैं।

(3) स्पष्टतः यह आवश्यक नहीं कि प्रत्येक परिमेय व्यंजक बहुपद भी हो। उदाहरण के लिए, परिमेय व्यंजक $\frac{1}{x}\left(=x^{-1}\right)$ बहुपद नहीं है। इसके विपरीत प्रत्येक बहुपद, परिमेय व्यंजक अवश्य होता है।

स्पष्टतः $\frac{\sqrt{x}+2}{1-x}$, $x^2+2\sqrt{x}+3$, $\frac{a^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{b}}{a^2+ab+b^2}$ में कोई भी परिमेय व्यंजक नहीं है।

देखें आपने कितना सीखा 4.7

1. निम्नलिखित में से कौन से बीजीय व्यंजक परिमेय व्यंजक हैं?

(i) $\frac{2x-3}{4x-1}$ (ii) $\frac{8}{x^2+y^2}$

(iii) $\frac{2\sqrt{3}x^2+\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$ (iv) $\frac{2x^2-\sqrt{x}+3}{6x}$

(v) $200+\sqrt{11}$ (vi) $\left(a+\frac{1}{b}\right)\div b^{\frac{1}{3}}$

(vii) $y^3+3yz\,(y+z)+z^3$ (vii) $5\div(a+3b)$

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए दो उदाहरण दीजिए:

(i) एक चर में परिमेय व्यंजक

(ii) दो चरों में परिमेय व्यंजक

(iii) एक ऐसा परिमेय व्यंजक जिसका अंश द्विपद हो तथा हर त्रिपद हो।

(iv) एक ऐसा परिमेय व्यंजक जिसका अंश अचर तथा हर द्विपदी हो।

(v) दो चरों वाला ऐसा परिमेय व्यंजक जिसका अंश तीन घात वाला बहुपद और हर पाँच घात वाला बहुपद है।

(vi) एक ऐसा बीजीय व्यंजक जो परिमेय व्यंजक न हो।

4.6 परिमेय व्यंजकों पर संक्रियाएँ

परिमेय व्यजकों में चारों मूलभूत संक्रियाएँ ठीक उसी प्रकार से की जाती हैं, जिस प्रकार से परिमेय संख्याओं में होती हैं।

(1) परिमेय संख्याओं का योग तथा व्यवकलन

परिमेय संख्याओं तथा परिमेय व्यंजकों के योग के मध्य समानता को देखने के लिए, हम निम्नलिखित उदाहरण लेते हैं। ध्यान दीजिए कि परिमेय व्यंजकों के व्यवकलन, गुणा और भाग के लिए भी समानता सत्य होगी।

उदाहरण 4.19: योग ज्ञात कीजिए:

(i) $\frac{5}{6}+\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{2x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x+1}$

हल: (i) $\frac{5}{6}+\frac{3}{8}=\frac{5\times4+3\times3}{24}$

$$=\frac{20+9}{24}$$

$$=\frac{29}{24}$$

(ii) $\frac{2x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x+1}=\frac{(2x+1)(x+1)+(x+2)(x-1)}{(x-1)(x+1)}$ ← $(x-1)$ तथा $(x+1)$ का ल.स.

$$=\frac{2x^2+3x+1+x^2+x-2}{x^2-1}$$

$$=\frac{3x^2+4x-1}{x^2-1}$$

उदाहरण 4.20: $\frac{3x-2}{3x+1}$ में से $\frac{x-1}{x+1}$ को घटाइए।

हल: $\frac{3x-2}{3x+1}-\frac{x-1}{x+1}=\frac{(x+1)(3x-2)-(x-1)(3x+1)}{(3x+1)(x+1)}$

$$=\frac{3x^2+x-2-\left(3x^2-2x-1\right)}{3x^2+4x+1}$$

$$=\frac{3x-1}{3x^2+4x+1}$$

नोट: दो परिमेय व्यंजकों का योग और अन्तर परिमेय व्यंजक ही होता है।

क्योंकि दो परिमेय व्यंजकों का योग और अन्तर परिमेय व्यंजक ही होता है, इसलिए $x+\frac{1}{x}(x \neq 0)$ और $x-\frac{1}{x}(x \neq 0)$ दोनों परिमेय व्यंजक हैं, क्योंकि x तथा $\frac{1}{x}$ दोनों ही परिमेय व्यंजक हैं। ठीक इसी प्रकार $x^2+\frac{1}{x^2}, x^3+\frac{1}{x^3}, x^2-\frac{1}{x^2}, x^3-\frac{1}{x^3}$, आदि में से प्रत्येक परिमेय व्यंजक है। ये व्यंजक रुचि उत्पन्न करने वाले होते हैं, क्योंकि $x+\frac{1}{x}$ अथवा $x-\frac{1}{x}$ के दिए गए मानों के लिए हम $x^2+\frac{1}{x^2}, x^2-\frac{1}{x^2}, x^3+\frac{1}{x^3}, x^3-\frac{1}{x^3}$ आदि के मानों का निर्धारित कर सकते है तथा कुछ परिस्थितियों में इसका विपरीत भी कर सकते हैं। आइए निम्नलिखित उदाहरणों पर ध्यान दें।

उदाहरण 4.21: मान ज्ञात कीजिए:

(i) $x^2+\frac{1}{x^2}$ का यदि $x-\frac{1}{x}=1$

(ii) $x^4+\frac{1}{x^4}$ का यदि $x+\frac{1}{x}=4$

(iii) $x-\frac{1}{x}$ का यदि $x^4+\frac{1}{x^4}=119$

(iv) $x^3+\frac{1}{x^3}$ का यदि $x+\frac{1}{x}=3$

(v) $x^3-\frac{1}{x^3}$ का यदि $x-\frac{1}{x}=5$

हल: (i) $x-\frac{1}{x}=1$ (दिया है)

$$\therefore \left(x-\frac{1}{x}\right)^2=(1)^2$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}-2\times x\times\frac{1}{x}=1$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}-2=1$$

इस प्रकार, $x^2+\frac{1}{x^2}=3$

(ii) $x+\frac{1}{x}=4$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=(4)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 16$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 14$$

$$\Rightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = (14)^2$$

$$\Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} + 2 = 196$$

इसलिए, $x^4 + \frac{1}{x^4} = 194$

(iii) दिया है $x^4 + \frac{1}{x^4} = 119$

$$\Rightarrow (x^2)^2 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 + 2 = 119 + 2 = 121$$

$$\Rightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = (11)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 11$$ [क्योंकि x^2 और $\frac{1}{x^2}$ दोनों धनात्मक हैं]

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 9$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = (3)^2$$

$$\therefore x - \frac{1}{x} = \pm 3$$

(iv) दिया है: $x + \frac{1}{x} = 3$

$$\therefore \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = (3)^3$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \times x \times \frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{x}\right) = 27$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3(3) = 27$$

$$\therefore x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$$

(v) दिया है: $x - \frac{1}{x} = 5$

$$\therefore \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 = (5)^3$$

$$\Rightarrow x^3 - \frac{1}{x^3} - 3 \times x \times \frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{x}\right) = 125$$

$$\Rightarrow x^3 - \frac{1}{x^3} - 3(5) = 125$$

$$\therefore x^3 - \frac{1}{x^3} = 140$$

देखें आपने कितना सीखा 4.8

1. परिमेय व्यंजकों का योग ज्ञात कीजिए:

(i) $\frac{x^2+1}{x-2}$ और $\frac{x^2-1}{x-2}$

(ii) $\frac{x+2}{x+3}$ और $\frac{x-1}{x-2}$

(iii) $\frac{x+1}{(x-1)^2}$ और $\frac{1}{x+1}$

(iv) $\frac{3x+2}{x^2-16}$ और $\frac{x-5}{(x+4)^2}$

(v) $\frac{x-2}{x+3}$ और $\frac{x+2}{x+3}$

(vi) $\frac{x+2}{x-2}$ और $\frac{x-2}{x+2}$

(vii) $\frac{x+1}{x+2}$ और $\frac{x^2-1}{x^2+1}$

(vii) $\frac{3\sqrt{2}x+1}{3x^2}$ और $\frac{-2\sqrt{2}x+1}{2x^2}$

2. घटाइए:

(i) $\frac{x+4}{x+2}$ में से $\frac{x-1}{x-2}$

(ii) $\frac{2x+1}{2x-1}$ में से $\frac{2x-1}{2x+1}$

(iii) x में से $\frac{1}{x}$

(iv) $\frac{x+1}{x^2-1}$ में से $\frac{2}{x}$

(v) $\frac{2x^2+3}{x-4}$ में से $\frac{x^2+1}{x-4}$

(vi) $\frac{2x^3+x^2+3}{(x^2+2)^2}$ में से $\frac{1}{x^2+2}$

(vii) $\frac{x-2}{(x+3)^2}$ में से $\frac{x+2}{2(x^2-9)}$

(vii) $\frac{4x}{x^2-1}$ में से $\frac{x+1}{x-1}$

3. मान ज्ञात कीजिए:

(i) $a^2+\frac{1}{a^2}$ यदि $a+\frac{1}{a}=2$

(ii) $a^2+\frac{1}{a^2}$ यदि $a-\frac{1}{a}=2$

(iii) $a^3+\frac{1}{a^3}$ यदि $a+\frac{1}{a}=2$

(iv) $a^3+\frac{1}{a^3}$ यदि $a+\frac{1}{a}=5$

(v) $a^3-\frac{1}{a^3}$ यदि $a-\frac{1}{a}=\sqrt{5}$

(vi) $8a^3+\frac{1}{27a^3}$ यदि $2a+\frac{1}{3a}=5$

(vii) $a^3+\frac{1}{a^3}$ यदि $a+\frac{1}{a}=\sqrt{3}$

(viii) $a^3+\frac{1}{a^3}$ यदि $a^2+\frac{1}{a^2}=7, a>0$

(ix) $a-\frac{1}{a}$ यदि $a^4+\frac{1}{a^4}=727$

(x) $a^3-\frac{1}{a^3}$ यदि $a^4+\frac{1}{a^4}=34, a>0$

(2) परिमेय व्यंजकों का गुणा और भाग

आप जानते हैं कि दो परिमेय संख्याओं का गुणनफल इस प्रकार किया जाता है, जैसे $\frac{2}{3}$ और $\frac{5}{7}$ का गुणनफल $\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}=\frac{2\times5}{3\times7}=\frac{10}{21}$ होता है। ठीक इसी प्रकार, दो परिमेय व्यंजकों $\frac{P}{Q}$ और $\frac{R}{S}$, जहाँ P, Q, R, S $(Q, S\neq0)$ बहुपद हैं, का गुणनफल $\frac{P}{Q}\times\frac{R}{S}=\frac{PR}{QS}$ के रूप में होता है। आप देख सकते हैं कि दो परिमेय व्यंजकों का गुणनफल भी परिमेय व्यंजक होता है।

उदाहरण 4.22: गुणनफल ज्ञात कीजिए:

(i) $\frac{5x+3}{5x-1}\times\frac{2x-1}{x+1}$

(ii) $\frac{2x+1}{x-1}\times\frac{x-1}{x+3}$

(iii) $\frac{x^2-7x+10}{(x-4)^2}\times\frac{x^2-7x+12}{x-5}$

हल: (i) $\dfrac{5x+3}{5x-1}\times\dfrac{2x-1}{x+1} = \dfrac{(5x+3)(2x-1)}{(5x-1)(x+1)}$

$$= \frac{10x^2+x-3}{5x^2+4x-1}$$

(ii) $\dfrac{2x+1}{x-1}\times\dfrac{x-1}{x+3} = \dfrac{(2x+1)(x-1)}{(x-1)(x+3)}$

$= \dfrac{2x+1}{x+3}$ [अंश व हर में से उभयनिष्ठ गुणनखंड $(x-1)$ को काटने पर]

(iii) $\dfrac{x^2-7x+10}{(x-4)^2}\times\dfrac{x^2-7x+12}{x-5} = \dfrac{(x^2-7x+10)(x^2-7x+12)}{(x-4)^2(x-5)}$

$$= \frac{(x-2)(x-5)(x-3)(x-4)}{(x-4)^2(x-5)}$$

$$= \frac{(x-2)(x-3)}{(x-4)}$$

[अंश व हर में से उभयनिष्ठ गुणनखंड $(x-4)$ $(x-5)$ को काटने पर]

$$= \frac{x^2-5x+6}{x-4}$$

ध्यान दीजिए: अंश तथा हर में से म.स. को काटने के उपरान्त प्राप्त परिणाम 'न्यूनतम पदों में' या 'न्यूनतम रूप में' व्यक्त हुआ कहलाता है।

आप परिमेय संख्याओं के भाग से भली भाँति परिचित हैं, जैसे परिमेय संख्या $\frac{2}{3}$ का $\frac{5}{7}$ से भाग $\frac{2}{3}\div\frac{5}{7}=\frac{2}{3}\times\frac{7}{5}$, जहाँ $\frac{7}{5}$, $\frac{5}{7}$ का व्युत्क्रम है। ठीक इसी प्रकार से, परिमेय व्यंजक $\frac{P}{Q}$ को शून्येतर परिमेय व्यंजक $\frac{R}{S}$ से भाग इस प्रकार होता है: $\frac{P}{Q}\div\frac{R}{S}=\frac{P}{Q}\times\frac{S}{R}$ जहाँ P, Q, R, S बहुपद हैं और $\frac{S}{R}$, $\frac{R}{S}$ का व्युत्क्रम है।

उदाहरण 4.23: निम्नलिखित में से प्रत्येक परिमेय व्यंजक का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए:

(i) $\frac{x^2+20}{x^3+5x+6}$ (ii) $-\frac{2y}{y^2-5}$ (iii) x^3+8

हल: (i) $\frac{x^2+20}{x^3+5x+6}$ का व्युत्क्रम $\frac{x^3+5x+6}{x^2+20}$ है।

(ii) $-\frac{2y}{y^2-5}$ का व्युत्क्रम $-\frac{y^2-5}{2y}=\frac{5-y^2}{2y}$ है।

(iii) क्योंकि $x^3+8=\frac{x^3+8}{1}$, अतः x^3+8 का व्युत्क्रम $\frac{1}{x^3+8}$ है।

उदाहरण 4.24: भाग कीजिए:

(i) $\frac{x^2+1}{x-1}$ को $\frac{x-1}{x+2}$ से

(ii) $\frac{x^2-1}{x^2-25}$ को $\frac{x^2-4x-5}{x^2+4x-5}$ से,

तथा परिणाम को न्यूनतम रूप में व्यक्त कीजिए।

हल: (i) $\frac{x^2+1}{x-1}\div\frac{x-1}{x+2}=\frac{x^2+1}{x-1}\times\frac{x+2}{x-1}$

$$=\frac{(x^2+1)(x+2)}{(x-1)^2}=\frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2-2x+1}$$

(ii) $\frac{x^2-1}{x^2-25}\div\frac{x^2-4x-5}{x^2+4x-5}=\frac{(x^2-1)(x^2+4x-5)}{(x^2-25)(x^2-4x-5)}$

$$=\frac{(x-1)(x+1)(x+5)(x-1)}{(x-5)(x+5)(x+1)(x-5)}$$

$$=\frac{(x-1)(x-1)}{(x-5)(x-5)}$$

[म.स. (x+1)(x+5) काटने पर]

$$=\frac{x^2-2x+1}{x^2-10x+25}$$

परिणाम $\frac{x^2-2x+1}{x^2-10x+25}$ न्यूनतम रूप में है।

देखें आपने कितना सीखा 4.9

1. गुणनफल ज्ञात करके न्यूनतम रूप में व्यक्त कीजिए:

(i) $\frac{7x+2}{2x^2+3x+1} \times \frac{x+1}{7x^2-5x-2}$ (ii) $\frac{x^3+1}{x^4+1} \times \frac{x^3-1}{x^4-1}$

(iii) $\frac{3x^2-15x+18}{2x-4} \times \frac{17x+3}{x^2-6x+9}$ (iv) $\frac{5x-3}{5x+2} \times \frac{x+2}{x+6}$

(v) $\frac{x^2+1}{x-1} \times \frac{x+1}{x^2-x+1}$ (vi) $\frac{x^3+1}{x-1} \times \frac{x-1}{2x}$

(vii) $\frac{x-3}{x-4} \times \frac{x^2-5x+4}{x^2-2x-3}$ (viii) $\frac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3} \times \frac{x^2-2x-24}{x^2-16}$

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक परिमेय व्यंजक का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए:

(i) $\frac{x^2+2}{x-1}$ (ii) $-\frac{3a}{1-a}$

(iii) $-\frac{7}{1-2x-x^2}$ (iv) x^4+1

3. भाग कीजिए तथा परिणाम को परिमेय व्यंजक के न्यूनतम रूप मे व्यक्त कीजिए:

(i) $\frac{x^2+11x+18}{x^2-4x-117} \div \frac{x^2+7x+10}{x^2-12x-13}$ (ii) $\frac{6x^2+x-1}{2x^2-7x-15} \div \frac{4x^2+4x+1}{4x^2-9}$

(iii) $\frac{x^2+x+1}{x^2-9} \div \frac{x^3-1}{x^2-4x+3}$ (iv) $\frac{x^2+2x-24}{x^2-x-12} \div \frac{x^2-x-6}{x^2-9}$

(v) $\frac{3x^2+14x-5}{x^2-3x+2} \div \frac{3x^2+2x-1}{3x^2-3x-2}$ (vi) $\frac{2x^2+x-3}{(x-1)^2} \div \frac{2x^2+5x+3}{x^2-1}$

आइए दोहराएँ

- नीचे दिए गए विशेष गुणनफल, बीजगणित में बार–बार प्रयुक्त किए जाते हैं:

(i) $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ (ii) $(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$

(iii) $(x+y)(x-y) = x^2-y^2$ (iv) $(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$

(v) $(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$

(vi) $(x + y)^3 = x^3 + 3xy(x + y) + y^3$ (vii) $(x - y)^3 = x^3 - 3xy(x - y) - y^3$

(viii) $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$ (ix) $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$

- एक बहुपद का गुणनखण्डन बहुपद को दो (या अधिक) बहुपदों के गुणनफल के रूप में व्यक्त करने की प्रक्रिया है। गुणनफल में प्रत्येक बहुपद दिए गए बहुपद का गुणनखंड होता है।
- प्रत्येक बहुपद पूर्णतः गुणनखंडित हुआ कहलाता है, यदि उसे ऐसे गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया गया हो जिनका स्वयं इसके ऋणात्मक, 1 तथा –1 के अतिरिक्त अन्य कोई गुणनखंड न हो।
- ऊपर वर्णित विशेष गुणनफलों के आधार पर गुणनखंडन के अतिरिक्त हम बहुपद के गुणनखंड वितरण नियम द्वारा एकपदी गुणनखंड, जो बहुपद के कुछ या सभी बहुपदों में उभयनिष्ठ हो, बाहर निकालकर कर सकते हैं।
- बहुपदो का म.स. बहुपद की अधिकतम घातों वाले बहुपदों तथा अधिकतम संख्यात्मक गुणांक, जिनमें से प्रत्येक दिए गए बहुपदों में से प्रत्येक बहुपद का गुणनखंड होता है, के गुणनफल द्वारा प्राप्त किया जा सकता है।
- बहुपदों का ल.स. बहुपद की न्यूनतम घात वाले बहुपद तथा न्यूनतम संख्यात्मक गुणांक जो दिए गए बहुपदों में से प्रत्येक बहुपद का गुणज है, के गुणनफल से प्राप्त किया जा सकता है।
- ऐसा बीजीय व्यंजक, जिसे $\frac{P}{Q}$ के रूप में, जहाँ P और Q बहुपद हैं तथा Q एक शून्येतर बहुपद है, व्यक्त किया जाता है, एक परिमेय व्यंजक कहलाता है।
- परिमेय व्यजकों पर संक्रियाएं ठीक उसी प्रकार की जाती हैं जिस प्रकार से परिमेय संख्याओं पर की जाती है। दो परिमेय व्यंजकों के योग, अंतर, गुणा तथा भाग का परिणाम भी परिमेय व्यंजक ही होता है।
- परिमेय व्यंजकों को न्यूनतम रूप में व्यक्त करने का अर्थ है, परिमेय व्यंजक के अंश तथा हर के उभयनिष्ठ गुणनखंडों, यदि कोई है, को काटकर सरल करना।

आइए अभ्यास करें

1. सही विकल्प पर ☑ का निशान लगाइए:

   (i) यदि $120^2 - 20^2 = 25p$ हो, तो p बराबर है

   (A) 16 (B) 140 (C) 560 (D) 14000

(ii) $(2a^2 + 3)^2 - (2a^2 - 3)^2$ बराबर है

(A) $24a^2$ (B) $24a^4$ (C) $72a^2$ (D) $72a^4$

(iii) $(a^2 + b^2)^2 + (a^2 - b^2)^2$ बराबर है

(A) $2(a^2 + b^2)$ (B) $4(a^2 + b^2)$

(C) $4(a^4 + b^4)$ (D) $2(a^4 + b^4)$

(iv) यदि $m - \frac{1}{m} = -\sqrt{3}$ हो, तो $m^3 - \frac{1}{m^3}$ बराबर है

(A) 0 (B) $6\sqrt{3}$ (C) $-6\sqrt{3}$ (D) $-3\sqrt{3}$

(v) $\frac{327 \times 327 - 323 \times 323}{327 + 323}$ बराबर है

(A) 650 (B) 327 (C) 323 (D) 4

(vi) $8m^3 - n^3$ बराबर है:

(A) $(2m - n)(4m^2 - 2mn + n^2)$ (B) $(2m - n)(4m^2 + 2mn + n^2)$

(C) $(2m - n)(4m^2 - 4mn + n^2)$ (D) $(2m - n)(4m^2 + 4mn + n^2)$

(vii) $\frac{467 \times 467 \times 467 + 533 \times 533 \times 533}{467 \times 467 - 467 \times 533 + 533 \times 533}$ बराबर है?

(A) 66 (B) 198 (C) 1000 (D) 3000

(viii) $36a^5b^2$ और $90a^3b^4$ का म.स. है:

(A) $36a^3b^2$ (B) $18a^3b^2$

(C) $90a^3b^4$ (D) $180a^5b^4$

(ix) $x^2 - 1$ और $x^2 - x - 2$ का ल.स. है

(A) $(x^2 - 1)(x - 2)$ (B) $(x^2 - 1)(x + 2)$

(C) $(x - 1)^2 (x + 2)$ (D) $(x + 1)^2 (x - 2)$

(x) निम्नलिखित में से कौन सा परिमेय व्यंजक नहीं है

(A) $\sqrt{33}$ (B) $x + \frac{1}{\sqrt{5x}}$

(C) $8\sqrt{x} + 6\sqrt{y}$ (D) $\frac{x - \sqrt{3}}{x + \sqrt{3}}$

2. निम्नलिखित में प्रत्येक गुणनफल ज्ञात कीजिए:

(i) $(a^m + a^n)(a^m - a^n)$ (ii) $(x + y + 2)(x - y + 2)$

(iii) $(2x + 3y)(2x + 3y)$ (iv) $(3a - 5b)(3a - 5b)$

(v) $(5x + 2y)(25x^2 - 10xy + 4y^2)$ (vi) $(2x - 5y)(4x^2 + 10xy + 25y^2)$

(vii) $\left(a+\frac{5}{4}\right)\left(a+\frac{4}{5}\right)$ (viii) $(2z^2 + 3)(2z^2 - 5)$

(ix) $99 \times 99 \times 99$ (x) $103 \times 103 \times 103$

(xi) $(a + b - 5)(a + b - 6)$ (xii) $(2x + 7z)(2x + 5z)$

3. यदि $x = a - b$ और $y = b - c$ हो, तो दिखाइए कि

$(a - c)(a + c - 2b) = x^2 - y^2$

4. यदि $4x - 5z = 16$ और $xz = 12$ हो, तो $64x^3 - 125z^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

5. गुणनखण्ड कीजिए:

(i) $x^7y^6 + x^{22}y^{20}$ (ii) $3a^5b - 243ab^5$

(iii) $3a^6 + 12a^4b^2 + 12a^2b^4$ (iv) $a^4 - 8a^2b^3 + 16b^6$

(v) $3x^4 + 12y^4$ (vi) $x^8 + 14x^4 + 81$

(vii) $x^2 + 16x + 63$ (viii) $x^2 - 12x + 27$

(ix) $7x^2 + xy - 6y^2$ (x) $5x^2 - 8x - 4$

(xi) $x^6 - 729y^6$ (xii) $125a^6 + 64b^6$

6. म.स. ज्ञात कीजिए:

(i) $x^3 - x^5$ और $x^4 - x^7$

(ii) $30(x^2 - 3x + 2)$ और $50(x^2 - 2x + 1)$

7. ल.स. ज्ञात कीजिए:

(i) $x^3 + y^3$ और $x^2 - y^2$

(ii) $x^4 + x^2y^2 + y^4$ और $x^2 + xy + y^2$

8. संकेतित संक्रिया कीजिए:

(i) $\frac{x+1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1}$

(ii) $\frac{2x^2 + 2x - 7}{x^2 + x - 6} - \frac{x-1}{x-2}$

(iii) $\dfrac{x-1}{x-2} \times \dfrac{3x+1}{x^2-4}$

(iv) $\dfrac{x^2-1}{x^2-25} \div \dfrac{x^2-4x-5}{x^2+4x-5}$

9. सरल कीजिए: $\dfrac{2}{a-1} - \dfrac{2}{a+1} - \dfrac{4}{a^2+1} - \dfrac{8}{a^4+1}$

[संकेत: $\dfrac{2}{a-1} - \dfrac{2}{a+1} = \dfrac{4}{a^2-1}$; अब अगले पद को सम्मिलित कीजिए तथा इसी प्रकार आगे बढ़िए]

10. यदि $m = \dfrac{x+1}{x-1}$ और $n = \dfrac{x-1}{x+1}$ हो, तो $m^2 + n^2 - mn$ का मान ज्ञात कीजिए।

देखें आपने कितना सीखा के उत्तर

4.1

1. (i) $25x^2 + 20xy + y^2$ (ii) $x^2 - 6x + 9$ (iii) $a^2b^2 + 2abcd + c^2d^2$

 (iv) $4x^2 - 20xy + 5y^2$ (v) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{2}{3}x + 1$ (vi) $\dfrac{z^2}{4} - \dfrac{1}{3}z + \dfrac{1}{9}$

 (vii) $a^4 - 25$ (viii) $x^2y^2 - 1$ (ix) $x^2 + \dfrac{25}{12}x + 1$

 (x) $\dfrac{4}{9}x^4 - \dfrac{25}{9}x^2 - 1$ (xi) $6x^2 + 13xy + 6y^2$ (xii) $21x^2 + 8xy - 5y^2$

2. (i) $40x^2$ (ii) $2a^6 + 18$ (iii) $2(a^2x^2 + b^2y^2)$ (iv) $32p^2q^2$

3. (i) 10404 (ii) 11664 (iii) 4761 (iv) 996004

 (v) 6384 (vi) 22451 (vii) 89964 (viii) 249936

 (ix) 11445 (x) 5621 (xi) 8930 (xii) 989028

4.2

1. (i) $27x^3 + 36x^2y + 36xy^2 + 64y^3$ (ii) $p^3 - 3p^2qr + 3pq^2r^2 - q^3r^3$

 (iii) $a^3 + a^2b + \dfrac{ab^2}{3} + \dfrac{b^3}{27}$ (iv) $\dfrac{a^3}{27} - \dfrac{a^2b}{3} + ab^2 - b^3$

(v) $\frac{a^6}{8}+\frac{1}{2}a^4b^2+\frac{2}{3}a^2b^4+\frac{8}{27}b^6$ (vi) $\frac{a^6x^9}{27}-\frac{2}{3}a^4b^3x^6y^2+4a^2b^6x^3y^4-8b^9y^6$

2. (i) 512 (ii) 1728 (iii) 5832 (iv) 12167 (v) 148877
   (vi) 110592 (vii) 357911 (viii) 328509 (ix) 912663 (x) 970299

3. (i) $8x^3+y^3$ (ii) x^3-8 (iii) x^3+1
   (iv) $8y^3-27z^6$ (v) $64x^3+27y^3$ (vi) $27x^3-\frac{1}{343}y^3$

4. (i) 100 (ii) 1115

5. (i) 15616 (ii) $\frac{27027}{125}$

6. (i) $120x^2+250$ (ii) $1000y^3$ (iii) $19x^3-19y^3$ (iv) $-117x^3-126$

7. (i) 1000 (ii) 444

4.3

1. $5x(2y-3z)$
2. $abc(c-b)$
3. $3p(2p-5q+9)$
4. $(b-c)(a^2-b)$
5. $(4x-y)^2(8ax-2ay-b)$
6. $x(x+y)(x^2-xy+y^2)$
7. $25(2+5p)(2-5p)$
8. $(1+16y^4)(1+4y^2)(1+2y)(1-2y)$
9. $(5x+1)(1-x)$
10. $(a^2+bc+ab+ac)(a^2+bc-ab-ac)$
11. $(5x+6y-1)(5x-6y-1)$
12. $(7x-y+1)(7x-y-1)$
13. $(m+7)^2$
14. $(2x-1)^2$
15. $(6a+5)^2$
16. $(x^3-4)^2$
17. $(a^4+7a^2+1)(a^2+3a+1)(a^2-3a+1)$
18. $(2a^2+6ab+9b^2)(2a^2-6ab+9b^2)$
19. $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$
20. $(3a^2+5a+4)(3a^2-5a+4)$
21. (i) 40 (ii) 57200

4.4

1. $(a+6b)(a^2-6ab+36b^2)$
2. $(a-7)(a^2+7a+49)$
3. $(x+4y)^3$
4. $(2x-3y)^3$
5. $(2x-5y)^3$
6. $(4k-3)^3$

7. $(9x^2 - 2)(81x^4 + 18x^2 + 4)$
8. $x^2(1 + y^2)(1 - y^2 + y^4)$
9. $2a(2a^2 - 3b^2)(4a^2 + 6a^2b^2 + 9b^4)$
10. $(3b - a - 1)(9b^2 + 3ab + 3b + a^2 + a + 1)$
11. $(2a - 3b + 4c)(4a^2 + 9b^2 - 6ab - 8ac + 12bc + 16c^2)$
12. $(4x - 2y + 1)(16x^2 + 8xy - 4x + 4y^2 - 4y + 1)$

4.5

1. $(x + 3)(x + 8)$
2. $(x - 6y)(x - 9y)$
3. $(x + 3)(2x - 1)$
4. $2(x - 2y)(3x + y)$
5. $(2x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$
6. $(x + 15y)(x - 2y)$
7. $(x + 2)(2x + 7)$
8. $(2y - 3)(5y - 2)$
9. $(x - 1)(2x + 1)$
10. $(12 - m)(m + 9)$
11. $(2a - b - 6)(2a - b + 5)$
12. $(9y - 7)(5x + y)$

4.6

1. (i) $3xy^2$ (ii) $12y^3x^5$ (iii) $(x + 1)^2$ (iv) $x + 2$ (v) $6(x + 2)$
   (vi) $(x + 5)^2$ (vii) $(2x - 5)^2$ (viii) $x^2 - 1$ (ix) $x - y$ (x) $6(x - 1)$
2. (i) $75x^3y^2$ (ii) $240x^3y^4$ (iii) $(x - 1)(x + 1)^3$
   (iv) $x^2 + 4x + 4$ (v) $72(x + 2)^3(x^2 - 2x + 4)$ (vi) $(x + 1)^2(x + 5)^3$
   (vii) $(x - 4)(x + 4)^2(2x - 5)^3$ (viii) $x^4 - 1$ (ix) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)$
   (x) $18(x - 1)(x - 2)(x - 3)$

4.7

1. (i), (ii), (iii), (v), (vii) और (viii)

4.8

1. (i) $\dfrac{2x^2}{x - 2}$ (ii) $\dfrac{2x^2 + 2x - 7}{x^2 + x - 6}$ (iii) $\dfrac{2x^2 + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$
   (iv) $\dfrac{4x^2 + 5x + 28}{x^3 + 4x^2 - 16x + 64}$ (v) $\dfrac{2x}{x + 3}$ (vi) $\dfrac{2x^2 + 8}{x^2 - 4}$
   (vii) $\dfrac{2x^3 + 3x^2 - 1}{x^3 + 2x^2 + x + 2}$ (viii) $\dfrac{5}{6x^2}$
2. (i) $\dfrac{x - 6}{x^2 - 4}$ (ii) $\dfrac{8x}{4x^2 - 1}$ (iii) $\dfrac{x^2 - 1}{x}$

(iv) $\dfrac{2-x}{x^2-x}$ (v) $\dfrac{x^2+2}{x-4}$ (vi) $\dfrac{2x^3+1}{(x^2+2)^2}$

(vii) $\dfrac{x^2-15x+16}{2(x^3+3x^2-9x-27)}$ (viii) $\dfrac{1-x}{1+x}$

3. (i) 2 (ii) 6 (iii) 2 (iv) 110 (v) $8\sqrt{15}$

(vi) 115 (vii) 0 (viii) 18 (ix) ± 5 (x) 14

4.9

1. (i) $\dfrac{1}{2x^2-x-1}$ (ii) $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^6+x^4+x^2+1}$ (iii) $\dfrac{51x+9}{2x-6}$

(iv) $\dfrac{5x^2+7x-6}{5x^2+32x+12}$ (v) $\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^3-2x^2+2x-1}$ (vi) $\dfrac{x^3+1}{2x}$

(vii) $\dfrac{x-1}{x+1}$ (viii) $\dfrac{x-6}{x+1}$

2. (i) $\dfrac{x-1}{x^2+2}$ (ii) $\dfrac{a-1}{3a}$ (iii) $\dfrac{x^2+2x-1}{7}$ (iv) $\dfrac{1}{x^4+1}$

3. (i) $\dfrac{x+1}{x+5}$ (ii) $\dfrac{6x^2-11x+3}{2x^2-9x-5}$ (iii) $\dfrac{1}{x+3}$

(iv) $\dfrac{x+6}{x+2}$ (v) $\dfrac{2x^2+11x+5}{x^2-1}$ (vi) 1

आइए अभ्यास करें के उत्तर

1. (i) C (ii) A (iii) D (iv) A (v) D (vi) B (vii) C (viii) B (ix) A (x) C

2. (i) $a^{2m}-a^{2n}$ (ii) x^2-y^2+4x+4 (iii) $4x^2+12xy+9y^2$

(iv) $9a^2-30ab+25b^2$ (v) $125x^3+8y^3$ (vi) $8x^3-125y^3$

(vii) $a^2+\dfrac{41}{20}a+1$ (viii) $4z^4-4z^2-15$ (ix) 970299

(x) 1092727 (xi) $a^2+2ab-11a+30$ (xii) $4x^2+24xz+35z^2$

3. 15616

4. (i) $x^7y^6(1 + x^{15}y^{14})$ (ii) $3ab(a - 3b)(a + 3b)(a^2 + 9b^2)$

(iii) $3a^2(a^2 + 2b^2)^2$ (iv) $(a^2 - 4b^3)^2$

(v) $3(x^2 + 2xy + 2y^2)$ (vi) $(x^4 - 2x^2 + 9)(x^4 + 2x^2 + 9)$

(vii) $(x + 9)(x + 7)$ (viii) $(x - 3)(x - 9)$

(ix) $(x + y)(7x - 6y)$ (x) $(x - 2)(5x + 2)$

(xi) $(x - 3y)(x + 3y)(x^2 - 3xy + 9y^2)(x^2 + 3xy + 9y^2)$

(xii) $(5a^2 + 4b^2)(25a^4 - 20a^2b^2 + 16b^4)$

5. (i) $x^3(1 - x)$ (ii) $10(x - 1)$

6. (i) $(x^2 - y^2)(x^2 - xy + y^2$ (ii) $x^4 + x^2y^2 + y^4$

7. (i) $\dfrac{2x^2 + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$ (ii) $\dfrac{x + 2}{x + 3}$

(iii) $\dfrac{3x^2 - 2x - 1}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}$ (iv) $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 10x + 25}$

8. $\dfrac{16}{a^8 - 1}$

9. $\dfrac{x^4 + 14x^2 + 1}{x^4 - 2x^2 + 1}$