



211hi18

18

रचनाएँ

ज्यामिति के अध्ययन का एक महत्वपूर्ण उद्देश्य ज्यामितीय आकृतियों की सही-सही रचना करने की कला प्राप्त करना है। आपने कुछ ज्यामितीय आकृतियाँ— त्रिभुज, वर्ग और वृत्त को रूलर तथा परकार की सहायता से बनाना सीखा है। आपने 30° , 60° , 90° , 120° तथा 45° के कोणों की रचना भी की है। आपने एक रेखाखण्ड का लम्ब समद्विभाजक तथा एक कोण के समद्विभाजक की रचना भी की है।

इस पाठ में, हम कुछ और ज्यामितीय आकृतियों की रचना करना सीखेंगे।



उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद, आप समर्थ हो जाएंगे कि:

- एक रेखाखण्ड को दिये गए अनुपात में विभाजित कर सकें;
- दिए गए आंकड़ों से त्रिभुज की रचना कर सकें;
 - (i) भुजा, भुजा, भुजा
 - (ii) भुजा, कोण, भुजा
 - (iii) कोण, भुजा, कोण
 - (iv) समकोण, कर्ण, भुजा
 - (v) परिमाप और आधार के कोण
 - (vi) आधार, आधार का एक कोण, अन्य दो भुजाओं का योग/अन्तर;
 - (vii) दो भुजाएँ और इनमें से एक भुजा पर माध्यिका;
- दिये गए त्रिभुज के समरूप त्रिभुज की रचना कर सकें;
- वृत्त के केंद्र का प्रयोग करके एक बिंदु से वृत्त की स्पर्श रेखा खींच सकें;
 - (i) जब बिंदु वृत्त पर स्थित है;
 - (ii) बिंदु वृत्त के बाहर स्थित है।



अपेक्षित पूर्व ज्ञान

हम यह मान कर चलते हैं कि आप परकार और रूलर का प्रयोग करना जानते हैं।

- $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 105^\circ, 120^\circ$ के कोण बनाना
- एक रेखाखण्ड का लम्ब समद्विभाजक खींचना
- एक दिये गए कोण का समद्विभाजक खींचना

18.1 एक रेखाखण्ड को दिये गए अनुपात में अन्तः विभाजित करना

रचना 1: दिये गए रेखाखण्ड को दिये गए अनुपात में अन्तः विभाजित करना

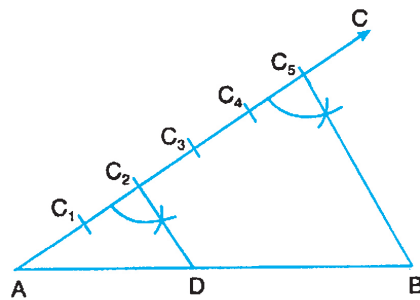
माना रेखाखण्ड AB है। आपको इसे 2 : 3 के अनुपात में अन्तः विभाजित करना है। हम निम्नलिखित चरणों में रचना करते हैं:

चरण 1: रेखाखण्ड AB के साथ न्यूनकोण बनाती हुई एक किरण AC खींचिए।

चरण 2: A से आरम्भ करते हुए, AC पर बराबर दूरी पर 5 बिंदु C_1, C_2, C_3, C_4 और C_5 अंकित कीजिए।

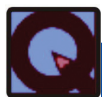
चरण 3: C_5 को B से मिलाइए।

चरण 4: C_2 में से एक रेखाखण्ड $C_2D \parallel C_5B$ बनाइए जो AB से बिंदु D पर मिलता है।



आकृति 18.1

अतः D अभीष्ट बिंदु है, जो AB को 2 : 3 के अनुपात में अन्तःविभाजित करता है।



देखें आपने कितना सीखा 18.1

1. एक 7 सेमी लम्बा रेखाखंड लीजिए। इसे 3 : 4 के अनुपात में अन्तः विभाजित कीजिए। दोनों भागों को मापिए। रचना के चरण भी लिखिए।



2. एक रेखाखण्ड $PQ = 8$ सेमी लीजिए। इस पर एक बिंदु R ज्ञात कीजिए, जिससे

$$PR = \frac{3}{4} PQ \text{ हो।}$$

[संकेत: रेखाखण्ड PQ को 3 : 1 के अनुपात में विभाजित कीजिए]

18.2 त्रिभुजों की रचना करना

रचना 2: एक त्रिभुज की रचना करना जबकि तीनों भुजाएँ दी हुई हैं। (भुजा, भुजा, भुजा)

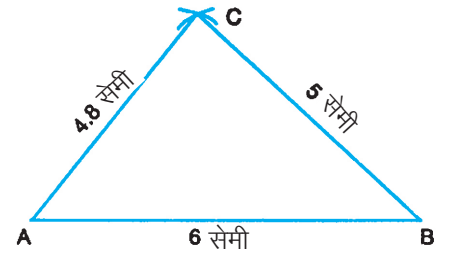
माना कि आपने एक त्रिभुज ABC की रचना करनी है, जिसमें $AB = 6$ सेमी, $AC = 4.8$ सेमी तथा $BC = 5$ सेमी है।

हम निम्नलिखित चरण अपनाते हैं :

चरण 1: $AB = 6$ सेमी लीजिए।

चरण 2: A को केंद्र लेकर 4.8 सेमी त्रिज्या का एक चाप लगाइए।

चरण 3: B को केंद्र लेकर 5 सेमी त्रिज्या का दूसरा चाप लगाइए जो चरण 2 के चाप को C पर काटे।



आकृति 18.2

चरण 4: AC तथा BC को मिलाइए।

$\triangle ABC$ अभीष्ट त्रिभुज है।

[नोट: आप BC या AC को भी आधार ले सकते हैं।]

रचना 3: एक त्रिभुज की रचना करना, जबकि दो भुजाएं और उनके बीच का कोण दिया है। (भुजा, कोण, भुजा)

माना आपको एक त्रिभुज PQR की रचना करनी है, जिसमें $PQ = 5.6$ सेमी, $QR = 4.5$ सेमी तथा $\angle PQR = 60^\circ$ है।

रचना 1: $PQ = 5.6$ सेमी लीजिए।

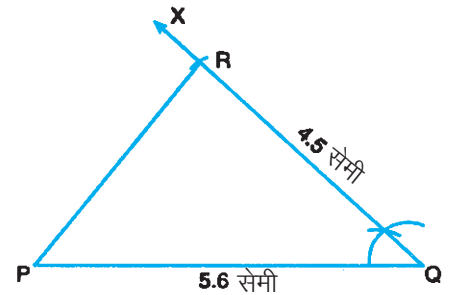
रचना 2: Q पर $\angle PQX = 60^\circ$ बनाइए।

रचना 3: Q को केंद्र मानकर 4.5 सेमी त्रिज्या का एक चाप लगाइए जो QX को R पर काटे।

चरण 4: PR को मिलाइए।

$\triangle PQR$ अभीष्ट त्रिभुज है।

[नोट: आप $QR = 4.5$ सेमी को भी आधार ले सकते हैं।]



आकृति 18.3



रचना 4: एक त्रिभुज की रचना करना जबकि दो कोण और उनके बीच की भुजा दी हुई है।
(कोण, भुजा, कोण)

आइए हम ΔABC की रचना करें, जिसमें $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 45^\circ$ तथा $BC = 4.7$ सेमी है।

रचना के लिए हम निम्नलिखित चरण अपनाते हैं:

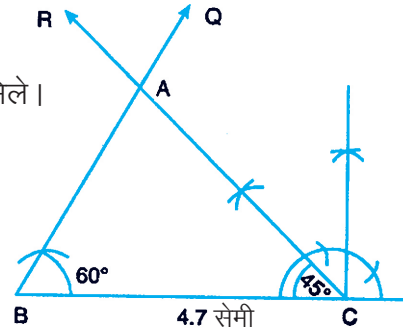
चरण 1: $BC = 4.7$ सेमी लीजिए।

चरण 2: B पर $\angle CBQ = 60^\circ$ बनाइए।

चरण 3: C पर $\angle BCR = 45^\circ$ बनाइए जो BQ से A पर मिले।

ΔABC अभीष्ट त्रिभुज है।

नोट: जब हमें एक त्रिभुज की रचना करनी हो जिसमें दो कोण तथा बीच की भुजा के अतिरिक्त दूसरी भुजा दी गई हो, तो हम तीसरा कोण ज्ञात करते हैं और फिर उपरोक्त विधि से रचना करते हैं।



आकृति 18.4

रचना 5: एक समकोण त्रिभुज की रचना करना जबकि कर्ण और एक भुजा दी हुई है। (समकोण, कर्ण, भुजा)

आइए हम बिंदु B पर समकोणिक त्रिभुज ABC की रचना करें, जिसमें $BC = 3$ सेमी तथा कर्ण $AC = 5$ सेमी है।

त्रिभुज की रचना करने के लिए, हम निम्नलिखित चरण अपनाते हैं:

चरण 1: $BC = 3$ सेमी लीजिए।

चरण 2: B पर $\angle CBP = 90^\circ$ बनाइए।

चरण 3: C को केंद्र मानकर 5 सेमी त्रिज्या का एक चाप लगाइए जो BP को A पर काटे।

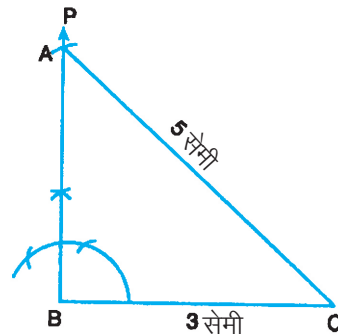
चरण 4: AC को मिलाइए।

ΔABC अभीष्ट त्रिभुज है।

रचना 6: एक त्रिभुज की रचना करना जबकि इसका परिमाण तथा आधार के दो कोण दिये गए हैं।

माना हमें एक त्रिभुज की रचना करनी है, जिसमें परिमाण 9.5 सेमी तथा आधार के कोण 60° और 45° के हैं।

इस रचना के लिए, हम निम्नलिखित चरण अपनाते हैं:



आकृति 18.5



चरण 1: $XY = 9.5$ सेमी लीजिए।

चरण 2: X पर $\angle YXP = 30^\circ$ बनाइए [यह $1/2 \times 60^\circ$ है]

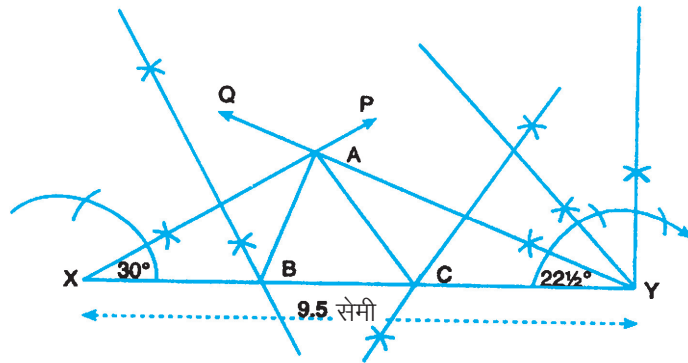
चरण 3: Y पर $\angle XYQ = 22\frac{1}{2}^\circ$ बनाइए [यह $1/2 \times 45^\circ$ है]

माना XP और YQ बिंदु A पर मिलते हैं।

चरण 4: XA का लम्ब समद्विभाजक खींचिए जो XY को B पर काटे।

चरण 5: YA का लम्ब समद्विभाजक खींचिए जो XY को C पर काटे।

चरण 6: AB और AC को मिलाइए।



आकृति 18.6

ΔABC अभीष्ट त्रिभुज है।

रचना 7: एक त्रिभुज की रचना करना, जबकि दो भुजाओं का योग, तीसरी भुजा तथा तीसरी भुजा पर बना एक कोण दिया गया है।

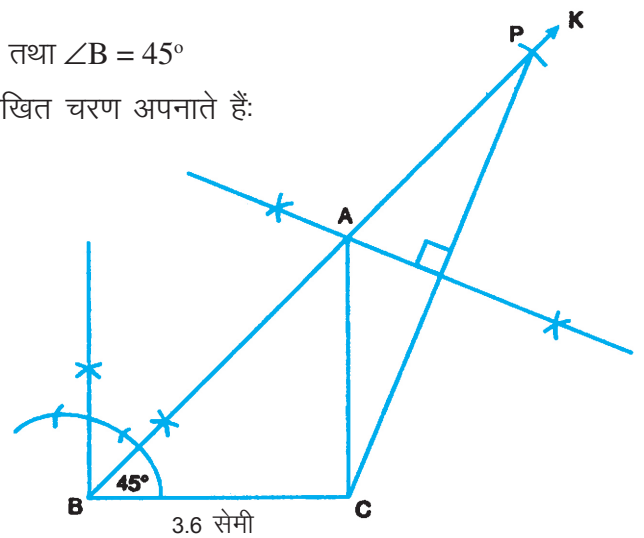
माना हमें ΔABC बनाना है, जिसमें

$AB + AC = 8.2$ सेमी, $BC = 3.6$ सेमी तथा $\angle B = 45^\circ$

त्रिभुज की रचना के लिए, हम निम्नलिखित चरण अपनाते हैं:

चरण 1: $BC = 3.6$ सेमी लीजिए।

चरण 2: B पर $\angle CBK = 45^\circ$ बनाइए।



आकृति 18.7



चरण 3: BK से BP = 8.2 सेमी काटिए।

चरण 4: CP को मिलाइए।

चरण 5: CP का लम्ब समद्विभाजक खींचिए जो BP को A पर काटे।

चरण 6: AC को मिलाइए।

ΔABC अभीष्ट त्रिभुज है।

रचना 8: एक त्रिभुज की रचना करना जब दो भुजाओं का अन्तर, तीसरी भुजा और तीसरी भुजा पर बना एक कोण दिया हुआ है।

माना हमें ΔABC की रचना करनी है, जिसमें $BC = 4$ सेमी, $\angle B = 60^\circ$ तथा $AB - AC = 1.2$ सेमी है।

त्रिभुज की रचना के लिए, हम निम्नलिखित चरण अपनाते हैं:

चरण 1: $BC = 4$ सेमी लीजिए।

चरण 2: $\angle CBP = 60^\circ$ बनाइए।

चरण 3: BP से $BK = 1.2$ सेमी काटिए।

चरण 4: CK को मिलाइए।

चरण 5: CK का लम्ब समद्विभाजक खींचिए, जो BP को बढ़ाने पर A से मिले।

चरण 6: AC को मिलाइए

ΔABC अभीष्ट त्रिभुज है।

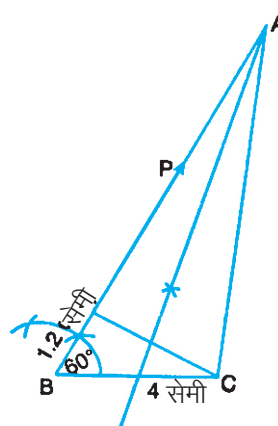
रचना 9: एक त्रिभुज की रचना करना है, जब दो भुजाएँ तथा इनमें से एक भुजा पर माध्यिका दी हुई हो।

माना हमें ΔABC की रचना करनी है, जिसमें $AB = 6$ सेमी, $BC = 4$ सेमी तथा माध्यिका $CD = 3.5$ सेमी है।

हम निम्नलिखित चरण अपनाते हैं:

चरण 1: $AB = 6$ सेमी लीजिए।

चरण 2: AB का लम्ब समद्विभाजक खींचिए जो AB को D पर मिले।



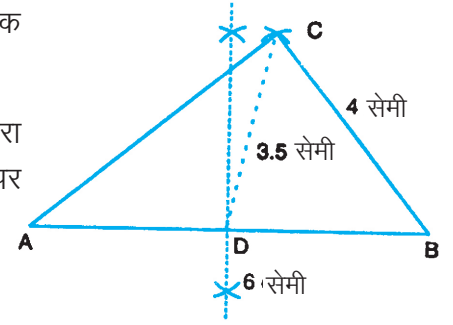
आकृति 18.8



चरण 3: D को केंद्र मानकर 3.5 सेमी त्रिज्या का एक चाप खींचिए।

चरण 4: B को केंद्र मानकर 4 सेमी त्रिज्या का एक दूसरा चाप खींचिए जो चरण 3 के चाप को C पर काटे।

चरण 5: AC और BC को मिलाइए।
 $\triangle ABC$ अभीष्ट त्रिभुज है।



आकृति 18.9



देखें आपने कितना सीखा 18.2

1. एक $\triangle DEF$ की रचना कीजिए, जिसमें $DE = 5.1$ सेमी, $EF = 4$ सेमी तथा $DF = 5.6$ सेमी है। रचना के चरण भी लिखिए।
नोट: आपको निम्नलिखित रचनाओं में भी रचना के चरण लिखने हैं:
2. एक $\triangle PQR$ की रचना कीजिए, जिसमें $PR = 6.5$ सेमी, $\angle P = 120^\circ$ तथा $PQ = 5.2$ सेमी है।
3. एक $\triangle ABC$ की रचना कीजिए, जिसमें $BC = 5.5$ सेमी, $\angle B = 75^\circ$ तथा $\angle C = 45^\circ$ है।
4. एक समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसमें एक भुजा 3 सेमी तथा कर्ण 7.5 सेमी है।
5. एक समकोण समद्विबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसमें समान भुजाओं में से एक भुजा = 4.8 सेमी हो।
6. एक $\triangle ABC$ की रचना कीजिए, जिसमें $AB + BC + AC = 10$ सेमी, $\angle B = 60^\circ$ और $\angle C = 30^\circ$ है।
7. एक $\triangle ABC$ की रचना कीजिए, जिसमें $AB = 5$ सेमी, $\angle A = 60^\circ$ और $BC + AC = 9.8$ सेमी है।
8. एक $\triangle LMN$ की रचना कीजिए, जिसमें $\angle M = 30^\circ$, $MN = 5$ सेमी तथा $LM - LN = 1.5$ सेमी है।
9. एक $\triangle PQR$ की रचना कीजिए, जिसमें $PQ = 5$ सेमी, $QR = 4.2$ सेमी और माध्यिका $RS = 3.8$ सेमी है।

18.3 दिये गये स्केल गुणक के अनुसार दिए गए त्रिभुज के समरूप त्रिभुज की रचना करना

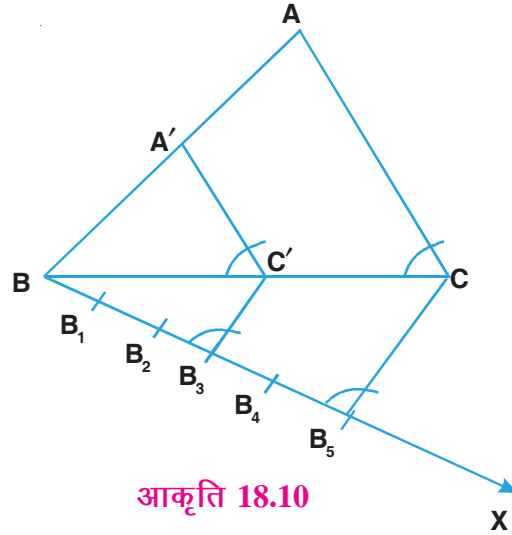
[यहाँ पर स्केल गुणक से तात्पर्य, बनाये जाने वाले त्रिभुज की भुजाओं का दिये गये त्रिभुज की संगत भुजाओं के अनुपात से है]



रचना 10: ΔABC के समरूप एक त्रिभुज की रचना कीजिए, जबकि इस त्रिभुज की भुजाएं, ΔABC की संगत भुजाओं का $3/5$ हों।

रचना के चरण:

1. माना ΔABC दिया हुआ त्रिभुज है। BC के साथ न्यूनकोण बनाते हुए शीर्ष A के विपरीत दिशा में एक किरण BX खींचिए।
2. BX पर 5 बिंदु B_1, B_2, B_3, B_4 तथा B_5 इस प्रकार अंकित कीजिए कि $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5$ है।
3. B_5C को मिलाइए तथा B_3 से B_5C के समान्तर एक रेखा खींचिए, जो BC को C' काटे।
4. C' से CA के समान्तर एक रेखा खींचिए, जो AB को A' पर मिले।
 $\Delta A'BC'$ अभीष्ट त्रिभुज है।

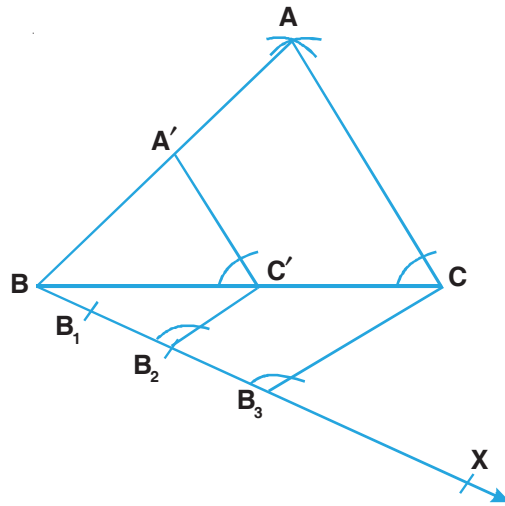


आकृति 18.10

रचना 11: 5 सेमी, 6 सेमी तथा 7 सेमी भुजाओं का एक त्रिभुज बनाइए। स्केल गुणक $\frac{2}{3}$ से इस त्रिभुज के समरूप त्रिभुज की रचना कीजिए।

रचना के चरण :

1. रेखाखण्ड $BC = 7$ सेमी लीजिए।
2. B को केन्द्र मानकर 6 सेमी त्रिज्या का एक चाप लगाइए और C को केन्द्र मानकर 5 सेमी त्रिज्या का एक चाप लगाइए, जो पहले चाप को A पर काटे।
3. AB और AC को मिलाइए। हमें ΔABC प्राप्त होता है।
4. BC के साथ न्यूनकोण बनाते हुए एक किरण BX खींचिए।
5. BX पर तीन बिंदु B_1, B_2 तथा B_3 अंकित कीजिए ताकि $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$ है।
6. B_3C को मिलाइए तथा B_2 से B_3C के समान्तर एक रेखा खींचिए, जो BC को C' पर काटे।
7. C' से, CA के समान्तर एक रेखा खींचिए, जो AB को A' पर काटे।
तब $A'BC'$ अभीष्ट त्रिभुज है।



आकृति 18.11



टिप्पणी



देखें आपने कितना सीखा 18.3

1. 4 सेमी, 5 सेमी तथा 7 सेमी भुजाओं का एक त्रिभुज बनाइए। इसके समरूप एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए, जिससे इस त्रिभुज की भुजाएँ पहले त्रिभुज की संगत भुजाओं का $\frac{3}{4}$ हों।
2. एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसमें $BC = 7$ सेमी, $AB = 5$ सेमी तथा $\angle ABC = 60^\circ$ है। एक दूसरा त्रिभुज ABC के समरूप बनाइए, जिससे इस त्रिभुज की भुजाएँ, ΔABC की संगत भुजाओं का $\frac{4}{5}$ हों।
3. एक समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएं (कर्ण के अतिरिक्त) 5 सेमी तथा 6 सेमी हों। स्केल गुणक $\frac{4}{5}$ लेकर, इस त्रिभुज के समरूप एक त्रिभुज की रचना कीजिए।
4. एक ΔABC की रचना कीजिए, जिसमें $BC = 6$ सेमी, $\angle ABC = 60^\circ$ तथा भुजा $AB = 4.5$ सेमी। स्केल गुणक $\frac{5}{6}$ लेकर, ΔABC के समरूप $\Delta A'BC'$ की रचना कीजिए।

18.4 एक वृत्त की स्पर्श रेखाएँ खींचना

रचना 12: वृत्त पर स्थित किसी बिंदु से वृत्त की स्पर्श रेखा खींचना।

माना C दिया हुआ वृत्त है, जिसका केंद्र O है। वृत्त पर एक बिंदु P है। आपको P पर वृत्त की स्पर्श रेखा खींचनी है।

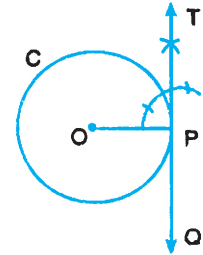
हम निम्न चरण अपनाते हैं:

चरण 1: OP को मिलाइए।

चरण 2: P पर लम्ब PT खींचिए।

चरण 3: TP को Q तक बढ़ाइए।

तब TPQ अभीष्ट स्पर्श रेखा है।



आकृति 18.12

रचना 13: वृत्त के बाहर दिए गए बिंदु से वृत्त की स्पर्श रेखाएं खींचना।

माना C दिया हुआ वृत्त है जिसका केंद्र O है। वृत्त के बाहर एक बिंदु A है। आपको बिंदु A से वृत्त की स्पर्श रेखाएं खींचनी हैं।

हम निम्नलिखित चरण अपनाते हैं :

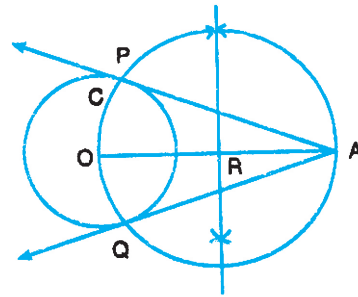


चरण 1: OA को मिलाइए।

चरण 2: OA का लम्ब समद्विभाजक खींचिए।

माना AO का मध्य बिंदु R है।

चरण 3: R को केंद्र मानकर तथा RO के बराबर त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचिए, जो दिए हुए वृत्त को P तथा Q पर काटे।



आकृति 18.13

चरण 4: AP तथा AQ को मिलाइए।

AP तथा AQ अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ हैं।



देखें आपने कितना सीखा 18.4

- 3 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। वृत्त पर कोई बिंदु A लीजिए। वृत्त के केंद्र का प्रयोग करते हुए, A पर स्पर्श रेखा खींचिए। रचना के चरण भी लिखिए।
- 2.5 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। वृत्त के बाहर स्थित बिंदु P से वृत्त की दो स्पर्श रेखाएँ PQ तथा PR खींचिए। जांच कीजिए कि PQ और PR की लंबाइयाँ समान हैं। रचना के चरण भी लिखिए।



आइए अभ्यास करें

- एक रेखाखण्ड $PQ = 8$ सेमी खींचिए। इसे 3 : 5 के आन्तरिक अनुपात में विभाजित कीजिए। रचना के चरण भी लिखिए।
नोट: आपने रचना के चरण निम्नलिखित सभी प्रश्नों में भी लिखने हैं:
- एक रेखाखण्ड $AB = 6$ सेमी खींचिए। AB पर बिंदु C ज्ञात कीजिए, जिससे $AC : CB = 3 : 2$ हो। AC तथा CB को मापिए।
- एक त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसमें परिमाप 14 सेमी तथा आधार के कोण 60° और 90° है।
- एक समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसमें कर्ण = 8 सेमी तथा एक भुजा = 5.5 सेमी है।
- एक $\triangle ABC$ की रचना कीजिए, जिसमें $BC = 3.5$ सेमी, $AB + AC = 8$ सेमी तथा $\angle B = 60^\circ$ है।



6. एक $\triangle ABC$ की रचना कीजिए, जिसमें $AB = 4$ सेमी, $\angle A = 45^\circ$ तथा $AC - BC = 1$ सेमी है।
7. $\triangle PQR$ की रचना कीजिए, जिसमें $PQ = 5$ सेमी, $PR = 5.5$ सेमी तथा आधार $QR = 6.5$ सेमी है। एक अन्य $\triangle P'QR'$ उपरोक्त त्रिभुज के समरूप बनाइए, जिसमें इसकी भुजाएं त्रिभुज PQR की संगत भुजाओं का $\frac{5}{7}$ हों।
8. 5 सेमी, 12 सेमी तथा 13 सेमी भुजाओं वाले समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए। स्केल गुणक $5/6$ से इस त्रिभुज के समरूप एक दूसरे त्रिभुज की रचना कीजिए।
9. 6 सेमी व्यास का एक वृत्त खींचिए। वृत्त के केंद्र से 6 सेमी दूरी पर, वृत्त के बाहर स्थित बिंदु P से, वृत्त की दो स्पर्श रेखाएं खींचिए।
10. रेखाखण्ड $AB = 8$ सेमी लीजिए। A को केंद्र मानकर 4 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए तथा B को केंद्र मानकर 3 सेमी त्रिज्या का एक अन्य वृत्त खींचिए। प्रत्येक वृत्त को दूसरे वृत्त के केंद्रों से स्पर्श रेखाएँ खींचिए।