शिक्षार्थी मार्गदर्शिका

211 - गणित

माध्यमिक पाठ्यक्रम

पाठ्यक्रम समन्वयक

डॉ. राजेन्द्र कुमार नायक

राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान

(मानव संस्थान विकास मंत्रालय, भारत सरकार के अधीन एक स्वायत्त संस्था)

ए-24-25, इन्स्टीट्यूशनल एरिया, सेक्टर-62, नोएडा-201309

वेबसाइट : www.nios.ac.in, टॉल फ्री नंबर 18001809393

(प्रतियाँ)

सचिव, राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान, ए-24-25, इंस्टीट्यूशनल एरिया, सेक्टर - 62, राष्ट्रीय राजमार्ग–24, नोएडा–201309 द्वारा प्रकाशित एवं .... द्वारा मुद्रित।

सलाहकार समिति

डॉ. एस.एस. जेना
अध्यक्ष
एनआईओएस

डॉ. कुलदीप अग्रवाल
निदेशक (शैक्षिक)
एनआईओएस

पाठ्यक्रम समिति

अध्यक्ष
प्रो. मोहन लाल
सचिव डीएवी महाविद्यालय प्रबंधन समिति
ई-182, न्यू राजेन्द्र नगर
नई दिल्ली-110060

श्री जी.डी. ढल
रीडर (सेवानिवृत्त) एनसीईआरटी
के-171, एलआईसी कॉलोनी
पश्चिम विहार, नई दिल्ली-110087

श्री जे.सी. निझावन
उपप्राचार्य (सेवानिवृत्त)
सर्वोदय विद्यालय, सी-ब्लॉक
सरस्वती विहार, नई दिल्ली-110087

प्रो. राम अवतार
प्रोफेसर (सेवानिवृत्त) एनसीईआरटी
533, सेक्टर-7, अरबन इस्टेट
गुड़गांव, हरियाणा-122001

श्री पी.के. गर्ग
प्राचार्य (सेवानिवृत्त)
169, पुन्डरीक विहार
सरस्वती विहार, नई दिल्ली-110034

श्री महेन्द्र शंकर
प्रवक्ता (सेवानिवृत्त) चयनित ग्रेड,
एनसीईआरटी, डीपी-203, मौर्या एन्कलेव
पीतमपुरा, नई दिल्ली-110088

श्री ईश्वर चन्द्र
रीडर (सेवानिवृत्त) एनसीईआरटी
म. नं.- WZ 1427D, नांगल राया
नई दिल्ली-110046

श्री शुभेन्दु शेखर दास
सहायक निदेशक (शैक्षिक)
राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान
A-24/25, इंस्टीट्यूशनल एरिया, सेक्टर-62
नोएडा-201309

श्री नीरज प्रताप सिंह
वरिष्ठ कार्यकारी अधिकारी (गणित)
राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान
A-24/25, इंस्टीट्यूशनल एरिया, सेक्टर-62
नोएडा-201309

लेखक एवं संपादक

श्री जी.डी. ढल
रीडर (सेवानिवृत्त) एनसीईआरटी
के-171, एलआईसी कॉलोनी
पश्चिम विहार, नई दिल्ली-110087

श्री जे.सी. निझावन
उप प्राचार्य (सेवानिवृत्त)
सर्वोदय विद्यालय, सी-ब्लॉक
सरस्वती विहार, नई दिल्ली-110087

डॉ. अनूप कुमार राजपूत
एसोसिएट, प्रोफेसर, डीईएसएम, एनसीईआरटी
श्री अरविन्दो मार्ग
नई दिल्ली-110016

श्री डी.आर. शर्मा
उप प्राचार्य, जवाहर नवोदय विद्यालय
मुंगेशपुर
दिल्ली-110039

डॉ. राजपाल सिंह
प्रवक्ता (गणित)
राजकीय प्रतिभा विकास विद्यालय
गांधी नगर, दिल्ली-110032

डॉ. सत्यवीर सिंह
प्राचार्य
नेहरू स्मारक, इंटर कॉलेज
पिलाना, बागपत (उ.प्र.)

डॉ. राजेन्द्र कुमार नायक
शैक्षिक अधिकारी (गणित)
राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान
नोएडा-201309 (उ.प्र.)

अनुवादक

श्री डी आर शर्मा
उपप्राचार्य जवाहर नवोदय विद्यालय
मुंगेशपुर, दिल्ली-110039

डॉ. राजपाल सिंह
प्रवक्ता (गणित)
राजकीय प्रतिभा विकास विद्यालय
गांधी नगर, दिल्ली-110032

डॉ. सत्यवीर सिंह
प्राचार्य
नेहरू स्मारक, इंटर कॉलेज
पिलाना, बागपत (उ.प्र.)

श्री रामनिवास कश्यप
डॉ. राजेन्द्र प्रसाद, सर्वोदय विद्यालय
रेजीडेंट एस्टेट, नई दिल्ली

पाठ्यक्रम समन्वयक

डॉ. राजेन्द्र कुमार नायक
शैक्षिक अधिकारी (गणित)
राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान
नोएडा-201309 (उ.प्र.)

लेजर टाईपसेटिंग

विजय कम्प्यूटर
ग्राफिक डिजाईनिंग, मयूर विहार, फेस-1, दिल्ली

निदेशक की कलम से

प्रिय शिक्षार्थी,

सप्रेम।

'स्वपाठी शिक्षार्थियों को अपने शैक्षिक लक्ष्यों को प्राप्त करने में सहायता प्रदान करना' हमारा निरन्तर लक्ष्य रहा है। प्रस्तुत 'शिक्षार्थी मार्गदर्शिका' को पहली बार तैयार किया गया है। इस मार्गदर्शिका में पाठ्य सामग्री के महत्वपूर्ण एवं आवश्यक बिन्दुओं को उजागर किया गया है तथा यह एक ही दृष्टि में आपको पूरे पाठ्यक्रम की झलक प्रदान करती है। कम समय में पाठ्य सामग्री को दोहराने में यह आपके लिए सहायक सिद्ध होगी।

मेरे विचार में यह मार्गदर्शिका विषय को गहराई से समझने के अतिरिक्त परीक्षा में आपके प्रदर्शन को भी और बेहतर बनाने में सहायता करेगी।

आशा है कि पुनरावृति के लिए आप इसका प्रयोग करेंगे और इसको उपयोगी पाएंगे।

उज्जवल और सफल भविष्य हेतु हार्दिक शुभकामनाएं।

(डॉ. कुलदीप अग्रवाल)
निदेशक (शैक्षिक)

सहायक निदेशक की कलम से

प्रिय शिक्षार्थी,

अब एक क्लिक में आपकी समस्याओं का समाधान हो जाएगा, क्योंकि एनआईओएस ज्ञान को आपके अंगुली-त्राण पर लाया है। आपके लिए सहारे की आवश्यकता के महत्व को समझते हुए एनआईओएस आपकी देहली पर तकनीकी का जादू लेकर आया है। हमारा वेब आधारित सीधे प्रसारित होने वाला पीसीपीएस ''मुक्त विद्या वाणी'' स्वयं अधिगम सामग्री को प्रत्येक दृष्टि से पूर्ण करता है। यह आपको अपने विषय के विशेषज्ञों के साथ चर्चा करने का अवसर प्रदान करता है। आप हमारे टोल फ्री नम्बर 18001802543 पर फोन करके अपने प्रश्नों एवं शंकाओं का समाधान कर सकते हैं। आप हमारे दूरभाष नम्बर 0120 462649 पर भी फोन कर सकते हैं। सीधे प्रसारित होने वाले कार्यक्रमों की समय-सारणी आपकी जानकारी के लिए नीचे दी हुई है। यदि किसी कारणवश आप सीधे प्रसारित होने वाले पीसीपीएस को नहीं देख पाते हैं तो आप रिकार्ड किए हुए वृतान्त को पुनरावृत्ति चक्र में अथवा आन डिमांड ऑडियो पर सुन सकते हैं।

हम आशा करते हैं कि आप विषयवस्तु एवं अवधारणाओं को अच्छी तरह समझने के लिए और शंकाओं का समाधान करने के लिए इन आईटीसी विकल्पों को अवश्य चुनेंगे। मुक्त विद्या वाणी पर सीधे प्रसारित होने वाले अथवा रिकार्ड किए गए पीसीपीएस को सुनने के लिए आप सीधे www.nios.ac.in पर लॉग आन कर सकते हैं। आप http://www.nios.iradionindia.com पर भी लॉग आन कर सकते हैं। एनआईओएस आपको वीडियो कार्यक्रम भी उपलब्ध कराता है जिनका प्रसारण दूरदर्शन के शिक्षा सम्बन्धी चैनल ज्ञान दर्शन पर होता है और ऑडियो कार्यक्रमों का प्रसारण ज्ञानवाणी (एफएम) चैनल 106.5 MHz पर होता है।

आईसीटी विकल्प	समय अवधि	
मुक्त विद्या वाणी	सोमवार से शुक्रवार तक दोपहर बाद 2.30 बजे से सायं 5.00 बजे तक	रिकार्ड किए हुए कार्यक्रम 24 x 7 उपलब्ध है।
डीडी 1	शनिवार एवं रविवार प्रात: 5.02 बजे से प्रात: 5.25 बजे तक	
ज्ञान दर्शन	प्रतिदिन सायं 6.30 बजे से सायं 7.00 बजे तक	
ज्ञान वाणी	प्रत्येक शुक्रवार, शनिवार एवं रविवार, प्रात: 8.30 बजे से प्रात: 9.00 बजे तक	प्रत्येक शुक्रवार, शनिवार एवं रविवार सायं 4.30 बजे से सायं 5.00 बजे तक पुनरावृत्ति प्रसारण

हम आशा करते हैं कि आप इन कार्यक्रमों में बढ़-चढ़ कर भाग लेंगे और अधिक से अधिक विचारों का आदान-प्रदान करेंगे।

डॉ. रचना भाटिया
सहायक आयुक्त (शैक्षिक)

Contents

विषयवस्तु

भूमिका

गणित मानवीय सभ्यता का आधार है। सब्जी काटने से लेकर पुस्तकों को अल्मारियों में व्यवस्थित करने तक, कपड़ों की सिलाई से लेकर ग्रहों की गति तक, गणित का उपयोग प्रत्येक स्थान पर होता है। विधा के रूप में गणित का अपना महत्व है क्योंकि यह शिक्षार्थी में समस्या समाधान कौशल विकसित करने में सहायक है। गणित के वर्तमान पाठ्यक्रम में दो पुस्तकें, पुस्तक-I एवं पुस्तक-II है, जिनमें छः अनिवार्य मॉड्यूल नामतः बीजगणित, व्यावसायिक गणित, ज्यामिति, क्षेत्रमिति, त्रिकोणमिति एवं सांख्यिकी सम्मिलित है। इसके अतिरिक्त अधिगम को अधिक प्रभावशाली बनाने के लिए एक प्रयोगशाला पुस्तिका भी उपलब्ध है जिसमें 30 क्रियाकलाप दिए हुए हैं। शिक्षार्थी मार्गदर्शिका का उद्देश्य मूर्त चिन्तन प्रक्रिया को शुरू करना और विषयवस्तु को वास्तविक जीवन की समस्याओं के साथ जोड़ने योग्य बनाना है।

शिक्षार्थी मार्गदर्शिका के उद्देश्य

1. अध्ययन सामग्री को अल्प काल में दोहराने को सुगम बनाने में।
2. विषय सामग्री के ज्ञान को सुदृढ़ करना।
3. परीक्षा में बेहतर निष्पादन के लिए शिक्षार्थियों की सहायता करना।
4. सूचना के महत्वपूर्ण बिन्दुओं एवं अवधारणाओं को महत्व देना।

शिक्षक अंकित मूल्यांकन पत्र

1. आपके लिए शिक्षक अंकित मूल्यांकन पत्र (T.M.A) का अभिप्रायः

यह बताना व्यर्थ होगा कि मुक्त अधिगम प्रणाली में शिक्षक अंकित मूल्यांकन पत्र का विशेष महत्व है। वास्तव में, टीएमए मुक्त अधिगम प्रणाली का एक आवश्यक एवं समग्र भाग है। टीएमए के माध्यम से आपको अपने ट्यूटर अथवा अध्यापक के सम्पर्क में आने का अवसर मिलता है। यह आपको अपनी कमजोरियों को जानने और उत्तरों में सुधार करने का अवसर प्रदान करना है। ट्यूटर द्वारा जारी किए गए सुझाव अथवा दिशा-निर्देश आपके नियत कार्यों में वांछित सुधार करने में सहायक होते हैं। इससे आपको परीक्षा में बेहतर निष्पादन करने की तैयारी में सहायता मिलेगी।

2. एक अच्छा नियत कार्य कैसे तैयार करें?

नियत कार्य तैयार करते समय प्रश्नों पर ध्यान केंद्रित करें। सामान्यतः नियत कार्य में प्रश्न विषयवस्तु के अनेक पाठों को सम्मिलित करते हैं। प्रत्येक पाठ की विषयवस्तु को अपेक्षित महत्व दीजिए। नियत कार्य करते समय शीर्षक एवं उपशीर्षक अवश्य लिखिए। यह निश्चित कीजिए कि सभी महत्वपूर्ण सूचनाएं सम्मिलित हो गई हैं। नियत कार्य निर्धारित प्रारूप में होना चाहिए। यह ना तो अधिक लंबा और ना ही अधिक छोटा होना चाहिए।

3. शिक्षकों की समीक्षा का प्रतिवादनः

शिक्षकों द्वारा की गई समीक्षा आपको विषय के ज्ञान में सुधार तथा वृद्धि करने के योग्य बनाती है। यह आपको अपने दोषों अथवा कमियों को सुधारने में सहायता करती है। शिक्षकों द्वारा की गई टिप्पणियां आपको परीक्षा में बेहतर निष्पादटन करने में सहायता करती हैं, इसलिए शिक्षकों द्वारा की गई समीक्षा को सकारात्मक रूप में लेना आपके व्यक्तिगत हित में है और अनिवार्य है।

परीक्षा की तैयारी करनाः

- **परीक्षा का सकारात्मक पक्ष :** परीक्षा का सकारात्मक पक्ष यह है कि यह परीक्षार्थी को संबंधित विषय में अपने ज्ञान का मूल्यांकन करने तथा अपनी योग्यता का स्तर जानने का अवसर प्रदान करती है।
- **परीक्षा के बारे में मिथक :** परीक्षा के बारे में मिथक यह है कि परीक्षार्थी की योग्यता का मूल्यांकन करने का एकमात्र मापक परीक्षा है जबकि वास्तविकता यह है कि अन्य बहुत सारी तकनीकों में से परीक्षा एक तकनीक है।

- **किससे बचा जाए :** परीक्षा की तैयारी करते समय परीक्षा के डर से बचने के लिए अपने दिमाग पर अनावश्यक तनाव पैदा ना होने दें। सभी प्रकार के विस्तृत विवरण को रटने में अपना समय नष्ट ना करें बल्कि प्रत्येक पाठ अथवा अध्ययन सामग्री के मुख्य बिन्दुओं पर ध्यान केंद्रित करें। शिक्षार्थी मार्गदर्शिका के माध्यम से हमने इन बिन्दुओं को आप तक पहुंचाने का प्रयास किया है।

- **परीक्षा के लिए पुनरावृत्ति करना :** जो कुछ आपने अध्ययन किया है परीक्षा के लिए उसकी पुनरावृत्ति करना आवश्यक है। जो कुछ आपने अभी तक पढ़ा है उसका स्मरण करने का अवसर पुनरावृत्ति से ही मिलता है। यह आपको प्रत्येक पाठ अथवा अध्ययन सामग्री के कम से कम मुख्य बिन्दुओं को पुनः एकत्रित करने का अवसर प्रदान करता है।

- **परीक्षा की तैयारी के लिए सुझाव :** प्रत्येक शिक्षार्थी के लिए परीक्षा से पहले का समय अत्यंत निर्णायक होता है। आपकी परीक्षा की अच्छी तैयारी के लिए कुछ सुझाव इस प्रकार है:

  (i) प्रत्येक पाठ अथवा अध्ययन सामग्री की पुनरावृत्ति अवश्य कीजिए।

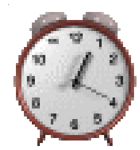
  (ii) अपेक्षित आत्मविश्वास अवश्य बनाए रखिए।

  (iii) अपने आपको परीक्षा के डर से पीडित मत होने दीजिए।

  (iv) परीक्षा केन्द्र पर समय से पहुंचिए।

  (v) स्मरण रखिए कि आपको अपने सभी प्रश्नों के उत्तर निर्धारित समय से पहले पूर्ण करने हैं ताकि आपको अपनी उत्तर पुस्तिका की पुनरावृत्ति करने एवं यह सुनिश्चित करने कि आपने सभी प्रश्नों के उत्तर लिख दिए हैं, का पर्याप्त समय मिल जाए।

परीक्षा पूर्व एवं परीक्षा के दौरान समय प्रबन्धन



क्या आपको यह एक परिचित वाक्य लगता है कि अधिकतर विद्यार्थी अंतिम मिनट तक अपने कार्य को स्थगित करने का प्रयास करते हैं, खराब कार्य करते हैं और तनावयुक्त भी हो जाते हैं? क्या यह आपकी सहायता करेगा, यदि आप अपने कार्य एवं समय की सुव्यवस्थित रूप से योजना तैयार करते हैं?

आपने यह कहावत सुनी होगी, ''समय का प्रबन्धन कीजिए अन्यथा यह आपका प्रबन्ध करेगा।'' यह सत्य भी है। दूसरी तरफ वास्तव में आप समय का प्रबन्ध नहीं कर सकते क्योंकि समय किसी के आदेश का पालन नहीं करता। प्रत्येक व्यक्ति के पास एक दिन में 24 घण्टे तथा सप्ताह में 168 घंटे होते हैं। इसलिए आप केवल अपने आपको समय के अनुसार व्यवस्थित कर सकते हैं।

पार्कीसंस का सिद्धांत: उपलब्ध समय को भरने के लिए कार्य फैलता है। यदि आप कार्य की योजना तैयार करते हैं तो आप अनेक कार्य कर सकते हैं।

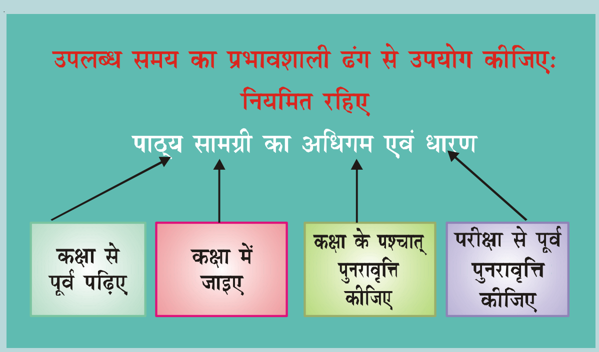
समय प्रबन्धन के लाभ

तनाव कम करना : परीक्षा से पूर्व कुछ घंटों में सम्पूर्ण पाठ्यक्रम को रटने की बजाय लम्बे समय तक तैयारी करना कम तनावयुक्त होता है।

जीवन को संतुलित बनाना : हर समय पढ़ते रहने का अर्थ यह नहीं है कि आप अच्छे विद्यार्थी हैं। आपके पास करने के लिए और भी बहुत कुछ है और आराम करने के लिए समय मिलना भी प्रत्येक विद्यार्थी के लिए महत्वपूर्ण है।

परिणाम में वृद्धि : लगातार अधिक समय तक कार्य करने से थकान होती है और कार्य की गति भी धीमी हो जाती है। इसलिए समय का प्रभावशाली ढंग से उपयोग कीजिए। निश्चित समय अवधि में कार्यों को पूरा करने की योजना बनाइए।

लक्ष्य प्राप्ति : लक्ष्य निर्धारित करना अपने आपको कार्य के लिए प्रेरित करने का सशक्त माध्यम है इससे आपको कार्य को कम स्थगित करने एवं अधूरे कार्य के तनाव को कम करने में सहायता मिलती है।



परीक्षा के लिए अध्ययन:

बेहतर समय प्रबन्धन के लिए सुझाव

छोटे-छोटे खण्डों में योजना बनाइए:

उदाहरणत: एक घण्टे के लिए योजना बनाइए। यदि आप अधिकतम 45 मिनट तक ध्यान केंद्रित कर सकेंगे, तो उसके बाद 15 मिनट के ब्रेक की योजना तैयार कीजिए।

यथार्थता के साथ योजना:

- सही इंगित कीजिए कि आपने उस समय में क्या प्राप्त करने की योजना बनाई है।
- यथार्थता के बिना योजना बनाने का उदाहरण:
  - अंग्रेजी दोपहर बाद 2 बजे से सायं 4 बजे तक
  - जीव विज्ञान सायं 5 बजे से सायं 7 बजे तक
- यथार्थता के साथ योजना का उदाहरण:
  - गणित
  - पेंटिग प्रैक्टीकल – वस्तु अध्ययन

दिमाग में समाप्ति को ध्यान में रखकर योजना बनाइए:

- अपने ध्यय से शुरू कीजिए अपनी परीक्षा समय सारणी को चैक कीजिए और उसके अनुसार कार्य कीजिए।
- परीक्षा की अच्छी तैयारी के लिए प्रति सप्ताह पूर्ण होने वाले विशिष्ट उद्‌देश्य निश्चित कीजिए।

साप्ताहिक योजना की आवश्यकता?

अपनी क्षमता के अनुसार योजना बनाइए:

- किस समय, आपकी मानसिक स्थिति सबसे अच्छी होती है अथवा आप सबसे अधिक उत्पादी होते हैं– सुबह, दोपहर बाद अथवा रात में? इस समय आप उन विषयों की पढ़ाई कीजिए जिन्हें आप मुश्किल समझते हैं।
- जिस समय आपकी मानसिक स्थिति अधिक अच्छी नहीं रहती उस समय कपड़े धोने, खाना बनाने अथवा बाजार से सामान खरीदकर लाने जैसे यांत्रिक कार्य कीजिए।

शायद आपको अपने सभी विषयों को समान समय देने की आवश्यकता नहीं होगी। प्रत्येक विषय को कितना समय देना है यह निर्णय करते समय निम्नलिखित बिन्दुओं को ध्यान में रखिए:

– सत्र के दौरान की गई पढ़ाई की मात्रा।

– आप उस विषय को कितना कठिन समझते हैं?

– परीक्षा के अंक

– आप उस विषय की परीक्षा में कितना अच्छा करने की उम्मीद रखते हैं?

प्रतिदिन एक रिक्त प्लानर से शुरू कीजिए:

लचीली योजना बनाइए

- आपको इस प्रकार की समय सारणी तैयार नहीं करनी चाहिए जिसमें आपके पास प्रतिदिन के क्रियाकलापों के लिए समय ही ना बचे क्योंकि आपको नहाने, खाने एवं सोने जैसी क्रियाओं के लिए समय चाहिए इसके अतिरिक्त अप्रत्याशित आकस्मिक घटनाओं से निपटने के लिए भी समय चाहिए।

अपने आपको पुरस्कृत कीजिए

- जिन कार्यों को करने के लिए आपने योजना बनाइ थी उन कार्यों को करने के पश्चात् अपने आपको ब्रेक दीजिए– सैर करने के लिए जाइए, टेलीविजन देखिए अथवा अपने मित्र के साथ मौज मस्ती कीजिए।

परीक्षा लिखने के लिए समय प्रबन्ध :

अपने समय को बांटिए

- **देखिए अंको का वितरण किस प्रकार किया गया है** किसी प्रश्न के लिए निर्धारित अंक आपको यह संकेत दे सकते हैं कि उस प्रश्न के लिए कितना समय व्यतीत करना है। निम्नलिखित पर ध्यान दीजिए और उनके अनुसार समय को नियंत्रित कीजिए:

✓ प्रति प्रश्न अंकों की संख्या

✓ उनका वितरण किस प्रकार किया गया है।

✓ आपको कितने प्रश्नों का उत्तर देना है।

सरल एवं कठिन प्रश्नों का चयन कीजिए।

जिन प्रश्नों के उत्तर देने हैं उनका क्रम निर्धारित करना:

- यह व्यक्तिगत पसन्द है, कुछ विद्यार्थी लघु उत्तरीय प्रश्नों का उत्तर पहले देना चाहते हैं जबकि कुछ ऐसे विद्यार्थी भी होते हैं जो निबंधात्मक प्रश्नों का उत्तर शुरू में देते हैं।
- यदि आप दीर्घ प्रश्नों से शुरू करना चाहते हैं तो इसके समय का ध्यान रखिए। अतिरिक्त समय खर्च करने का जोखिम मत उठाइए।
- जिस प्रश्न का उत्तर आपको सबसे कम आता है उसको अन्त के लिए छोड़ दीजिए परन्तु यह सुनिश्चित कीजिए कि आपके पास उस प्रश्न के लिए समय बचा हुआ है।
- अतिरिक्त समय को उन प्रश्नों पर व्यतीत कीजिए जिनका उत्तर आप सबसे अच्छी तरह जानते हैं।
- **यह नोट बनाइए कि आपको प्रत्येक प्रश्न को कितना समय देना चाहिए।** आपने जब प्रत्येक

प्रश्न के लिए समय निर्धारित कर लिया तो उसकी अनुपालना कीजिए। घड़ी को देखिए और उस प्रश्न के लिए आप द्वारा निर्धारित समय यदि समाप्त हो चुका है तो रूकिए और अगले प्रश्न को शुरू कीजिए।

क्या आपको दर्द हो रहा है अथवा आप अपने आपको थका हुआ महसूस कर रहे हैं?

परीक्षा के दौरान अपने आपको हल्का सा आराम दीजिए। शरीर को ढीला छोड़ दीजिए, अपने शरीर को थोड़ा फैलाइए (यदि आप ऐसा करते समय दूसरों को भद्दा दिखाई नहीं दे रहे हों), गहरी सांसें लीजिए, आँखों को बंद करके सोचिए।

- यदि आपने किसी प्रश्न को पूरी तरह से नहीं लिखा है तो परीक्षा पुस्तिका में जगह छोड़ दीजिए और अंत में समय बचने पर पुनरावृत्ति के दौरान आप वहां लिख सकते हैं।
- अंत में उत्तरों को जांचने एवं ठीक करने के लिए कुछ समय बचाकर रखिए।
- **परीक्षा को जल्दी समाप्त करके मत आइए।** अतिरिक्त समय का उपयोग पुनरावृत्ति अथवा किसी कठिन प्रश्न के बारे में गहराई से सोचने में किया जा सकता है।

  परीक्षा के लिए निर्धारित संपूर्ण समय का उपयोग कीजिए क्योंकि यह अति मूल्यवान है।

प्रश्नों का उत्तर कैसे दिया जाये

प्रश्नों के उत्तर देने की युक्तियां

1. संपूर्ण प्रश्न पत्र को पढ़िए।
2. निर्देशों को सावधानी पूर्वक पढ़िए।
3. अपने समय की उसी ने अनुसार योजना बनायें।
4. पढ़ते समय आपके मस्तिष्क में आने वाली किसी भी बात को संक्षेप में लिखें, जिससे आप उसे भूल न जायें।
5. उत्तर देने से पूर्व, प्रश्न को पूर्ण रूप से पढ़ लें। यदि कोई भाग हो तो उसकी संख्या दें और उत्तर की एक रूप रेखा तैयार कर लें जिससे कि आप किसी बिन्दु को भूल न जायें।
6. अपने उत्तर की पहली पंक्ति के रूप में प्रश्न को दोबारा लिखें।
7. विसंगत विस्तार में न जायें।
8. यदि आप अनिश्चित हैं अथवा किसी पर अटक जायें तो आगे बढ़ जायें।

ऐसे प्रश्न जिनमें दीर्घ उत्तरों की आवश्यकता होती है चाहे वो वाक्य खण्ड के रूप में हों अथवा निबन्ध के रूप में। उनके लिए निर्देश में दिए गए शब्दों पर ध्यान केन्द्रित करें। संभावित शब्दों की सूची और उनके अर्थ नीचे दिए हुए हैं।

1. आप प्रश्न के बारे में जो कुछ जानते हैं उसकी पूरी तरह व्याख्या करने में सहायक शब्द:

- **सिद्ध कीजिए:** किसी तथ्य के होने अथवा उसकी सच्चाई को साक्ष्यों अथवा तार्किक वाद-विवाद से प्रदर्शित करना। उदाहरण के लिए सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।
- **हल करना :** किसी गणितीय समस्या का हल अथवा उत्तर निकालना। यह जानना आवश्यक है कि क्या दिया हुआ है? क्या ज्ञात करना है? और समस्या का हल निकालने के लिए आवश्यक आँकड़े क्या हैं? उदाहरण के लिए $x^2 - 5x = 6$ को हल कीजिए।
- **मूल्यांकन करना :** किसी व्यंजक का संख्यात्मक मान परिकलित करना। उदाहरण के लिए $\tan^2 45^\circ - \sin^2 60^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।
- **व्याख्या करना :** स्पष्ट करना, समझाना, यह बताना कि कैसे करना है। उदाहरण के लिए शून्य एक परिमेय संख्या है।
- **व्युत्पन्न करना :** किसी विशिष्ट स्रोत अथवा आधार से कुछ नया प्राप्त करना। एक अवधारणा के तार्किक विस्तारण से दूसरी अवधारणा प्राप्त करना। उदाहरण के लिए एक समांतर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों के योग का व्युत्पन्न करना।

2. विशिष्ट विशेषताओं अथवा कुछ सीमित तथ्यों को जानने वाले शब्द

- **तुलना कीजिये**– समरूपता एवं अन्तर के बिन्दुओं को प्रदर्शित कीजिए।
- **भेद करना**– अन्तर के बिन्दुओं को प्रदर्शित कीजिए।
- **परिभाषित करना**– किसी शब्द अथवा अवधारणा का अर्थ बताइए। इसे उस वर्ग में रखिए जिससे यह संबंध रखता है और इसे उसी वर्ग के अन्य मदों से दूर रखिए।
- **सम्बन्ध स्थापित करना**– दर्शाइए कि वस्तुएं किस प्रकार उत्तर से संबंधित है अथवा जुड़ी हुई हैं।
- **प्रतिपादित करना**– अनुवाद कीजिए, किसी विषय पर टिप्पणी के उदाहरण दीजिए।

3. आपकी समर्पित विचारधारा को जानने वाले शब्द

- **आलोचना करना**– किसी मुद्दे अथवा मद के गुण अथवा सच्चाई के विषय में अपने विचारों का उल्लेख कीजिए। आलोचना समर्थन या विरोध के रूप में हो सकती है।
- **मूल्यांकन करना**– अच्छे अथवा बुरे बिन्दु स्पष्ट कीजिए। लाभ और हानि पर चर्चा के मूल्य पर विचार व्यक्त करना।
- **पुष्टि करना**– अपने निष्कर्ष अथवा निर्णय के लिए उचित कारण बताइए।
- **सिद्ध करना**– वास्तविक प्रमाणों का उल्लेख करते हुए अथवा स्पष्ट एवं तार्किक कारण बताते हुए किसी तथ्य की सच्चाई को स्थापित करना।

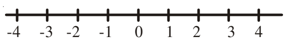
उत्तरों की लम्बाई

उत्तरों की लम्बाई कितना लिखना है यह अक्सर प्रश्न में दिया हुआ होता है इसलिए निर्देशों को ध्यानपूर्वक पढ़ना अति आवश्यक है।

- कुछ प्रश्नों में, विशेषकर निबंधात्मक प्रकार, के बारे में एक तथ्य यह है कि उसे दिए गए अंक अधिकतम होते हैं और यह इस बात की ओर इशारा करता है कि उसका लम्बा उत्तर होगा।
- जहां यह स्पष्टत: बताया जाता है कि एक पैराग्राफ अथवा दो पंक्तियां लिखिए वहां इसका पूर्णतया ध्यान रखना चाहिए।
- यदि शब्द सीमा दी हुई है तो यह एक संकेत है और इसका पालन करना चाहिए।

1

संख्या पद्धति

- **प्राकृत संख्याएं(N):** गिनती की संख्याएं 1, 2, 3, 4, ...सबसे छोटी प्राकृत संख्या 1 है।
- **पूर्ण संख्याएं (W):** प्राकृत संख्याओं में 0 को सम्मिलित करने पर अर्थात् 0, 1, 2, 3, 4 .... शून्य (0) सबसे छोटी पूर्ण संख्या है।
- **पूर्णांक (I):** प्राकृत संख्याओं के ऋणात्मकों को पूर्ण संख्याओं में सम्मिलित करने पर उदाहरणार्थ ....-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 ....
- **संख्या रेखा :** वह रेखा जिस पर संख्याएँ निरूपित की जाती हैं उदाहरणार्थ 

- **परिमेय संख्याएँ (Q):** संख्या p/q एक परिमेय संख्या है, यदि p और q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$.
- **एक परिमेय संख्या का मानक रूप:** p/q को मानक रूप में कहा जाता है, यदि q एक धन संख्या है तथा p और q सह-अभाज्य हैं।

महत्वपूर्ण परिणाम : प्रत्येक पूर्णांक एक परिमेय संख्या है परन्तु प्रत्येक परिमेय संख्या एक पूर्णांक नहीं है प्रत्येक भिन्न एक परिमेय संख्या है परन्तु इसका विलोम सत्य नहीं है।

- **एक परिमेय संख्या का समतुल्य रूप :** दो परिमेय संख्याएं $\frac{p}{q}$ तथा $\frac{r}{s}$ समतुल्य कहलाती हैं यदि $ps = rq$
- **संख्या रेखा पर परिमेय संख्याएं:** प्रत्येक परिमेय संख्या को संख्या रेखा पर निरूपित कर सकते हैं। प्रत्येक परिमेय संख्या के संगत, संख्या रेखा पर केवल एक बिन्दु स्थित होता है परन्तु इसका विलोम सदैव सत्य नहीं होता।
- **परिमेय संख्याओं की तुलना :** संख्याओं के समान हर बनाकर उनके अंशों की तुलना कीजिए। संख्या रेखा पर बड़ी परिमेय संख्या, छोटी परिमेय संख्या के दायीं ओर स्थित होती है।
- **परिमेय संख्याओं का योग:**

यदि $\frac{a}{b}$ तथा $\frac{c}{b}$ दो परिमेय संख्याएं हैं तब,

$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$. $\frac{a}{b}$ तथा $\frac{c}{d}$ के लिए,

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$, परिमेय संख्याओं p तथा q के लिए $p + q = q + p$, परिमेय संख्या p के लिए, $p+0=p=0+p$.

- **परिमेय संख्याओं की घटा:** दो परिमेय संख्याओं

$\frac{a}{b}$ तथा $\frac{c}{b}$ के लिए, $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a+(-c)}{b}$,

$\frac{a}{b}$ तथा $\frac{c}{d}$ के लिए, $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$, p तथा q के लिए, $p-q \neq q-p$, परिमेय संख्या p के लिए $p-0=p$

- **परिमेय संख्याओं की गुणा:** दो परिमेय संख्याओं

$\frac{a}{b}$ तथा $\frac{c}{d}$ के लिए, $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$.

परिमेय संख्याओं p तथा q के लिए $p\times q = q \times p$, परिमेय संख्या p के लिए, $p \times 0 = 0$, $p \times 1 = p$

- **परिमेय संख्याओं की भाग:** परिमेय संख्याओं

$\frac{a}{b}$ तथा $\frac{c}{d}$ के लिए $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$

परिमेय संख्याओं p तथा q के लिए $p\div q \neq q\div p$, परिमेय संख्या p के लिए $p\div 1= p$, $p\div(-1)=-p$, $p \div p = 1$, $p \div(-p)=-1$

- **परिमेय संख्याओं का दशमलव निरूपण:** एक परिमेय संख्या को दशमलव रूप में निरूपित करने

के लिए लम्बे विभाजन की प्रक्रिया दशमलव के प्रयोग सहित करनी पड़ती है।

एक परिमेय संख्या या तो एक सांत दशमलव अथवा एक असांत आवर्ती दशमलव संख्या होती है।

- **दो परिमेय संख्याओं के बीच परिमेय संख्याएं:** दो परिमेय संख्याओं के बीच अनन्त परिमेय संख्याएं विद्यमान होती हैं।

  दो परिमेय संख्याओं के बीच एक परिमेय संख्या उनका औसत ज्ञात करके प्राप्त की जा सकती है।

- **अपरिमेय संख्याएं:** एक दशमलव प्रसार जो न तो सांत है और न ही आवर्ती, एक अपरिमेय संख्या प्रदर्शित करता है।

  परिमेय संख्याओं के अतिरिक्त संख्याएं $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}.0.12345.......$, आदि अपरिमेय के उदाहरण हैं।

- **वास्तविक संख्याएँ :** परिमेय और अपरिमेय संख्याएं मिलकर वास्तविक संख्या पद्धति बनाती हैं।

- **दो परिमेय संख्याओं के बीच अपरिमेय संख्या:** यदि दो परिमेय संख्याएँ q_1 तथा q_2 हैं तब उनके बीच एक अपरिमेय संख्या $\sqrt{q_1 \times q_2}$ होती है जहाँ $q_1 \times q_2$ पूर्ण वर्ग नहीं है यदि $q_1 \times q_2$ पूर्ण वर्ग है तब q_1 तथा q_2 के बीच एक ऐसी संख्या q लीजिए जिससे $q_1 \times q$ अथवा $q \times q_2$ पूर्ण वर्ग न हों

  $\Rightarrow$ $\sqrt{q_1 \times q}$ अथवा $\sqrt{q \times q_2}$ वांछित अपरिमेय संख्या है।

- **एक परिमेय तथा एक अपरिमेय संख्या के बीच अथवा दो अपरिमेय संख्याओं के बीच अपरिमेय संख्या:** दोनों संख्याओं का औसत।

- **संख्याओं के सन्निकट मान:** दी गई संख्या का दशमलव के दिए गए स्थानों तक सन्निकट मान ज्ञात करने के लिए हम उसके दशमलव भाग का अगला अंक देखते हैं और यदि यह अंक 5 या 5 से अधिक है तो हम उससे पिछले अंक में 1 जोड़ते हैं। यदि अंक 5 से कम है तो उसे छोड़ देते हैं।

देखें आपने कितना सीखा :

1. परिमेय संख्या $\frac{-21}{49}$ का न्यूनतम रूप है :

   (A) $\frac{3}{7}$ (B) $\frac{-3}{7}$ (C) $\frac{-7}{3}$ (D) -3

2. $3.\overline{4}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में निम्न प्रकार लिख सकते हैं :

   (A) $\frac{13}{4}$ (B) $\frac{4}{3}$ (C) $\frac{9}{31}$ (D) $\frac{31}{9}$

3. 2 और 7 के बीच स्थित परिमेय संख्याओं की संख्या है :

   (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) असीमित

4. $\sqrt{3}$ तथा 3 के बीच स्थित एक अपरिमेय संख्या है :

(A) $\sqrt{4}$ (B) $\sqrt{10}$ (C) $\sqrt{5}$ (D) $2\sqrt{3}$

5. निम्नलिखित में कौन परिमेय संख्या नहीं है?

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) 3 (C) $\frac{5}{2}$ (D) $\frac{-3}{5}$

6. 1.23 तथा 1.24 के बीच दो परिमेय संख्याएं ज्ञात कीजिए।

7. सरल कीजिए : $(\sqrt{32}\times\sqrt{50})\times\sqrt{72}\div 36\sqrt{8}$.

8. 3 और 4 के बीच तीन अपरिमेय संख्याएं ज्ञात कीजिए।

9. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए :

(A) $\frac{7}{2}$ (B) $\frac{-18}{5}$

10. निम्नलिखित अपरिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए :

(A) $\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{7}$

स्वयं विस्तारण:

1. $\frac{22}{7}$ का दशमलव निरूपण प्राप्त करके टिप्पणी कीजिए, क्या यह परिमेय है अथवा अपरिमेय? इसका दशमलव के तीन स्थानों तक सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।
2. टिप्पणी कीजिए, 0 एक परिमेय संख्या है या नहीं। अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

उत्तर:

देखें आपने कितना सीखा:

1. B 2. D 3. D 4. C

5. A 6. 1.2325, 1.235 7. $\frac{10}{3}$

8. $2\sqrt{3}$, $\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{3}+2$

स्वयं विस्तारण:

1. $\frac{22}{7}=3.\overline{142857}$, अत: यह एक परिमेय संख्या है, इसका लगभग मान 3.143 है।
2. हाँ, शून्य एक परिमेय संख्या है क्योंकि 0 को $\frac{0}{\text{कोई शून्येतर पूर्णांक}}$ लिख सकते हैं।

2

घातांक तथा करणी

- **घातांकीय संकेतन:** किसी संख्या को स्वयं से कई बार गुणा करने का संकेतन उदाहरण के लिए $a \times a \times a \times a = a^4$
- **आधार और घातांक:** $a^n = a \times a \times a....$ n बार, a आधार है, n घातांक (घात) है।
- **किसी घातांक को पढ़ना:** $5 \times 5 \times 5 \times ..... 20$ बार $= 5^{20}$ को 5 की घात 20 या 5 की 20वीं घात पढ़ते हैं।
- **अभाज्य गुणनखण्डन:** 1 के अतिरिक्त किसी प्राकृत संख्या को अभाज्य संख्याओं की घातों के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है।

घातांकों के नियम : $a^m \times a^n = a^{m+n},\ a \neq 0$

$$a^m \div n^n = a^{m-n} \text{ (यदि } m > n),$$

$$a^m \div a^n = \frac{1}{a^{n-m}} \text{ (यदि } m < n)$$

$$(a^m)^n = a^{mn},\ a \neq 0$$

$$a^0 = 1,\ a \neq 0$$

$$(a \times b)^m = a^m \times b^m,\ a \neq 0, b \neq 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m},\ a \neq 0, b \neq 0$$

- **ऋणात्मक पूर्णांक घातांक के रूप में :** यदि a एक शून्येत्तर परिमेय संख्या है तथा m एक पूर्णांक है, तो a^m का व्युत्क्रम a^{-m} या $\frac{1}{a^m}$ होता है। इसे a की घात (–m) या $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$ पढ़ते हैं।
- **करणी:** $\sqrt[n]{x}$ एक करणी होगी यदि और केवल यदि यह एक अपरिमेय संख्या है तथा यह एक धनात्मक परिमेय संख्या का मूल है। $\sqrt{\ }$ को करणी चिह्न कहा जाता है। घात n को करणी की घात तथा x को करणीगत कहते हैं।
- **शुद्ध और मिश्रित करणियां :** ऐसी करणी जिसका एक परिमेय गुणनखण्ड केवल 1 है तथा दूसरा गुणनखण्ड एक अपरिमेय संख्या है, शुद्ध करणी कहलाती है उदाहरण के लिए $\sqrt[5]{16}, \sqrt[3]{50}$.

  ऐसी करणी, जिसका परिमेय गुणनखण्ड 1 के अतिरिक्त अन्य परिमेय संख्या है जबकि अन्य गुणनखण्ड अपरिमेय संख्या है मिश्रित करणी कहलाती है उदाहरण के लिए $5\sqrt[2]{3}, 4\sqrt[3]{7}$

करणियों के नियम: यदि x, y धनात्मक परिमेय संख्या हैं तथा m, n और p धनात्मक पूर्णांक हैं,

तो $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$

$$\sqrt[n]{x}.\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy} \text{ अथवा } x^{\frac{1}{n}}.y^{\frac{1}{n}} = (xy)^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}} \text{ अथवा } \frac{x^{1/n}}{y^{1/n}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} \text{ अथवा}$$

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{1}{mn}} = \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} \text{ अथवा } \left(x^m\right)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[n]{x^p} = \sqrt[mn]{x^{mp}} \text{ अथवा } x^{\frac{pm}{mn}} = \left(x^{pm}\right)^{\frac{1}{mn}}$$

- **सजातीय करणियां:** दो करणियां सजातीय कहलाती हैं यदि उनके अपरिमेय गुणनखण्ड समान हैं। उदाहरण के लिए $3\sqrt{5}$ तथा $7\sqrt{5}$ सजातीय करणियां हैं।

- **करणी का सरलतम या न्यूनतम रूप:** एक करणी अपने सरलतम रूप में होती हे, यदि करणी चिह्न की घात न्यूनतम हो, करणी चिह्न के अंतर्गत कोई भिन्न न हो, n घात के करणी चिह्न में a^n रूप का कोई गुणनखण्ड न हो, जहाँ a धन पूर्णांक है।
- **करणियों के नियम:**
  (i) सजातीय करणियों को जोड़ तथा घटा सकते हैं।
  (ii) एक करणी की घात को बदलने के लिए हम करणी की घात को तथा करणीगत की घात को एक ही धनात्मक पूर्णांक से गुणा कर देते हैं। समान घात की करणियों को गुणा और भाग कर सकते हैं।
- **करणियों की तुलना:** दी गई करणियों को समान घात की करणियों में बदलते हैं, फिर उनके करणीगतों की उनके गुणांकों सहित तुलना करते हैं।
- **करणी का परिमेयकारी गुणक:** यदि दो करणियों का गुणनफल परिमेय है, प्रत्येक करणी को दूसरी करणी का परिमेयकारी गुणक कहते हैं। $x+\sqrt{y}$ का परिमेयकारी गुणक $x-\sqrt{y}$ है तथा विलोमतः

देखें आपने कितना सीखा :

1. $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^5$ बराबर है:

   (A) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{15}$ (B) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-15}$ (C) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{8}$ (D) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{2}$

2. करणी $3\sqrt[5]{47}$ की घात है:

   (A) 5 (B) 3 (C) 47 (D) $\frac{1}{5}$

3. $\sqrt[3]{25}$ का परिमेयकारी गुणक है:

   (A) 5 (B) $\sqrt{5}$ (C) $\sqrt[3]{5}$ (D) $\sqrt[3]{25}$

4. $\sqrt{8}$ है, एक:

   (A) शुद्ध करणी (B) मिश्रित करणी (C) करणी नहीं (D) परिमेय संख्या

5. $\left(-\frac{3}{4}\right)^0$ बराबर है:

   (A) -1 (B) 1 (C) $\frac{-3}{4}$ (D) $\frac{-4}{3}$

6. निम्नलिखित में से प्रत्येक को अभाज्य संख्याओं के घातांकों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए:

   (i) 194400 (ii) 864360

7. निम्नलिखित मिश्रित करणियों को न्यूनतम रूप में व्यक्त कीजिए:

(i) $\sqrt[4]{1215}$ (ii) $\sqrt[3]{1024}$

8. निम्नलिखित को शुद्ध करणी में व्यक्त कीजिए:

(i) $5\sqrt{2}$ (ii) $4\sqrt[3]{5}$ (iii) $2\sqrt[5]{2}$

9. निम्नलिखित में से प्रत्येक को सरल कीजिए:

(i) $3\sqrt{80}-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}+3\sqrt{120}$ (ii) $2\sqrt{50}\times\sqrt{32}\times2\sqrt{72}$ (iii) $\frac{15\sqrt[3]{13}}{6\sqrt[6]{5}}$

10. (i) $\sqrt[3]{2},\sqrt{3}$ तथा $\sqrt[6]{5}$ को आरोही क्रम में लिखिए।

(ii) $\sqrt[3]{2},\sqrt[4]{3},\sqrt[3]{4}$ को अवरोही क्रम में लिखिए।

11. निम्नलिखित के हर का परिमेयकरण करके सरल कीजिए:

(i) $\frac{28}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ (ii) $\frac{\sqrt{7}-2}{\sqrt{7}+2}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

स्वयं विस्तारण:

1. यदि $\left(\frac{5}{7}\right)^{5+x}\div\left(\frac{25}{49}\right)^{x}=\left(\frac{7}{5}\right)^{2}$ तो, x का मान ज्ञात कीजिए:

2. सरल कीजिए: $\left(\frac{-5}{6}\right)^{2}\div\left(\frac{-3}{5}\right)^{2}$ ।

3. यदि $x=7+4\sqrt{3}$, तो $x+\frac{1}{x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

4. यदि $\frac{5+2\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}=a+b\sqrt{3}$, तो a तथा b के मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर

देखें आपने कितना सीखा :

1. C 2. A 3. C
4. B 5. B
6. (i) $2^5\,3^5\,5^2$ (ii) $2^5\,3^2\,5^1\,7^4$
7. (i) $3\sqrt[4]{15}$ (ii) $8\sqrt[3]{2}$
8. (i) $\sqrt{50}$ (ii) $\sqrt[3]{320}$ (iii) $\sqrt[5]{64}$
9. (i) $\frac{88}{5}\sqrt{5}$ (ii) $960\sqrt{2}$ (iii) $\frac{1}{2}\sqrt[6]{845}$
10. (i) $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[6]{5}$, $\sqrt{3}$
(ii) $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[3]{2}$
11. (i) $7\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)$ (ii) $\frac{11-4\sqrt{7}}{3}$
(iii) $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{30}}{12}$

स्वयं विस्तारण:

1. $x=7$ 2. $\frac{625}{324}$
3. 14 4. $a=11, b=-6$

3

बीजीय व्यंजक तथा बहुपद

- **अचर:** किसी निश्चित मात्रा को व्यक्त करने वाली संख्या उदाहरण के लिए 0, 1, 2 ....
- **चर:** एक ऐसी अक्षर संख्या जिसके विभिन्न मान हो सकते हैं। एक चर को अंग्रेजी के अक्षर a, b, c, x, y, z आदि से प्रदर्शित करते हैं।
- **बीजीय व्यंजक:** एक बीजीय व्यंजक अचर तथा चरों का संयोजन होता है जो मूलभूत संक्रियाओं (+, -, ×, ÷) में से किसी एक या सभी से संयोजित होता है।
- **पद:** चिह्न सहित लिखने पर व्यंजक का प्रत्येक भाग व्यंजक का पद कहलाता है।
- **एकपदी:** एक बीजीय व्यंजक जिसका एक पद हो उदाहरण के लिए $6a^2$, $3x^2y^2$ आदि।
- **द्विपद:** एक बीजीय व्यंजक जिसके दो पद हों उदाहरण के लिए $a^2 + b^2$, $7xy + y^2$ आदि।
- **त्रिपद:** एक बीजीय व्यंजक जिसके तीन पद हों उदाहरण के लिए $x^2 + y^2 + z^2$, $x^2 + 2xy + y^2$ आदि।
- **बहुपद:** एक बीजीय व्यंजक, जिसके हर में चर न हो तथा चरों के घातांक पूर्ण संख्याओं में हों तथा विभिन्न पदों के संख्यात्मक गुणांक वास्तविक संख्याएं हों उदाहरण के लिए $x^3 - 2y^2 + y - \sqrt{7}$ एक बहुपद है जबकि $x^3 - \frac{1}{x}$ एक बहुपद नहीं है।
- **गुणनखण्ड:** जब दो या दो से अधिक संख्याओं या चरों को गुणा करते हैं तब उनमें से प्रत्येक संख्या तथा उसका गुणा अपने गुणनफल का एक गुणनखण्ड कहलाती है। एक अचर गुणनखण्ड सांख्यिकीय (अंकीय) गुणनखण्ड है जबकि चर एक अक्षर गुणनखण्ड है।
- **गुणांक:** किसी पद का प्रत्येक गुणनखण्ड चिह्न सहित लिखने पर, अन्य गुणनखण्डों के गुणनफल का गुणांक कहलाता है। उदाहरण के लिए $-3xy$ में x का गुणांक $-3y$ है।
- **अचर पद:** ऐसा पद जिसमें अक्षर गुणनखण्ड न हों उदाहरण के लिए $2x + 9y + 7$ में अचर पद 7 है।
- **सजातीय तथा विजातीय पद:** वे पद जिनमें समान अक्षर गुणनखण्ड होते हैं सजातीय पद कहलाते हैं तथा जिनमें विभिन्न अक्षर गुणनखण्ड होते हैं विजातीय पद कहलाते हैं।
- **बहुपद की घात:** एक पद में चरों के घातांकों का योगफल उस पद की घात कहलाता है। एक बहुपद की घात उस बहुपद के विभिन्न पदों में अधिकतम घात तथा शून्येतर गुणांक वाले पद की घात होती है।
- **द्विघातीय बहुपद:** एक ऐसा बहुपद जिसकी घात 2 हो उदाहरण के लिए $x^2 - 3x + 2$.
- **शून्य घात बहुपद:** शून्येतर अचर बहुपद की घात शून्य '0' ली जाती है।
- **शून्य बहुपद:** यदि बहुपद के सभी पदों में चर के गुणांक शून्य हों, तो बहुपद शून्य बहुपद कहलाता है। शून्य बहुपद की घात परिभाषित नहीं है।
- **बहुपद के शून्यक:** चर का वह मान, जिसके लिए एक चर के बहुपद का मान शून्य हो जाए।
- **बहुपदों का योग तथा व्यवकलन (घटाना):** दो या अधिक सजातीय पदों का योग एक सजातीय पद होता है जिसका गुणांक सजातीय पदों के गुणांकों का योगफल होता है।

  दो सजातीय पदों का अन्तर एक सजातीय पद होता है, जिसका गुणांक सजातीय पदों के गुणांकों का अन्तर होता है।

  बहुपदों का योग करने के लिए सजातीय पदों का योग कर लेते हैं। उदाहरण के लिए $2x + 3x = 5x$,

$3x^2y+8x^2y=11x^2y$

एक बहुपद में से दूसरे बहुपद को घटाने के लिए एक सजातीय पद में से दूसरे को घटाते हैं उदाहरण के लिए

$9x^2y^2-5x^2y^2=4x^2y^2$, $5y-2y=3y$.

- **बहुपदों का गुणनफल:** एक एकपदी को दूसरे एकपदी से गुणा करने के लिए, घातांकों के नियमों तथा चिह्नों के नियम का प्रयोग करते हैं उदाहरण के लिए $3a \times a^2b^2 = 3a^3b^2$

  एक बहुपद को एकपदी से गुणा करने के लिए, बहुपद के प्रत्येक पद को उस एकपदी से गुणा करते हैं।

  एक बहुपद को एक अन्य बहुपद से गुणा करने के लिए, एक बहुपद के प्रत्येक पद को दूसरे बहुपद के प्रत्येक पद से गुणा करते हैं तथा सजातीय पदों को इकट्ठा करके परिणाम को सरल करते हैं।

- **बहुपदों का भाग :** किसी एकपदी को दूसरे एक पदी से भाग करने के लिए, घातांकों के नियमों द्वारा संख्यात्मक गुणांकों तथा चरों का भागफल अलग-अलग ज्ञात करते हैं तत्पश्चात् इन भागफलों को परस्पर गुणा करते हैं।

  एक बहुपद को एकपदी से भाग करने के लिए, बहुपद के प्रत्येक पद को एकपदी से भाग करते हैं।

  एक बहुपद को दूसरे बहुपद से भाग करने की संक्रिया अंकगणित में भाग की संक्रिया की तरह ही है।

  इसके लिए सर्वप्रथम दोनों बहुपदों को उभयनिष्ठ चर के घातांकों के अवरोही क्रम में लिखकर व्यवस्थित किया जाता है।

  भाज्य = भाजक x भागफल + शेषफल

देखें आपने कितना सीखा :

1. शून्येतर अचर की घात है:

   (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

2. $7x^5y^3$ में x^5 का गुणांक है:

   (A) 7 (B) 4^3 (C) $7y^3$ (D) 5

3. बहुपद $5x^6y^4 + x^2y + xy^2 - 3xy + 4$ की घात है:

   (A) 2 (B) 3 (C) 6 (D) 10

4. निम्नलिखित में कौन सा बहुपद है?

   (A) $x^2 - 5\sqrt{x} + 2$ (B) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ (C) $\frac{5}{x^2-3x+1}$ (D) इनमें कोई नहीं

5. बहुपद $x^2-2x-15$ का एक शून्यक है:

   (A) –5 (B) –3 (C) 0 (D) 3

6. निम्नलिखित युग्मों में से कौन सा युग्म सजातीय पदों का युग्म है?

   (A) 2a, 2b (B) $2xy^3, 2x^3y$ (C) $3x^2y, \frac{1}{\sqrt{2}}yx^2$ (D) 8, 16a

7. $\frac{2}{3}x^2+x+1$ तथा $\frac{3}{7}x^2+\frac{1}{4}x+2$ का योग कीजिए।

8. $x^2 - 5x + 2$ में से $7x^3 - 3x^2 + 2$ घटाइए।
9. $(2x + 3)$ तथा $(x^2 - 3x + 4)$ को गुणा कीजिए।
10. $6x^2 - 5x + 1$ को $2x - 1$ से भाग करने पर भागफल और शेषफल ज्ञात कीजिए।
11. यदि $x = 2, y = 1, z = -3$, तो $3xy - x^3 - y^3 + z^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

स्वयं विस्तारण:

1. $x^2 + xy + y^2$ में क्या जोड़ें कि $2x^2 + 3xy$ प्राप्त हो जाये?
2. $-13x + 5y - 8$ में से क्या घटायें कि $11x - 16y + 7$ प्राप्त हो जाये?
3. $(x^2 + xy + y^2)$ तथा $(x - y)$ के गुणनफल में से $(x^2 - xy + y^2)$ तथा $(x + y)$ का गुणनफल घटाओ। गुणनफल में x^3 का गुणांक क्या है?
4. $3x - y + 2xy$ तथा $-y - xy$ के योग में से $3x - y - xy$ घटाओ। परिणाम में x का गुणांक क्या है?

उत्तर:

देखें आपने कितना सीखा:

1. A　　2. C　　3. D
4. D　　5. B　　6. C
7. $\frac{23}{21}x^2 + \frac{5}{4}x + 6$　　8. $-7x^3 + 4x^2 - 5x$
9. $2x^3 - 3x^2 - x + 12$
10. भागफल $= 3x - 1$, शेषफल $= 0$
11. -54

स्वयं विस्तारण:

1. $x^2 + 2xy - y^2$　　2. $-24x + 21y - 15$
3. $-2y^3, 0$　　4. $2xy - y, 2y$

4

विशेष गुणनफल तथा गुणनखण्डन

- **विशेष गुणनफल:** गुणनफलों 108×108, 97×97, 104×96 को क्रमश: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, $(a+b)(a-b)$ की सहायता से आसानी से ज्ञात कर सकते हैं। इस प्रकार के गुणनफल विशेष गुणनफल कहलाते हैं।

विशेष गुणनफल के सूत्र:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

$(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$

$(a-b)^3 = a^3 - 3ab(a-b) - b^3$

$(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$

$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

- **बहुपदों का गुणखण्डन:** एक बहुपद का गुणनखण्डन, बहुपद को दो (अथवा अधिक) बहुपदों के गुणनफल के रूप में लिखने की प्रक्रिया है। गुणनफल में प्रत्येक बहुपद, दिए गए बहुपद का गुणनखण्ड कहलाता है।
- **गुणनखण्डन की विधियां:** वितरण गुण द्वारा गुणनखण्डन।

  दो वर्गों के अन्तर वाले बहुपदों का गुणनखण्डन।

  पूर्ण वर्ग बहुपद का गुणनखण्डन।

  वह बहुपद, जिसे दो वर्गों के अन्तर के रूप में व्यक्त किया जा सके, का गुणनखण्डन।

  पूर्णघन बहुपदों का गुणनखण्डन।

  ऐसे बहुपदों, जिनमें दो घनों का योग अथवा अन्तर सम्मिलित हो, का गुणनखण्डन।

  मध्य पद को विभक्त करके त्रिपदों के गुणनखण्ड करना।
- **बहुपदों का म. स.:** दो या दो से अधिक बहुपदों का महत्तम समापवर्तक (म.स.) अधिकत्तम घातों वाले बहुपदों तथा सर्वाधिक संख्यात्मक गुणाकों का गुणनफल होता है तथा यह दिए गए बहुपदों का गुणनखण्ड होता है।
- **बहुपदों का ल.स.:** दो या दो से अधिक बहुपदों का लघुत्तम समापवर्त्य (ल.स.) न्यूनतम घात वाले बहुपद और न्यूनतम संख्यात्मक गुणांकों का गुणनफल होता है तथा यह दिए गए बहुपदों द्वारा विभाजित होता है।
- **परिमेय व्यंजक:** एक बीजीय व्यंजक जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ p कोई एक बहुपद तथा q शून्येतर बहुपद है। यह आवश्यक नहीं कि प्रत्येक परिमेय व्यंजक बहुपद भी हो प्रत्येक बहुपद एक परिमेय व्यंजक भी होता है।
- **परिमेय व्यंजकों पर संक्रियाएँ:** परिमेय व्यंजकों में चारों मूलभूत संक्रियाएँ $(+, -, \times, \div)$ ठीक उसी प्रकार से की जाती हैं, जिस प्रकार से परिमेय संख्याओं में होती हैं।

  परिमेय संख्याओं का गुणनफल न्यूनतम पदों अथवा न्यूनतम रूप में होना चाहिए।

  परिमेय व्यंजकों का योग, व्यवकलन, गुणनफल तथा भागफल भी परिमेय व्यंजक होता है।
- **व्युत्क्रम व्यंजक (व्यंजक का व्युत्क्रम):** व्यंजक $\frac{S}{R}$, व्यंजक $\frac{R}{S}$ का व्युत्क्रम व्यंजक है। दो परिमेय व्यंजको का भाग ज्ञात करने के लिए हम इस प्रकार लिखते है: $\frac{P}{Q} \div \frac{R}{S} = \frac{P}{Q} \times \frac{S}{R}$
- **परिमेय व्यंजक को न्यूनतम पदों में व्यक्त करना:** यदि परिमेय व्यंजक के अंश तथा हर में कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है, तो उसे काट देते हैं।

देखें आपने कितना सीखा :

1. निम्नलिखित में से कौन परिमेय व्यंजक नहीं है?

   (A) $\sqrt{21}$ (B) $x+\frac{1}{x}$ (C) $8\sqrt{x}+6\sqrt{y}$ (D) $\frac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}$

2. $(a^2+b^2)^2+(a^2-b^2)^2$ बराबर है:

   (A) $2(a^2+b^2)$ (B) $4(a^2+b^2)$ (C) $4(a^4+b^4)$ (D) $2(a^4+b^4)$

3. यदि $m-\frac{1}{m}=-\sqrt{3}$, तो $m^3-\frac{1}{m^3}$ बराबर है:

   (A) $-6\sqrt{3}$ (B) $-3\sqrt{3}$ (C) 0 (D) $6\sqrt{3}$

4. $\frac{327\times327-323\times323}{327+323}$ बराबर है:

   (A) 650 (B) 327 (C) 323 (D) 4

5. $8m^3-n^3$ बराबर है:

   (A) $(2m-n)(4m^2-2mn+n^2)$

   (B) $(2m-n)(4m^2+2mn+n^2)$

   (C) $(2m-n)(4m^2+4mn+n^2)$

   (D) $(2m+n)(4m^2+2mn+n^2)$

6. $\frac{x+2}{x-2}$ तथा $\frac{x-2}{x+2}$ का योग ज्ञात कीजिए।

7. x^2-1 तथा x^2-x-2 का ल.स. ज्ञात कीजिए।

8. $36x^5y^2$ तथा $90x^3y^4$ का म.स. ज्ञात कीजिए।

9. गुणनखण्ड कीजिए: (i) x^4-81y^4 (ii) $5x^2-8x-4$.

10. निम्नलिखित को सरल कीजिए:

$$\frac{6x^2+17x+12}{10x^2+17x+3}\div\frac{6x^2-7x-20}{10x^2-23x-5}$$

स्वयं विस्तारण:

1. यदि $a^4 + \frac{1}{a^4} = 34$, तो $a^3 - \frac{1}{a^3}$ का मान ज्ञात कीजिए।
2. $\frac{x+1}{x-1}$ तथा इसके व्युत्क्रम का योग ज्ञात कीजिए।
3. वास्तविक गुणा किए बिना $103 \times 103 \times 103$ का मान ज्ञात कीजिए।
4. $x^3 - y^3$ का मान ज्ञात कीजिए, जबकि $x - y = 5$ तथा $xy = 66$ हो।

उत्तर:

देखें आपने कितना सीखा :

1. C 2. D 3. A
4. D 5. B

6. $\frac{2x^2+8}{x^2-4}$ 7. $(x^2-1)(x-2)$
8. $18x^3y^2$
9. (i) $(x^2+9y^2)\ (x+3y)\ (x-3y)$
   (ii) $(x-2)\ (5x+2)$
10. 1

स्वयं विस्तारण:

1. 14 2. $\frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)}$
3. 1092727 4. 1115

5

रैखिक समीकरण

- **रैखिक बहुपद:** ऐसा बहुपद जिसकी घात एक हो।
- **समीकरण:** जिसमें दो व्यंजकों को बराबर के चिह्न से अलग करके लिखते हैं।
- **रैखिक समीकरण:** ऐसा समीकरण जिसमें केवल रैखिक बहुपद हो।

  अधिकतमक (सबसे बड़ी घात) 1 हो।

  एक चर के रैखिक समीकरण का व्यापक रूप $ax + b = 0, a \neq 0$, है जहाँ a तथा b वास्तविक संख्याएँ हैं।
- **बायाँ पक्ष:** समता चिह्न से बायीं ओर दर्शाता है।
- **दायाँ पक्ष:** समात चिह्न से दायीं ओर दर्शाता है।
- **एक चर के रैखिक समीकरण का हल:** चर का ऐसा मान जिसे दिए गए समीकरण में रखने पर बायां पक्ष (LHS) तथा दायां पक्ष (RHS) बराबर हो जायें।
- **एक समीकरण को हल करने के नियम:** समीकरण के दोनों पक्षों में एक समान संख्या जोड़ सकते हैं।

  समीकरण के दोनों पक्षों में से एक समान संख्या घटा सकते हैं।

  समीकरण के दोनों पक्षों को एक समान शून्येतर संख्या से गुणा कर सकते हैं।

  समीकरण के दोनों पक्षों में एक समान शून्येतर संख्या से भाग कर सकते हैं।
- **पक्षान्तरण:** वह विधि जिसके द्वारा किसी पद को एक पक्ष से दूसरे पक्ष में ले जाते हैं तो चिह्न बदल जाता है।
- **एक चर में रैखिक समीकरण बनाना:** अज्ञात को अक्षर x, y, z, m, n, p आदि से दर्शाते हैं तथा दिए गए कथन को एक समीकरण में बदलते हैं।
- **दो चरों का रैखिक समीकरण:** $ax + by + c = 0$ दो चरों x तथा y में एक रैखिक समीकरण है। दो चरों वाले रैखिक समीकरण के असंख्य हल हैं।

  $ax + by + c = 0$ में y के प्रत्येक मान के लिए, हमें x का एक अद्वितीय मान प्राप्त होता है।

  $$\Rightarrow ax = -by - c \Rightarrow x = \frac{-by}{a} - \frac{c}{a}$$

  रैखिक समीकरण $ax + c = 0, a \neq 0$ को दो चरों वाला रैखिक समीकरण माना जा सकता है जब यदि उसे $ax + 0.y + c = 0$ के रूप में लिखा जाये।
- **दो चरों में रैखिक समीकरण के आलेख:** एक समतल में कम से कम दो ऐसे बिन्दु ज्ञात कीजिए जिनके निर्देशांक उस समीकरण के हल हों। उन्हें तल में आलेखित कीजिए तथा उनको पैमाने का प्रयोग करके परस्पर मिलाइए।

  दो चरों के रैखिक समीकरण का आलेख हमेशा एक सरल रेखा होती है।
- **रैखिक समीकरण निकाय:** दो चरों वाले रैखिक समीकरण युग्म को रैखिक समीकरण निकाय कहते हैं तथा उसे इस प्रकार लिखते हैं $a_1x+b_1y+c_1=0$ (दोनों $a_1, b_1 \neq 0$)

  $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ (दोनों $a_2, b_2 \neq 0$) जहाँ $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ वास्तविक संख्याएँ हैं।

  रैखिक समीकरण निकाय को आलेखीय विधि अथवा किसी बीजीय विधि द्वारा हल कर सकते हैं।
- **रैखिक समीकरण निकाय के हल करने की आलेखीय विधि:** दोनों समीकरणों के आलेख एक ही ग्राफ पेपर पर खींचिए।

  यदि आलेख (ग्राफ) की रेखाएं प्रतिच्छेदित करती हैं तो वह प्रतिच्छेदित बिन्दु निकाय का एक अद्वितीय हल होता है।

  यदि दो रेखाएँ सम्पाती हैं तो निकाय के अनन्त हल होते हैं।

यदि आलेख की रेखाएं समान्तर हैं तब निकाय का कोई हल नहीं होता है।

- **रैखिक समीकरण निकाय के हल करने की बीजीय विधिः**

  प्रतिस्थापन विधिः एक समीकरण से एक चर का मान दूसरे चर के रूप में ज्ञात करते हैं तथा इसे दूसरे समीकरण में प्रतिस्थापित करते हैं दूसरा समीकरण एक चर वाला रैखिक समीकरण बन जाता है।

  विलोपन विधिः दोनों समीकरणों को उचित शून्येतर संख्या से गुणा कर किसी एक चर के गुणांक को संख्यात्मक रूप से समान करते हैं। तब एक समीकरण को दूसरे समीकरण में जोड़ कर या घटाकर एक चर का विलोपन कर देते हैं, परिणामस्वरूप हमें एक चर में एक समीकरण प्राप्त होता है।

- **रैखिक समीकरणों पर आधारित शाब्दिक प्रश्नः** दी गई सूचना को रैखिक समीकरण में बदलकर उन्हें हल करते है।

देखें आपने कितना सीखा :

1. रैखिक समीकरण की घात है:

   (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 0

2. निम्नलिखित में से कौन $x + 3 = 9$ का हल है?

   (A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 12

3. निम्नलिखित में से कौन सा क्रमित युग्म, $4x - 3y + 1 = 0$ द्वारा निरूपित सरल रेखा पर स्थित है:

   (A) (2, 1) (B) (5, 3) (C) (3, 2) (D) (5, 7)

4. यदि बिन्दु (K, 4) सरल रेखा $3x + y = 10$ पर स्थित है तो K का मान है:

   (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

5. दो चरों वाले रैखिक समीकरण निकाय का एक अद्वितीय हल है, यदि उसका आलेख है:

   (A) प्रतिच्छेदी रेखाएँ (B) सम्पाती (समान) रेखाएँ

   (C) समान्तर रेखाएँ (D) इनमें से कोई नहीं

6. निम्नलिखित समीकरण निकाय को आलेखीय विधि द्वारा हल कीजिए:

   $x - 2y = 7, 3x + y = 35.$

7. निम्नलिखित समीकरण निकाय को प्रतिस्थापन विधि द्वारा हल कीजिए:

   $2x + 3y = 13, 5x - 7y = -11.$

8. निम्नलिखित समीकरण युग्म को विलोपन विधि द्वारा हल कीजिए:

   $3x + 2y = 11, 2x + 3y = 4$

9. यदि एक भिन्न के अंश में 1 कम दिया जाये तो यह $\frac{2}{3}$ हो जाती है तथा हर को 5 बढ़ा दिया जाये तो भिन्न $\frac{1}{2}$ हो जाती है, भिन्न ज्ञात कीजिए।

10. एक आयत का परिमाप 20 सेमी. है यदि उसकी लम्बाई, चौड़ाई से 4 सेमी. अधिक है, तो आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

स्वयं विस्तारण:

1. $4x + 5y = 20$ का आलेख बनाइए। यह भी दर्शाइए कि बिन्दु (2, 3) रेखा $4x + 5y = 20$ पर स्थित नहीं है।
2. p तथा q के लिए हल कीजिए:

   $$4p + \frac{6}{q} = 15,$$

   $$6p - \frac{8}{q} = 14$$
3. निम्नलिखित समीकरणों के युग्म का आलेख बनाइए: $2x - y = -8$, $8x + 3y = 24$
   इन समीकरणों द्वारा निरूपित रेखाओं से बने त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

उत्तर:

देखें आपने कितना सीखा:

1. A 2. B 3. D 4. B
5. A 6. $x = 11, y = 2$
7. $x = 2, y = 3$ 8. $x = 5, y = -2$
9. $\frac{7}{9}$ 10. 21 वर्ग सेमी.

स्वयं विस्तारण:

2. $p = 3, q = 2$
3. (0, 8) (-4, 0) तथा (3, 0)

6

द्विघात समीकरण

● **द्विघात बहुपदः** ऐसा बहुपद जिसकी घात 2 हो।

द्विघात समीकरणः एक समीकरण जिसकी घात 2 हो।

● **द्विघात समीकरण का व्यापक रूपः** $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$ जहां a, b, c वास्तविक संख्याएं हैं तथा x एक चर है।

● **द्विघात समीकरण के मूलः** द्विघात समीकरण के चर का वह मान जिससे समीकरण संतुष्ट होता है, द्विघात समीकरण का मूल कहलाता है। यदि $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, तो α, समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का मूल है।

द्विघात समीकरण के दो मूल होते हैं।

द्विघात बहुपद के शून्यक तथा संगत द्विघात समीकरण के मूल समान होते हैं।

● **द्विघात समीकरण हल करने की विधियाँ:**

(i) गुणनखण्ड विधि

(ii) द्विघात सूत्र के प्रयोग द्वारा

● **$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ को हल करने की गुणनखण्ड विधिः** $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ को दो रैखिक गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में प्रकट कीजिए।

प्रत्येक गुणनखण्ड को शून्य के बराबर रखते हैं तब चर के मान प्राप्त होते हैं। ये मान दिए गए समीकरण के अभीष्ट मूल हैं।

● **द्विघात सूत्रः**

समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ तथा $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ होते हैं।

● **विविक्तकरः**

व्यंजक $b^2 - 4ac$ समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का विविक्तकर कहलाता है तथा इसे D द्वारा निरूपित किया जाता है।

● **मूलों की प्रकृतिः** एक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ के लिए

(i) यदि $D = b^2 - 4ac > 0$ तो दो भिन्न वास्तविक मूल होंगे।

(ii) यदि $D = b^2 - 4ac = 0$ तो दो समान (या सम्पाती) वास्तविक मूल होंगे।

(iii) यदि $D = b^2 - 4ac < 0$ कोई वास्तविक मूल नही होगा।

● **शाब्दिक समस्याएं या दैनिक जीवन की समस्याएं**

शाब्दिक समस्या को द्विघात समीकरण का प्रयोग करके हल करने के लिए दी गयी समस्या को द्विघात समीकरण में बदलते हैं तथा समीकरण को गुणनखण्ड विधि या द्विघात सूत्र का प्रयोग कर हल करते हैं।

देखें आपने कितना सीखाः

निम्नलिखित में से कौन द्विघात समीकरण नहीं है:

1. (A) $(x - 1)(x + 3) = 6$ (B) $x + \dfrac{1}{x} = 7$

(C) $3x^2 - 5x + 2 = 0$ (D) $x^2 + 2\sqrt{x} + 3 = 0$

2. यदि द्विघात समीकरण $3x^2 + mx + 2 = 0$ के मूल वास्तविक तथा समान हैं, तो m का मान है:

(A) $-\sqrt{6}$ (B) $\sqrt{6}$ (C) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (D) $\pm 2\sqrt{6}$

3. द्विघात समीकरण $5x^2 - 6x - 2 = 0$ का विविक्तकर है:

(A) 56 (B) 66 (C) 76 (D) 86

4. यदि द्विघात समीकरण $x^2 - \alpha x - 5 = 0$ का एक मूल 5 है तो दूसरा मूल है:

(A) -1 (B) 1 (C) $-\alpha$ (D) α

5. द्विघात समीकरण $x^2 - 14x + 45 = 0$ के मूल हैं:

(A) वास्तविक तथा समान (B) वास्तविक तथा भिन्न-भिन्न

(C) वास्तविक नहीं (D) इनमें से कोई नहीं

6. निम्नलिखित समीकरणों को गुणनखण्ड विधि द्वारा हल कीजिए:

(i) $x^2 + 3x = 18$ (B) $2x^2 + 5x - 3 = 0$

7. द्विघात सूत्र का प्रयोग करके निर्मनिलिखित द्विघात समीकरणों को हल कीजिए:

(i) $3x^2 - 4x - 7 = 0$ (ii) $6x^2 - 19x + 15 = 0$

8. एक पिता और उसके पुत्र की आयु (वर्षो में) का योग 60 है तथा उनकी आयु का गुणनफल 576 है। उनकी आयु ज्ञात कीजिए।

9. दो क्रमागत विषम पूर्णांक ज्ञात कीजिए यदि उनके वर्गों का योगफल 290 है।

स्वयं विस्तारण:

1. यदि द्विघात समीकरण $2x^2 + px - 15 = 0$ का एक मूल -5 है तथा द्विघात समीकरण $P(x^2 + x) + k = 0$ के मूल समान हैं, तो K का मान ज्ञात कीजिए।

2. K का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए द्विघात समीकरण $x^2 - 4x + K = 0$ के दोनों मूल वास्तविक तथा भिन्न-भिन्न हों।

3. समीकरण हल कीजिए: $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = \frac{34}{15}$, $x \neq 0, -1$।

4. यदि समीकरण $3x^2 - 2kx + 2m = 0$ के मूल $x = 2$ तथा $x = 3$ हैं, तो k तथा m का मान ज्ञात कीजिए।

5. K का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए $x^2 - 2x(1+3k) + 7(3+2k) = 0$ के मूल वास्तविक तथा समान हैं।

उत्तर:

देखें आपने कितना सीखा:

1. D 2. D 3. C 4. A

5. B 6. (i) 3, –6 (ii) $\frac{1}{2}, -3$

7. (i) -1, $\frac{7}{3}$ (ii) $\frac{3}{2}, \frac{5}{3}$

8. पिता की आयु = 48 वर्ष, पुत्र की आयु = 12 वर्ष

9. 11, 13 10. 34

स्वयं विस्तारण:

1. $\frac{7}{4}$ 2. $K < 4$ 3. $\left(\frac{-5}{2}, \frac{3}{2}\right)$

4. $k = \frac{15}{2}, m = 9$ 5. $k = 2$ या $k = \frac{-10}{9}$

7

समान्तर श्रेढ़ी

- **अनुक्रम (श्रेढ़ी):** संख्याओं का ऐसा समूह जो पैटर्न बनाता है।
- **समान्तर श्रेढ़ी:** ऐसी श्रेढ़ी जिसमें प्रथम पद के अतिरिक्त, प्रत्येक पद, पूर्व पद में एक निश्चित अचर जोड़ने से प्राप्त होता है इन पदों को $t_1, t_2, t_3, ...t_n$ या $a_1, a_2, a_3, ...a_n$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

  एक अनुक्रम, समान्तर श्रेढ़ी कहलाता है यदि उसमें एक निश्चित राशि d इस प्रकार विद्यमान हो कि $a_2 - a_1 = d$, $a_3 - a_2 = d$, $a_4 - a_3 = d$, ... $a_{n+1} - a_n = d$, अचर d सार्वअन्तर कहलाता है।
- **समान्तर श्रेढ़ी को बनाना:** यदि एक समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद 'a' तथा सार्वअन्तर 'd' है, तब a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, ... वांछित समान्तर श्रेढ़ी है।
- **समान्तर श्रेढ़ी का n वॉ पद:** सामन्तर श्रेढ़ी a, a + d, a + 2d, ... का **n** वॉ पद $t_n = a + (n - 1) d$ होता है कभी-कभी **n** वें पद को a_n से भी दर्शाते हैं।
- **एक समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों का योगफल:** समानतर श्रेढ़ी के प्रथम **n** पदों का योगफल

  $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$ है। जहां l (अन्तिम पद) $= a + (n - 1)$ d, a = प्रथम पद, d = सार्वअन्तर, n = पदों की संख्या $\therefore s_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$
- **s_n के रूप में n वॉ पद:** यदि समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम **n** पदों का योगफल s_n है तब **n** वॉ पद, $t_n = s_n - s_{n-1}$ होता है।
- **समान्तर श्रेढ़ी के क्रमागत पद:** a – d, a, a + d, तीन क्रमागत पद हैं तथा सार्वअन्तर d है।

  a – 3d, a – d, a + d, a + 3d, चार क्रमागत पद हैं तथा सार्वअन्तर 2 d है।

देखें आपने कितना सीखा

1. निम्नलिखित में कौन सी श्रेढ़ी सामान्तर श्रेढ़ी है:

   (A) 1, 4, 9, 16 ..... (B) 1, 3, 9, 27 (C) -2, 0, 2, 4, 6, ... (D) 1, 2, 4, 8, ...
2. समान्तर श्रेढ़ी 3, 1, -1, -3, ...का सार्वअन्तर है:

   (A) -2 (B) 2 (C) –3 (D) 3
3. 2 अंको वाली कितनी संख्याएं 3 से विभाजित है:

   (A) 31 (B) 30 (C) 29 (D) 11
4. यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम पद तथा सार्वअन्तर क्रमश 2 तथा 4 हैं, तो इसके प्रथम 40 पदों को योगफल है:

   (A) 3200 (B) 2800 (C) 1600 (D) 200

5. समान्तर श्रेढ़ी 3, 4, 5, 6, ... के प्रथम 10 पदों का योगफल है:

   (A) 65 (B) 75 (C) 85 (D) 110

6. समान्तर श्रेढ़ी 7, 12, 17, 22, ..., 1002 का योगफल ज्ञात कीजिए।
7. समान्तर श्रेढ़ी -11, -7, -3, ..., 53 का मध्य पद ज्ञात कीजिए।
8. समान्तर श्रेढ़ी . 9, 14, 19, ... का कौन सा पद 124 है?
9. किसी समान्तर श्रेढ़ी के 7वें तथा 13वें पद क्रमशः 32 तथा 62 हैं। समान्तर श्रेढ़ी ज्ञात कीजिए।
10. समान्तर श्रेढ़ी 7, 10, 13, ..., 184 का अन्त से 8 वॉं पद ज्ञात कीजिए।
11. उस समान्तर श्रेढ़ी के 25 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए जिसका nवॉं पद $a_n = 2 - 3n$ है।
12. यदि 2x, x + 10, 3x + 2 समान्तर श्रेढ़ी में हैं, तो x का मान ज्ञात कीजिए।
13. समान्तर श्रेढ़ी 3, 15, 27, 39, ... का कौन सा पद इसके 21वें पद से 120 अधिक होगा?
14. किसी समान्तर श्रेढ़ी के चौथे और 8वें पदों का योग 24 है तथा छठे और 10वें पदों का योग 44 है, तो समान्तर श्रेढ़ी ज्ञात कीजिए।
15. समान्तर श्रेढ़ी -10, -7, -4, -1, ... के कितने पदों का योग 104 होगा।

स्वयं विस्तारण:

1. किसी समान्तर श्रेढ़ी के n पदों का योग $s_n = 3n^2 + 5n$ से दर्शाया जाता है। समान्तर श्रेढ़ी का सार्वअन्तर तथा प्रथम पद ज्ञात कीजिए।
2. यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी का 9वॉं पद 449 तथा 449वॉं पद 9 है, तो श्रेढ़ी का कौन सा पद शून्य है।
3. समान्तर श्रेढ़ी 114, 109, 104, ... में कौन सा पद प्रथम ऋणात्मक पद होगा?
4. यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी के 7वें पद का 7 गुना उसके 11वें पद के 11 गुने के बराबर है तो दर्शाओ कि उस श्रेढ़ी का 18वॉं पद शून्य है।
5. यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी के pवें, qवें तथा rवें पद क्रमशः a, b तथा c हैं, तो दर्शाइए कि $a(q-r) + b(r-p) + c(p-q) = 0$.

उत्तर:

देखें आपने कितना सीखा:

1. C	2. A	3. B	4. A
5. B	6. 100900	7. 21	8. 25
9. 2, 7, 12, 17....		10. 163	
11. –925	12. 6	13. 31 वॉं	
14. –13, –8, –3.		15. 13	

स्वयं विस्तारण:

1. 6, 8
2. 558 वॉं
3. 24 वॉं

8

प्रतिशतता एवं इसके अनुप्रयोग

- **प्रतिशतः** प्रतिशत का अर्थ है 'प्रति सौ'। इसे '%' के चिह्न द्वार प्रदर्शित करते हैं। ऐसा भिन्न जिसका हर 100 है, प्रतिशत कहलाता है।
- **प्रतिशत को भिन्न रूप में बदलनाः** '%' का चिह्न हटाइए तथा दी गई संख्या को $1/100$ से गुणा करके सरल कीजिए।
- **प्रतिशत को दशमलव रूप में लिखनाः** '%' का चिह्न हटाइए तथा बांये ओर दो स्थान खिसकाकर दशमलव लगाएं।
- **भिन्न को प्रतिशत के रूप में बदलनाः** भिन्न को 100 से गुणा करके सरल कीजिए तथा '%' का चिह्न लगाइए।
- **दशमलव को प्रतिशत के रूप में लिखनाः** दशमलव को दो स्थान दायीं ओर खिसकाकर सरल कीजिए तथा '%' का चिह्न लगाइए।
- **क्रय मूल्य (क्र.मू.):** किसी वस्तु को खरीदने के लिए भुगतान की जाने वाली धनराशि।
- **विक्रय मूल्य (वि.मू.):** धनराशि, जिस पर कोई वस्तु बेची जाती है।
- **लाभः** यदि वि.मू. > क्र.मू., तब बेचने वाले को लाभ होता है,

  लाभ = वि.मू. – क्र.मू.
- **हानिः** यदि क्र.मू. > वि.मू., तब बेचने वाले को हानि होती है,

  हानि = क्र.मू. – वि.मू.
- **लाभ %:** 100 रुपये पर लाभ, लाभ % = $\frac{\text{लाभ}\times 100}{\text{क्र. मू.}}$, (अतिरिक्त व्यय भी क्रय मूल्य में जोड़े जाते हैं)
- **हानि %** : 100 रुपये पर हानि, हानि % = $\frac{\text{हानि}\times 100}{\text{क्र. मू.}}$ (ध्यान दें – लाभ % अथवा हानि % का परिकलन क्र.मू. पर किया जाता है)
- **वि.मू. एवं क्र.मू. में संबंधः**

लाभ की स्थिति मेंः क्र.मू. = $\frac{100}{100+\%\text{लाभ}}\times$ वि. मू.

$$\text{वि.मू.} = \frac{100+\%\text{लाभ}}{100}\times \text{क्र.मू.}$$

हानि की स्थिति मेंः क्र. मू. = $\frac{100}{100-\%\text{हानि}}\times$ वि. मू.

$$\text{वि. मू.} = \frac{100-\%\text{हानि}}{100}\times \text{क्र. मू.}$$

- **मूलधन (P):** वह धनराशि जिसे उधार दिया या लिया जाता है।
- **ब्याज (I) :** उधार लेने वाले व्यक्ति द्वारा अदा किया गया अतिरिक्त धन = $\frac{p\times r\times t}{100}$

साधारण ब्याज = $\frac{\text{मूलधन}\times\text{दर}\times\text{समय}}{100}$,

मूलधन = $\frac{\text{साधारण ब्याज}\times 100}{\text{दर}\times\text{समय}}$ और

समय = $\frac{\text{साधारण ब्याज}\times 100}{\text{मूलधन}\times\text{दर}}$

दर = $\frac{\text{साधारण ब्याज}\times 100}{\text{मूलधन}\times\text{समय}}$

- **मिश्रधन (A) :** उधार लेने वाले व्यक्ति द्वारा चुकता किया गया कुल धन, $A = P + I$ or $I = A - P$
- **दर (R) :** एक वर्ष में 100 रुपये पर ब्याज।

- **साधारण ब्याज (S.I):** संपूर्ण ऋण अवधि में मूलधन पर समान रूप से परिकलित किया गया ब्याज।
- **चक्रवृद्धि ब्याज (C.I):** पहली रूपांतरण अवधि में परिकलित ब्याज को मूलधन में जोड़कर दूसरी रूपांतरण अवधि के लिए मूलधन प्राप्त होता है और दूसरी अवधि के लिए नए मूलधन पर ब्याज परिकलित किया जाता है और इसी प्रकार आगे भी इस प्रकार अंतिम रूपांतरण अवधि के मिश्रधन तथा प्रथम रूपांतरण अवधि के मूलधन के अन्तर को चक्रवृद्धि ब्याज कहते हैं।

$$A == P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n \text{ या } C.I. = P\left[\left(1+\frac{R}{100}\right)^n - 1\right]$$

- **रूपांतरण अवधि:** एक निश्चित अवधि जिसकी समाप्ति पर ब्याज परिकलित किया जाता है और मूलधन में जोड़कर अगली समयावधि के लिए नया मूलधन बनाया जाता है।

  यदि विभिन्न अवधियों की दरें भिन्न-भिन्न हैं तब

$$A = P\left(1+\frac{R_1}{100}\right)\left(1+\frac{R_2}{100}\right)..................$$

- **वृद्धि या बढ़ोतरी:** एक निश्चित समयावधि में किसी धन या वस्तु में बढ़ोतरी।

$$V_n = V_0\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$, $V_n = n$ रूपांतरणों में वृद्धि के बाद मूल्य

V_o = प्रारम्भ में मूल्य, R = वृद्धि की दर

यदि प्रत्येक रूपांतरण के लिए दरें अलग-अलग हैं तब,

$$v_n = v_o\left(1+\frac{R_1}{100}\right)\left(1+\frac{R_2}{100}\right)\left(1+\frac{R_3}{100}\right)....$$

- **अवमूल्यन:** एक निश्चित समयावधि में किसी धन या वस्तु का घटना।

$$V_n = V_o\left(1-\frac{R}{100}\right)^n$$, V_n = n रूपांतरणों में घटने के बाद मूल्य, V_0 = प्रारम्भ में मूल्य, R = घटने की दर

यदि प्रत्येक रूपांतरण के लिए दरें अलग-अलग हैं, तो

$$V_n = V_o\left(1-\frac{R_1}{100}\right)\left(1-\frac{R_2}{100}\right)\left(1-\frac{R_3}{100}\right)....$$

- **अंकित मूल्य या सूची मूल्य (M.P):** वह मूल्य जो वस्तुओं पर छपा होता है।
- **बट्टा:** छपी हुई कीमतों में कटौती।
- **शुद्ध विक्रय मूल्य (S.P.):** SP = अंकित मूल्य – बट्टा

  वह धनराशि जिसका ग्राहक द्वारा वस्तु को खरीदते समय भुगतान किया जाता है।

देखें आपने कितना सीखा:

1. 0.0045 को प्रतिशत के रूप में लिखा जा सकता है:

   (A) 45% (B) 4.5% (C) 0.45% (D) 0.045%

2. फलों के बाग में कुल 120 पेड़ों में से 30 पेड़ आम के हैं। बाग में अन्य प्रकार के फलों के पेड़ों की संख्या का प्रतिशत है:

   (A) 25 (B) 30 (C) 70 (D) 75

3. 'PERCENTAGE' शब्द में 'E' कुल अक्षरों का कितना प्रतिशत है?

   (A) 10 (B) 20 (C) 30 (D) 40

4. मोहित ने एक घड़ी 1620 रुपये में खरीदी तथा इसे ठीक कराने में 180 रुपये व्यय किए। यदि मोहित ने घड़ी को 1980 रुपये में बेचा तो उसका लाभ प्रतिशत है:

   (A) 19.8 (B) 16.2 (C) 18 (D) 10

5. एक बरसाती कोट का अंकित मूल्य 450 रुपये है। यदि दुकानदार उसे 360 रुपये में बेचता है, तब ग्राहक को मिलने वाली छूट है:

   (A) 10% (B) 20% (C) 25% (D) 40%

6. एक व्यक्ति दो गायों में से प्रत्येक को 39600 रुपये में बेचता है। एक पर उसे 10% की हानि तथा दूसरे पर 10% का लाभ होता है। इस सौदे में उसे होने वाला कुल लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

7. एक मशीन का वर्तमान मूल्य 4,50,000 रुपये है। पहले वर्ष में मशीन के मूल्य में 10% का अवमूल्यन होता है। दूसरे व तीसरे वर्ष में अवमूल्यन की दर 8% एवं 5% है। 3 वर्ष के अंत में मशीन का मूल्य ज्ञात कीजिए।

8. 8000 रुपये की धनराशि 10% वार्षिक दर से 9261 रुपये हो जाती है, जबकि ब्याज प्रति छमाही संयोजित किया जाता है। समय ज्ञात कीजिए।

9. एक धनराशि साधारण ब्याज पर 2 वर्षों में 1680 रुपये तथा 4 वर्षों में 1860 रुपये हो जाती है। धनराशि एवं वार्षिक ब्याज की दर ज्ञात कीजिए।

10. एक वस्तु जिसका अंकित मूल्य 6800 रुपये है, 15% बट्टे पर उपलब्ध है। त्यौहार के कारण वह वस्तु 5% के अतिरिक्त बट्टे पर बेची जा रही है। वस्तु का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

स्वयं विस्तारण:

1. एक घड़ी 10% लाभ पर बेची गई। यदि यह 35 रुपये अधिक में बेची जाती तब लाभ 12% होता। घड़ी का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।
2. यदि 10 वस्तुओं का क्रय मूल्य, 8 वस्तुओं के विक्रय मूल्य के बराबर है, तो इस सौदे में लाभ % ज्ञात कीजिए।
3. एक आदमी ने केले, 20 रुपये में 6 की दर से खरीदे तथा 18 रुपये में 4 की दर से बेच दिए। इस सौदे में लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।
4. एक दुकानदार वस्तुओं का अंकित मूल्य क्र.मू. से 20% अधिक अंकित करता है तथा बेचते समय अंकित मूल्य पर 10% की छूट देता है। दुकानदार का लाभ % ज्ञात कीजिए।
5. चाय के मूल्य में 10% का अवमूल्यन होने के कारण एक डीलर 2000 रुपये में 21 किलो चाय ज्यादा खरीद सकता है। चाय का वास्तविक मूल्य एवं नया मूल्य प्रति किलो ज्ञात कीजिए।

उत्तर:

देखें आपने कितना सीखा :

1. C 2. D 3. C
4. D 5. B 6. हानि: 1%
7. 3,53,970 रुपये 8. $1\frac{1}{2}$ वर्ष
9. धन : 1500 रुपये, ब्याज की दर: 6%
10. 5491 रुपये

स्वयं विस्तारण:

1. 1750 रुपये
2. 25%
3. 35%
4. 8%
5. वास्तविक मूल्य प्रति किलो = 150 रुपये, नया मूल्य प्रति किलो = 135 रुपये

9

किस्तों में खरीदारी

- **नकद मूल्य:** वह राशि जिसमें कोई वस्तु पूरा भुगतान करने पर खरीदी जा सकती है।
- **तुरन्त भुगतान:** वह आंशिक भुगतान जो किस्त योजना के अंतर्गत, खरीद के समय किया जाता है।
- **किस्त:** किसी वस्तु के विक्रय मूल्य के शेष भाग के भुगतान हेतु ग्राहक द्वारा नियमित समय में किया गया भुगतान।
- **किस्त योजना के अंतर्गत ब्याज:** किस्त योजना में देर से दी जाने वाली राशि पर ग्राहक द्वारा भुगतान हेतु दी जाने वाली अतिरिक्त राशि।

साधारण ब्याज की योजना के अंतर्गत ब्याज, $S.I.=\dfrac{p\times r\times t}{100}$

चक्रवृद्धि ब्याज की योजना के अंतर्गत ब्याज, $C.I.=A-P$

$$=P\left[\left(1+\frac{r}{100}\right)^n-1\right]$$

- **किस्त योजना के अंतर्गत व्यवहारिक समस्याओं के प्रकार:** किस्त योजना में ब्याज की दर ज्ञात करना

  किस्त की राशि ज्ञात करना

  नकद मूल्य ज्ञात करना

  चक्रवृद्धि ब्याज युक्त समस्याएं

देखें आपने कितना सीखा:

1. एक डीलर एक माइक्रोवेव ओवन 5800 रुपये नकद पर देता है। एक ग्राहक इसे 1800 रुपये नकद तथा 3 समान वार्षिक किस्तों पर खरीदता है। समान किस्तों में दी जाने वाली शेष राशि है:

   (A) 8000 रुपये (B) 6000 रुपये (C) 4000 रुपये (D) 2000 रुपये

2. एक घड़ी 970 रुपये नकद या 350 रुपये तुरन्त भुगतान और 3 समान मासिक किस्तों पर बेची जाती है। यदि किस्त योजना के अंतर्गत ब्याज की दर 24% वार्षिक है, तो प्रत्येक किस्त की राशि ज्ञात कीजिए।

3. एक साइकिल 2700 रुपये नकद या 600 रुपये तुरन्त भुगतान और 750 रुपये प्रतिमाह की 3 समान किस्तों पर उपलब्ध है। किस्त योजना के अंतर्गत ब्याज की वार्षिक दर ज्ञात कीजिए।

4. एक मिक्सी 360 रुपये तुरन्त भुगतान तथा 390 रुपये प्रतिमाह की तीन समान किस्तों पर खरीदी गई। यदि ब्याज की दर 16% वार्षिक हो तो मिक्सी का नकद मूल्य ज्ञात कीजिए।

5. एक वाशिंग मशीन 1500 रुपये नकद अथवा 2000 रुपये के तुरन्त भुगतान तथा दो समान अर्द्धवार्षिक किस्तों पर उपलब्ध है। यदि लिए गये ब्याज की दर 16% वार्षिक है, जो कि प्रति छमाही संयोजित होता है तो प्रत्येक किस्त की राशि ज्ञात कीजिए।

स्वयं विस्तारण:

1. एक डीवीडी प्लेयर 2750 रुपये के तुरन्त भुगतान तथा 331 रुपये की तीन समान अर्द्धवार्षिक किस्तों में खरीदा गया है। यदि 20% वार्षिक की दर से ब्याज लिया जा रहा हो और ब्याज प्रति छमाही संयोजित होता हो तो डीवीडी प्लेयर का नकद मूल्य ज्ञात कीजिए।
2. एक वाशिंग मशीन का मूल्य 14000 रुपये है। कम्पनी 7200 रुपये का तुरन्त भुगतान लेकर शेष धनराशि को समान मासिक किस्तों में लेना चाहती है जबकि ब्याज की दर 12% वार्षिक है। यदि ग्राहक 1400 रुपये प्रतिमाह भुगतान करता है, तो उसे कितनी किस्त देनी होंगी।
3. एक मेज को 750 रुपये तुरन्त भुगतान तथा 6 माह पश्चात् 436 रुपये के भुगतान पर बेचा जा रहा है। यदि 18% वार्षिक ब्याज की दर से ब्याज लिया जा रहा हो, तो मेज का नकद मूल्य ज्ञात कीजिए।

उत्तर:

देखें आपने कितना सीखा:

1. C   2. 220 रुपये   3. $44\frac{4}{9}\%$

4. 1500 रुपये   5. 7290 रुपये

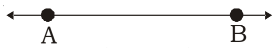
स्वयं विस्तारण:

1. 6060 रुपये   2. 5   3. 1150 रुपये

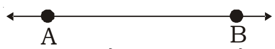
10

रेखाएं तथा कोण

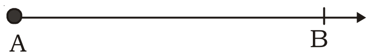
- **बिन्दु:** किसी पैंसिल की बारीक नोक को कागज पर दबाने से बना चिह्न · p
- **रेखा:** कागज पर दो बिन्दुओं A तथा B को पैमाने से जोड़ने पर रेखा बनती है। रेखा को दोनों ओर असीमित लंबाई तक बढा सकते है। रेखा की कोई चौड़ाई नही होती और कोई अंत्य बिन्दु भी नही होता। रेखा को किन्ही दो बिन्दुओं की सहायता से जैसे $\overleftrightarrow{AB}$ या छोटे अक्षर जैसे l, m n आदि इसे प्रदर्शित करते है।



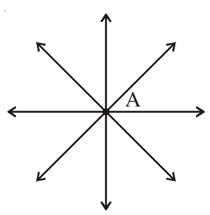
- **रेखा खंड :** रेखा पर स्थित दो बिंदुओं A तथा B से बना भाग AB रेखाखंड कहलाता है। जिसे $\overline{AB}$ से प्रदर्शित करते है। रेखाखंड के दो अंत्य बिन्दु होते है।



- **किरण :** एक रेखाखण्ड को एक दिशा के अनुदिश असीमित विस्तार करने पर किरण बनती है।

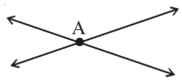


- **समतल:** मेज का तल, कमरे की दीवार, फर्श आदि समतल के उदाहरण है। इसका सभी दिशाओं में असीमित विस्तार किया जा सकता है।
- एक बिन्दु से जाने वाली रेखाओ की संख्या अनंत होती है। इन रेखाओ को संगामी रेखाएं कहते है।

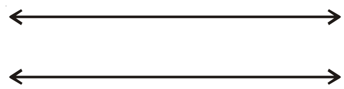


- एक तल में दो बिन्दुओं से होकर केवल एक ही रेखा जा सकती है।

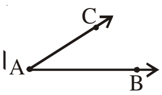
- तीन या उससे अधिक बिन्दु एक सरल रेखा पर स्थित हों तो उन्हें संरेख बिन्दु कहते हैं। यदि नहीं तो उन्हें असंरेख बिन्दु कहते हैं।
- दो विभिन्न रेखाओं पर एक से अधिक उभयनिष्ठ बिन्दु नही हो सकता

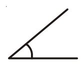
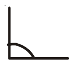


- एक समतल में दो रेखाए समांतर होती है यदि उनके मध्य न्यूनतम दूरी हमेशा एक समान रहे



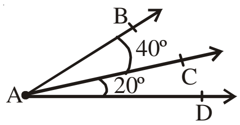
- **कोण:** एक उभयनिष्ठ प्रारंभिक बिन्दु से जाने वाली दो किरणों से बनी आकृति को कोण कहते है। उभयनिष्ठ प्रारंभिक बिन्दु को कोण का शीर्ष कहते है। कोण की माप अंशो में की जाती है।



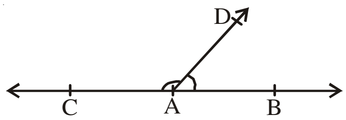
- **न्यून कोण:** एक कोण, जिसकी माप 90° से कम हो को न्यून कोण कहते है। 
- **समकोण:** 90° की माप का कोण समकोण होता है। 
- **अधिक कोण:** एक कोण जिसकी माप 90° से अधिक व 180° से कम हो को अधिक कोण कहते है।

- **सरल कोण:** 180° की माप का कोण सरल कोण कहलाता है। 
- **वृहत् कोण:** एक कोण जिसकी माप 180° से अधिक व 360^0 से कम हो को वृहत् कोण कहते हैं। 
- यदि दो रेखाएं अथवा किरणें परस्पर 90° का कोण बनाती हैं, तो उन्हें लम्बवत रेखाएं कहते हैं। 
- **पूरक कोण:** कोणों का एक ऐसा युग्म जिसका योग 90° हो पूरक कोणों का युग्म कहलाता है। प्रत्येक कोण एक दूसरे का पूरक कहलाता है।

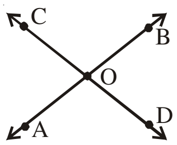
- **संपूरक कोण:** कोणों का ऐसा युग्म जिनका योगफल 180° हो संपूरक कोणो का युग्म कहलाता है।
- **आसन्न कोण:** सलंग्न चित्र में कोणों के युग्म में एक उभयनिष्ठ शीर्ष A तथा एक उभयनिष्ठ भुजा AC है। कोणों का ऐसा युग्म आसन्न कोणों का युग्म कहलाता है।



- **रैखिक युग्म:** यदि दो आसन्न कोणों का योग 180° हो, तो ऐसे कोणो के युग्म को रैखिक युग्म कहते है।



- **शीर्षाभिमुख कोण:** दो प्रतिच्छेदी रेखाएं AB व CD बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करती हैं। $\angle AOC$ तथा $\angle BOD$, $\angle AOD$ तथा $\angle COB$ शीर्षाभिमुख कोणों के युग्म है।



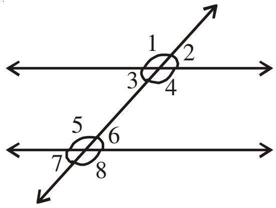
- जब एक तिर्यक रेखा दो समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेद करती है। तब:
  - (i) संगत कोणों के प्रत्येक युग्म के कोण परस्पर समान होते है।
  - (ii) एकांतर कोणों के प्रत्येक युग्म के कोण परस्पर समान होते है।
  - (iii) तिर्यक रेखा के एक ही ओर बने अंत: कोण एक दूसरे के संपूरक होते है।

  उदाहरण:

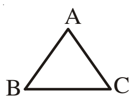
  (i) $\angle 2 = \angle 6, \angle 3 = \angle 7$

  (ii) $\angle 3 = \angle 6$ तथा $\angle 4 = \angle 5$

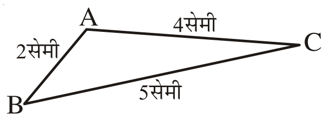
  (iii) $\angle 3 + \angle 5 = 180°$ तथा $\angle 4 + \angle 6 = 180°$



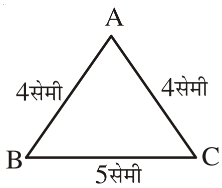
- जब एक तिर्यक रेखा दो रेखाओं को इस प्रकार से प्रतिच्छेद करती है कि
  - (i) संगत कोणों के किसी एक युग्म के कोण परस्पर समान हों। **अथवा**
  - (ii) एकांतर कोणों के किसी एक युग्म के कोण परस्पर समान हों। **अथवा**
  - (iii) तिर्यक रेखा के एक ही ओर बने अंत: कोण संपूरक हों, तो ये दो रेखाएं समांतर होती हैं।
- **त्रिभुज:** किसी समतल में तीन रेखाखंडो द्वारा बनी बंद आकृति त्रिभुज होती है।



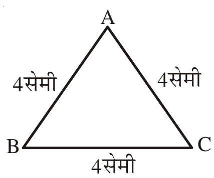
- **विषमबाहु त्रिभुज:** ऐसी त्रिभुज जिसकी तीनों भुजाएं असमान हो



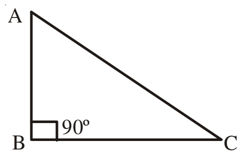
- **समद्विबाहु त्रिभुज:** ऐसी त्रिभुज जिसकी दो भुजाएं बराबर हों



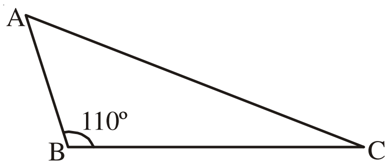
- **समबाहु त्रिभुज:** ऐसी त्रिभुज जिसकी तीनों भुजाए बराबर हो



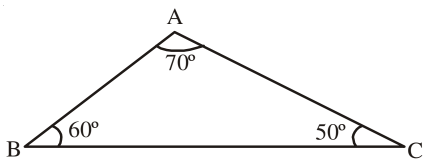
- **समकोण त्रिभुज:** ऐसी त्रिभुज जिसका एक कोण समकोण हो



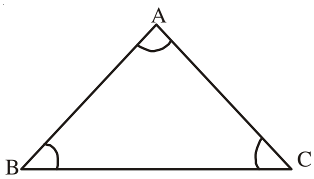
- **अधिक कोण त्रिभुज:** ऐसी त्रिभुज जिसका एक कोण अधिक कोण हो।



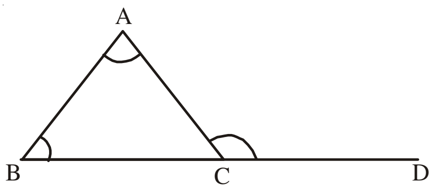
- **न्यून कोण त्रिभुज:** ऐसी त्रिभुज जिसके तीनों कोण न्यून कोण हो



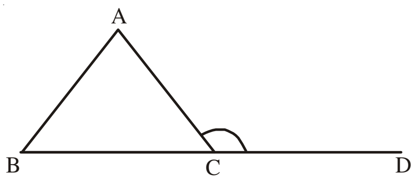
- त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है।
  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$



- Δ ABC की भुजा BC को किसी बिन्दु D तक बढाने पर $\angle ACD$ को त्रिभुज का बाह्यकोण कहते है।



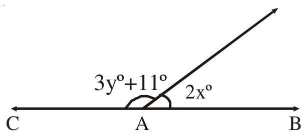
- अंत: सम्मुख कोण त्रिभुज के वे अंत: कोण होते है जो त्रिभुज के बाह्यकोण के साथ रैखिक युग्म नही बनाते।
- किसी त्रिभुज का बाह्यकोण अपने अंत: सम्मुख कोणों के योग के बराबर होता है।
  $\angle ACD = \angle ABC + \angle BAC$



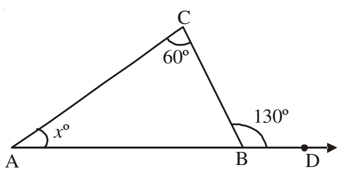
- उस आकृति को, जिस पर स्थित प्रत्येक बिन्दु दी गयी शर्तो को संतुष्ट करता है, को बिन्दुपथ कहते है।
- दो दिए गए बिन्दुओं से समदूरस्थ बिन्दु का बिन्दुपथ उन बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखंड का लंब समद्विभाजक होता है।
- दो प्रतिच्छेदी रेखाओं से समदूरस्थ बिंदु का बिंदुपथ रेखाओं का एक युग्म है जो दी हुई रेखाओं के बीच बने कोणो को समद्विभाजित करता है।

देखें आपने कितना सीखा

1. दी गई आकृति में यदि $x = 32^0$, तो y का मान है:
   A. 45^0 B. 32^0 C. 35^0 D. 105^0

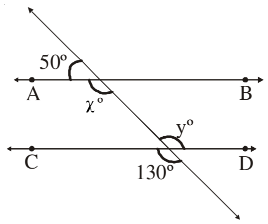


2. दी गई आकृति में x का मान है:



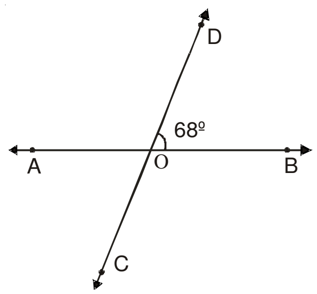
A. 45º B. 130º C. 30º D. 70º

3. दी गई आकृति में यदि AB || CD हो तो x तथा y का मान (क्रमशः) है:



A. 130^0, 130^0 B. 130^0, 50^0 C. 50^0, 130^0 D. 50^0, 50^0

4. दी गई आकृति में ∠COB की माप है:

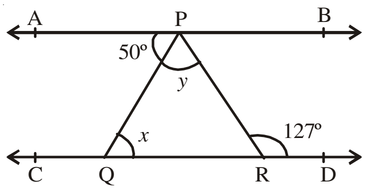


A. 36º B. 68º C. 112º D. 12º

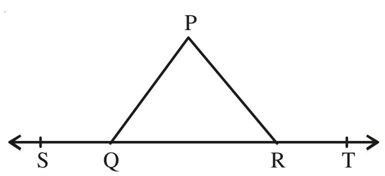
5. एक त्रिभुज के तीनों कोणों का अनुपात 1: 2: 3 है। त्रिभुज का सबसे छोटा कोण है:

A. 30º B. 60º C. 90º D. 6º

6. दी गई आकृति में AB || CD, ∠APQ = 50º और ∠PRD = 127º हो तो x तथा y का मान ज्ञात कीजिए:

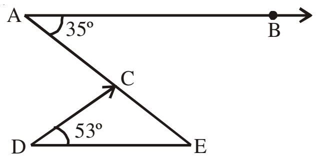


7. दी गई आकृति में यदि ∠PQR = ∠PRQ हो सिद्ध कीजिए कि ∠PQS = ∠PRT

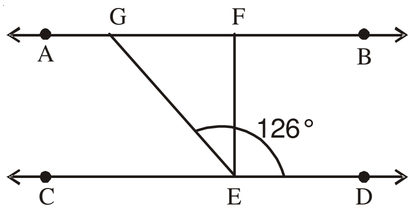


8. सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180º होता है।

9. दी गई आकृति में यदि AB || DE, ∠BAC = 35º तथा ∠CDE = 53º हो तो ∠DCE ज्ञात कीजिए

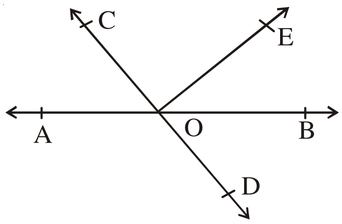


10. दी गई आकृति में यदि AB || CD, EF ⊥ CD तथा $\angle GED = 126°$ हो तो $\angle AGE$, $\angle GEF$ तथा $\angle FGE$ का मान ज्ञात कीजिए

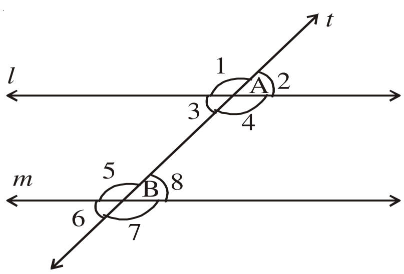


स्वयं विस्तारण:

1. दी गई आकृति में रेखा AB तथा CD बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करती है। यदि $\angle AOC + \angle BOE = 70°$ तथा $\angle BOD = 40°$ हो तो $\angle BOE$ व $\angle COE$ की माप ज्ञात कीजिए।



2. दी गई आकृति में $l \parallel m$ तथा तिर्यक रेखा 't' रेखा l तथा m को A तथा B पर प्रतिच्छेद करती है। यदि $\angle 1 : \angle 2 = 3 : 2$, तो सभी आठ कोणों को ज्ञात कीजिए।



उत्तर

देखें आपने कितना सीखा

1. C
2. D
3. A
4. C
5. A
6. $x = 50^0$, $y = 77^0$
9. 92^0
10. $\angle AGE = 126^0$, $\angle GEF = 36^0$, $\angle FGE = 54^0$

स्वयं विस्तारण:

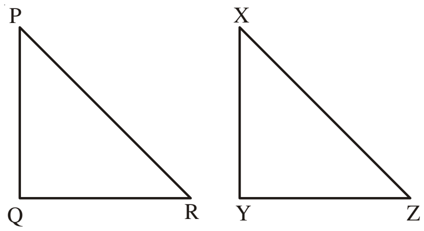
1. $\angle BOE = 30^0$, वृहत कोण $\angle COE = 250^0$
2. $\angle 1 = 108°$, $\angle 2 = 72°$, $\angle 3 = 72°$
   $\angle 4 = 108^0$, $\angle 5 = 108^0$, $\angle 6 = 72^0$,
   $\angle 7 = 108^0$, $\angle 8 = 72^0$

11

त्रिभुजों की सर्वांगसमता

- दो आकृतियां जो आकार तथा माप में एक दूसरे से समान होती हैं सर्वांगसम कहलाती है। उनका यह गुण सर्वांगसमता कहलाता है।
- दो रेखाखण्ड सर्वांगसम होते हैं यदि उनकी लंबाई बराबर हैं।
- दो वर्ग सर्वांगसम होते हैं यदि उनकी भुजाएं बराबर हैं।
- दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि एक त्रिभुज की सभी भुजाएं तथा सभी कोण, दूसरे त्रिभुज की सभी संगत भुजाओं तथा संगत कोणों के बराबर हो।

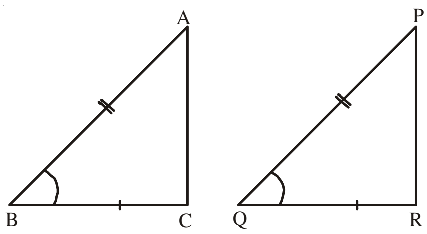
जैसे ΔPQR तथा Δ XYZ में



$PQ = XY, PR = XZ, QR = YZ$
$\angle P = \angle X, \angle Q = \angle Y, \angle R = \angle Z$
इस प्रकार ΔPQR व ΔXYZ सर्वांगसम है। $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$, सर्वांगसमता का प्रतीक $\cong$ है।

- यदि एक त्रिभुज की कोई दो भुजाएं व उनके बीच का कोण दूसरे त्रिभुज की दो संगत भुजाओं व उनके बीच के कोण के बराबर हो तो ये दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

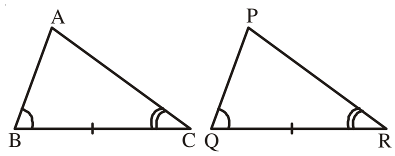
उदाहरणत:



$AB = PQ$, $BC = QR$, $\angle ABC = \angle PQR$
अत: $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

- यदि किसी त्रिभुज के कोई दो कोण और एक भुजा दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोण और संगत भुजा के बराबर हो तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

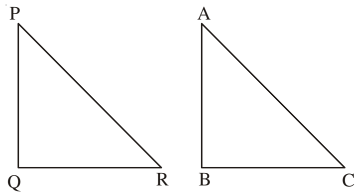
उदाहरणत:



$\angle ABC = \angle PQR$, $\angle ACB = \angle PRQ$ तथा $BC = QR$
अत: $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

- दो त्रिभुजों में एक त्रिभुज की सभी भुजाएं दूसरे त्रिभुज की सभी संगत भुजाओं के बराबर हों, तो वे सर्वांगसम होते हैं।

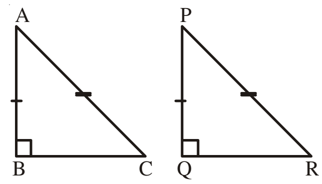
उदाहरणत:



$AB = PQ$, $BC = QR$, $AC = PR$,
अत: $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

- यदि किसी समकोण त्रिभुज की एक भुजा और कर्ण दूसरे समकोण त्रिभुज की संगत भुजा तथा कर्ण के बराबर हों तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

उदाहरणत:



$AC = PR$, $AB = PQ$, $\angle ABC = \angle PQR = 90^o$
अत: $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

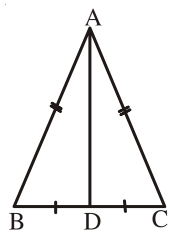
- एक त्रिभुज में समान भुजाओं के सम्मुख कोण भी समान होते हैं।
- एक त्रिभुज में समान कोणों के सम्मुख भुजाएं भी समान होती हैं।
- किसी समद्विबाहु त्रिभुज के समान भुजाओं पर सम्मुख शीर्षों से खींचे गए लंब समान होते हैं।
- यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएं असमान हों तो बड़ी भुजा के सामने का कोण छोटी भुजा के सामने के कोण से बड़ा होता है।
- किसी त्रिभुज में बड़े कोण की सम्मुख भुजा छोटे कोण की सम्मुख भुजा से बड़ी होती है।
- एक त्रिभुज में किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से अधिक होता है।

देखें आपने कितना सीखा:

1. यदि एक ΔABC में $\angle C > \angle B$ हो तो

   (A) $BC > AC$ (B) $AB > AC$ (C) $AB < AC$ (D) $BC < AC$

2. दी गई आकृति में यदि $AB = AC$ तथा $BD = DC$ हो तो $\angle ADB$ की माप है:



   (A) 45° (B) 90° (C) 60° (D) None of these

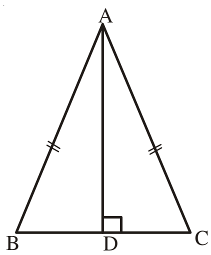
3. एक त्रिभुज की दो भुजाओं की लंबाई 6 सेमी व 2.5 सेमी है। दिए गए विकल्पों में कौन सी लंबाई तीसरी भुजा की लंबाई नहीं हो सकती?

   (A) 4.5 सेमी (B) 5 सेमी (C) 6 सेमी (D) 3.2 सेमी

4. एक ΔPQR में $QR = PQ$ तथा $\angle Q = 40^0$ हो तो $\angle P$ की माप है:

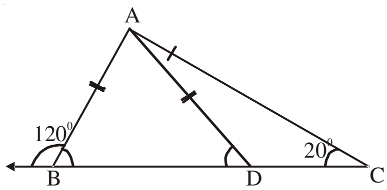
   (A) 40^0 (B) 70^0 (C) 50^0 (D) 80^0

5. ΔABC में यदि $\angle B = \angle C$ तथा $AD \perp BC$ हो तो किस कसौटी के अनुसार $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ सर्वांगसम होंगे?

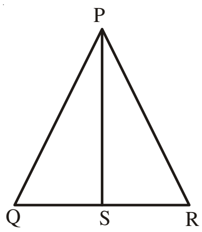


   (A) RHS (B) ASA (C) SAS (D) SSS

6. एक समकोण त्रिभुज ABC में $\angle B = 90^o$ तथा AB = BC हो तो $\angle A$ तथा $\angle C$ ज्ञात कीजिए।
7. दी गई आकृति में $\angle DAC$ ज्ञात कीजिए

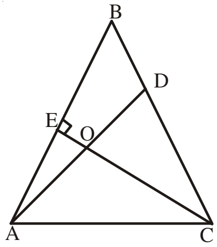


8. सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज में समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं।
9. सिद्ध कीजिए कि समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60^0 का होता है।
10. यदि एक त्रिभुज PQR की भुजा QR पर एक बिंदु S हो तो सिद्ध कीजिए कि PQ + QR + RP > 2PS



स्वयं विस्तारण:

1. सिद्ध कीजिए कि एक चतुर्भुज ABCD में AB + BC + CD + DA > AC+ BD होगा।
2. एक त्रिभुज ABC का $\angle B$ समकोण है। यदि AL $\perp$ BC हो तो सिद्ध कीजिए $\angle BAL = \angle ACB$.
3. सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज की माध्यिकाएं समान होती हैं।
4. दी गई आकृति में $\angle A = \angle C$ तथा AB= AC। सिद्ध कीजिए $\Delta ABD \cong \Delta CBE$.



उत्तर:

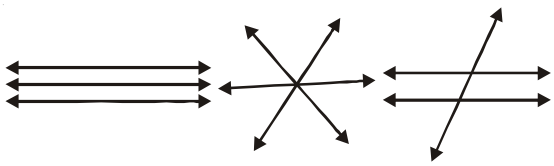
देखें आपने कितना सीखा:

1. B
2. B
3. D
4. B
5. A
6. $\angle A = 45°, \angle B = 45°$,
7. $\angle DAC = 40°$

12

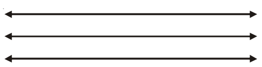
संगामी रेखाएं

- एक समतल में खींची गई दो रेखाएं समांतर हो सकती है, अथवा प्रतिच्छेदी

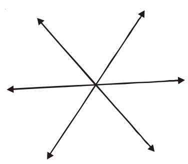


एक तल में तीन रेखाएं

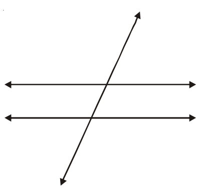
(i) एक दूसरे के समांतर हो सकती है।



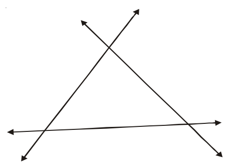
(ii) एक दूसरे को केवल एक ही बिन्दु पर प्रतिच्छेद कर सकती है।



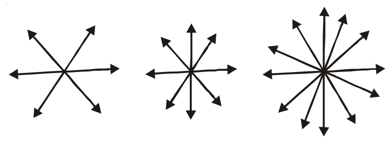
(iii) एक दूसरे को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद कर सकती है।



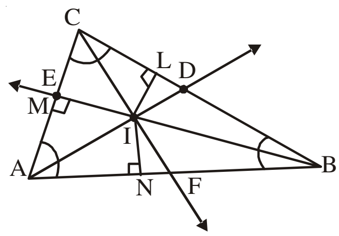
(iv) एक दूसरे को अधिक से अधिक तीन बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद कर सकती है।



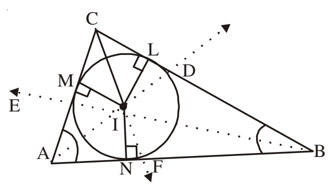
- एक समतल में एक बिन्दु से गुजरने वाली तीन या तीन से अधिक रेखाएं संगामी रेखाए कहलाती है। प्रतिच्छेद बिन्दु को संगमन बिन्दु कहते है।



- एक त्रिभुज के किसी कोण को समद्विभाजित करने वाली रेखा को कोण समद्विभाजक कहते है।
- एक त्रिभुज में तीन कोण समद्विभाजक होते है।
- एक त्रिभुज के कोण समद्विभाजक संगामी होते है।
- त्रिभुज में कोण समद्विभाजकों के संगमन बिन्दु को अंत: केन्द्र (I) कहते हैं।

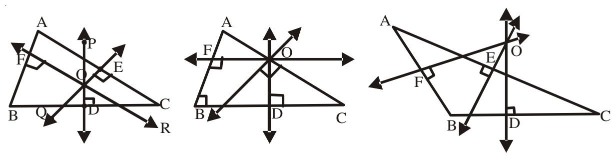


- अंत: केन्द्र हमेशा त्रिभुज के अंत: भाग में स्थित होता हैं तथा त्रिभुज की भुजाओं से समान दूरी पर होता है $IL = IM = IN$
- यदि I को केन्द्र तथा IM, IN या IL को त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचें तो यह त्रिभुज की तीनों भुजाओं को स्पर्श करता है। इस वृत्त को त्रिभुज का अंत: वृत्त कहते है।



- एक रेखा जो त्रिभुज की भुजा को समकोण पर समद्विभाजित करती है त्रिभुज की भुजा का लंब समद्विभाजक कहलाती है।
- एक त्रिभुज की भुजाओं के तीनों लंब समद्विभाजक

संगामी होते है तथा संगमन बिन्दु O त्रिभुज का परिकेन्द्र कहलाता है। जो त्रिभुज के तीनो शीर्षो से समदूरस्थ होता है।



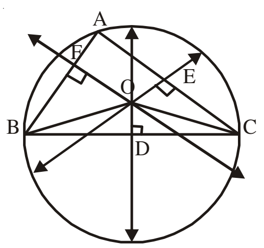
- **त्रिभुज का परिकेन्द्र**

  (i) न्यून कोण त्रिभुज के अंत: भाग में स्थित होता है।

  (ii) समकोण त्रिभुज के विकर्ण पर स्थित होता है।

  (iii) अधिक कोण त्रिभुज के बाह्य भाग में स्थित होता है।

- यदि O को केन्द्र तथा OA, OB या OC को त्रिज्या लेकर एक वृत्त खीचें तो यह त्रिभुज के शीर्षो A , B व C से जाता है। जिसे त्रिभुज का परिवृत कहते है।



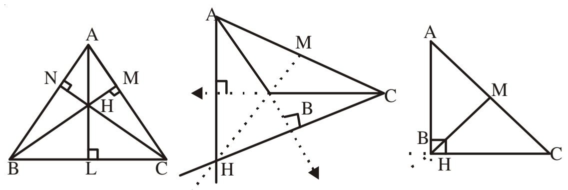
- त्रिभुज के किसी शीर्ष से सम्मुख भुजा पर डाले गए लंब को शीर्षलंब कहते है।
- एक त्रिभुज के तीनों शीर्षलंब संगामी होते हैं तथा संगमन बिन्दु त्रिभुज का लंब केन्द्र कहलाता है।

- **त्रिभुज का लंब केन्द्र**

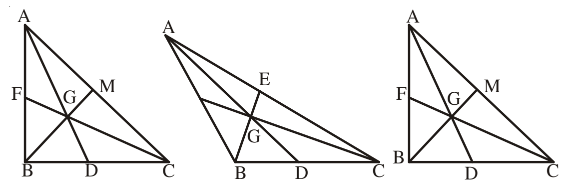
  (i) न्यून कोण त्रिभुज के अंत: भाग में स्थित होता है।

  (ii) समकोण वाला शीर्ष होता है यदि त्रिभुज समकोण त्रिभुज हो।

  (iii) अधिक कोण त्रिभुज के बाह्य भाग में स्थित होगा।



- एक त्रिभुज के किसी शीर्ष को सामने वाली भुजा के मध्य बिन्दु से मिलाने वाली रेखा उसकी माध्यिका कहलाती हे।
- त्रिभुज की तीनों माध्यिकाएं संगामी होती हैं। तथा संगमन बिन्दु G त्रिभुज का केंद्रक कहलाता है।



- केन्द्रक प्रत्येक मध्यिका को 2 : 1 में विभाजित करता है।
- एक समद्विबाहु त्रिभुज की समान भुजाओं से बने कोण का समद्विभाजक उस त्रिभुज की माध्यिका, लंब समद्विभाजक व शीर्षलंब भी होता है।
- एक समबाहु त्रिभुज में कोण समद्विभाजक भुजाओं का लंब समद्विभाजक, शीर्षलंब तथा माध्यिका भी होता है।

देखें आपने कितना सीखा

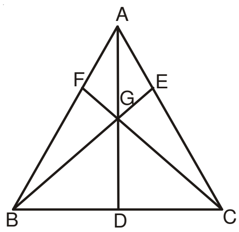
1. एक समतल में त्रिभुज के तीनों शीर्षो से समदूरस्थ बिन्दु को कहते हैं:

   A. केन्द्रक B. अंत: केन्द्र C. परिकेन्द्र D. लंब केन्द्र

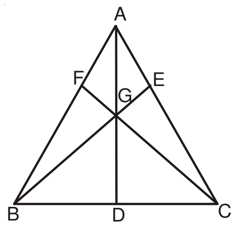
2. एक समतल में त्रिभुज की भुजाओं से समदूरस्थ बिन्दु को कहते हैं:

   A. केन्द्रक B. अंत केन्द्रक C. परिकेन्द्र D. लंब केन्द्र

3. त्रिभुज का केन्द्रक त्रिभुज की माध्यिकाओं को किस अनुपात में विभाजित करता है।
   A. 2 : 1 B. 1 : 2 C. 1:1 D. इनमें से कोई नही
4. त्रिभुज का अंत: केन्द्र स्थित होता है:
   A. त्रिभुज के बहिर्भाग में B. त्रिभुज पर
   C. त्रिभुज के अंतर्भाग में D. इनमें से कोई नही
5. एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करने वाली तीन या इससे अधिक रेखाओं को कहते है:
   A. समांतर रेखाएं B. संगामी रेखाएं
   C. सर्वांगसम रेखाएं D. समद्विभाजक
6. एक समबाहु ΔABC में यदि G त्रिभुज का केन्द्रक हो तो AD and BE ज्ञात कीजिए।



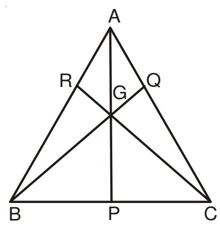
7. दी गई आकृति में यदि AD= 4.8 सेमी तथा बिन्दु D, भुजा BC का मध्य बिन्दु हो तो AG. ज्ञात कीजिए।



8. सिद्ध कीजिए कि एक समबाहु त्रिभुज में, अंत: केन्द्र परिकेन्द्र, लंबकेन्द्र तथा केन्द्रक एक ही बिन्दु पर स्थित होते है।
9. एक समबाहु त्रिभुज ABC की प्रत्येक भुजा 24सेमी है यदि G इसका केन्द्रक हो तो AG. ज्ञात कीजिए।
10. एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC में $AB = AC = 10$ सेमी तथा आधार BC= 8 सेमी। यदि बिन्दु G, ΔABC का केन्द्रक हो तो AG ज्ञात कीजिए।

स्वयं विस्तारण

1. एक 2a भुजा वाले समबाहु त्रिभुज के परिवृत्त की त्रिज्या तथा अंत: वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
2. एक समबाहु त्रिभुज में यदि G त्रिभुज का केन्द्रक तथा $AG = 6$ सेमी हो तो त्रिभुज की भुजा ज्ञात कीजिए।
3. सिद्ध कीजिए कि एक समद्विबाहु त्रिभुज में समान भुजाओं से बने कोण का समद्विभाजक त्रिभुज का लंब समद्विभाजक, शीर्षलंब तथा मध्यिका भी होता है।
4. दी गई आकृति में ΔABC की भुजाओं के मध्य बिन्दु D, E तथा F है। सिद्ध कीजिए कि $BQ - CR > \frac{3}{2} BC$.



5. यदि ΔPQR का लंबकेन्द्र O हो तो सिद्ध कीजिए कि ΔOQR का लंब केन्द्र P होगा।

उत्तर

देखें आपने कितना सीखा

1. C
2. B
3. A
4. C
5. B
6. AD = 10.8 सेमी, BE = 10.8 सेमी
7 AG = 3.2 सेमी
9. $8\sqrt{3}$ सेमी
10. AG = 4 सेमी

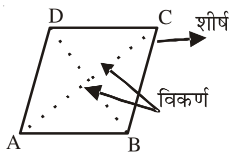
स्वयं विस्तारण

1. परित्रिज्या = $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, अंतः त्रिज्या = $\frac{a}{\sqrt{3}}$
2. $6\sqrt{3}$ सेमी

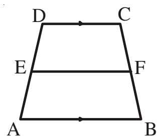
13

चतुर्भुज

- **चतुर्भुज:** एक समतल में बनी चार भुजाओं की बंद आकृति

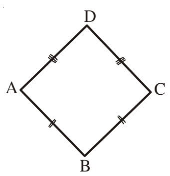


- चतुर्भुज ABCD के अंग:
  4 भुजाएं AB, BC, CD और DA
  4 कोण- $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$
  2 विकर्ण- AC तथा BD
  4 शीर्ष- A, B, C तथा D
- **चतुर्भुजों के प्रकार:**
- **समलंब:** एक चतुर्भुज जिसमें सम्मुख भुजाओं का एक युग्म समांतर हो

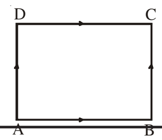


यहां AB || DC, AB व DC को समलंब का आधार कहते है। यदि समलंब की असमांतर भुजाएं समान हों तो उसे समद्विबाहु समलंब कहते है।

- **पतंग:** जब चतुभुर्ज में आसन्न भुजाओं के दो युग्म समान हो तो उसे पतंग कहते है।

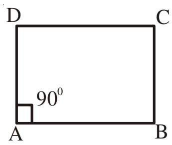


- **समांतर चतुर्भुज:** एक चतुर्भुज जिसमें सभी सम्मुख भुजाएं परस्पर समांतर हों, समांतर चतुर्भुज कहलाता है।

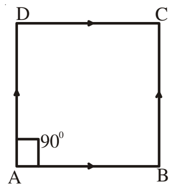


AB || DC तथा AD || BC

- **आयत:** एक समांतर चतुर्भुज जिसमें एक कोण समकोण हो, एक आयत कहलाता है।



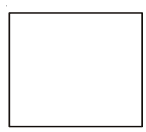
- **वर्ग:** एक आयत जिसमें यदि आसन्न भुजाओं का एक युग्म बराबर हो, वर्ग कहलाता है।

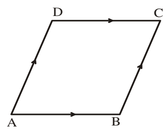


□ ABCD में

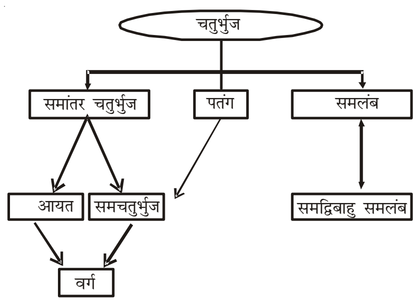
AB = BC = CD = DA तथा $\angle A = 90^0$.

- **समचतुर्भुज:** एक समांतर चतुर्भुज जिसकी चारों भुजाएं समान हों





- **चतुर्भुजों के प्रकार:**

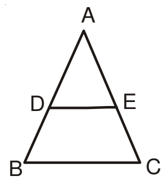


विभिन्न प्रकार के चतुर्भुजों के गुणधर्म

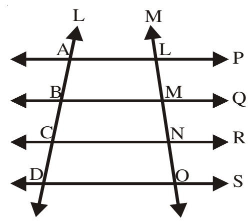
1. समांतर चतुर्भुज	सम्मुख भुजाएं समान होती है। सम्मुख कोण समान होते है। विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते है। प्रत्येक विकर्ण समांतर चतुर्भुज को दो समान क्षेत्रफल के त्रिभुजो में विभाजित करता है।
2. समचतुर्भुज	● सभी भुजाएं समान होती है ● सम्मुख कोण समान होते है। ● विकर्ण असमान होते है तथा ● एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।
3. आयत	● सम्मुख भुजाएं समान होती है। ● प्रत्येक कोण समकोण होता है। ● विकर्ण समान होते हैं तथा परस्पर समद्विभाजित करते हैं।
4. वर्ग	● सभी भुजाएं समान होती हैं। ● सभी कोण समकोण होते हैं। ● विकर्ण समान होते हैं तथा एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

मध्य बिंदु प्रमेय:

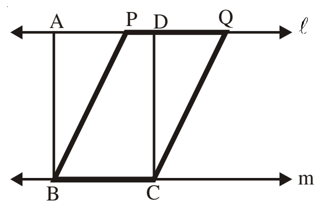
- किसी त्रिभुज में किन्ही दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से बना रेखा खंड त्रिभुज की तीसरी भुज के समांतर और उसके आधे के समान होता है।



- किसी त्रिभुज की एक भुजा के मध्य बिंदु से गुजरने वाली एक रेखा जो कि त्रिभुज की दूसरी भुजा के समांतर है, तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है।
- तीन या अधिक समांतर रेखाओं द्वारा एक तिर्यक रेखा पर बनाए गए अंत: खण्ड यदि समान हो तो किसी दूसरी तिर्यक रेखा पर बने संगत अत: खंड भी समान होते हैं।



- एक ही (या समान) आधार तथा दो समांतर रेखाओं के बीच बने समांतर चतुर्भुज क्षेत्रफल में समान होते है।

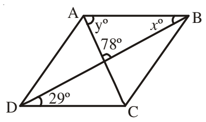


ABCD का क्षेत्रफल = PBCQ का क्षेत्रफल

- एक ही या समान आधार पर और दो समांतर रेखाओं के बीच के त्रिभुजों का क्षेत्रफल समान होता है।
- एक ही या समान आधार और समान क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों के संगत शीर्षलंब भी समान होते हैं।

देखें आपने कितना सीखा:

1. दिए गए समांतर चतुर्भुज में x तथा y का मान है

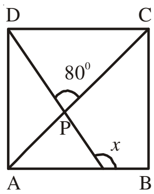


A. $29^0, 73^0$ B. $23^0, 78^0$ C. $23^0, 23^0$ D. $29^0, 78^0$

2. एक चतुर्भुज के तीन कोणों की माप 54^0, 110^0 तथा 86^0 है। चौथे कोण की माप है:

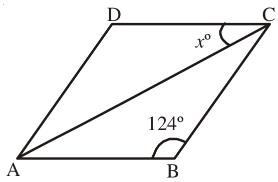
A. 86^0 B. 54^0 C. 110^0 D. 250^0

3.. दी गई आकृति में ABCD एक वर्ग है। यदि $\angle DPC = 80^0$, तो x का मान है:



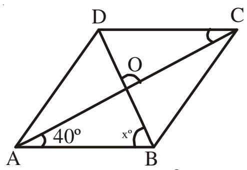
A. 125° B. 130° C. 120° D. 115°

4. दी गई आकृति में ABCD एक समचतुर्भुज है। यदि $\angle ABC = 124°$, तो x का मान है।



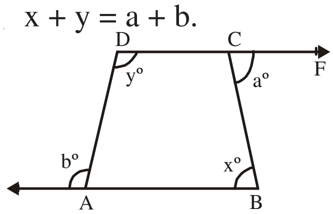
A. 26° B. 28° C. 25° D. 27°

5. दी गई आकृति में ABCD एक समचतुर्भुज है जिसके विकर्ण बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि $\angle OAB = 40°$, तो $\angle ABO$ की माप है।



A. 50^0 B. 35^0 C. 40^0 D. 45^0

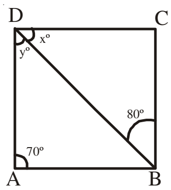
6. एक समचतुर्भुज के विकर्णो की लंबाई 24 सेमी. व 18 सेमी है। समचतुर्भुज की भुजाएं ज्ञात कीजिए।
7. सिद्ध कीजिए कि चतुर्भुज के चारो कोणों का योग 360^0 होता है।
8. एक चतुर्भुज के कोणों का अनुपात 3 : 5 : 9 : 13 है। चतुर्भुज के कोण ज्ञात कीजिए।
9. दी गई आकृति में सिद्ध कीजिए: $x + y = a + b$.



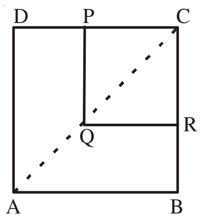
10. सिद्ध कीजिए कि वर्ग के विकर्ण समान होते हैं तथा परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते है।

स्वयं विस्तारण:

1. आकृति में दिए गए समांतर चतुर्भुज ABCD में $\angle DAB = 70^\circ$, $\angle DBC = 80^\circ$ । x तथा y का मान ज्ञात कीजिए।



2. ABCD तथा PQRC आयत हैं। बिन्दु Q, विकर्ण AC का मध्य बिंदु है। सिद्ध कीजिए $PR = \frac{1}{2} AC$



3. एक समबाहु त्रिभुज की भुजाओं BC, CA तथा AB के मध्य बिन्दु क्रमश: D, E तथा F है। सिद्ध कीजिए कि ΔDEF समबाहु त्रिभुज होगा।
4. ΔABC में, बिन्दु C पर समकोण है। एक रेखा विकर्ण AB के मध्यबिन्दु M से BC के समांतर इस प्रकार खींची गई है कि यह रेखा भुजा AC को बिन्दु D पर प्रतिच्छेद करती है। सिद्ध कीजिए

   (i) AC का मध्य बिन्दु D है।

   (ii) $MD \perp AC$

   (ii) $CM = AM = \frac{1}{2} AB$
5. सिद्ध कीजिए कि किसी त्रिभुज में किन्हीं दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से बना रेखाखंड त्रिभुज की तीसरी भुजा के समांतर और उसके आधे के समान होता है।

उत्तर

देखें आपने कितना सीखा:

1. A
2. C
3. A
4. B
5. A
6. 15 सेमी.
8. $36^0, 60^0, 108^0, 156^0$

स्वयं विस्तारण :

1. $x = 30^0$, $y = 80^0$

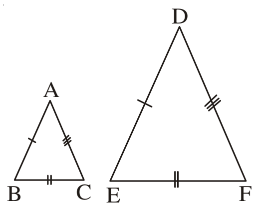
14

त्रिभुजों की समरूपता

- दो या दो से अधिक आकृतियाँ जो आकार में तो समान होती है लेकिन यह आवश्यक नहीं कि उनके साइज (माप) भी समान हो, समरूप कहलाती हैं।
- कोई भी दो बहुभुज, जिनके संगत कोण समान हों तथा संगत भुजाएं समानुपाती हों, समरूप होते हैं।
- दो त्रिभुज समरूप होंगे यदि–

  (i) उनके संगत कोण बराबर हों, तथा

  (ii) उनकी संगत भुजाएं समानुपाती हों।



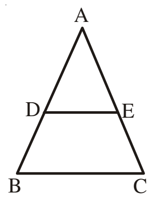
$\Delta ABC \sim \Delta DEF$ यदि $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E,$

$\angle C = \angle F$ तथा $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CA}{FD}$

प्रतीक '$\sim$' 'समरूप है' के लिए है।

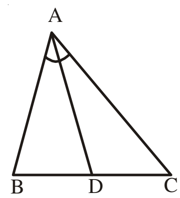
- **समरूपता का AAA परिणाम:** यदि दो त्रिभुजों में उनके संगत कोण समान हों, तो त्रिभुज समरूप होते हैं।
- **समरूपता का SSS परिणाम:** यदि दो त्रिभुजों की संगत भुजाएं समानुपाती हों, तो त्रिभुज समानुपाती होते हैं।
- **समरूपता का SAS परिणाम:** यदि एक त्रिभुज का एक कोण दूसरे त्रिभुज के एक कोण के बराबर हो तथा इन दो कोणों को बनाने वाली भुजाएं समानुपाती हों तो त्रिभुज समरूप होते हैं।
- यदि त्रिभुज की एक भुजा के समान्तर एक रेखा खींची जाए जो अन्य दो भुजाओं को प्रतिच्छेदित करें, तो वह अन्य दो भुजाओं को एक ही अनुपात में विभाजित करती है।

  यदि $DE \parallel BC$ तब $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$

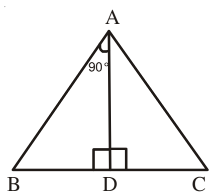


- यदि एक रेखा किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को एक ही अनुपात में बाँटे, तो वह रेखा उस त्रिभुज की तीसरी भुजा के समान्तर होती है।
- किसी त्रिभुज के एक कोण का आंतरिक समद्विभाजक सम्मुख भुजा को दो ऐसे रेखाखण्डों में विभाजित करता है जो कोण बनाने वाली भुजाओं के समानुपाती हों। यदि AD कोण का आंतरिक समद्विभाजक है, तब

  $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$



- यदि एक समकोण त्रिभुज के समकोण वाले शीर्ष से कर्ण पर लम्ब डाला जाए, तो इस लम्ब के दोनों ओर बने हुए त्रिभुज दिए गए त्रिभुज के तथा परस्पर एक दूसरे के समरूप होते हैं।



$\Delta ADB \sim \Delta CDA$, $\Delta ADB \sim \Delta CAB$ तथा $\Delta ADC \sim \Delta BAC$..

- दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है।

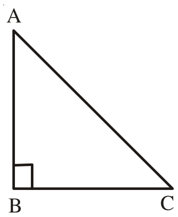
$$\frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta PQR \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{AC^2}{PR^2}$$

- **बौधायन/पाइथागोरस प्रमेय**

  एक समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं पर बने वर्गों के योग के बराबर होता है।

  समकोण त्रिभुज ABC में,

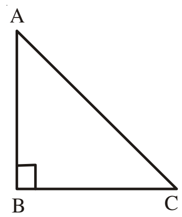
  $AC^2 = AB^2 + BC^2$



- **बौधायन/पाइथागोरस प्रमेय का विलोम**

  एक त्रिभुज में, यदि एक भुजा का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर हो तो पहली भुजा के सामने का कोण समकोण होता है।

  ΔABC में,



$AC^2 = AB^2 + BC^2$

तब $\angle B = 90^0$

देखें आपने कितना सीखा :

1. दो समरूप त्रिभुजों का क्षेत्रफल क्रमशः 25 वर्ग मीटर तथा 121 वर्ग मीटर है। उनकी संगत भुजाओं में अनुपात होगा–

   (A) 5 : 11 (B) 11 : 5 (C) $\sqrt{5} : \sqrt{11}$ (D) $\sqrt{11} : \sqrt{5}$

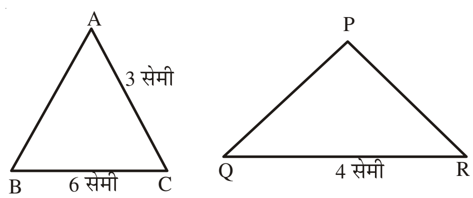
2. 6 मीटर तथा 11 मीटर ऊँचाई के दो स्तंभ लम्बवत् रूप से जमीन पर खड़े हैं। यदि उन दोनों के आधारों के बीच की दूरी 12 मीटर है, तब उनकी सिरों की बीच की दूरी होगी:

   (A) 11मीटर (B) 12 मीटर (C) 13 मीटर (D) 14 मीटर

3. यदि दो त्रिभुजों DEF तथा PQR में, $\angle D = \angle Q$, $\angle R = \angle E$, तब इनमें से कौन सा सत्य नहीं है:

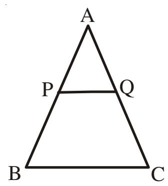
   (A) $\frac{DE}{PQ} = \frac{EF}{RP}$ (B) $\frac{EF}{PR} = \frac{DF}{PQ}$ (C) $\frac{DE}{QR} = \frac{DF}{PQ}$ (D) $\frac{EF}{RP} = \frac{DE}{QR}$

4. संलग्न चित्र में, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, तब PR की लम्बाई है:



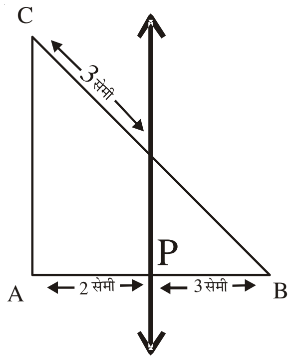
   (A) 3 सेमी (B) 2 सेमी (C) 4 सेमी (D) 6 सेमी

5. संलग्न चित्र में P तथा Q क्रमशः AB तथा AC के मध्य बिन्दु है, यदि PQ = 3.4 सेमी , तब BC का मान है:



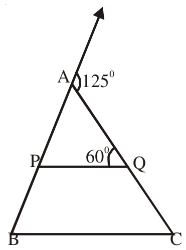
(A) 3.4 सेमी (B) 1.7 सेमी (C) 6.8 सेमी (D) 10.2 सेमी

6. संलग्न आकृति में, QP || CA, तो BC ज्ञात कीजिए।

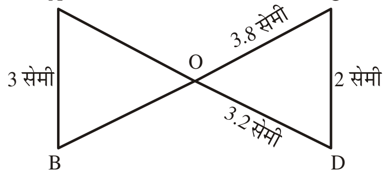


7. त्रिभुज ABC में यदि AB= a सेमी, BC= $\sqrt{3}$ a सेमी तथा AC= 2a सेमी, तब ∠B ज्ञात कीजिए।

8. संलग्न आकृति में $\Delta ABC \sim \Delta APQ$ तब ∠B ज्ञात कीजिए।



9. संलग्न आकृति में $\Delta ABO \sim \Delta DCO$ तब OA तथा OB ज्ञात कीजिए।



10. समबाहु ΔABC में $AD \perp BC$ तो सिद्ध कीजिए कि $3\ AB^2 = 4\ AD^2$

स्वयं विस्तारणः

1. सिद्ध कीजिए कि a भुजा वाले समबाहु त्रिभुज की ऊँचाई $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ होती है।
2. ΔABC में $AD \perp BC$ तथा $AD^2 = BD \times DC$. हो तो सिद्ध कीजिए कि $\angle BAC = 90^0$
3. सिद्ध कीजिए कि समकोण त्रिभुज में कर्ण पर बना वर्ग शेष दो भुजाओं पर बने वर्गों के योग के बराबर होता है।
4. यदि एक त्रिभुज में किसी भुजा के समान्तर खींची गई रेखा अन्य दो भुजाओं को प्रतिच्छेद करें तो सिद्ध कीजिए कि यह रेखा अन्य दो भुजाओं की एक ही अनुपात में विभाजित करती है।
5. सिद्ध कीजिए कि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है।

उत्तरः

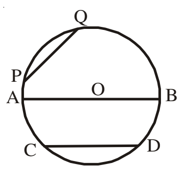
देखें आपने कितना सीखाः

1. A
2. C
3. A
4. B
5. C
6. 7.5सेमी
7. 90^0
8. 65^0
9. 4.8 सेमी
10. 5.7 सेमी

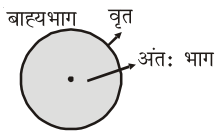
15

वृत्त

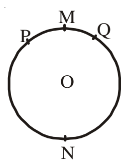
- किसी समतल में ऐसे सभी बिन्दुओं का संग्रह जो एक निश्चित बिन्दु से समान दूरी पर हैं, वृत कहलाता है। निश्चित बिन्दु को वृत का केन्द्र कहते है।
- वृत्त के केन्द्र को वृत के किसी बिन्दु से मिलाने वाला रेखाखंड वृत की त्रिज्या कहलाता है। वृत्त की अनन्त त्रिज्याएं होती है। सभी त्रिज्याएं परस्पर समान होती है।
- वृत्त पर स्थित दो विभिन्न बिन्दुओं को मिलाने पर प्राप्त रेखाखंड को जीवा कहते है। वृत्त के केन्द्र से जाने वाली जीवा को व्यास कहते है। व्यास वृत्त की सबसे लम्बी जीवा होती है।



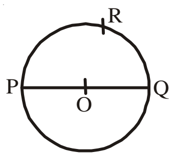
- छायांकित भाग वृत्त का अन्त:भाग, और अछायांकित भाग, वृत्त का बाह्य भाग, कहलाता है। छायांकित व अछायांकित भाग की सीमा को वृत्त कहते है।



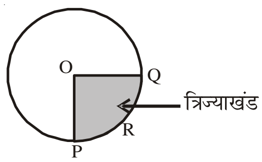
- **चाप:** वृत्त का एक भाग। यहां PMQ एक चाप है जिसे $\overset{\frown}{PMQ}$ से प्रदर्शित किया जाता है।



- **लघु चाप:** वृत्त की ऐसी चाप जिसकी लम्बाई उसके अर्धवृत्त की लम्बाई से कम है। $\overset{\frown}{PMQ}$ एक लघु चाप है।
- **दीर्घ चाप:** वृत्त की ऐसी चाप जिसकी लम्बाई उसके अर्धवृत्त की लम्बाई से अधिक है। $\overset{\frown}{PNQ}$ एक दीर्घ चाप है।
- वृत्त का व्यास वृत्त को दो बराबर चापों में बाँटता है, जिनमें प्रत्येक को अर्धवृत्त कहते है। आकृति में $\overset{\frown}{PRQ}$ एक अर्धवृत्त है।

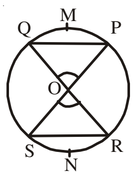


- **त्रिज्यखंड:** वृत्त की एक चाप और दो त्रिज्याओं से घिरा हुआ भाग।

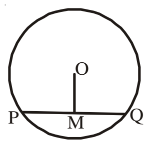


- **वृत्तखण्ड:** एक जीवा वृत्त के अन्त:भाग को दो भागों में बाँटती है। प्रत्येक भाग वृत्तखण्ड कहलाता है।

- **परिधि:** वृत्त की परिसीमा की लम्बाई उसकी परिधि कहलाती है। वृत्त की परिधि एवं व्यास का अनुपात सदैव अचर रहता है और इसे ग्रीक अक्षर π से प्रदर्शित किया जाता है।
- वृत्त की दो चाप सर्वागसम होती हैं यदि और केवल यदि उनके द्वारा वृत्त के केन्द्र पर बने कोण समान है। $\overset{\frown}{PMQ} \cong \overset{\frown}{SNR} \Leftrightarrow \angle POQ = \angle SOR$।



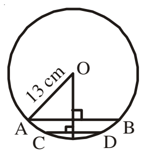
- वृत्त की दो चाप सर्वांगसम होती है यदि और केवल यदि उनकी संगत जीवाएं समान होती हैं। $\overset{\frown}{QMP} \cong \overset{\frown}{SNR} \Leftrightarrow PQ = RS.$
- समान जीवाएं वृत्त के केन्द्र पर समान कोण बनाती है। विलोमतः यदि जीवाओं द्वारा वृत्त के केन्द्र पर बने हुए कोण समान है तो जीवाएं भी परस्पर समान होती है।
- वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब, जीवा को दो बाराबर भागों में विभाजित करता है।



- विलोमतः वृत्त के केन्द्र को जीवा के मध्य बिन्दु से मिलाने वाला रेखा खण्ड, जीवा पर लम्बवत् होता है।.
- तीन असरेख बिन्दुओं से एक और केवल एक वृत्त खींचा जा सकता है।
- वृत्त की समान जीवाएं उसके केन्द्र से समदूरस्थ होती है। विलोमतः वृत्त के केन्द्र से समदूरस्थ जीवाएं परस्पर समान होती है।

देखें आपने कितना सीखाः

1. नीचे दी गई आकृति में, $AB = 8$ सेमी और $CD = 6$ सेमी, O केन्द्र के वृत्त, की समांतर जीवाएं है। जीवाओं के बीच की दूरी हैः

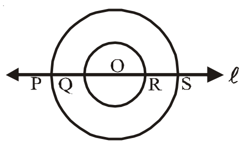


(A) 2 सेमी (B) 1 सेमी (C) 1.5 सेमी (D) 3 सेमी

2. एक वृत्त के अन्दर एक समअष्टभुज बनाया जाता है। वृत्त के केन्द्र पर प्रत्येक भुजा द्वारा बना हुआ कोण हैः

(A) 72° (B) 45° (C) 74° (D) 66°

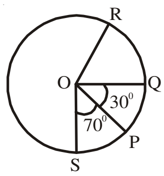
3. आकृति में, रेखा ℓ, O केन्द्र के दो संकेन्द्री वृत्तों को बिन्दुओं P, Q, R एवं S पर प्रतिच्छेद करती है, तो



(A) $PQ + RS = OQ + OR$ (B) $OP = 2OQ$

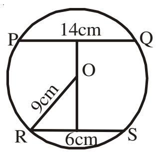
(C) $OS - RS = OP - OQ$ (D) $PQ = RS$

4. नीचे दी गई आकृति में $\overset{\frown}{PQ} \cong \overset{\frown}{QR}$, $\angle POQ = 30°$ और $\angle POS = 70°$ तो $\angle ROS$ की माप हैः



(A) 200º (B) 150º (C) 230º (D) 120º

5. आकृति में, PQ = 14 सेमी एवं RS = 6 सेमी O केन्द्र के वृत्त की दो समान्तर जीवाएं है। जीवाओं PQ एवं RS के बीच की दूरी है:



(A) $6\sqrt{2}$ सेमी (B) $10\sqrt{2}$ सेमी (C) $4\sqrt{2}$ सेमी (D) $2\sqrt{2}$ सेमी

6. O एवं O' केन्द्र के दो वृत्त परस्पर बिन्दुओं A तथा B पर प्रतिच्छेद करते है। सिद्ध कीजिए कि $\angle OAO' = \angle OBO'$.

7. यदि एक वृत्त की दो समान जीवाएं वृत्त के अन्दर परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं, तो सिद्ध कीजिए कि प्रतिच्छेदन बिन्दु को वृत्त के केन्द्र से मिलाने वाली रेखा जीवाओं के साथ समान कोण बनाती है।

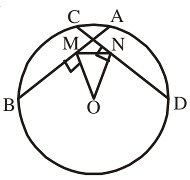
8. AB एवं AC किसी वृत्त की दो समान जीवाएं है। सिद्ध कीजिए कि वृत्त का केन्द्र $\angle BAC$ के कोण समद्विभाजक पर स्थित है।

9. यदि दो वृत्त परस्पर दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करते है; तो सिद्ध कीजिए कि अनके केन्द्र उभयनिष्ठ जीवा के लम्ब समद्विभाजक पर स्थित है।

10. AB एवं CD किसी वृत्त की दो समान्तर जीवाएं, वृत्त के केन्द्र से विपरीत दिशाओं में स्थित है। यदि AB= 10सेमी, CD= 24सेमी और AB तथा CD के बीच की दूरी 17सेमी है तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

स्वयं विस्तारण

1. नीचे दी गई आकृति में, AB तथा CD, O केन्द्र के वृत्त दो समान जीवाएं है। $OM \perp AB$ और $ON \perp CD$ सिद्ध कीजिए कि $\angle OMN = \angle ONM$.



2. O केन्द्र के वृत्त की दो जीवाएं AB तथा AC इस प्रकार है कि AB= AC=6 सेमी। यदि वृत्त की त्रिज्या 5 सेमी है, तो जीवा BC.की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

3. O तथा O' केन्द्र के, दो वृत्त परस्पर बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करते है। बिन्दु P से एक रेखा ℓ, OO' के समान्तर खींची जाती है और यह रेखा वृत्तों को बिन्दु C तथा D पर प्रतिच्छेद करती है। सिद्ध कीजिए कि $CD = 2 \times OO'$.

उत्तर:

देखें आपने कितना सीखा:

1. B

2. B
3. D
4. D
5. B

10. 5.13 सेमी.

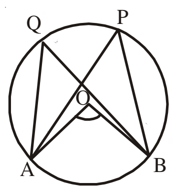
स्वयं विस्तारण:

2. 9.6 सेमी.

16

एक वृत्त में कोण तथा चक्रीय चतुर्भुज

- **केन्द्रीय कोण:** चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर बना हुआ कोण। आकृति (I) में इसे $\angle AOB$ से दर्शाया गया है।



आकृति (I)

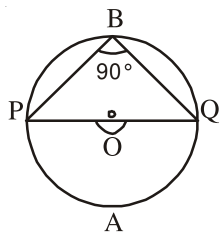
$$\text{चाप की लम्बाई} = \text{परिधि} \times \frac{\text{चाप की अंश माप}}{360^0}$$

- **अंतर्निहित कोण:** चाप अथवा जीवा द्वारा वृत्त के शेष भाग के किसी भी बिन्दु पर बना हुआ कोण। आकृति (I) में यह $\angle APB$.

  एक चाप द्वारा, वृत्त के केन्द्र पर बना हुआ कोण, इस चाप द्वारा वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर बने हुए, कोण का दुगना होता है आकृति (i) में $\angle AOB = 2\ \angle APB$.

  एक ही वृत्तखण्ड में बने कोण परस्पर समान होते हैं। आकृति (i) में $\angle APB = \angle AQB$.

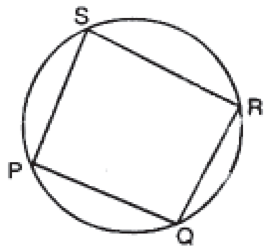
- अर्धवृत्त में बना कोण समकोण होता है आकृति (ii) में $\angle PBQ = 90^o$



चित्र (ii)

- **एक वृत्तीय बिन्दु:** ऐसे बिन्दु जो एक ही वृत्त पर स्थित है। तीन असंरेख बिन्दु सदैव एक वृत्तीय बिन्दु होते हैं और उनसे होकर केवल एक वृत्त खींचा जा सकता है।

- **चक्रीय चतुर्भुज:** एक चतुर्भुज जिसके चारों शीर्ष एक ही वृत्त पर स्थित हों। आकृति (iii) में PQRS एक चक्रीय चतुर्भुज है।



आकृति (iii)

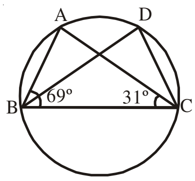
यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का एक युग्म संपूरक है। तो वह चतुर्भुज चक्रीय चतुर्भुज कहलाता है। $\angle P + \angle R = 180^0$ अथवा

$\angle Q + \angle S = 180^0 \Rightarrow$ PQRS चक्रीय चतुर्भुज है।

- यदि PQRS एक चक्रीय समान्तर चतुर्भुज है, तो यह एक आयत होता है।

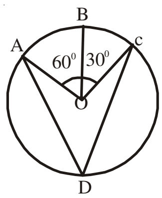
देखें आपने कितना सीखाः

1. दी हुई आकृति में यदि $\angle ABC = 69^\circ$ तथा $\angle ACB = 31^\circ$, तो $\angle BDC$ है:



(A) 80°   (B) 69°   (C) 59°   (D) 31°

2. नीचे दी गई आकृति में, O केन्द्र के वृत्त पर तीन बिन्दु A, B तथा C इस प्रकार है कि $\angle BOC = 30^\circ$ और $\angle AOB = 60^\circ$। चाप ABC के अतिरिक्त वृत्त पर एक बिन्दु D है, तो $\angle ADC$ है :

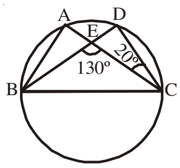


(A) 30°   (B) 60°   (C) 45°   (D) 90°

3. किसी वृत्त की एक जीवा त्रिज्या के समान है। इस जीवा द्वारा लघु चाप पर बना हुआ कोण है:

(A) 15°   (B) 150°   (c) 45°   (D) 60°

4. नीचे दी हुई आकृति में, A, B, C तथा D वृत्त पर चार बिन्दु हैं। AC तथा BD परस्पर बिन्दु E इस प्रकार प्रतिच्छेद करते है कि $\angle BEC = 130^\circ$ और $\angle ECD = 20^0$, $\angle BAC$ है:

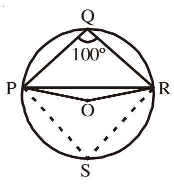


(A) 110°   (B) 60°   (C) 120°   (D) 90°

5. ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है जिसके विकर्ण बिन्दु E पर प्रतिच्छेद करते है। यदि $\angle DBC = 70^0$, $\angle BAC = 30^0$। AB = BC, तो $\angle ECD$ है:

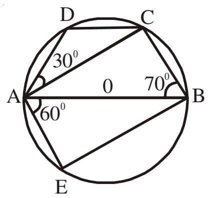
(A) 30°   (B) 60°   (C) 50°   (D) 110°

6. दी गई आकृति में, $\angle PQR = 100^\circ$, जहां P, Q एवं R केन्द्र O के वृत्त पर स्थित बिन्दु है $\angle OPR$ है:

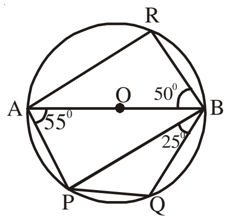


(A) 70^0 (B) 80^0 (C) 10^0 (D) 20^0

7. दी गई आकृति में, AB केन्द्र O, के वृत्त का व्यास है, यदि $\angle ABC = 70^0$, $\angle CAD = 30^0$ और $\angle BAE = 60^0$, तो $\angle BAC$, $\angle ACD$ तथा $\angle ABE$ ज्ञात कीजिए:

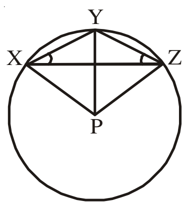


8. आकृति में, AB, केन्द्र O के वृत्त, का व्यास है। यदि $\angle PAB = 55^o$, $\angle PBQ = 25^o$ तो $\angle ABR = 50^o$, तो $\angle PBA$, $\angle BPQ$ एवं $\angle BAR$ ज्ञात कीजिए:



स्वयं विस्तारण:

1. निम्न आकृति में बिन्दु P, वृत्त का केन्द्र है। सिद्ध कीजिए कि $\angle XPZ = 2\,(\angle XZY + \angle YXZ)$.



2. दो वृत्त परस्पर बिन्दु A तथा B पर प्रतिच्छेद करते है। AC तथा AD वृत्तों के व्यास है। सिद्ध कीजिए कि C, B तथा D संरेख है।

उत्तर

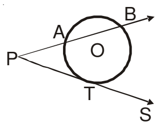
देखें आपने कितना सीखा:

1. A
2. C
3. B
4. A
5. C
6. C
7. $20^o, 40^o, 30^o$
8. $35^o, 30^o, 40^o$

17

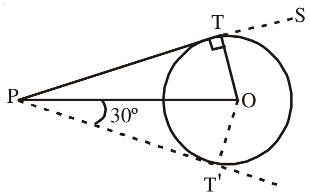
छेदक, स्पर्श रेखाएँ तथा उनकी विशेषताएँ

- **छेदकः** एक रेखा जो वृत्त को दो भिन्न बिन्दुओं पर काटती है। चित्र में PAB एक छेदक है जो वृत्त को A तथा B दो भिन्न बिन्दुओं पर काटती है।



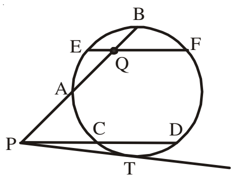
चित्र (i)

- **स्पर्श रेखाः** एक रेखा जो वृत्त को केवल एक ही बिन्दु पर स्पर्श करती है। वह बिंदु जहाँ रेखा वृत्त को स्पर्श करती है, स्पर्श बिन्दु कहलाता है। चित्र में PTS एक स्पर्श रेखा है तथा T स्पर्श बिन्दु है।



चित्र (ii)

- जब किसी छेदक रेखा के दोनों बिन्दु संपाती हो जाते हैं तो वह स्पर्श रेखा हो जाती है।
- किसी बाह्य बिन्दु से, वृत्त पर केवल दो स्पर्श रेखाएं खींची जा सकती हैं तथा ये दोनों स्पर्श रेखाएं लम्बाई में समान होती हैं।
- वृत्त की स्पर्श रेखा, स्पर्श बिन्दु से होकर जाती हुई वृत्त की त्रिज्या पर लम्ब होती है। $\angle PT'O = \angle PTO = 90^\circ$. [चित्र (ii)]
- वृत्त के किसी बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएं, उस रेखा, जो बाह्य बिन्दु से केन्द्र को मिलाती है, पर समान कोण बनाती है। $\angle TPO = \angle T'PO$. [चित्र (ii)]



चित्र (iii)

- यदि वृत्त की दो जीवाएँ AB तथा CD एक दूसरे को बिन्दु P पर वृत्त के बाहर या अन्दर काटती हैं, तो $PA \times PB = PC \times PD$ अथवा $QA \times QB = QE \times QF$.
- यदि PAB एक वृत्त की छेदक रेखा है जो वृत्त को बिन्दुओं A और B पर काटती है, तथा PT वृत्त के बिंदु T पर स्पर्श रेखा है तो $PA \times PB = PT^2$. [चित्र (i)]
- किसी जीवा द्वारा दी गई स्पर्श रेखा के साथ स्पर्श बिन्दु पर बनाया गया कोण उस जीवा द्वारा एकान्तर वृत्त खण्ड में बनाए गए कोण के समान होता है। $\angle QPX = \angle QSP$ तथा $\angle PRQ = \angle QPY$. [चित्र (iv)]

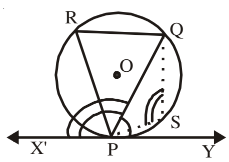
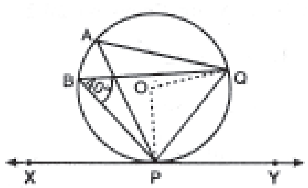


Fig. (iv)

- यदि वृत्त की जीवा के एक सिरे से होती हुई रेखा और जीवा के बीच का कोण एकान्तर वृत्तखण्ड में जीवा द्वारा बनाए गए अन्तःकोण के समान हो, तो वह रेखा वृत्त की स्पर्श रेखा होती है।

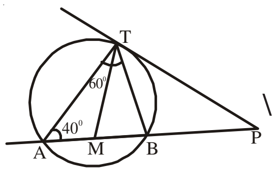
देखें आपने कितना सीखा :

1. एक वृत्त चतुर्भुज ABCD की चारों भुजाओं को स्पर्श करता है। सिद्ध कीजिए कि AB + CD = BC + DA.
2. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के सीमाबद्ध रूप में खींचा गया समान्तर चतुर्भुज समचतुर्भुज होता है।
3. किसी बाह्य बिन्दु T से O केन्द्र वाले वृत्त पर TP तथा TQ दो स्पर्श रेखाएँ खींची गयी हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle PTQ = 2\angle OPQ$
4. दो स्पर्श रेखाखण्ड PA तथा PB एक O केन्द्र वाले वृत्त पर इस प्रकार खींचे गए हैं कि $\angle APB = 120^0$, सिद्ध कीजिए कि $AP = \frac{1}{2} OP$
5. दिये गये चित्र में वृत्त का केन्द्र O है तथा $\angle PBQ = 40^0$, तब ज्ञात कीजिए



(i) $\angle QPY$ (ii) $\angle POQ$ (iii) $\angle OPQ$

6. दी गई आकृति में यदि $\angle PAT = 40^0$ तथा $\angle ATB = 60^0$, तब दिखाइए कि PM = PT



स्वयं विस्तारण:

1. एक गतिविधि द्वारा दिखाइए कि वृत्त की एक स्पर्श रेखा, स्पर्श बिन्दु से होकर जाती हुई वृत्त की त्रिज्या पर लम्ब होती है।
2. यदि किसी चतुर्भुज के अन्दर स्थित, बिन्दु O को चारों शीर्षों से मिलाया जाए तो सिद्ध कीजिए कि $OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$

उत्तर:

देखें आपने कितना सीखा :

5. (i) 40^0 (ii) 80^0 (iii) 50^0

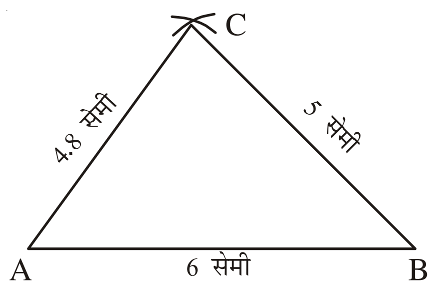
18

रचनाएँ

- **जब त्रिभुज की तीनों भुजाए दी हुई हों:** AB = 6 सेमी, AC = 4.8 सेमी, BC = 5 सेमी

चरण:

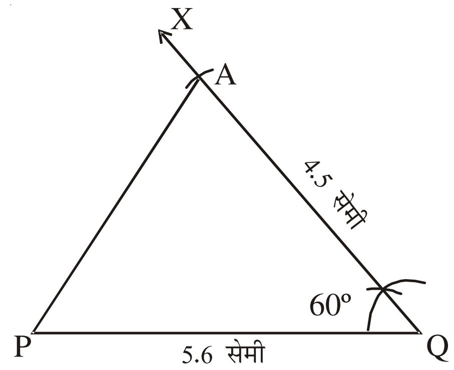
1. AB = 6 सेमी, लीजिए।
2. A को केन्द्र लेकर 4.8 सेमी त्रिज्या का एक चाप लगाइए।
3. AB को केन्द्र लेकर 5 सेमी त्रिज्या का दूसरा चाप लगाइए जो पहले चाप को C पर काटता हो।
4. AC तथा BC को मिलाइए ΔABC ही अभीष्ट त्रिभुज है।



- **जब दो भुजाएँ तथा उनके बीच का कोण दिया हो:** PQ = 5.6 सेमी, QR = 4.5 सेमी, $\angle PQR = 60°$

चरण:

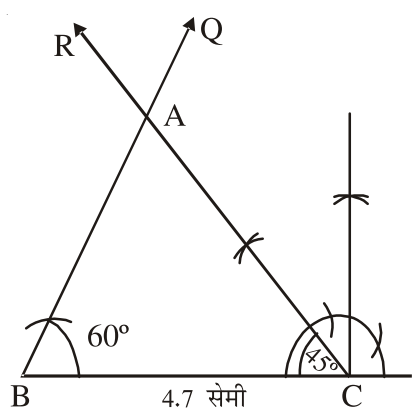
1. PQ = 5.6 सेमी लीजिए।
2. Q पर $\angle PQX = 60^0$ लीजिए।
3. Q को केन्द्र लेकर 4.5 सेमी का एक चाप लगाइए जो QX को R पर काटे।
4. P R, को मिलाइए। ΔPQR अभीष्ट त्रिभुज है।



- **जब दो कोण और उनके बीच की भुजा दी गई हो:** $\angle B = 60°$, $\angle C=45°$, BC=4.7 सेमी

चरण:

1. BC = 4.7 सेमी लीजिए।
2. B पर $\angle CBQ = 60º$ लीजिए।
3. C पर $\angle BCR = 45º$ बनाएं, BQ से A , पर मिले। ΔABC ही अभीष्ट त्रिभुज है।



- **जब परिमाप और आधार के दो कोण दिए हो**–परिमाप = 9.5 सेमी, आधार के कोण 60°, 46°

चरण:

1. XY = 9.5 लीजिए।

2. X पर कोण $\angle YXP = 30^o$ बनाईए। ($\frac{1}{2} \times 60^0$).

3. Y पर $\angle XYQ = 22\frac{1}{2}^0$ बनाइए ($\frac{1}{2} \times 45^0$)

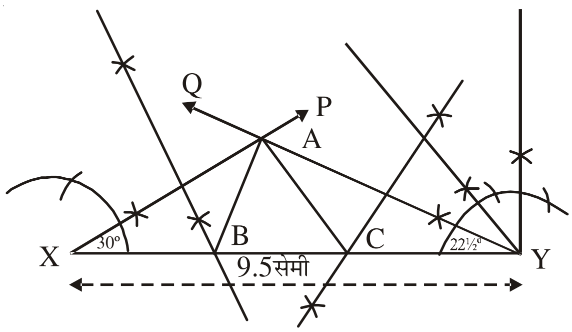
माना XP और YQ बिन्दु A पर मिलते है।

4. XA का लम्ब समद्विभाजक खीचिए जो XY को B पर काटे।

5. YA का लम्ब समद्विभाजक खीचिए जो XY को C पर काटे।

6. AB तथा A C को मिलाइए।

ΔABC ही अभीष्ट त्रिभुज है।



- **ΔABC की रचना करना जब $AB + AC = 8.2$ सेमी, $BC = 3.6$ सेमी, $\angle B = 45^0$**

चरण:

(1) BC = 3.6 सेमी।

(2) B पर $\angle CBK = 45^o$ बनाइए।

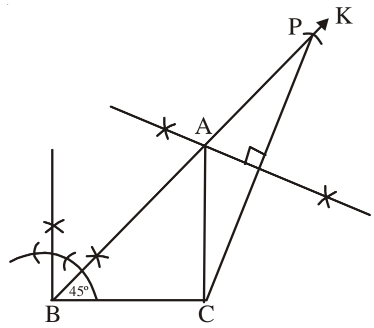
(3) BK से BP = 8.2 सेमी काटिए।

(4) CP को मिलाइए।

(5) CP का लम्ब समद्विभाजक खीचिएं जो BP को पर A काटे।

(6) AC को मिलाइए।

ΔABC ही अभीष्ट त्रिभुज है।

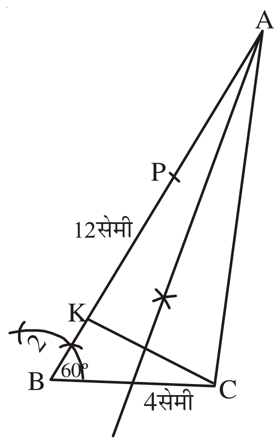


- **ΔABC, की रचना करना जब BC = 4 सेमी, $\angle B = 60^0$, AB – AC = 1.2 सेमी**

चरण:

1. BC = 4 सेमी लीजिए।
2. $\angle CBP = 60^0$ बनाइए।
3. BP से BK = 1.2 सेमी काटिए।
4. CK को मिलाइए।
5. CK का लम्ब समद्विभाजक खीचिए, जो BP को बढ़ाने पर A पर मिले।
5. AC को मिलाइए।

ΔABC ही अभीष्ट त्रिभुज है।



- **त्रिभुज की रचना करना जिसमें AB = 6सेमी, BC = 4 सेमी CD = 3.5 सेमी**

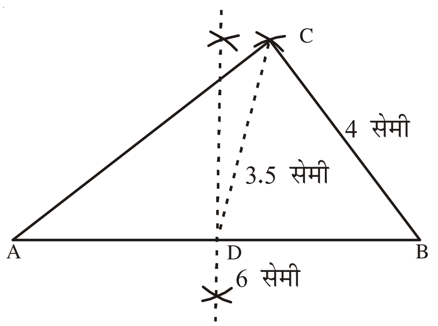
चरण:

1. AB = 6 सेमी।
2. AB का लम्ब समद्विभाजक खीचिए जो AB

को D पर मिले।

3. D को केन्द्र मानकर 3.5 सेमी त्रिज्या का एक चाप खीजिए।
4. B को केन्द्र मानकर 4 सेमी त्रिज्या का एक दूसरा चाप खीचिए जो पहले चाप को C पर काटता है।
5. A C और BC को मिलाइए।

ΔABC ही अभीष्ट त्रिभुज है।

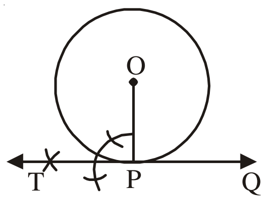


- **वृत्त पर स्थित किसी बिन्दु से वृत्त की स्पर्श रेखा खींचना–**

चरणः

1. O P को मिलाइए।
2. P पर लम्ब PT खीचिए।
3. TP को Q तक बढ़ाइए।

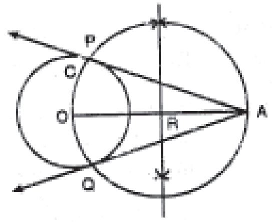
T PQ अभीष्ट स्पर्श रेखा है।



- **वृत्त के बाहर दिए गए बिन्दु से स्पर्श रेखा खीचना–**

चरणः

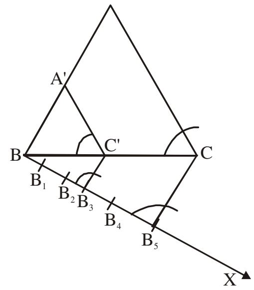
1. OA को मिलाइए।
2. O A का लम्ब समद्विभाजक खीचिए। माना OA का मध्य बिन्दु R है।
3. R को केन्द्र मानकर तथा RO के बराबर त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचिए, जो दिए हुए वृत्त को P तथा Q पर काटे।
4. AP तथा AQ को मिलाइए, AP तथा AQ अभीष्ट स्पर्श रेखाएं है।



ΔABC के समरूप एक त्रिभुज की रचना करना, जबकि इस त्रिभुज की भुजाएं, ΔABC के संगत भुजाओं की $\frac{3}{5}$ हो।

1. ΔABC दिया हुआ त्रिभुज है। BC के साथ न्यूनकोण बनाते हुए शीर्ष A के विपरीत दिशा में एक किरन BX खींचिए।
2. BX पर 5 बिन्दु B_1, B_2, B_3, B_4 तथा B_5 इस प्रकार अंकित कीजिए कि $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5$।
3. B_5C को मिलाइए तथा B_3 से B_5C के समान्तर एक रेखा खीचिए जो BC को C' पर काटे।
4. C' से CA के समान्तर एक रेखा खीचिए जो AB से A' पर मिले।

$\Delta A' BC'$ अभीष्ट त्रिभुज है।



देखें आपने कितना सीखा:

1. पैमाना तथा परकार की सहायता से कौन सा कोण बनाना संभव है:
(A) 37.5^0 (B) 25^0 (C) 40^0 (D) 70^0.
2. ΔPQR जिसमें $PQ = 5$सेमी, $\angle A = 60^0$ की रचना सम्भव नही है, जब QR तथा PR का अन्तर है:
(A) 5.2 सेमी (B) 4.8 सेमी (C) 3.7 सेमी (D) 4.5 सेमी
3. ΔPQR जिसमें $PQ = 5.5$ सेमी, $\angle Q = 45^0$, की रचना सम्भव नही है यदि $PQ + RP$ है:
(A) 5 सेमी (B) 6 सेमी (C) 7 सेमी (D) 8 सेमी
4. ΔABC जिसमें $BC = 3$ सेमी, $\angle C = 60^0$ की रचना संभव है यदि AB तथा AC का अन्तर है:
(A) 4 सेमी (B) 3.5 सेमी (C) 3.1 सेमी (D) 2.4 सेमी
5. एक रेखाखंड $BA = 8$ सेमी खीचिए, इस पर एक बिन्दु C इस पर अंकित कीजिए कि $AC = \frac{3}{4} AB$।
6. ΔPQR की रचना कीजिए यदि $PQ = 3.4$ सेमी, $QR = 5.2$ सेमी, $PR = 7.5$ सेमी।
7. ΔABC, की रचना कीजिए यदि $AC = 5.5$ समी, $AB = 3.2$ सेमी तथा $\angle A = 135^0$।
8. ΔPQR की रचना कीजिए यदि $QR = 3.2$ सेमी, $\angle Q = 85^0$ तथा $\angle R = 60^0$ ।
9. ΔABC की रचना कीजिए यदि $\angle B = 60^0$, $\angle C = 45^0$ तथा $AB + BC + CA = 11$सेमी

स्वयं विस्तारण:

1. Δ PQR की रचना कीजिए जबकि $QR = 8$ सेमी, $\angle Q = 45^0$ तथा $PQ - PR = 3.5$ सेमी
2. ΔABC की रचना कीजिए यदि $BC = 5$ सेमी, $\angle B = 60^0$ तथा $AB + AC = 7.5$ सेमी।
3. ΔABC की रचना कीजिए यदि $AB = 5$ सेमी, $BC = 4.2$ सेमी तथा माध्यिका $CD = 3.8$ सेमी।
4. ΔPQRकी रचना कीजिए जिसमें $QR = 6$ सेमी, $\angle PQR = 60^0$ तथा भुजा $PQ = 4.5$ सेमी। स्केल गुणक $\frac{4}{5}$ से इस त्रिभुज के समरूप त्रिभुज $P'QR'$ की रचना कीजिए।

उत्तर:

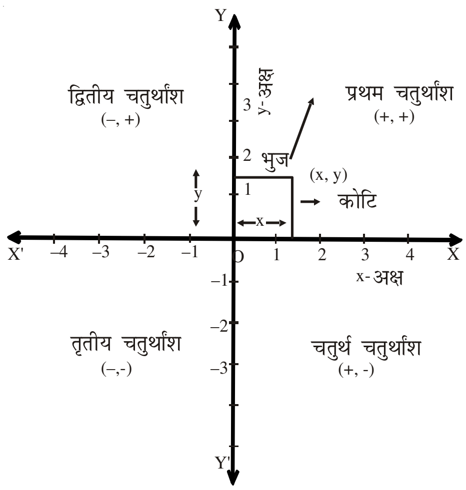
देखें आपने कितना सीखा:

1. A
2. A
3. A
4. D

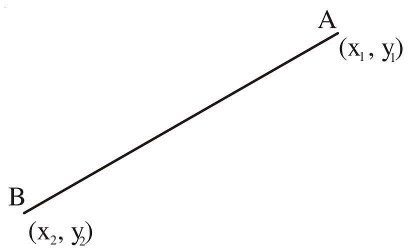
19

निर्देशांक ज्यामिति

- बिन्दु जिसके निर्देशांक $(x, 0)$ हो X-अक्ष पर स्थित होता है।
- बिन्दु जिसके निर्देशांक $(0, y)$ हो Y-अक्ष पर स्थित होता हे।
- यदि $x \neq y$ तब (x, y) तथा (y, x) दो भिन्न-भिन्न बिन्दुओं को प्रदर्शित करते हैं।
- मूल बिन्दु के निर्देशांक $(0, 0)$ होते है।



- दो बिन्दुओं $A(x_1, y_1)$ तथा $B(x_2, y_2)$, के बीच की दूरी $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



- यदि तीन बिन्दु A, B तथा संरेख हो, तब $AB + BC = AC$
- **एक चतुर्भुज**

समान्तर चतुर्भुज होगा यदि आमने सामने की लम्बाईयां समान है।

आयत: यदि आमने-सामने की भुजाएं तथा विकर्ण बराबर है।

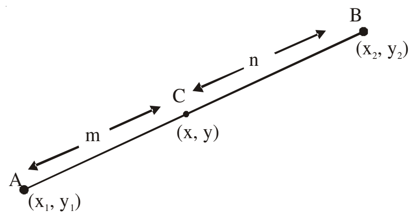
वर्ग: यदि चारों भुजाएं तथा विकर्ण बराबर हों।

समचतुर्भुज: यदि चारों भुजाएं बराबर हों।

समान्तर चतुर्भुज परन्तु आयत नही: यदि आमने-सामने की भुजाए बराबर हो परन्तु विकर्ण बराबर नहीं हो।

समचतुर्भुज परन्तु वर्ग नही: चारों भुजाएं बराबर हो परन्तु विकर्ण बराबर नहीं है।

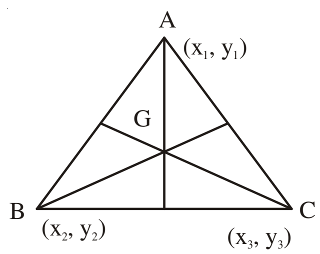
- **<u>खंड सूत्र</u>**



$$(x, y) = \left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$$

$$\text{मध्य बिन्दु:} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

- **केन्द्रक:**



$$G(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

देखें आपने कितना सीखा:

1. एक त्रिभुज के शीर्षो के निदेशांक क्रमश: (0,8), (0,0) तथा (6,0) हैं। इस त्रिभुज का परिमाप है:

   (A) 10 (B) 24 (C) 12 (D) 14

2. बिन्दु जो बिन्दुओं (–8, –5) तथा (–2, –10) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 2:1 के अनुपात में अंत:विभाजित करता है, स्थित होगा–

   (A) प्रथम चतुर्थांश में (B) द्वितीय चतुर्थांश (C) तृतीय चतुर्थांश (D) चतुर्थ चतुर्थांश

3. बिन्दु $\left(\frac{a-2}{2}, 5\right)$ दो बिन्दुओं (1,7) तथा (–5, 3), को मिलाने वाले रेखाखण्ड का मध्य बिन्दु है तो a का मान है:

   (A) 2 (B) 0 (C) –4 (D) –3

4. बिन्दुओं (6, x) तथा (0, 4) के बीच की दूरी 10 इकाई हो तो x का मान होगा:

   (A) 4 या 12 (B) 4 या –12 (C) –4 या 12 (D) –4 या –12

5. X-अक्ष पर स्थित बिन्दु, जो बिन्दुओं A (5,4) तथा B (–2, 3) से बराबर दूरी पर स्थित है, के निर्देशांक है:

   (A) (–1, 0) (B) (1, 0) (C) (2, 0) (D) (–2, 0)

6. बिन्दुओं (–3, –2), (–1, –2), (–2, 0), तथा (–3, –1) को दशाईए तथा क्रम में मिलाइए। बताइए कि कौन सी आकृति प्राप्त हुई।

7. एक रेखाखण्ड की लम्बाई 10 इकाई है। यदि एक सिरे के निर्देशांक (2, -3) तथा दूसरे सिरे का भुज 10 हो तो दिखाइए कि दूसरे सिरे की कोटि का मान 3 या -9 होगा।

8. यदि A व B क्रमश: (1, 4) तथा (5, 2) है तब AB पर स्थित बिन्दु P निर्देशांक ज्ञात कीजिए यदि 4 AP = 3 PB.

9. दर्शाइए कि बिन्दु A (3, 3), B (–1, 0) तथा C (1, 4) एक समकोण त्रिभुज बनाते हैं जिसका विकर्ण AB है।

10. दर्शाइए कि बिन्दु P (0, –4), Q (6, 2), R (3, 5) तथा S (–3, –1) आयत PQRS के शीर्ष हैं।

स्वयं विस्तारण:

1. रेखाखंड AB के सिरों के निर्देशांक A (9, 2) तथा B (–5, 12) हैं। बताइए कि बिन्दु (3, 2) रेखाखण्ड AB को किस अनुपात में विभाजित करता है।

2. उन बिन्दुओं के निर्देशाक ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (-4, 10) तथा (0, 6) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को चार बराबर भागों में विभाजित करते है।

3. बिन्दु A(–5, 0), B(0, 15) तथा C(–10, 20) किसी त्रिभुज के शीर्षो के निर्देशांक हैं। बिन्दु P भुजा AB पर स्थित है तथा उसे 2 : 3 के अनुपात में अन्त: विभाजित करता है। इसी प्रकार, बिन्दु Q, भुजा AC पर स्थित है। तथा उसे 2 : 3 के अनुपात में अन्त: विभाजित करता है।

   (i) बिन्दु P तथा Q के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

(ii) दिखाइए कि PQ = $\frac{2}{5}$ BC.

उत्तर:

देखें आपने कितना सीखा

1. B 2. B 3. C 4. C

5. C 6. चतुर्भुज 8. $\left(\frac{19}{7}, \frac{22}{7}\right)$

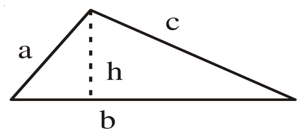
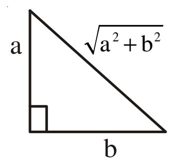
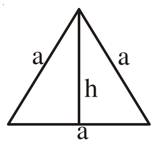
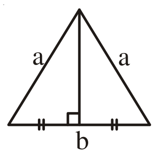
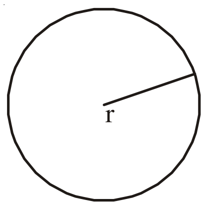
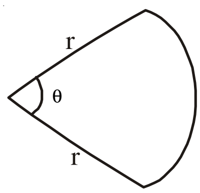
स्वयं विस्तारण:

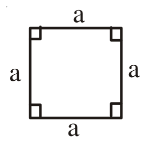
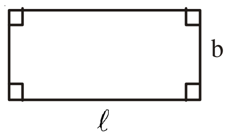
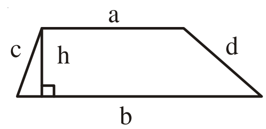
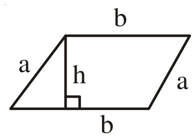
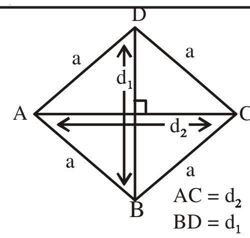
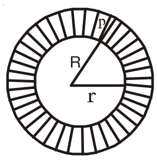
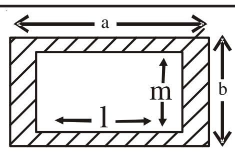
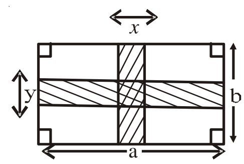
1. 3 : 4 2. $\left(-3,\frac{3}{2}\right)$, $(-2,3)$, $\left(-1,\frac{9}{2}\right)$

3. $\left(-5,\frac{45}{2}\right)$, $(-20,30)$

20

समतल आकृतियों के परिमाप एवं क्षेत्रफल

आकृति का नाम	परिमाप/ परिधि	क्षेत्रफल	आकृति
त्रिभुज	$a+b+c$	$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ जहाँ $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ अथवा $\dfrac{1}{2}bh$	
समकोण त्रिभुज	$a+b+\sqrt{a^2+b^2}$	$\dfrac{1}{2}ab$	
समबाहु त्रिभुज	$3a$	$\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$	
समद्विबाहु त्रिभुज	$2a+b$	$\dfrac{b}{4}\sqrt{4a^2-b^2}$	
वृत्त	$2\pi r$	πr^2	
वृत्त का त्रिज्यखण्ड	$\dfrac{\pi r\theta}{180}+2r$ (θ डिग्री में है)	$\dfrac{\theta}{360}\times\pi r^2$	

वर्ग	4a	a^2	
आयत	$2(\ell + b)$	$\ell \times b$	
समलम्ब	$a + b + c + d$	$\frac{1}{2}(a + b)h$	
समांतर चतुर्भुज	$2\,(a + b)$	bh	
समचतुर्भुज	4a	$\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$	
वृत्ताकार पथ	$2\pi\,(R + r)$	$\pi R^2 - \pi r^2$	
आयताकार पथ		ab - lm	
		ay + bx - xy	

देखें आपने कितना सीखा :

1. एक आयताकार खेत का क्षेत्रफल 3630 वर्ग मीटर है और उसकी भुजाएँ 6:5 के अनुपात में हैं। खेत का परिमाप है:

   (A) 363 मीटर (B) 121 मीटर (C) 242 मीटर (D) 484 मीटर

2. यदि चतुर्भुज के आकार के एक प्लाट के एक विकर्ण की लम्बाई 30 मीटर है और सम्मुख शीर्षों से इस विकर्ण पर बनाए गए लम्बों की लम्बाईयाँ क्रमशः 10 मीटर एवं 16 मीटर हैं, तो उस प्लाट का क्षेत्रफल है:

   (A) 480 वर्ग मीटर (B) 780 वर्ग मीटर (C) 160 वर्ग मीटर (D) 300 वर्ग मीटर

3. एक समलम्ब का क्षेत्रफल 390 वर्ग सेमी है और उसकी समान्तर भुजाओं का अन्तर 12 सेमी है। यदि समांतर भुजाओं के बीच की दूरी 15 सेमी है, तो समांतर भुजाओं की लम्बाईयाँ (सेमी में) हैं:

   (A) 26, 14 (B) 27, 15 (C) 36, 24 (D) 32, 20

4. एक वृत्त की परिधि एवं व्यास का अंतर 15 सेमी है उस वृत्त की त्रिज्या है [$\pi=\frac{22}{7}$ लीजिए] :

   (A) 7 सेमी (B) $\frac{7}{2}$ सेमी (C) 3 सेमी (D) $\frac{9}{2}$ सेमी

5. 10.5 सेमी त्रिज्या के वृत्ताकार कार्डबोर्ड में से 60^0 केन्द्रीय कोण का त्रिज्यखण्ड काटकर अलग कर दिया जाता है। कार्डबोर्ड के शेष भाग का क्षेत्रफल है [$\pi=\frac{22}{7}$ लीजिए] :

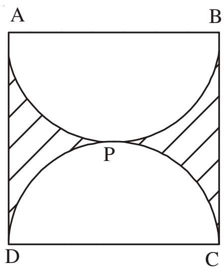
   (A) $228\frac{2}{3}$ वर्ग सेमी (B) $128\frac{2}{3}$ वर्ग सेमी (C) $228\frac{1}{3}$ वर्ग सेमी (D) $128\frac{1}{3}$ वर्ग सेमी

6. 100 मीटर $\times$ 60 मीटर विमाओं के आयताकार पार्क के मध्य में दो पथ है, प्रत्येक पथ की चौड़ाई 5 मीटर है। एक पथ पार्क की लम्बाई के समान्तर है तथा दूसरा पथ पार्क की चौड़ाई के समान्तर है। दोनो पथ परस्पर लम्बवत् है। 6 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से पथों के निर्माण का व्यय ज्ञात कीजिए। पार्क के शेष भाग पर 3 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से घास लगवाने का व्यय भी ज्ञात कीजिए।

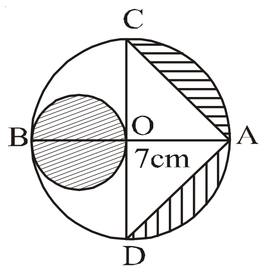
7. किसी समचतुर्भुज की एक भुजा 10 सेमी है और उसके विकर्ण की लम्बाई 12 सेमी है। समचतुर्भुज का क्षेत्रफल एवं उसके दूसरे विकर्ण की लम्बाई ज्ञात कीजिए। 12 सेमी लम्बाई के एक ऐसे आयत की चौड़ाई ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल समचतुर्भुज के क्षेत्रफल के समान है।

स्वयं विस्तारण:

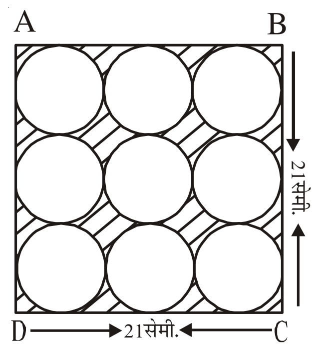
1. 21 सेमी भुजा के वर्ग ABCD में दो अर्धवृत्त APB एवं DPC बनाए गए हैं। निम्नलिखित का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए: i) अछायांकित भाग ii) छायांकित भाग [$\pi=\frac{22}{7}$]



2. संलग्न आकृति में, 7 सेमी त्रिज्या तथा O केंद्र के वृत्त का एक व्यास AB है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। [$\pi=\frac{22}{7}$ लीजिए]



3. वर्ग ABCD की भुजा 21 सेमी है। 9 सर्वांगसम वृत्त, जिनमें प्रत्येक की त्रिज्या 3.5 सेमी है, वर्ग के अन्दर इस प्रकार बनाए गए हैं कि ये वृत्त वर्ग की प्रत्येक भुजा को स्पर्श करते हैं। i) अछायांकित भाग ii) छायांकित भाग के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



उत्तर:

देखें आपने कितना सीखा :

1. C 2. B 3. D 4. B
5. A 6. 4650 रुपये, 15675 रुपये
7. d_2 =16 सेमी, क्षेत्रफल = 96 वर्ग सेमी, आयत की चौडाई = 8 सेमी

स्वयं विस्तारण:

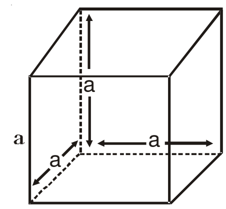
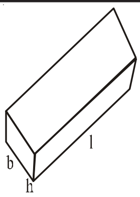
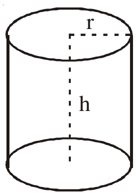
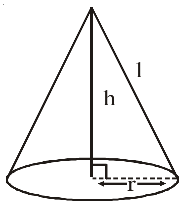
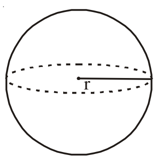
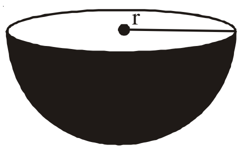
1. (i) 346.5 वर्ग सेमी (ii) 94.5 वर्ग सेमी

2. $\left(\frac{235}{32}\right)$ वर्ग सेमी

3. (i) 346.5 वर्ग सेमी (ii) 94.5 वर्ग सेमी

21

ठोस आकृतियों के पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन

ठोस आकृति का नाम	आकृति	पार्श्व/वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल	कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल	आयतन
घन		$4a^2$	$6a^2$	a^3
घनाभ		$2h(l+b)$	$2(lb+bh+lh)$	lbh
बेलन		$2\pi rh$	$2\pi r(r+h)$	πr^2h
शंकु		πrl	$\pi r(l+r)$	$\frac{1}{3}\pi r^2h$
गोला		$4\pi r^2$		$\frac{4}{3}\pi r^3$
अर्धगोला		$2\pi r^2$	$3\pi r^2$	$\frac{2}{3}\pi r^3$

देखें आपने कितना सीखाः

1. एक लम्बवृत्तीय बेलन की त्रिज्या एवं ऊँचाई क्रमशः $10\frac{1}{2}$ सेमी एवं 12 सेमी है। उस बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल है: ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए) :

   (A) 396 वर्ग सेमी (B) 792 वर्ग सेमी (C) 1188 वर्ग सेमी (D) 132 वर्ग सेमी

2. एक लम्ब वृत्तीय बेलन का आयतन 4620 घन सेमी है और उसकी त्रिज्या 14 सेमी है। उसका वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल है: ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए) :

   (A) 330 वर्ग सेमी (B) 440 वर्ग सेमी (C) 660 वर्ग सेमी (D) 990 वर्ग सेमी

3. एक लम्ब वृत्तीय शंकु के आधार की त्रिज्या एवं ऊँचाई क्रमशः 3.5 सेमी एवं 12 सेमी है। इस शंकु का वक्र-पृष्ठीय क्षेत्रफल है: ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए) :

   (A) 550 वर्ग सेमी (B) 137.5 वर्ग सेमी (C) 275 वर्ग सेमी (D) 12.5 वर्ग सेमी

4. एक अर्धगोलाकार कटोरी का आयतन 2425.5 घन सेमी है। अर्धगोले की त्रिज्या है:

   (A) 5.25सेमी (B) 10.5सेमी (C) 15.75सेमी (D) 12सेमी

5. एक गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल 1386 वर्ग सेमी है। उस गोले का आयतन है:

   (A) 9702 घन सेमी (B) 2425 घन सेमी (C) 441 घन सेमी (D) 4851 घन सेमी

6. यदि एक घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल 864 वर्ग सेमी है, तो इसकी भुजा एवं आयतन ज्ञात कीजिए।

7. एक सड़क रोलर (Road Roller) की त्रिज्या 42 सेमी है और इसकी लम्बाई 1 मीटर है। यदि यह रोलर किसी खेल-मैदान को समतल करने के लिए 250 चक्कर लेता है, तो 5 रुपये प्रति वर्गमीटर की दर से इस मैदान को समतल करने का व्यय ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

8. एक शंक्वाकार टैण्ट की ऊँचाई 3 मीटर है और इसके आधार की त्रिज्या 4 मीटर है। इस टैण्ट को बनाने के लिए वांछित कैनवास कपड़े का मूल्य 50 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए)

9. एक अर्धगोलाकार खिलोने का व्यास 35 सेमी है। इस खिलोने का

   (i) वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

   (ii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

   (iii) आयतन, ज्ञात कीजिए।

10. समान ऊँचाई के दो लम्ब वृत्तीय बेलनों की आधार त्रिज्याओं का अनुपात 3 : 5 है। इनके आयतनों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

स्वयं विस्तारणः

1.. एक बंद लम्बवृत्तीय बेलन की त्रिज्या एवं ऊँचाई का अनुपात 5:7 है और इसका आयतन 4400 घन सेमी है। बेलन की त्रिज्या एवं ऊँचाई ज्ञात कीजिए

[$\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए]

2.. एक धातु की ठोस गेंद, जिसका व्यास 28 सेमी है, को पिघलाकर 7 सेमी आधार त्रिज्या एवं $9\frac{1}{3}$ सेमी ऊँचाई के बेलन बनाए जाते है। इस प्रकार निर्मित बेलनों की संख्या ज्ञात कीजिए।

3. दो बेलनों की त्रिज्याओं का अनुपात 7:6 है और इनकी ऊँचाईयों का अनुपात 3:4 है। इनके

(i) आयतनों

(ii) वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफलों, का अनुपात ज्ञात कीजिए

उत्तरः

देखें आपने कितना सीखाः

1. B 2. C 3. B 4. B

5. D

6. भुजा = 12 सेमी, आयतन = 1728 घन सेमी

7. 3300/- रुपये 8. 3140/- रुपये

9. वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल =1925 वर्ग सेमी, कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2887.5 वर्ग सेमी, आयतन = 11229.17 घन सेमी

10. 9 : 25

स्वयं विस्तारणः

1. त्रिज्या = 10 सेमी, ऊँचाई = 14 सेमी

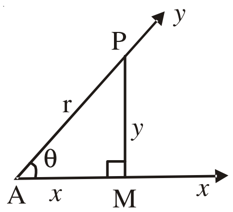
2. 8

3. (i) 49 : 48 (ii) 7 : 8

22

त्रिकोणमिति का परिचय

- **त्रिकोणमिति:** गणित की वह शाखा जो त्रिभुज की भुजाओं एवं कोणों के मापन और कोणों से सम्बधित समस्याओं से, सम्बन्ध रखती है।



- **त्रिकोणमितीय अनुपात:** त्रिभुज के न्यून कोणों के सापेक्ष उसकी भुजाओं के अनुपात, त्रिकोणमितीय अनुपात कहलाते हैं।

समकोण Δ AMP में, न्यून कोण PAM = θ के लिए आधार = AM = x, लम्ब = PM = y, कर्ण = AP = r

यहां, sine $\theta = \frac{y}{r}$, जिसे $\sin\theta$ लिखा जाता है।

cosine $\theta = \frac{x}{r}$, जिसे $\cos\theta$ लिखा जाता है।

tangent $\theta = y/x$, जिसे $\tan\theta$ लिखा जाता है।

cosecent $\theta = r/y$, जिसे cosec θ लिखा जाता है।

secent $\theta = r/x$, जिसे sec θ लिखा जाता है।

cotangent $\theta = x/y$, जिसे cot θ लिखा जाता है।

$\Rightarrow$ $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ इत्यादि सम्पूर्ण प्रतीक है और इन्हें θ से अलग नही किया जा सकता।

$\Rightarrow$ प्रत्येक त्रिकणेमिति अनुपात एक वास्तविक संख्या है।

$\Rightarrow$ θ का न्यूनकोण होना अनिवार्य है।

$\Rightarrow$ सुविधा के लिए, हम $(\sin\theta)^2$, $(\cos\theta)^2$, $(\tan\theta)^2$ को क्रमशः $\sin^2\theta$, $\cos^2\theta$ एवं $\tan^2\theta$ लिखते है।

- **त्रिकेणमितीय अनुपातों में परस्पर सम्बन्ध:**

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$ अथवा $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

अथवा $\sin\theta \times \operatorname{cosec}\theta = 1$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$ अथवा $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ अथवा $\cos\theta \times \sec\theta = 1$

$\Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$ अथवा $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ अथवा $\tan\theta \times \cot\theta = 1$

$\Rightarrow \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

- **त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएं:** कोण θ के त्रिकोणमितीय अनुपातों के समीकरण को त्रिकोणमीतीय सर्वसमिका कहा जाता है, यदि यह समीकरण θ के उन सभी मानों के लिए संतुष्ट होता है जिनके लिए त्रिकोणमितीय अनुपात परिभाषित हैं।

- **कुछ विशिष्ट त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएं:**

$\Rightarrow \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ अथवा $1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$ अथवा $1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$.

$\Rightarrow 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ अथवा $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ अथवा $\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$

$\Rightarrow 1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$ अथवा $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$ अथवा $\operatorname{cosec}^2\theta - 1 = \cot^2\theta$.

- **पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात:** यदि θ एक न्यून कोण है, तो

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$ और $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$

$\tan(90° - \theta) = \cot\theta$ और $\cot(90° - \theta) = \tan\theta$

$\operatorname{cosec}(90° - \theta) = \sec\theta$ और $\sec(90° - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$

यहां θ एक न्यूनकोण है और $(90° - \theta)$ इसका पूरक कोण है।

- **त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करना:**

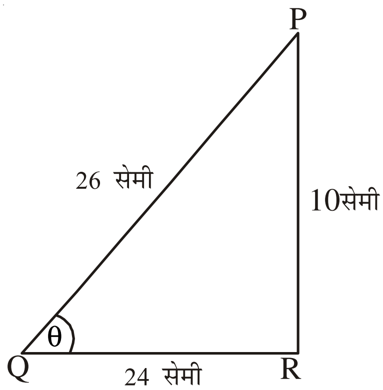
$\Rightarrow$ यदि किसी समकोण त्रिभुज की दो भुजाएं दी हुई

है, तो सभी छः त्रिकेणमितीय अनुपात ज्ञात किए जा सकते है।

⇒ यदि एक त्रिकोणमितीय अनुपात दिया हुआ है, तो पायथागोरस प्रमेय अथवा त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं के प्रयोग से दूसरे त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात किए जा सकते है।

देखें आपने कितना सीखाः

1. निम्न आकृति के लिए कौन सा कथन सत्य है?



(A) $\sin\theta + \cos\theta = \frac{17}{13}$ (B) $\sin\theta - \cos\theta = \frac{17}{13}$

(C) $\sin\theta + \sec\theta = \frac{17}{13}$ (D) $\tan\theta + \sec\theta = \frac{17}{13}$

2. यदि $5\tan\theta - 4 = 0$, तो $\frac{5\sin\theta - 4\cos\theta}{5\sin\theta + 4\cos\theta}$ का मान है:

(A) $\frac{5}{3}$ (B) $\frac{5}{6}$ (C) 0 (D) $\frac{1}{6}$

3. $\left(\frac{\sin\theta \,.\, \cos(90^0 - \theta)}{\sin(90^0 - \theta) . \cos\theta} + 1\right)$ का मान है:

(A) $\sin\theta + \cos\theta$ (B) $\cos^2\theta$ (C) $\sec^2\theta$ (D) $\operatorname{cosec}^2\theta$

4. $\frac{\sec 41^0 \operatorname{cosec} 49^0 - \tan 41^0 \cot 49^0}{\sec 41^0 . \sin 49^0 + \cos 49^\circ \,.\operatorname{cosec} 41^0}$ का मान है:

(A) 1 (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{3}$

5. यदि $\sin(\theta + 36^0) = \cos\theta$ और $\theta + 36^0$ एक न्यूनकोण है, तो θ का मान है:

(A) 54^0 (B) 18^0 (C) 21^0 (D) 27^0

6. यदि $\cot\theta = \frac{12}{5}$, तो $\frac{\sin\theta.\cos\theta}{\sec\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए:

7. सिद्ध कीजिए कि $\frac{\sin A}{1+\cos A} + \frac{1+\cos A}{\sin A} = 2\operatorname{cosec} A$.

8. यदि $\cos\theta = \frac{1}{2}$ और $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, तो θ, $\operatorname{cosec}\theta$ एवं $\tan\theta$ का मान ज्ञात कीजिए:

स्वयं विस्तारण:

1. एक समकोण त्रिभुज ABC, जिसमें $\angle C=90°$, $\tan A=1$, $\sin^2 B.\cos^2 B$ का मान ज्ञात कीजिए।
2. $\tan 1^0.\tan 2^0.\tan 3^0.........\tan 89^0$ का मान ज्ञात कीजिए

उत्तर:

देखें आपने कितना सीखा:

1. A   2. C   3. C

4. C   5. D   6. $\frac{720}{2197}$

8. $\sec\theta = 2$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\tan\theta = \sqrt{3}$

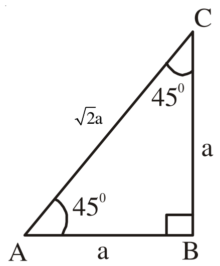
स्वयं विस्तारण:

1. $\frac{1}{4}$ 2. 1

23

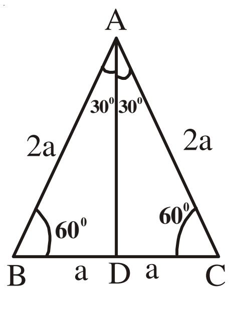
कुछ विशेष कोणों के त्रिकोणतीय अनुपात

- **45^0 के कोण के लिए त्रिकोणमितीय अनुपातः** Δ ABC में, $\angle B = 90^0$, $\angle A = 45^0$ और $\angle C = 45^0$ और AB = BC = तो AC = $\sqrt{2}a$



ΔABC, में, $\sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan 45^0 = 1$, $\cot 45^0 = 1$, $\text{cosec}\, 45^0 = \sqrt{2}$, $\sec 45^0 = \sqrt{2}$

- **30^0 एवं 60^0 के कोणों के लिए त्रिकोणमितीय अनुपातः** एक समबाहु त्रिभुज ABC,जिसकी भुजा 2a है, के लिए AD = $\sqrt{3}a$



ΔADB में,

$\text{Sin } 30^0 = \frac{1}{2}$,

$\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ΔADB में

$\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 60^0 = \frac{1}{2}$

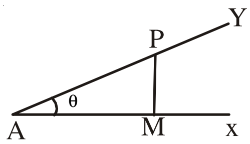
$\tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\qquad$ $\tan 60^0 = \sqrt{3}$

$\text{cosec}\, 30^0 = 2$ $\qquad$ $\text{cosec}\, 60^0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\sec 30^0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$ $\qquad$ $\sec 60^0 = 2$

$\cot 30^0 = \sqrt{3}$ $\qquad$ $\cot 60^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

- **0^0 एवं 90^0 के कोणों के लिए त्रिकोणमितीय अनुपातः** Let $\angle XAY = \theta$.



ΔAMP में, हम देख सकते हैं कि

$\sin\theta = \frac{PM}{AP}$, $\cos\theta = \frac{AM}{AP}$, $\tan\theta = \frac{PM}{AM}$

यदि θ का मान 0^0, हो जाए, तो PM = 0, AM = AP

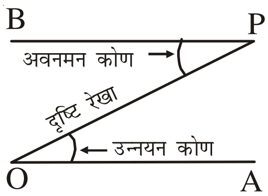
यदि θ का मान 90^0, हो जाए, तो AM = 0, AP = PM

यदि $\theta = 0^0$, तो	यदि $\theta = 90^0$, तो
$\sin 0^0 = 0$	$\sin 90^0 = 1$
$\cos 0^0 = 1$	$\cos 90^0 = 0$
$\tan 0^0 = 0$	$\tan 90^0 =$ अपरिभाषित
$\text{cosec}\, 0^0 = \frac{1}{0} =$ अपरिभाषित	$\text{cosec}\, 90^0 = 1$
$\sec 0^0 = \frac{1}{1} = 1$	$\sec 90^0 =$ अपरिभाषित
$\cot 0^0 = \frac{1}{0} =$ अपरिभाषित	$\cot 90^0 = 0$

$0^0, 30^0, 45^0, 60^0$ एवं 90^0 के त्रिकोणमितीय अनुपातः

$\theta \rightarrow$ / अनुपात	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	अपरिभाषित
cot	अपरिभाषित	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
cosec	अपरिभाषित	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	अपरिभाषित

- **त्रिकोणमिति के अनुप्रयोगः**



- **दृष्टि रेखाः** यदि एक प्रेक्षक बिन्दु O पर है तथा बिन्दु P को प्रेक्षक द्वारा देखा जाना है, तो रेखा OP बिन्दु P की दृष्टि रेखा कहलाती है।

- **उन्नयन कोणः**क्षैतिज रेखा और दृष्टि रेखा के बीच बना हुआ कोण बिन्द P का उन्नयन कोण कहलाता है।

- **अवनमन कोणः** यदि एक प्रेक्षक बिन्दु P पर है और देखे जाने वाली वस्तु O पर है तो $\angle BPO$ बिन्दु O का अवनमन कोण कहलाता है।

- **उन्नयन कोण एवं अवनमन कोण में परस्पर सम्बन्धः** बिन्दु O से देखने पर बिन्दु P का उन्नयन बिन्दु P से देखने पर बिन्दु O के अवनमन कोण के समान होता है।

देखें आपने कितना सीखा:

1. $\frac{2\tan 30^0}{1+\tan^2 30^0} + \frac{1-\tan 45^0}{1+\tan^2 45^0}$ का मान निम्नलिखित में से किसके बराबर है:

   (A) $\sin 60^0$ (B) $\sin 30^0$ (C) $\cos 60^0$ (D) $\tan 60^0$

2. एक छड़ी की लम्बाई का उसकी परछाई से अनुपात $1 : \sqrt{3}$ है। उस समय सूर्य का उन्नयन कोण है:

   (A) 30^0 (B) $45°$ (C) $60°$ (D) 90^0

3. $\tan^2 45^0 - \sin^2 60^0 + 2\cos^2 30^0$ का मान ज्ञात कीजिए।

4. ΔABC, में $C = 90°$, $AC = 2\sqrt{3}$ सेमी, और $BC = 2$ सेमी $\angle A$ तथा $\angle B$ ज्ञात कीजिए।

स्वयं विस्तारण:

1. एक पतंग की डोरी 100मीटर लम्बी है और यह डोरी क्षैतिक्ष तल के साथ 60^0 का कोण बनाती है। यह मानते हुए कि डोरी में किसी प्रकार की शिथिलता नही है।, पतंग की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

2. तेज हवा के झोंके से 12 मीटर ऊँचाई का एक वृक्ष इस प्रकार टूटता है कि उसका शीर्ष बिन्दु भूमि को छूता है और भूमि के साथ 30^0 का कोण बनता है। ज्ञात कीजिए कि वृक्ष कितनी ऊँचाई पर टूटा है।

3. यदि $\sin 2A = 2\sin A$ तो, A का मान ज्ञात कीजिए जहां $0 \leq A < 90^0$.

उत्तर

देखें आपने कितना सीखा:

1. A
2. A
3. $\frac{3}{4}$
4. $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$
5. $\angle A = 60°$, $\angle B = 30°$

स्वयं विस्तारण:

1. $50\sqrt{3}$ मीटर
2. 4 मीटर
3. $0°$

24

आंकड़ें और उनका निरूपण

- **सांख्यिकी:** सांख्यिकी गणित की वह शाखा है, जिसमें आंकडों के संग्रह प्रस्तुतिकरण, विश्लेषण, निर्वचन (व्याख्या) एवं निष्कर्ष निकालने का कार्य किया जाता है।
- **आंकड़े:** ऐसे तथ्य जो सख्यांत्मक हो और उन्हें किसी विशिष्ट उद्देश्य के लिए एकत्रित किया गया हो।
- **आँकडों के प्रकार:**

  प्राथमिक आंकडे: ऐसे आँकडे जिन्हे कोई अन्वेषक अपने व्यक्तिगत उद्देश्य के लिए प्रथम बार एकत्रित करता है।

  गौण आंकडे: ऐसे आंकडे जिन्हें कोई अन्वेषक अपने उद्देश्य के लिए किसी अन्य स्त्रोत, संस्था अथवा कार्यालय से प्राप्त करता है।
- **आंकडों का प्रस्तुतिकरण:**

  यथा प्राप्त अथवा अवर्गीकृत आंकडे: मूल रूप में प्राप्त अवर्गीकृत आंकडे जिनको किसी प्रकार व्यवस्थित न किया गया हो अथवा जो संघनित रूप में न हो।

  पंक्तिबद्ध आँकड़े: आरोही अथवा अवरोही क्रम में प्रस्तुत आँकड़े

  वर्गीकृत आँकड़े: आँकड़ों को वर्गों अथवा समूहों में फिर से व्यवस्थित करना अथवा संघनित करना।
- **आँकड़ों का परिसर:** आँकड़ों के सबसे बड़े और सबसे छोटे मान का अन्तर।
- **बारंबारता:** कोई प्रेक्षण किसी आँकड़े में जितनी बार सम्मिलित होता है।
- **वर्ग अंतराल:** एक आँकड़ें के प्रेक्षणों (मानो) को जितने समूहों में संघनित किया गया है उनमें से प्रत्येक समूह एक वर्ग अन्तराल कहलाता है।
- **वर्ग सीमाएं:** वे मान जिनसे प्रत्येक वर्ग अंतराल घिरा हुआ होता है। प्रत्येक वर्ग अन्तराल में बायीं संख्या निम्न सीमा और दायीं संख्या ऊपरिसीमा कहलाती है।
- **वर्ग आकार:** उन्परिसीमा एवं निम्न सीमा का अन्तर।
- **वर्ग अन्तराल का वर्ग चिन्ह**

  $$= \frac{\text{निम्न सीमा} + \text{उपरिसीमा}}{2}$$
- **एक वर्ग की संचयी बारंबारता:** किसी वर्ग की बारंबारता और उस वर्ग से पहले आने वाले सभी वर्गों की बारंबारताओं का योग।
- **आँकड़ों का आलेखीय निरूपण:**

  दंड आलेख: आँकड़ों का ऐसा चित्रीय निरूपण जिसमें सामान्यत: एक अक्ष पर समान चौड़ाई के दण्ड आयत बराबर-बराबर दूरी पर बनाए जाते हैं और चर के मान (बारंबारता) दूसरे अक्ष पर दर्शाए जाते हैं।

  आयत चित्र: दंड आलेख के जैसा चित्रीय निरूपण जिसमें दंडों (आयतों) के बीच कोई दूरी नहीं रखी जाती है। वर्गीकृत बारंबारता बंटन को आयत चित्र से निरूपित किया जाता है।

  बारंबारता बहुभुज: वर्गीकृत बारंबारता बंटन का ऐसा आलेखीय निरूपण जिसमें बारंबारताओं को वर्ग अंतरालों के वर्ग चिन्हों के संगत अंकित किया जाता है और इस प्रकार प्राप्त बिन्दुओं को रेखाखंडों से मिलाया जाता है।

देखें आपने कितना सीखा :

1. वर्ग 90-120 का वर्ग चिन्ह है:

   (A) 90 (B) 105 (C) 115 (D) 120

2. एक दिए हुए आँकड़ें में, चरों के विशिष्ट मान दिए हुए हैं, इन आँकड़ों को निम्न में से किसकी सहायता से आलेखीय रूप में निरूपित किया जा सकता है:

   (A) आयत चित्र (B) बारंबारता बहुभुज

   (C) दंड आलेख (D) इनमें से कोई नहीं

3. आँकड़ों 25, 18, 20, 22, 16, 6, 17, 15, 12, 30, 32, 10, 19, 8, 11, 20 का परिसर है:

   (A) 10 (B) 15 (C) 18 (D) 26

4. जब सूचना किसी ऐसे स्रोत से एकत्रित की जाती है, जिसके पास वह सूचना पहले से एकत्रित है, तो इस प्रकार प्राप्त आँकड़ा कहलाता है:

   (A) प्राथमिक आँकड़ा (B) गौण आँकड़ा

   (C) बारंबारता आँकड़ा (D) यथा प्राप्त आँकड़ा

5. वर्ग अन्तराल 5-15 का वर्ग आकार है:

   (A) 5 (B) 1 (C) 10 (D) 20

6. वर्ग अन्तराल 30-39 की उपरिवर्ग सीमा है:

   (A) 30 (B) 34 (C) 39 (D) 35

7. एक बारंबारता बंटन में किसी वर्ग का मध्य मान 10 है और वर्ग का आकार 6 है। उस वर्ग की निम्न सीमा है:

   (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 12

8. किसी निश्चित उद्देश्य के लिए एकत्रित किए गए तथ्य कहलाते है:

   (A) आँकड़ा (B) आयत चित्र (C) माध्यक (D) बहुलक

स्वयं विस्तारण:

1. निम्न संचयी बारंबारता बंटन सारणी में कक्षा X के 55 छात्रों द्वारा प्राप्तांकों को दर्शाया गया है। इसको बारंबारता बंटन सारणी के रूप में निरूपित कीजिए।

अंक	संचयी बारंबारता
5 से कम	2
10 से कम	8
15 से कम	21
20 से कम	38
25 से कम	49
30 से कम	53
35 से कम	55

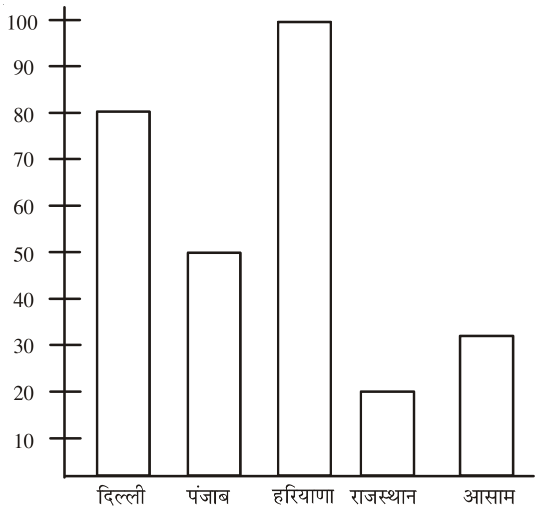
2. निम्न दंड आलेख में किसी एजेंट द्वारा एक दिन में विभिन्न राज्यों की लाटरी की टिकटों की बिक्री को दर्शाया गया है। दंड आलेख को पढ़कर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

   (i) आसाम राज्य की लाटरी की कितनी टिकटें बेची गईं।

(ii) किस राज्य की अधिकतम टिकटें बेची गईं।

(iii) किस राज्य की न्यूनतम टिकटें बेची गईं।

(iv) बताइए कि यह कथन सत्य है अथवा असत्य। अधिकतम टिकटों की संख्या न्यूनतम टिकटों की संख्या का तीन गुणा है।



उत्तर:

देखें आपने कितना सीखा :

1. B	2.C	3. D	4. B
5. C	6. C	7. B	8. A

स्वयं विस्तारण:

1.

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
0 - 5	2
5 - 10	6
10 - 15	13
15 - 20	17
20 - 25	11
25 - 30	4
30 - 35	2

2. (i) 30
(ii) हरियाणा
(iii) राजस्थान
(iv) असत्य

25

केन्द्रीय प्रवृति के मापक

- **केन्द्रीय प्रवृति :** एक ऐसी अकेली राशि जिससे हम दिए हुए आँकड़ों के औसत लक्षणों को जान सकते हैं। केन्द्रीय प्रवृति का उपयोग आंकड़ों का विश्लेषण करने की एक तकनीक है।
- **केन्द्रीय प्रवृति के विभिन्न माप:** अंकगणितीय माध्य/माध्य/औसत, माध्यक, बहुलक

माध्य: यह चर के सभी मानो के योग एवं प्रेक्षणों की संख्या का अनुपात है और इसे $\overline{X}$ से प्रदर्शित किया जाता है।

यथा प्राप्त आँकड़ों का माध्य $\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{i=n} xi}{n}$

$x_1, x_2, x_3 \ldots X_n$ कुल n प्रेक्षण है और प्रतीक $\sum$ कुल योग के लिए प्रयुक्त किया जाता है।

अवर्गीकृत बारंबारता बंटन का माध्य

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} fi \times i}{\sum_{i=1}^{n} fi}$$

जहाँ $x_1, x_2, x_3, \ldots\, x_n$ कुल n प्रेक्षण है और इनकी बारंबारताएं क्रमशः $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n$ हैं।

वर्गीकृत बारंबारता बंटन का माध्यः

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} fi \times i}{\sum_{i=1}^{n} fi}$$

जहाँ $x_1, x_2, x_3, \ldots\, x_n$ विभिन्न वर्गों के वर्ग चिन्ह हैं और इनकी बारंबारताएँ क्रमशः $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n$ हैं।

कल्पित माध्य विधि से माध्य ज्ञात करना

$$\overline{X} = A + \frac{\sum_{i=1}^{n} fidi}{\sum_{i=1}^{n} fi} \times C$$

जहाँ $A =$ कल्पित माध्य है

$$d_i = \frac{x_i - A}{C}$$

$C =$ वर्ग आकार (माप) है

- **माध्यकः** यह पंक्तिबद्ध आँकड़ों का माध्य मान है। यह पंक्तिबद्ध (आरोही क्रम अथवा अवरोही क्रम) आँकड़ों को दो समान भागों में विभाजित करता है।

माध्यक, जबकि प्रेक्षणों की संख्या विषम है

माध्यक = पंक्तिबद्ध आँकड़ों के $\left(\dfrac{n+1}{2}\right)$वें प्रेक्षण का मान जबकि n प्रेक्षणों की संख्या है।

माध्यम, जबकि प्रेक्षणो की संख्या सम है।

माध्यक = पंक्तिबद्ध आँकड़ों में,

$$\frac{\left(\frac{n}{2}\right)\text{वें प्रेक्षण का मान} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वें प्रेक्षण का मान}}{2}$$

- **बहुलकः** दिए गए आँकड़ों में प्रेक्षण का जो मान सबसे अधिक बार आता है, आँकड़ों का बहुलक कहलाता है और इसे Mo से प्रदर्शित किया जाता है।

अथवा

दिए गए आँकड़ों में यह एक ऐसा प्रेक्षण है जिसकी बारंबारता अधिकतम है।

देखें आपने कितना सीखा:

1. एक बंटन, जिसमें चर के मान 1, 2, 3 .....n हैं और प्रत्येक की बारंबारता 1 है, का माध्य है:

   (A) $\frac{n(n+1)}{2}$ (B) $\frac{n}{2}$ (C) $\frac{(n+1)}{2}$ (D) $n(n+1)$

2. निम्नलिखित में से कौन आलेखीय विधि से ज्ञात नहीं किया जा सकता?

   (A) माध्य (B) माध्यक (C) बहुलक (D) इनमें से कोई नहीं

3. सात प्रेक्षणों का माध्य 15 है। यदि प्रत्येक प्रेक्षण में 2 जोड़ दिया जाए, तो प्राप्त प्रेक्षणों का माध्य है:

   (A) 15 (B) 9 (C) 17 (D) 7

4. यदि निम्न बंटन का माध्य 2.6 है, तो y का मान है:

चर (x) :	1	2	3	4	5
बारंबारता:	4	5	y	1	2

   (A) 3 (B) 8 (C) 13 (D) 24

5. प्रथम 10 अभाज्य संख्याओं का माध्यक है:

   (A) 11 (B) 12 (C) 13 (D)14

6. यदि 6, 7, x, 8, y, 14, का माध्य 9 है तो:

   (A) $x + y = 21$ (B) $x + y = 19$ (C) $x - y = 19$ (D) $x - y = 21$

7. आँकड़ों 2, 7, 6, 7, 21, 5, 5, 10, 13, 7 का बहुलक ज्ञात कीजिए।

8. आँकड़ों 4, 8, 9, 11, 13, 17, 18, 19 का माध्यक ज्ञात कीजिए।

9. निम्न आँकड़ों का माध्य ज्ञात कीजिए:

वर्ग	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
बारंबारता	5	18	15	16	6

10. दस राशियों के समूह का अंकगणितीय माध्य 6 है। यदि इनमें से चार राशियों का माध्य 7.5 है, तो शेष राशियों का माध्य ज्ञात कीजिए।

स्वयं विस्तारण:

1. यदि निम्न बारंबारता बंटन का माध्य 62.8 है और सभी बारंबारताओं का योग 50 है, तो लुप्त बारंबारताएं F_1 एवं F_2 ज्ञात कीजिए:

वर्ग	0 - 20	20 - 40	40 - 60	60 - 80	80 - 100	100 - 120
बारंबारता	5	F_1	10	F_2	7	8

2. n प्रेक्षणों का माध्य $\overline{X}$ है। यदि प्रथम प्रेक्षण में 1 जोड़ दिया जाए, दूसरे प्रेक्षण में 2 जोड़ दिया जाए और इसी प्रकार आगे भी, तो नया माध्य ज्ञात कीजिए।

उत्तरः

देखें आपने कितना सीखा :

1. C 2. A 3. C 4. B 5. B 6. B 7. 7 8. 12 9. 27 10. 15

स्वयं विस्तारणः

1. $F_1 = 8, F_2 = 12$ 2. $\overline{X} + \frac{n+1}{2}$

26

प्रायिकता

- **प्रायिकता:** प्रायिकता गणित की वह शाखा है जिसमें हम अनिश्चितता का मापन ऐसी विभिन्न परिघटनाओं के लिए करते हैं जिनका कोई एक परिणाम नहीं होता अपितु अनेक परिणाम होते हैं।
- **प्रायिकता की परिभाषा:** अनिश्चितता के संख्यात्मक मापन को कहते है।
- **यादृच्छिक प्रयोग:** ऐसा प्रयोग जिसमें सभी संभावित परिणाम ज्ञात होते हैं परन्तु हम यह नहीं जानते कि कौन सा परिणाम प्राप्त होगा।
- **समप्रायिक परिणाम:** ऐसे परिणाम जिनके घटित होने की संभावनाएं समान हैं।
- **प्रतिदर्श समष्टि:** सभी संभावित परिणामों का संग्रह।
- **कुछ विशिष्ट प्रतिदर्श समष्टियां:**

एक सिक्के को एक बार उछालना **$S = \{H, T\}$, $n(s) = 2 = 2^1$**

एक सिक्के को दो बार उछालना अथवा दो सिक्कों को एकसाथ उछालना	$S = \{HH, HT, TH, TT\}$, $n(s) = 4 = 2^2$.
एक सिक्के को तीन बार उछालना अथवा तीन सिक्कों को एक बार उछालना	$S = \{HHH, HTH, HHT, THH, TTT, TTH, THT, HTT\}$, $n(s) = 8 = 2^3$.
एक पासे को एक बार फेंकना	$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $n(s) = 6 = 6^1$.

एक पासे को दो बार उछालना अथवा दो पासों को एक बार उछालना	$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (6,6)\}$, $n(s) = 36 = 6^2$.

- **घटना:** प्रतिदर्श समष्टि के कुछ परिणाम (जिसमें कोई भी परिणाम नहीं भी सम्मिलित है) अथवा सभी परिणामों को संग्रह।
- **एक घटना की प्रायिकता:**

$$P(E) = \frac{\text{घटना के अनुकूल (पक्ष) परिणामों की संख्या}}{\text{प्रतिदर्श समष्टि के सभी संभावित परिणामों की संख्या}}$$

$$= \frac{n(E)}{n(S)}$$

- **निश्चित घटना:** यदि घटना के अनुकूल परिणामों की संख्या, प्रतिदर्श समष्टि के कुल परिणामों की संख्या के समान है अथवा ऐसी घटना जिसकी प्रायिकता 1 है।
- **असंभव घटना:** ऐसी घटना जिसके अनुकूल कोई परिणाम न हो अथवा जिसकी प्रायिकता 0 हो।
- किसी घटना की प्रायिकता हमेशा 0 और 1 के मध्य होती है (0 एवं 1 भी सम्मिलित है) अथार्त $0 \leq P(E) \leq 1$
- **पूरक घटना:** ऐसी घटना जो केवल तब घटती है जब घटना E नहीं घटती है और इसे $\overline{E}$ से प्रदर्शित करते हैं।

  एक पूरक घटना की प्रायिकता

  $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$ अथवा $P(E) + P(\overline{E}) = 1$

देखें आपने कितना सीखा :

1. एक पासा एक बार फेंका जाता है। एक अभाज्य संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता है:

   (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{6}$

2. दो सिक्के एक बार उछाले जाते हैं। कम से कम एक चित प्राप्त होने की प्रायिकता है:

   (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) 1

3. 52 पत्तों की गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है। इस पत्ते की, चित्र वाला पत्ता, होने की प्रायिकता है:

   (A) $\frac{4}{13}$ (B) $\frac{3}{13}$ (C) $\frac{2}{13}$ (D) $\frac{1}{13}$

4. पासों का एक युग्म एक बार फेंका जाता है। दोनों पासों पर प्राप्त संख्याओं का योग 11 होने की प्रायिकता है:

   (A) $\frac{1}{36}$ (B) $\frac{1}{12}$ (C) $\frac{1}{18}$ (D) $\frac{1}{9}$

5. निम्न में से कौन एक घटना की प्रायिकता नहीं हो सकती?

   (A) $\frac{2}{3}$ (B) 15% (C) 0.7 (D) 1.5

6. एक सिक्के को दो बार उछाला जाता है। एक चित प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
7. एक पासा एक बार फेंका जाता है। एक सम संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
8. अच्छी तरह से फेंटी गई 52 पत्तों की गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह पत्ता इक्का नहीं है।

स्वयं विस्तारण:

1. एक बक्से के अन्दर 3, 4, 5....., 19 द्वारा अंकित कार्ड रखे गए हैं और इन कार्डों को अच्छी तरह हिलाया गया है। यदि बक्से में से एक कार्ड यादृच्छया निकाली जाती है,

   (i) एक अभाज्य संख्या (ii) एक पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए:

2. एक बैग में 12 गेंदें हैं जिनमें x गेंदें सफेद रंग की हैं। यदि बैग में सफेद रंग की 6 गेंदें और रख दी जाएं तो सफेद रंग की गेंद प्राप्त होने की प्रायिकता दोगुनी हो जाती है। x का मान ज्ञात कीजिए।
3. एक सामान्य वर्ष में 53 रविवार होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
4. यदि संख्याओं 1, 2, 3 में से एक संख्या चुनी जाती है और संख्याओं 1, 4, 9 में से एक संख्या का चयन किया जाता है, तो $P(xy < 9)$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर:

देखें आपने कितना सीखा:

1. A 2. C 3. B 4. C

5. D 6. $\frac{1}{2}$ 7. $\frac{1}{2}$ 8. $\frac{12}{13}$

स्वयं विस्तारण:

1. (i) $\frac{7}{17}$ (ii) $\frac{3}{17}$

2. 3 3. $\frac{1}{7}$ 4. $\frac{5}{9}$

प्रयोगात्मक क्रियाकलाप

आप एनआईओएस के, माध्यमिक पाठ्यक्रम की, गणित की, पुस्तक–I एवं पुस्तक–II में अनेक अवधारणाओं को सीख चुके हैं। गणित की कुछ अवधारणाएं अमूर्त प्रकृति की हैं और इन अवधारणाओं को, गणित प्रयोगशाला में किए जाने वाले क्रियाकलापों की सहायता से आसानी से सीखा जा सकता है। गणित के क्रियाकलाप करने से ना केवल समस्या समाधान कौशल विकसित होता है अपितु गणितीय अवधारणाओं की मूर्त समझ विकसित होती है। गणित तर्क एव सृजनात्मकता दोनों पर निर्भर है और इसे विभिन्न प्रायोगिक उद्देश्यों और व्यक्तिगत रूचियों, दोनों के लिए किया जाता है। गणित की ऐसी अवधारणाओं को शिक्षार्थी अच्छी तरह समझ लेते हैं जिनकी उपपत्ति/सत्यापन क्रियाकलापों द्वारा किया जाता है।

समस्या समाधान कौशल विकसित करने के लिए और गणितीय अवधारणाओं की मूर्त समझ विकसित करने के लिए एनआईओएस ने गणित की दो पुस्तकों के अतिरिक्त एक प्रायोगिक पुस्तिका विकसित की है।

इस प्रायोगिक पुस्तिका में विभिन्न अवधारणाओं पर आधारित 30 क्रियाकलाप हैं। इन क्रियाकलापों के लिए विभिन्न सामग्री एवं सिद्धांतों की आवश्यकता है। इन क्रियाकलापों को करने के लिए प्रायोगिक पुस्तिका में विस्तृत विवरण दिया हुआ है।

प्रायोगिक परीक्षा के लिए 15 अंक निर्धारित किए गए हैं। निम्नलिखित दिशा–निर्देशों के अनुसार, आपको प्रायोगिक परीक्षा के लिए तैयारी करनी है।

समय : 2½ घंटे *अधिकतम अंक : 15*

1. **अंकों का वितरण:**

क्र.सं.	**क्रियाकलाप**	**अंक वितरण**
(i)	शिक्षार्थी द्वारा किए गए क्रियाकलाप का मूल्यांकन (दिए हुए तीन क्रियाकलापों में से दो क्रियाकलाप करने हैं)	2 X 4 अंक = 08 अंक
(ii)	क्रियाकलापों की रिकार्ड नोट बुक (प्रत्येक खंड में से कम से कम पांच क्रियाकलाप	= 03 अंक
(iii)	क्रियाकलापों पर आधारित मौखिक प्रश्नोत्तरी	= 04 अंक
		कुल = 15 अंक

2. **क्रियाकलापों की सूचीः**

अनुच्छेद A, B तथा C में दिए गए क्रियाकलापों में से शिक्षार्थी को प्रत्येक खंड में से एक क्रियाकलाप दिया जा सकता है। दिए हुए तीन क्रियाकलापों में से शिक्षार्थी कोई दो क्रियाकलाप चुन सकता है और प्रायोगिक परीक्षा केन्द्र पर क्रियाकलाप करने होंगे।

2.1 अनुच्छेद -A (बीजगणित)

1. सर्वसमिका $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ का सत्यापन
2. सर्वसमिका $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ का सत्यापन
3. सर्वसमिका $(a^2-b^{2)} = (a+b)\ (a-b)$ का सत्यापन
4. सर्वसमिका $(a+b)^3 = a^3+ 3ab^2+3ab^2+b^3$ का सत्यापन
5. सर्वसमिका $a^3-b^3 = (a-b)\ (a^2+ab+b^2)$ का सत्यापन
6. भाग विधि से दो प्राकृत संख्याओं का म.सं. ज्ञात करना।
7. समतुल्य भिन्नों की अवधारणा का निदर्शन करना।
8. यह सत्यापित करना कि दो चरों वाले रैखिक समीकरण के अनन्त हल होते हैं।
9. दो चरों वाले रैखिक समीकरण निकाय के लिए संगति प्रतिबंध ज्ञात करना।
10. एक द्विघात समीकरण के मूल एवं गुणांकों में सम्बन्ध ज्ञात करना।
11. आलेखीय विधि से सत्यापित करना कि एक द्विघात बहुपद के अधिकतम दो शून्यक होते हैं।
12. सत्यापित करना कि दिया हुआ अनुक्रम, समांतर श्रेढ़ी है।
13. प्रथम n विषम प्राकृत संख्याओं का योग ज्ञात करना।
14. प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योग ज्ञात करना।
15. एक समांतर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों का योग ज्ञात करना।

2.2 अनुच्छेद -B (ज्यामिति)

1. सत्यापित करना कि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180^0 होता है।
2. सत्यापित करना कि त्रिभुज की समान भुजाओं के सम्मुख कोण भी समान होते हैं।

3. मध्य बिन्दु प्रमेय को सत्यापित करना।
4. आधारभूत समानुपाती प्रमेय को सत्यापित करना।
5. पायथागोरस प्रमेय को सत्यापित करना।
6. दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों के अनुपात और उनकी भुजाओं के अनुपात के सम्बन्ध को सत्यापित करना।
7. वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करना।
8. निदर्शन करना कि चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण संपूरक होते हैं।
9. सत्यापित करना, कि सर्वांगसम वृत्तों की समान जीवाएं अपने–अपने वृत्त के केन्द्र प समान कोण बनाती है।

2.3 अनुच्छेद - C (क्षेत्रमिति)

1. एक समलंब का क्षेत्रफल ज्ञात करना।
2. एक घन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करना।
3. शंकु के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल का सूत्र ज्ञात करना।
4. समान त्रिज्या एवं समान ऊँचाई के, लंब वृत्तीय बेलन, लंब वृत्तीय शंकु और अर्धगोले के आयतनों में सम्बन्ध ज्ञात करना।
5. एक समांतर चतुर्भुज के समान क्षेत्रफल की त्रिभुज बनाना।
6. विभिन्न प्रकार की त्रिभुजों के अन्तः केन्द्र ज्ञात करना।

3. आवश्यक सामग्रीः

- विभिन्न रंगों की कागज की शीट
- लकड़ी के बोर्ड
- धागे
- कील, पिन एवं किलिप
- थर्मोकाल सीट
- कार्डबोर्ड की वर्गाकार एवं त्रिभुजाकार ग्रिड

- लकड़ी एवं कागज की पट्टियां
- पेपर कटर
- कैंची
- गोंद / फेबिकोल
- स्केच पेन
- ज्यामिति बाक्स (बड़े एवं छोटे दोनों)
- ग्राफ पेपर (इंचों / सेमी दोनों)
- विभिन्न रंगों की पैन्सिल
- स्केच पेन / रंगीन बॉल पेन एवं मार्कर
- क्लर बाक्स
- गोलाकार हैंडल
- टिरेसिंग पेपर
- एक्रेलिक सीट
- रबड़ एवं शार्पनर
- रस्सी
- ऐसा स्टैंड जिस पर पुली से छड़ी को रोका जा सके
- स्क्रू एवं स्क्रू ड्राईवर
- प्लास्टिक सीट, प्लास्टिक बाल, मिट्टी
- सेलो टेप

नोटः प्रायोगिक परीक्षा के लिए क्रियाकलापों की आवश्यकतानुसार केन्द्र अधीक्षक द्वारा सामग्री उपलब्ध कराई जाएगी।

प्रतिदर्श प्रश्न पत्र

विषय : गणित (211)

माध्यमिक पाठ्यक्रम

अधिकतम अंक : 85 **समय : 2 ½ घंटे**

अनुदेश:

1. प्रश्न संख्या 1 से 15 तक बहुविकल्पी प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न एक अंक का है।
2. प्रश्न संख्या 16 से 25 तक प्रत्येक प्रश्न 2 अंक का है।
3. प्रश्न संख्या 26 से 33 तक प्रत्येक प्रश्न 4 अंक का है।
4. प्रश्न संख्या 34 से 36 तक प्रत्येक प्रश्न 6 अंक का है।
5. सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

---

1. शब्द 'PERCENTAGE', में कुल अक्षरों का कितना प्रतिशत, E है? (1)

(A) 10% (B) 20% (C) 30% (D) 40%

2. एक विद्यालय में 500 विद्यार्थी हैं। यदि लड़कों की संख्या 300 है, तो लड़कियों का प्रतिशत है: (1)

(A) 20% (B) 40% (C) 60% (D) $66\frac{2}{3}\%$

3. दो आकृतियां सर्वांगसम कहलाती हैं यदि उनके: (1)

A. आकार समान हैं और रूप विभिन्न हैं

B. आकार और रूप दोनों एक समान हैं

C. आकार विभिन्न हैं और रूप एक जैसे हैं

D. आकार और रूप दोनों विभिन्न हैं।

4. $(\sin A - \cos A)^2 + 2\sin A\cos A$ बराबर है : (1)

(A) 1 (B) $4\sin A\cos A$ (C) $1+4\sin A\cos A$ (D) $1-4\sin A\cos A$

5. यदि $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, तो θ का मान है: (1)

(A) 30º (B) 90º (C) 60º (D) 0º

6. $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)$ बराबर है: (1)

(A) 4 (B) -4 (C) 2 (D) -2

7. समीकरण $x^2-18x+81=0$ के मूल हैं: (1)

(A) 9, 9 (B) 9, 0 (C) 9, -9 (D) -9, -9

8. यदि $\sin\alpha=\frac{11}{15}$, तो $\cos\alpha$ का मान है: (1)

(A) $\frac{15\sqrt{26}}{2}$ (B) $\frac{15}{11}$ (C) $\frac{2\sqrt{26}}{15}$ (D) $\frac{15}{2\sqrt{26}}$

9. यदि $\sqrt{3}\tan\theta=3\sin\theta$, तो $\cos\theta$ का मान है: (1)

(A) $\frac{1}{3}$ (B) 3 (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) $\sqrt{3}$

10. प्रथम पाँच प्राकृत संख्याओं का माध्य है: (1)

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 2

11. प्रेक्षणों के समूह का बहुलक (1)

(A) वह मान है जो सबसे अधिक बार आता है

(B) मध्य मान है

(C) प्रेक्षणों का योग है

(D) प्रेक्षणों को दो बराबर भागों में बांटता है।

12. एक समचतुर्भुज के दो आसन्न कोण 4 : 5 के अनुपात में हैं। आसन्न कोणों के माप हैं: (1)

(A) 60^0, 90^0

(B) 80^0, 100^0

(C) 70^0, 110^0

(D) 60^0, 60^0

13. निम्नलिखित में से कौन समकोण त्रिभुज को दर्शाता है? (1)

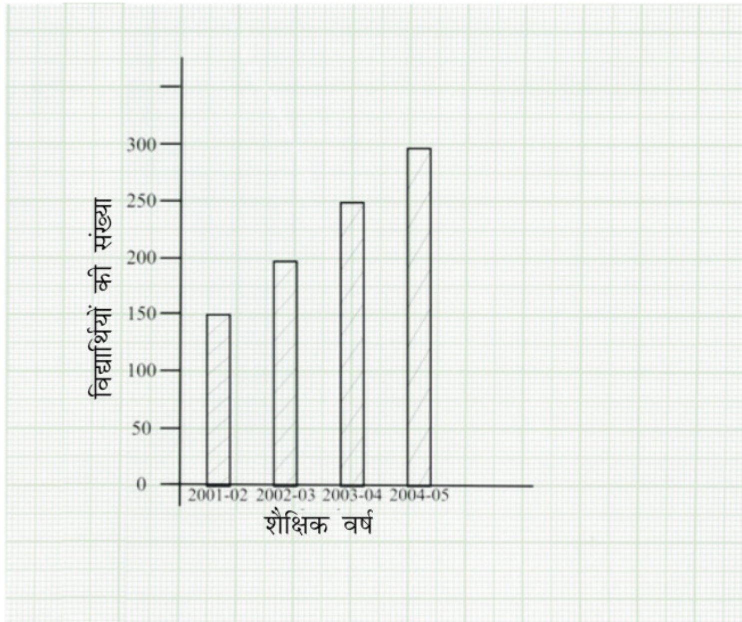
(A) AB = 5 सेमी, BC= 12 सेमी, CA = 13 सेमी

(B) AB = 8 सेमी, BC = 6 सेमी, CA = 10 सेमी

(C) AB = 24 सेमी, BC = 25 सेमी, CA = 7 सेमी

(D) उपरोक्त सभी

14. दिए हुए दण्ड चार्ट में, 2003−2004 में विद्यार्थियों की संख्या है: (1)



(A) 150 (B) 200 (C) 250 (D) 300

15. एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन का बारंबारता बहुभुज बनाने के लिए, हम वे बिन्दु आलेखित करते हैं, जिनकी कोटियाँ बारंबारताएं होती हैं और भुजाा क्रमश: है: (1)

(A) निम्न सीमाएँ (B) उपरि सीमाएँ

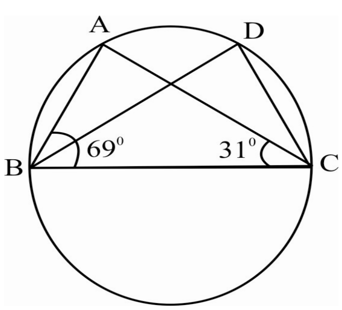
(C) वर्ग चिन्ह (D) वर्ग का कोई भी मान

16. $\frac{5}{6}$ और $\frac{7}{8}$ के मध्य दो परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए। (2)

17. गुणनखण्ड कीजिए: $3x^2 - 2x - 5$ (2)

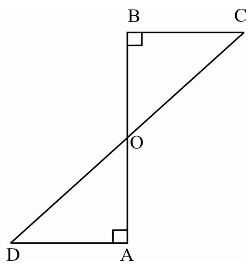
18. यदि किसी बाह्य बिन्दु P से PA तथा PB वृत्त की दो स्पर्श रेखाएं इस प्रकार हैं कि PA = 10 सेमी और $\angle APB = 60^0$, तो जीवा AB की लम्बाई ज्ञात कीजिए। (2)

19. आकृति में, $\angle ABC = 69^0$ $\angle ACB = 31^0$, $\angle BDC$ ज्ञात कीजिए



20. यदि $\tan\theta = \frac{4}{3}$, तो $\frac{3\sin\theta - 2\cos\theta}{3\sin\theta + 2\cos\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए। (2)

21. दी हुई आकृति में, AD तथा BC किसी रेखाखंड AB पर लम्ब है। दर्शाइए कि CD, AB को समद्विभाजित करता है। (2)



22. एक व्यक्ति 10 मीटर पूर्व की ओर और फिर 24 मीटर उत्तर की ओर चलता है। ज्ञात कीजिए कि वह व्यक्ति शुरू वाले बिन्दु से कितनी दूरी पर है? (2)

23. एक लंबवृत्तीय शंकु के आधार की त्रिज्या 88 सेमी है और इसकी ऊँचाई 10 सेमी है। शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए। (2)

24. 23 वस्तुओं का क्रय मूल्य, 20 वस्तुओं के विक्रय मूल्य के समान हैं। लाभ अथवा हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए। (2)

25. एक बेलन का आयतन 252 घन सेमी है और इसकी ऊँचाई 7 सेमी है। बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (2)

26. यदि $x = 4 + \sqrt{15}$, तो $x + \frac{1}{x}$ तथा $x^2 + \frac{1}{x^2}$ का मान ज्ञात कीजिए। (4)

27. एक कम्प्यूटर 34000 रुपये नकद भुगतान अथवा 20000 रुपये तुरन्त भुगतान और इसके साथ 3000 रुपये की पाँच समान मासिक किस्तों में उपलब्ध है। इस किस्त योजना के अंतर्गत लिए जाने वाले ब्याज की वार्षिक दर ज्ञात कीजिए। (4)

28. 3 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त बनाइए। वृत्त के केन्द्र से 5.5 सेमी की दूरी पर एक बिन्दु P लीजिए। बिन्दु P से वृत्त की दो स्पर्श रेखाएं खींचिए। (4)

29. एक त्रिभुज ABC में, D, E तथा F भुजाओं BC, CA तथा AB के मध्य बिन्दु है। दर्शाइए कि AD, EF को समद्विभाजित करता है। (4)

30. यदि $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$, तो दर्शाइए कि $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$. (4)

31. यदि निम्नलिखित बंटन का माध्य 6 है, तो P का मान ज्ञात कीजिए। (4)

x_i:	2	4	6	10	p+5
f_i:	3	2	3	1	2

32. दो पासे एक साथ फेंके जाते हैं। निम्न को प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। (4)

i. दोनों पासों पर एक संख्या

ii. दोनों पासों की संख्याओं का योग 10

33. सरल कीजिए और परिणाम को न्यूनतम रूप में व्यक्त कीजिए: (4)

$$\frac{(x^2-7x+12)\times(x^2-2x-24)}{(x^2-2x-3)\times(x^2-16)}$$

34. दो अंकों की एक संख्या और अंकों के स्थान बदलने पर प्राप्त संख्या का योग 66 है। यदि अंकों का अन्तर 2 है, तो संख्या ज्ञात कीजिए। ऐसी कितनी संख्याएं होंगी? (6)

35. एक लंबवृत्तीय शंकु की त्रिज्या और ऊँचाई क्रमशः 3 सेमी एवं 4 सेमी हैं। इस शंकु के लिए ज्ञात कीजिए: (6)

(i) वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

(ii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

(iii) आयतन

36. सिद्ध कीजिए कि एक ही आधार और दो समान्तर रेखाओं के बीच बनी त्रिभुजों का क्षेत्रफल समान होता है। (6)

प्रतिदर्श प्रश्न पत्र के उत्तर

1. C
2. B
3. B
4. A
5. C
6. B
7. A
8. C
9. C
10. A
11. A
12. B
13. D
14. C
15. C
16. दो परिमेय संख्याएं $\frac{41}{48}$ तथा $\frac{81}{96}$ हैं
17. $(3x-5)\ (x+1)$
18. AB = 10 सेमी
19. $\angle BDC = 80^0$
20. 1/3
22. 26 मी
23. 6160 घन सेमी
24. 15%
25. 264 वर्ग सेमी
26. 8 तथा 62
27. 30%
31. P= 7
32. 1/6 तथा 1/12
33. $\frac{x-6}{x+1}$
34. 42 अथवा 24 और ऐसी दो संख्याएं हैं।
35. (i) $\frac{330}{7} = 47.14$ वर्ग सेमी ; (ii) $\frac{22\times3\times8}{7} = \frac{528}{7} = 75.42$ वर्ग सेमी ;

    (iii) $\frac{264}{7} = 37.71$ घन सेमी